Introduction à l'évaluation d'actifs financiers par absence d'opportunité d'arbitrage

Bruno Bouchard[1]
Université Paris-Dauphine, Ceremade,
et Ensae, Crest.

Cette version : Novembre 2010[2]

[1]bouchard@ceremade.dauphine.fr, http://www.ceremade.dauphine.fr/~bouchard/
[2]Première version : Juillet 2006.

Introduction et notations

Ces notes de cours ont pour objectif de présenter la théorie de l'évaluation par absence d'opportunité d'arbitrage. Nous avons essayé de travailler dans un cadre général, à la fois en temps discret et en temps continu, tout en restant à la porté d'un étudiant de M1 ou M2 ayant au préalable suivi un cours de calcul stochastique et ayant des connaissances solides en probabilités.

La première partie porte sur les marchés en temps discret. Bien que celle-ci soit d'un intérêt pratique limité, sauf en ce qui concerne le modèle de Cox-Ross-Rubinstein qui sert couramment d'approximation au modèle en temps continu de Black et Scholes, elle permet d'introduire les notions importantes dans un cadre technique abordable par un étudiant de M1. Dans cette partie, on se place sur un espace de probabilité général. La seconde partie porte sur les marchés financiers en temps continu. On se restreint à un espace de type Brownien dans lequel les prix sont modélisés par des processus d'Itô.

La lecture du livre [28], qui propose un traitement du même sujet dans un cadre plus restrictif, peut venir en complément de ces notes, notamment comme introduction au calcul stochastique.

N'étant évidemment pas possible de traiter tous les modèles couramment utilisés en finance de marché, nous renvoyons le lecteur intéressé à [25] et [31] pour l'étude détaillée de nombreuses applications concrètes. Nous renvoyons également à l'excellent ouvrage [33] qui fait très bien le lien entre mathématiques et techniques de couverture (mais est moins complet).

Notations générales : Afin d'alléger au maximum la rédaction, nous listons ici un certain nombres de notations qui seront utilisées tout au long de ce document.
Tout élément $x = (x^i)_{i \le d}$ de $\mathbb{R}^d$ sera identifié à un vecteur colonne de norme

euclydienne $\|x\|$. On note $\mathbb{R}^d_+ := [0,\infty)^d$, $\mathbb{M}^d$ l'ensemble des matrices $d \times d$ et $\mathbb{M}^d_+$ lorsque les composantes sont positives. La matrice $\mathrm{diag}\,[x]$ est l'élément de $\mathbb{M}^d$ dont la i-ème composante diagonale est x^i. La trace de $M \in \mathbb{M}^d$ est noté $\mathrm{Trace}[M]$, $\|M\|$ désigne sa norme euclydienne comme élément de $\mathbb{R}^{d^2}$ et M' sa transposée.

On travaillera toujours sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \le \mathbb{T}}$ satisfaisant les conditions habituelles avec $\mathcal{F}_0$ triviale. Ici $\mathbb{T}$ désignera l'ensemble $\{0, \ldots, T\}$ ou $[0,T]$, $T > 0$, selon que l'on travaille en temps discret ou en temps continu. On désignera toujours par W un mouvement brownien d-dimensionnel. Pour $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$, un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{M}^d$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, on note $L^p(E; \Omega, \mathcal{G}, \tilde{\mathbb{P}})$ l'espace des variables aléatoires $\mathcal{G}$-mesurables, admettant un moment d'ordre $p \ge 0$ pour $\tilde{\mathbb{P}}$, à valeurs dans E. La norme associée est notée $\|\cdot\|_{L^p(\tilde{\mathbb{P}})}$. Le cas $p = \infty$ correspond aux variables essentiellement bornées, le cas $p = 0$ correspond aux variables aléatoires $\mathcal{G}$-mesurables. On omettra l'un des arguments s'il est clairement identifié par le contexte. On utilisera aussi la notation L^0_b pour désigner l'ensemble des variables aléatoires de L^0 dont la partie négative appartient L^∞.

Pour une fonction régulière $\varphi : (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \varphi(t,x)$, on note $\nabla_x \varphi$ et $\nabla^2_x \varphi$ sa jacobienne et sa hessienne par rapport à x.

Table des matières

Index

Première partie

Marchés financiers en temps discret

Chapitre 1

Modélisation mathématique

1 Les actifs financiers

Les actifs financiers peuvent être classés en deux grandes catégories :

- L'actif sans risque : il rapporte un rendement constant connu à l'avance, i.e. le rendement du titre entre les dates t et $t+1$ est connu à la date t. Il s'agit en général d'une obligation émise par l'état, i.e. sans risque de défaut.
- Les actifs risqués : ils rapportent un rendement non connu à l'avance. Il s'agit par exemple des actions, des obligations émises par des entreprises pouvant faire défaut,...

On appelle *marché parfait* un marché sur lequel on peut acheter et vendre les différents actifs sans restriction de quantité et sans payer de coût de transaction ou taxes.

1.1 Cadre probabiliste

D'un point de vue mathématique, on se place sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où $\mathbb{T} := \{0, \ldots, T\}$, $T > 0$. On suppose que $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Par convention, on pose $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$. La filtration $\mathbb{F}$ correspond à l'information de l'agent financier.

1.2 Actif sans risque

On suppose qu'il existe un placement financier (compte épargne par exemple) qui rapport un rendement $r_t \geq 0$ sur la période $[t, t+1]$. Si on place un euro en

t, on obtient donc $1 + r_t$ euros en $t + 1$. On note

$$\beta_t := \left(\prod_{s=0}^{t-1} (1 + r_s) \right)^{-1} \mathbf{1}_{t \geq 1} + \mathbf{1}_{t=0}$$

la valeur actuelle en 0 de 1 euro versé en t. On suppose que $r = (r_t)_{t<T}$ est *adapté*, i.e. que r_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable quel que soit $t < T$. On parle de *taux sans risque* car r_t est connu à la date t, i.e. on connaît à l'avance le rendement du placement.

On peut remarquer que $\beta = (\beta_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est alors *prévisible*, i.e. que β_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable pour tout $t \in \mathbb{T}$. Il s'agit du *processus d'actualisation*.

1.3 Actifs risqués

Les *actifs risqués* sont modélisés par un processus d-dimensionnel $S = (S_t^1, \ldots, S_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$. Il s'agit typiquement d'actions. On suppose que S est $\mathbb{F}$-adapté, i.e. que S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable quel que soit $t \in \mathbb{T}$. Autrement dit, on connaît la valeur de S à la date t.

2 Stratégies financières et portefeuille

Une *stratégie financière* est un processus d'investissement dans les actifs sans risque et risqués. On la modélise comme un processus *adapté* (α, ϕ) à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. La quantité α_t représente la quantité d'euros placés au taux sans risque sur la période $[t, t+1]$. La quantité ϕ_t^i représente la quantité d'actif risqué S^i qui sera détenue sur cette même période.
Puisque $(\alpha_{t-1}, \phi_{t-1})$ correspond aux placements entre $t - 1$ et t, la valeur du portefeuille à la date t est :

$$V_t = \alpha_{t-1}(1 + r_{t-1}) + \langle \phi_{t-1}, S_t \rangle \ .$$

On dit qu'une stratégie est *autofinancée* si ce montant est suffisant pour effectuer le placement (α_t, ϕ_t) entre t et $t + 1$, i.e.

$$V_t = \alpha_{t-1}(1 + r_{t-1}) + \langle \phi_{t-1}, S_t \rangle = \alpha_t + \langle \phi_t, S_t \rangle \ . \tag{1}$$

On dira donc qu'une stratégie de portefeuille (α, ϕ) est *autofinancée* si

$$\alpha_{t-1}(1 + r_{t-1}) + \langle \phi_{t-1}, S_t \rangle = \alpha_t + \langle \phi_t, S_t \rangle \text{ pour tout } t \in \mathbb{T} \ . \tag{2}$$

Ceci implique que le portefeuille *actualisé* vérifie

$$\tilde{V}_t := \beta_t V_t = \beta_t \alpha_t + \langle \phi_t, \tilde{S}_t \rangle$$

avec

$$\tilde{S}_t := \beta_t S_t \ .$$

Autrement dit, on doit avoir

$$\alpha_t = B_t \left(\tilde{V}_t - \langle \phi_t, \tilde{S}_t \rangle \right) \ \text{ avec } \ B_t := \beta_t^{-1}$$

ce qui implique, en utilisant (1),

$$\tilde{V}_{t+1} = \beta_t \alpha_t + \langle \phi_t, \tilde{S}_{t+1} \rangle = \tilde{V}_t + \langle \phi_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \tag{3}$$

soit

$$\tilde{V}_t = V_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle \tag{4}$$

ou encore

$$V_t = B_t \left(V_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle \right) \ . \tag{5}$$

Sous la *condition d'autofinancement*, on voit donc que la richesse V ne dépend que de la stratégie d'investissement en actifs risqués ϕ qui détermine complètement le montant α placé au taux sans risque. L'ensemble des stratégies $\mathcal{A}$ vérifiant la condition d'autofinancement peut donc être décrit comme l'ensemble des processus adaptés ϕ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Par la suite, on notera $V^{x,\phi}$ le portefeuille induit par la stratégie ϕ de valeur initiale x, en 0, et on utilisera la notation $\tilde{V}^{x,\phi} := \beta V^{x,\phi}$.

Remarque 1 On peut remarquer à partir de (4) que

$$\tilde{V}^{y,\phi} = \tilde{V}^{x,\phi} + y - x \ ,$$

ce qui implique que

$$V^{y,\phi} = V^{x,\phi} + \beta^{-1} (y - x) \ .$$

Chapitre 2

Théorèmes fondamentaux

1 Absence d'opportunité d'arbitrage et mesure risque neutre

On appelle *arbitrage* une stratégie autofinancée ϕ telle que

$$V_T^{0,\phi} \geq 0 \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left[V_T^{0,\phi} > 0\right] > 0 \ .$$

Ceci correspond à une situation où l'on est en mesure de réaliser un profit sans prendre aucun risque. Bien évidemment, on peut ré-écrire cette condition de manière équivalente en remplaçant V par $\tilde{V}$.

$$\tilde{V}_T^{0,\phi} \geq 0 \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left[\tilde{V}_T^{0,\phi} > 0\right] > 0 \ .$$

On dira donc qu'il y a *absence d'opportunité d'arbitrage* si la condition

$$\text{(AOA)} \ : \ \tilde{V}_T^{0,\phi} \geq 0 \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \ \Rightarrow \ \tilde{V}_T^{0,\phi} = 0 \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{A}$$

est vérifiée.

L'objet des sous-sections suivantes est de prouver le *premier théorème fondamentale* qui est à la base de toute la théorie mathématique de l'évaluation des produits financiers :

$$\text{(AOA) est vérifiée} \iff \mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset,$$

où $\mathcal{M}(\tilde{S})$ désigne l'ensemble des mesures $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, i.e.

1. $\tilde{S}_{t+1} \in L^1(\mathbb{Q})$ pour tout $t < T$
2. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] = \tilde{S}_t$ $\mathbb{Q}$-p.s. pour tout $t < T$.

On parle de l'ensemble des *mesures martingales équivalentes* ou *mesures risque neutre*. On va en fait montrer que l'hypothèse (AOA) permet même d'exhiber une mesure de $\mathcal{M}(\tilde{S})$ de densité dans L^∞.

On notera par la suite $\mathcal{M}_b(\tilde{S})$ le sous-ensemble formé par les éléments de $\mathcal{M}(\tilde{S})$ de densité dans L^∞.

Afin de simplifier les preuves, on va se ramener à un modèle à une période et considérer l'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage locale*

$$(\mathrm{AOA}_t) \; : \; \langle \xi, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \geq 0 \, \mathbb{P}\text{-p.s.} \; \Rightarrow \; \langle \xi, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle = 0 \, \mathbb{P}\text{-p.s.} \; \forall \, \xi \in L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_t) \; .$$

L'hypothèse (AOA_t) signifie que l'on ne peut gagner de l'argent sans prendre de risque en faisant une opération consistant à simplement acheter des titres en t puis à les revendre en $t+1$.

Théorème 1 *Il y a équivalence entre*
(i) (AOA) est vérifiée.
(ii) (AOA_t) est vérifiée pour tout $t = 0, \ldots, T-1$.
(ii) $\mathcal{M}_b(\tilde{S}) \neq \emptyset$.

Par la suite, on supposera toujours que

$$\tilde{S}_t \in L^1(\mathbb{P}) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T} \; . \tag{1}$$

Cette hypothèse n'est pas restrictive. En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer $\mathbb{P}$ par une nouvelle mesure équivalente de densité

$$e^{-\sum_{t \in \mathbb{T}} \|\tilde{S}_t\|} / \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{t \in \mathbb{T}} \|\tilde{S}_t\|}\right] \; .$$

Comme cette mesure est équivalente, elle définit les mêmes ensembles de mesure nulle que $\mathbb{P}$ et la condition (AOA) reste inchangée si l'on passe à cette nouvelle mesure.

Les sous-sections suivantes sont consacrées à la preuve du Théorème 1.

1.1 (AOA) implique (AOA_t)

Cette implication est claire. En effet, s'il existe $t \leq T-1$ et $\xi \in L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_t)$ tels que $\langle \xi, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \geq 0$ $\mathbb{P}$ − p.s. et $\langle \xi, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \neq 0$ alors on contredit (AOA) en considérant la stratégie $\phi \in \mathcal{A}$ définie par $\phi_s = \xi_t \mathbf{1}_{s=t}$.

1.2 Propriété de fermeture sous (AOA$_t$)

Dans cette sous-section, on montre que

$$\tilde{\Gamma}_t := \left\{ \langle \xi, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle - r \ : \ \xi \in L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_t), \ r \in L^0(\mathbb{R}_+) \right\}$$

est fermé en probabilité sous l'hypothèse (AOA$_t$) qui peut s'écrire de manière équivalente

$$\tilde{\Gamma}_t \cap L^0(\mathbb{R}_+) = \{0\} \ . \tag{2}$$

Pour ce faire, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 2 *Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_t)$. On suppose que*

$$\eta^0 := \liminf_{n\to\infty} \|\xi_n\| < \infty \ \ \mathbb{P} - p.s.$$

Alors il existe une suite $(k_n)_{n\geq 1} \in L^0(\mathbb{N}, \mathcal{F}_t)$ telle que $k_n \to \infty$ $\mathbb{P} - p.s.$ et $\xi_{k_n} \to \xi_*$ $\mathbb{P} - p.s.$ pour une certaine variable aléatoire $\xi_* \in L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_t)$.

Preuve. On définit la suite $(k^0_n)_{n\geq 0}$ par $k^0_0 = 0$ et $k^0_{n+1} := \inf\{j > k^0_n \ : \ | \, \|\xi_j\| - \eta^0| \leq n^{-1}\}$. Il est clair que $(k^0_n)_{n\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et que $\sup_{n\geq 1} \|\xi_{k^0_n}\| < \infty$. Ceci implique que $\eta^1 := \liminf_{n\to\infty} |\xi^1_n| < \infty$ $\mathbb{P}-$p.s. Soit $\epsilon^1 \in L^0(\mathcal{F}_t)$ défini par $\epsilon = 1$ si card$\{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists \, j \geq 1$ t.q. $|\xi^1_{k^0_j} - \eta^1| \leq n^{-1}\} = \infty$ et $\epsilon^1 = -1$ sinon. On définit ensuite la suite $(k^1_n)_{n\geq 0}$ par $k^1_0 = 0$ et $k^1_{n+1} := \inf\{j > k^1_n \ : \ |\xi^1_{k^0_j} - \epsilon\eta^1| \leq n^{-1}\}$. Il est clair que $(k^1_n)_{n\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et que $\xi^1_{k_n} \to \epsilon^1\eta^1$ $\mathbb{P} -$ p.s. On peut donc définir $\xi^1_* := \epsilon^1\eta^1$. On construit ensuite la suite $(k^2_n)_{n\geq 0}$ de manière similaire à partir de $(\xi_{k^1_n})_{n\geq 1}$ afin que $(\xi^2_{k^2_n})_{n\geq 1}$ converge $\mathbb{P}-$p.s. En itérant cette procédure, on obtient la suite $(k^d_n)_{n\geq 0}$ qui vérifie l'énoncé du lemme. □

Proposition 3 *Si (AOA$_t$) est vérifiée, alors $\tilde{\Gamma}_t$ est fermé en probabilité.*

Preuve. Comme la convergence en probabilité implique la convergence p.s. le long d'une sous-suite, il suffit de montrer que si une suite $(\xi_n, r_n)_{n\geq 1}$ de $L^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t)$ vérifie

$$G_n := \langle \xi_n, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle - r_n \to G_* \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

alors il existe $(\xi_*, r_*) \in L^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t)$ tel que

$$\langle \xi_*, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle - r_* = G_* \ . \tag{3}$$

Pour simplifier la preuve, on se place en dimension 1, i.e. $d = 1$. L'argument suivant se généralise au cas d quelconque par une simple itération, voir [22].
1. Soit $A := \{\liminf_{n\to\infty} \|\xi_n\| = \infty\}$. Comme $A \in \mathcal{F}_t$, on peut construire la suite $(\bar{\xi}_n)_{n\geq 1}$ de $L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_t)$ définie par $\bar{\xi}_n = \xi_n \mathbf{1}_A$. On a alors

$$\langle \bar{\xi}_n, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle - r_n \mathbf{1}_A \to G_* \mathbf{1}_A \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

ce qui implique que

$$\langle \hat{\xi}_n, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle - \hat{r}_n \to 0 \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

où $(\hat{\xi}_n, \hat{r}_n) = (\xi_n, r_n)\mathbf{1}_A/(1 + \|\xi_n\|)$. Comme $\liminf_{n\to\infty} \|\hat{\xi}_n\| = 1 < \infty$ sur A $\mathbb{P}-$ p.s. par construction, le Lemme 2 implique que l'on peut trouver une suite $(k_n)_{n\geq 1}$ de $L^0(\mathbb{N}, \mathcal{F}_t)$ telle que $\langle \hat{\xi}_{k_n}, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \to \langle \hat{\xi}_*, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle$ où $\hat{\xi}_* \in L^0(\mathbb{R}, \mathcal{F}_t)$. Comme $\hat{r}_{k_n} \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s., on a forcément $\langle \hat{\xi}_*, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \geq 0$. Du fait de l'hypothèse (AOA$_t$), qui s'écrit sous la forme (2), ceci implique que $\langle \hat{\xi}_*, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle = 0$ et $\hat{r}_{k_n} \to 0$ $\mathbb{P}-$ p.s. Comme par construction $|\hat{\xi}_*| = 1$ sur A, ceci montre que $\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t = 0$ sur A (on rappelle qu'ici on suppose que $d = 1$). On peut donc remplacer la suite initiale $(\xi_n, r_n)_{n\geq 0}$ par la suite $(\check{\xi}_n, \check{r}_n)_{n\geq 0}$ définie par $(\check{\xi}_n, \check{r}_n) = (\xi_n, r_n)\mathbf{1}_{A^c}$ et toujours avoir

$$\langle \check{\xi}_n, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle - \check{r}_n \to G_* \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

avec $\liminf_{n\to\infty} \|\check{\xi}_n\| = 1 < \infty$ $\mathbb{P}-$ p.s.
2. D'après 1., on peut maintenant supposer que $\liminf_{n\to\infty} \|\xi_n\| < \infty$ $\mathbb{P}-$ p.s. Le Lemme 2 nous permet alors de construire une suite $(k_n)_{n\geq 1}$ de $L^0(\mathbb{N}, \mathcal{F}_t)$ telle que $G_{k_n} \to G_*$ et $\langle \xi_{k_n}, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \to \langle \xi_*, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle$ où $\xi_* \in L^0(\mathbb{R}, \mathcal{F}_t)$. On en déduit que $r_{k_n} \to r_* \in L^0(\mathbb{R}_+)$ et que (3) est vérifiée. □

1.3 Existence d'une mesure martingale sous $((\mathbf{AOA})_t)_{t<T}$

On commence par montrer que (AOA$_t$) implique l'existence d'une mesure équivalente qui rend $\tilde{S}$ martingale entre t et $t + 1$.
Pour ce faire, on utilise la propriété de fermeture de la Proposition 3 et le théorème de Hahn-Banach, voir par exemple Théorème 1.7 dans [5], que l'on rappelle ici.

Théorème 4 *Soit E un espace vectoriel normé. A un convexe compact de E et B un convexe fermé de E disjoints. Alors, il existe une application linéaire φ sur E telle que*

$$\sup_{b\in B}\varphi(b) < \inf_{a\in A}\varphi(a)\ .$$

Proposition 5 *Si (AOA_t) est vérifiée, alors il existe $H_t \in L^\infty$ tel que*

$$\mathbb{E}\left[H_t(\tilde S_{t+1}-\tilde S_t)\mid \mathcal{F}_t\right] = 0 \quad et \quad H_t > 0 \ \ \mathbb{P}-p.s.$$

Preuve. 1. Puisque $\tilde\Gamma_t$ est fermé en probabilité, voir Proposition 3, $\tilde\Gamma_t \cap L^1$ est fermé dans L^1. Par ailleurs, (AOA$_t$) implique $1_A \notin \tilde\Gamma_t$ pour tout $A \in \mathcal{F}_t$ tel que $\mathbb{P}[A] \neq 0$. L'ensemble $\tilde\Gamma_t$ étant en outre convexe, on déduit du théorème de Hahn-Banach, Théorème 4, que, pour un tel A, on peut trouver une variable aléatoire Y bornée telle que

$$\sup_{G\in\tilde\Gamma_t\cap L^1}\mathbb{E}[YG] < \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A]\ .$$

Comme $\tilde\Gamma_t$ est un cône (qui contient nécessairement 0), ceci implique que $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A] > 0$ et

$$\sup_{G\in\tilde\Gamma_t\cap L^1}\mathbb{E}[YG] \le 0\ . \tag{4}$$

Par ailleurs, comme $-\lambda\mathbf{1}_{Y<0} \in \tilde\Gamma_t \cap L^1$ quel que soit $\lambda \ge 0$, on a également

$$Y \ge 0 \ \ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

2. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des variables aléatoires Y non nulles de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ vérifiant (4). On note $s(Y) := \{Y \neq 0\}$ le support de Y. On peut alors trouver $\hat Y \in \mathcal{G}$ tel que

$$\mathbb{P}\left[s(\hat Y)\right] = \max\{\mathbb{P}[s(Y)]\ :\ Y\in\mathcal{G}\}\ .$$

En effet, si $(Y_n)_{n\ge1}$ est une suite maximisante pour $\{\mathbb{P}[s(Y)]\ :\ Y\in\mathcal{G}\}$, alors on peut trouver une suite $(a_n)_{n\ge1}$ de réels strictement positifs telle que

$$\hat Y := \sum_{n\ge1} a_n Y_n$$

ait pour support

$$s(\hat{Y}) = \bigcup_{n\geq 1} s(Y_n) \ .$$

On conclut en remarquant que

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\leq N} s(Y_n)\right] \geq \mathbb{P}\left[s(Y_N)\right] \to \sup\{\mathbb{P}\left[s(Y)\right] \ : \ Y \in \mathcal{G}\} \ .$$

3. On montre maintenant que $\mathbb{P}\left[s(\hat{Y})\right] = 1$. Si ce n'était pas le cas, les arguments de 1. nous permettraient d'exhiber une variable aléatoire $\bar{Y} \in \mathcal{G}$ telle que

$$\sup_{G\in\tilde{\Gamma}_t\cap L^1} \mathbb{E}\left[\bar{Y}G\right] \leq 0 < \mathbb{E}\left[\bar{Y}\mathbf{1}_{s(Y)^c}\right] \ .$$

On aurait alors $\{\bar{Y} \neq 0\} \cap s(\hat{Y})^c \neq \emptyset$ ce qui contredirait la définition de $\hat{Y}$.
4. On conclut en remarquant que, pour tout $i \leq d$,

$$-\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}\left[H_t(\tilde{S}^i_{t+1}-\tilde{S}^i_t) \ | \ \mathcal{F}_t\right]<0\}} \ \text{ et } \ \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}\left[H_t(\tilde{S}^i_{t+1}-\tilde{S}^i_t) \ | \ \mathcal{F}_t\right]>0\}} \text{ appartiennent à } \ L^0(\mathcal{F}_t) \ .$$

□

On peut maintenant montrer l'existence d'une mesure martingale équivalente.

Proposition 6 *Si (AOA) est vérifiée, alors il existe $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ de densité essentiellement bornée telle que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.*

Preuve. Pour tout $t \in \mathbb{T}$, il existe H_t vérifiant l'énoncé de la Proposition 5. On pose alors

$$H := \prod_{t\leq T-1} \left(\mathbb{E}\left[H_t \mid \mathcal{F}_{t+1}\right]/\mathbb{E}\left[H_t \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \ ,$$

et on définit la mesure $\mathbb{Q}$ par $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = H$. Dire que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale revient à dire que $\hat{H}\tilde{S}$ est une $\mathbb{P}$-martingale avec $\hat{H}_t := \mathbb{E}\left[H \mid \mathcal{F}_t\right]$. Ceci se vérifie facilement en remarquant que

$$\hat{H}_t := \prod_{j\leq t-1} \left(\mathbb{E}\left[H_j \mid \mathcal{F}_{j+1}\right]/\mathbb{E}\left[H_j \mid \mathcal{F}_j\right]\right) \ ,$$

et en utilisant la Proposition 5. □

1.4 Absence d'arbitrage sous $\mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset$

On conclut la preuve du Théorème 1 en montrant que (iii) implique (i).

On rappelle qu'un processus ξ est une $\mathbb{Q}$-*martingale locale* si $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]$ a un sens, i.e. l'intégrale est $\mathbb{Q}$-p.s. convergente, et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \xi_t$ pour tout $t < T$. On note L^0_b l'ensemble des variables aléatoires essentiellement bornée inférieurement.

Proposition 7 *Soit $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})$, supposé non vide, et $\phi \in \mathcal{A}$. Alors,*
(i) $\tilde{V}^{0,\phi}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.
(ii) $\tilde{V}^{0,\phi}_T \geq G$ $\mathbb{P}-p.s.$ où $G \in L^0_b$, alors, $\tilde{V}^{0,\phi}_t \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G \mid \mathcal{F}_t]$ $\mathbb{P}-p.s.$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.
(iii) Si (ii) est vérifiée avec $G \geq 0$ $\mathbb{P}-p.s.$ et $\mathbb{P}[G > 0] > 0$, alors $V^{0,\phi}_0 > 0$.

Preuve. Soit $t \leq T-1$. Comme ϕ_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\langle \phi_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle \mid \mathcal{F}_t\right] = \langle \phi_t, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_t\right] \rangle ,$$

ce qui implique la propriété (i) de martingale locale, voir (3) du Chapitre 1. Comme ceci implique que $\tilde{V}^{\phi}_t \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}^{\phi}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]$, pour tout $t \leq T-1$, $\tilde{V}^{0,\phi}_{t+1} \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G \mid \mathcal{F}_{t+1}]$ $\mathbb{P}-$p.s. implique $\tilde{V}^{0,\phi}_t \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G \mid \mathcal{F}_t]$ $\mathbb{P}-$p.s. par passage à l'espérance conditionnelle. Comme $\tilde{V}^{\phi}_T \geq G = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G \mid \mathcal{F}_T]$ $\mathbb{P}-$p.s., une récurrence montre (ii). L'assertion (iii) est une conséquence immédiate de (ii) puisque $G \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s. et $\mathbb{P}[G > 0] > 0$ est équivalent à $G \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s. et $\mathbb{Q}[G > 0] > 0$, car $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, ce qui implique $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G] > 0$. $\square$

Remarque 8 D'après la proposition précédente, si $\tilde{V}^{0,\phi}_T \geq G$ $\mathbb{P}-$p.s. avec $G \in L^1(\mathbb{Q})$, alors $\tilde{V}^{0,\phi}$ est borné inférieurement par la $\mathbb{Q}$-martingale X définie par $X_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G \mid \mathcal{F}_t]$. Il est donc possible de définir $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}^{0,\phi}_t\right]$ pour tout $t \in \mathbb{T}$. Par ailleurs, une simple récurrence sur la propriété de martingale locale de $\tilde{V}^{0,\phi}$ montre que $\tilde{V}^{0,\phi}_0 \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}^{0,\phi}_t\right]$ pour tout $t \in \mathbb{T}$. Ceci montre que $\tilde{V}^{0,\phi}_t \in L^1(\mathbb{Q})$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, autrement dit, $\tilde{V}^{0,\phi}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

2 Couverture des options européennes

Dans cette section, on s'intéresse l'évaluation et à la couverture d'une *option européenne*, i.e. un produit financier qui paie un montant aléatoire $G \in L^0$ à la date T, appelée *maturité*. On parle également d'*actif contingent* européen.

La question est de savoir quel prix, appelé également *prime*, doit être versé à la date 0 par l'acheteur.

Il est naturel de considérer les notions de prix suivantes :

1. On dit qu'un prix p est *viable* pour l'option G si l'achat ou la vente de cette option à ce prix n'introduit pas d'arbitrage sur le marché, i.e. si

$$\nexists\, \phi \in \mathcal{A} \text{ et } \epsilon \in \{-1, 1\} \;\text{ t.q. }\; V_T^{\epsilon p,\phi} - \epsilon\, G \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\} \,. \tag{5}$$

2. On dit qu'un prix p permet de *sur-couvrir* G si

$$\exists\, \phi \in \mathcal{A} \;\text{ t.q. }\; V_T^{p,\phi} - G \in L^0(\mathbb{R}_+) \,. \tag{6}$$

3. Enfin, on dit que p est le *prix de sur-réplication* de G si

$$p = p(G) := \inf\{x \in \mathbb{R} \;:\; \exists\, \phi \in \mathcal{A} \;\text{ t.q. }\; V_T^{x,\phi} - G \in L^0(\mathbb{R}_+)\} \,. \tag{7}$$

On commence par donner une caractérisation des options qui peuvent être couvertes en partant d'une richesse négative. Pour des raisons techniques, on se restreint à la classe des options $G \in L^0$ tel que $\beta_T G^-$ appartient à l'ensemble L_S des variables aléatoires $Y \in L^0$ vérifiant

$$|Y| \;\; \leq \;\; c_Y^0 + \sum_{i=1}^{d} c_Y^i \tilde{S}_T^i \;\; \mathbb{P} - \text{p.s.} \tag{8}$$

pour certaines constantes réelles $c_Y^0, \ldots, c_Y^d$ pouvant dépendre de Y.

Théorème 9 *Si $\mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset$, alors les deux ensembles suivants*

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \Big\{G \in L^0 \;:\; \beta_T G^- \in L_S \,,\; \exists\, \phi \in \mathcal{A} \text{ t.q. } V_T^{0,\phi} \geq G\Big\} \\ \Theta &:= \left\{G \in L^0 \;:\; \beta_T G^- \in L_S \,,\; \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T G\right] \leq 0\right\} \end{aligned}$$

sont égaux. Par ailleurs,

$$\Big\{G \in L^0 \;:\; \exists\, \phi \in \mathcal{A} \text{ t.q. } V_T^{0,\phi} \geq G\Big\}$$

est fermé en probabilité.

Remarque 10 On déduit de la Remarque 1 du Chapitre 1 que $p(G-\beta_T^{-1}x) \leq 0$ implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $V_T^{\varepsilon,\phi}-(G-\beta_T^{-1}x) \in L^0(\mathbb{R}_+)$ où encore $\tilde{V}_T^{\varepsilon,\phi} - \tilde{G} + x \in L^0(\mathbb{R}_+)$, i.e. $\tilde{V}_T^{x+\varepsilon,\phi} - \tilde{G} \in L^0(\mathbb{R}_+)$. Ceci implique que $p(G) \leq x$. Caractériser Γ revient donc à caractériser l'ensemble des actifs contingents sur-réplicables à partir d'une richesse x quelconque donnée.

Afin de prouver ce théorème, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 11 *Supposons que (AOA) soit vérifiée. Si $\phi \in \mathcal{A}$ vérifie*

$$\sum_{s=t}^{T-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle = 0 \;\; \mathbb{P} - p.s.$$

alors

$$\langle \phi_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle = 0 \;\; \mathbb{P} - p.s.$$

Preuve. Sur $A := \{\langle \phi_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle > 0\}$, on a

$$\sum_{s=t+1}^{T-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle = -\langle \phi_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle < 0 \; .$$

Comme $A \in \mathcal{F}_{t+1}$, $\hat{\phi}$ défini par $\hat{\phi}_s = -\phi_s \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{s \geq t+1}$ appartient à $\mathcal{A}$. Or

$$\tilde{V}_T^{0,\hat{\phi}} \geq 0 \; , \; \mathbb{P}\left[\tilde{V}_T^{0,\hat{\phi}} > 0\right] = \mathbb{P}\left[A\right] \; ,$$

ce qui implique $\mathbb{P}[A] = 0$ sous (AOA). On montre de même que $\{\langle \phi_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \rangle < 0\}$ est de mesure nulle. □

Preuve du Théorème 9. 1. On commence par montrer par induction que Γ est fermé en probabilité. Pour $s < t$, on note $\Gamma_{s,t}$ l'ensemble des variables aléatoires $G \in L^0$ telles que

$$\exists \phi \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \phi = 0 \text{ sur } \mathbb{T} \setminus [s,t[\text{ et } V_T^{0,\phi} - G \in L^0(\mathbb{R}_+) \; .$$

D'après la Proposition 3 et le Théorème 1, on sait que $\Gamma_{T-1,T}$ est fermé en probabilité. On suppose que $\Gamma_{t,T}$ est fermé en probabilité pour $1 \leq t \leq T-1$ et on montre qu'alors $\Gamma_{t-1,T}$ est également fermé en probabilité. Soit $(G_n)_n$ une suite dans $\Gamma_{t-1,T}$ qui converge en probabilité vers G_*. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la convergence à lieu au sens p.s. Soit $(\phi^n, r_n)_n$ une suite dans $\mathcal{A} \times L^0(\mathbb{R}_+)$ telle que $\phi^n_s = 0$ pour $s < t-1$ et

$$\tilde{V}_T^{0,\phi^n} - r_n = \beta_T G_n \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

Pour simplifier, on continue la preuve dans le cas $d = 1$. On reprend les arguments de la preuve de la Proposition 3. Soit $A := \{\liminf_{n\to\infty} \|\phi^n_{t-1}\| = \infty\}$. On note $(\hat{\phi}^n, \hat{r}_n, \hat{G}_n) := ((\phi^n, r_n, G_n)\mathbf{1}_A/(1 + \|\phi^n_{t-1}\|)_n$. Quitte à passer à une sous-suite aléatoire, on peut supposer que $(\hat{\phi}^n_{t-1})_n$ converge p.s. vers un élément $\hat{\phi}^*_{t-1}$ de $L^0(\mathcal{F}_t)$, voir Lemme 2. Ceci implique que $\hat{G}_n - \langle\hat{\phi}^n_{t-1}, \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}\rangle$ converge en probabilité vers $-\langle\hat{\phi}^*_{t-1}, \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}\rangle$. Comme

$$\sum_{s=t}^{T-1}\langle\hat{\phi}^n_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s\rangle - \hat{r}_n = \beta_T\hat{G}_n - \langle\hat{\phi}^n_{t-1}, \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}\rangle \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

et que $\Gamma_{t,T}$ est fermé par hypothèse, on en déduit qu'il existe $\check{\phi}^* \in \mathcal{A}$ et $r_* \in L^0(\mathbb{R}_+)$ tel que

$$\sum_{s=t}^{T-1}\langle\check{\phi}^*_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s\rangle - \hat{r}_* = -\langle\hat{\phi}^*_{t-1}, \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}\rangle \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

Puisque (AOA) est vérifiée, voir Théorème 1, on a nécessairement $r_* = 0$ $\mathbb{P}-$p.s. et donc

$$\sum_{s=t}^{T-1}\langle\check{\phi}^*_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s\rangle = -\langle\hat{\phi}^*_{t-1}, \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}\rangle \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

D'après le Lemme 11, on doit alors avoir $\langle\hat{\phi}^*_{t-1}, \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}\rangle = 0$ $\mathbb{P}$ − p.s. Par les mêmes arguments que ceux déjà utilisés pour prouver la Proposition 3, on peut alors se ramener au cas où $\mathbb{P}[A] = 0$. La propriété de fermeture de $\Gamma_{t-1,T}$ est alors obtenu utilisant le Lemme 2 et la propriété de fermeture de $\Gamma_{t,T}$ comme ci-dessus.

2. Le fait que $\Gamma \subset \Theta$ découle de la Proposition 7. Il reste à montrer l'inclusion inverse par contradiction. Supposons qu'il existe $\hat{G} \in \Theta \setminus \Gamma$. Alors $\hat{G} \in \Theta \setminus \Gamma_{0,T}$. D'après la condition (8), $\beta_T\hat{G} \in L^1(\mathbb{Q})$ pour une mesure $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})$. Par ailleurs, comme $\Gamma_{0,T}$ étant fermé en probabilité, la restriction $\tilde{\Gamma}_1$ à $L^1(\mathbb{Q})$ de $\{\beta_T G \ : \ G \in \Gamma_{0,T}\}$ est fermée dans $L^1(\mathbb{Q})$. Comme $\Gamma_{0,T}$ est convexe, on déduit du Théorème 4 qu'il existe $Y \in L^\infty$ tel que

$$\sup_{G\in\tilde{\Gamma}_1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[YG] < \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y\beta_T\hat{G}\right] .$$

En notant H la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, on obtient

$$\sup_{G \in \tilde{\Gamma}_1} \mathbb{E}\left[HYG\right] < \mathbb{E}\left[HY\beta_T\hat{G}\right] .$$

Par les mêmes arguments que ceux déjà employés dans la preuve de la Proposition 5, on vérifie que $\hat{H} := HY/\mathbb{E}\left[HY\right]$ est la densité d'une mesure $\hat{Q}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ qui rend $\tilde{S}$ martingale. On remarque maintenant que pour $\varepsilon \in (0,1)$ la densité $H^{\varepsilon} := (\varepsilon H + (1-\varepsilon)\hat{H})$ est celle d'une mesure équivalent $\mathbb{Q}^{\varepsilon} \in \mathcal{M}(\tilde{S})$. D'après l'inégalité précédente, on peut prendre $\varepsilon \in (0,1)$ tel que

$$\sup_{G \in \tilde{\Gamma}_1} \mathbb{E}\left[H^{\varepsilon}G\right] < \mathbb{E}\left[H^{\varepsilon}\beta_T\hat{G}\right] .$$

Comme $0 \in \tilde{\Gamma}_1$, ceci contredit le fait que $\hat{G} \in \Theta$. □

Comme conséquence immédiate du résultat précédent, on obtient la caractérisation suivante du prix de sur-réplication et de l'ensemble des prix viables.

Théorème 12 *Soit $G \in L^0$ tel que $\beta_T G^- \in L_S$. Si $\mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset$, alors*

$$p(G) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T G\right] . \tag{9}$$

Par ailleurs, si $\beta_T|G| \in L_S$ alors :
(i) l'ensemble des prix viables est donné par l'intérieur relatif de $[-p(-G), p(G)]$.
(ii) $p(G) = -p(-G) \Leftrightarrow \exists\ \phi \in \mathcal{A}$ t.q. $V_T^{p(G),\phi} = G\ \mathbb{P} - p.s.$

Remarque 13 Lorsqu'il existe $(p,\phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ t.q. $V_T^{p,\phi} = G\ \mathbb{P} -$ p.s., on dit que l'option G est *atteignable* ou *réplicable.*

Preuve du Théorème 12. La première assertion est une conséquence immédiate du Théorème 9, de la Remarque 10 et de la Remarque 8. L'assertion (i) découle de (ii) et de (9). L'implication $p(G) = -p(-G) \Leftarrow \exists\ \phi \in \mathcal{A}$ t.q. $V_T^{p(G),\phi} = G\ \mathbb{P} -$ p.s. est évidente. On montre sa réciproque. On suppose donc que $p := p(G) = -p(-G)$. Alors, il existe ϕ_+ et ϕ_- dans $\mathcal{A}$ tels que $V_T^{p,\phi_+} \geq G$ et $V_T^{-p,\phi_-} \geq -G$. Si l'une de ces deux inégalités est stricte sur un ensemble A de mesure non nulle, on a alors $V_T^{p,\phi_+} + V_T^{-p,\phi_-} \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. Comme $V_T^{p,\phi_+} + V_T^{-p,\phi_-} = V_T^{0,\phi_+ + \phi_-}$, ceci contredirait l'hypothèse d'AOA. □

On conclut cette section par une description de la stratégie de couverture d'une option dans le cas où $p(G) = -p(-G)$.

Proposition 14 *On suppose que $\mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset$, que $\tilde{S}_t \in L^2(\mathbb{P})$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ et que $G \in L^0$ vérifie $|G| \in L_S$ et $p(G) = -p(-G)$. Soit $\mathbb{Q}$ un élément de $\mathcal{M}(\tilde{S})$ à densité bornée. Alors, $V_T^{p(G),\hat{\phi}} = G$ $\mathbb{P}-p.s.$ quel que soit $\hat{\phi}$ vérifiant l'induction rétrograde*

$$\tilde{V}_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad , \quad \hat{\phi}_t \in \mathcal{S}_t(\tilde{S},\mathbb{Q}) \quad t \leq T-1$$

avec $\tilde{V}_T = \beta_T G$ et $\mathcal{S}_t(\tilde{S},\mathbb{Q})$ défini comme l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables pour lesquelles

$$\langle \hat{\phi}_t, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t\right)\left(\tilde{S}^i_{t+1} - \tilde{S}^i_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right]\rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_{t+1}\left(\tilde{S}^i_{t+1} - \tilde{S}^i_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \ \mathbb{P}-p.s.$$

pour tout $i = 1, \ldots, d$.

Preuve. D'après le Théorème 12, il existe $\hat{\phi} \in \mathcal{A}$ tel que $V_T := V_T^{p(G),\hat{\phi}} = G$. On note $\tilde{V} = \beta_T V^{p(G),\hat{\phi}}$. On a $\tilde{V}_T = \beta_T G$ et la Remarque 8 implique que la récurrence sur $\tilde{V}$ est bien vérifiée. En outre, comme $\tilde{S}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_{t+1}\left(\tilde{S}^i_{t+1} - \tilde{S}^i_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_t\left(\tilde{S}^i_{t+1} - \tilde{S}^i_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\langle \hat{\phi}_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t\rangle\left(\tilde{S}^i_{t+1} - \tilde{S}^i_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \langle \hat{\phi}_t, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t\right)\left(\tilde{S}^i_{t+1} - \tilde{S}^i_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right]\rangle
\end{aligned}$$

pour tout $i = 1, \ldots, d$. Par ailleurs, si $\bar{\phi}$ est un autre élément de $\mathcal{A}$ tel que $\bar{\phi}_t \in \mathcal{S}_t(\tilde{S},\mathbb{Q})$ pour tout $t \leq T-1$, on a, pour tout $t \leq T-1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left|\langle \hat{\phi}_t - \bar{\phi}_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t\rangle\right|^2 \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= (\hat{\phi}_t - \bar{\phi}_t)'\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)' \mid \mathcal{F}_t\right](\hat{\phi}_t - \bar{\phi}_t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}'_t\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)' \mid \mathcal{F}_t\right] &= \bar{\phi}'_t\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)' \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_{t+1}\left(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t\right)' \mid \mathcal{F}_t\right] .
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\langle \hat{\phi}_t - \bar{\phi}_t, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t\rangle = 0$ $\mathbb{P}-$p.s. On en déduit que $V^{p(G),\hat{\phi}} = V^{p(G),\bar{\phi}}$ $\mathbb{P}-$p.s. □

3 Marchés complets

On dit que le marché est un *marché complet* si, pour tout $G \in L^0$ vérifiant $|G| \in L_S$, il existe $(p, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ tel que $V_T^{p,\phi} = G \ \mathbb{P}-$ p.s. Dans le cas contraire, on dit que le marché est un *marché incomplet*.

Le Théorème 12 nous permet de donner une caractérisation précise de la complétude du marché en terme de $\mathcal{M}(\tilde{S})$.

Théorème 15 *On suppose que $\mathcal{M}(\tilde{S}) \neq \emptyset$. Alors, le marché est complet si et seulement si $\mathcal{M}(\tilde{S})$ est un singleton.*

Preuve. Si $\mathcal{M}(\tilde{S})$ est un singleton la complétude est une conséquence des assertions (9) et (ii) du Théorème 12. On suppose maintenant que le marché est complet. On déduit alors de (9) et (ii) du Théorème 12 que

$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T G\right] = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T G\right] \quad \forall\, G \in L^0 \text{ t.q. } |G| \in L_S\,. \tag{10}$$

Supposons que $\mathcal{M}(\tilde{S})$ contienne deux éléments de densité H^1 et H^2 différente. On peut supposer que $G = \mathbf{1}_{H^1 > H^2}$ n'est pas $\mathbb{P}-$ p.s. nul. Alors,

$$\mathbb{E}\left[H^1 \beta_T G\right] > \mathbb{E}\left[H^2 \beta_T G\right] \ ,$$

ce qui contredit (10). □

Remarque 16 On déduit du Théorème 12 et du résultat précédent que l'unique prix viable sur un marché complet est $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T G\right]$ où $\mathbb{Q}$ est l'unique mesure équivalente qui rend martingale $\tilde{S}$.

Comme corollaires du Théorème 15, on obtient les théorèmes de représentation suivants.

Corollaire 17 *(Théorème de représentation des martingales) On suppose que $\mathcal{M}(\tilde{S}) = \{\mathbb{Q}\}$. Alors, toute $\mathbb{Q}$-martingale M admet une représentation sous la forme :*

$$M_t \;=\; M_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle$$

pour un $\phi \in \mathcal{A}$.

Preuve. On commence par considérer le cas où $|M_T| \leq n$, $n \geq 1$, de sorte que $M_T \in L_S$. D'après le Théorème 15, il existe $\phi \in \mathcal{A}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$M_T \quad = \quad x + \sum_{s=0}^{T-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle \ .$$

Supposons que

$$M_{t+1} \quad = \quad x + \sum_{s=0}^{t} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle$$

pour un $t < T$. Alors, par passage à l'espérance conditionnelle sous $\mathbb{Q}$ sachant $\mathcal{F}_t$, on obtient

$$\begin{aligned} M_t &= x + \sum_{s=0}^{t-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle + \langle \phi_t, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_t \right] \rangle \\ &= x + \sum_{s=0}^{t-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle \ . \end{aligned}$$

On déduit donc d'une récurrence que cette représentation est valable pour tout $t \in \mathbb{T}$. En particulier, $M_0 = x$.
On considère maintenant le cas général. Etant donné M, on pose $M_t^n := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_T \vee (-n) \wedge n | \mathcal{F}_t]$, $n \geq 1$. D'après ce qui précède, on sait qu'il existe $\phi^n \in \mathcal{A}$ tel que $\tilde{V}_T^{M_0^n, \phi^n} = M_T^n$. Comme $M_T \in L^1(\mathbb{Q})$, le théorème de convergence dominée implique que $M_0^n \to M_0$ quand $n \to \infty$. En particulier $M_T^n - M_0^n \in \beta_T \Gamma$. Comme ce dernier est fermé pour la convergence en probabilité (Théorème 9) et que $M_T^n - M_0^n \to M_T - M_0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que $M_T - M_0 \in \beta_T \Gamma$. On a également $-(M_T^n - M_0^n) \in \beta_T \Gamma$, et les mêmes arguments que ci-dessus impliquent donc que $-(M_T - M_0) \in \beta_T \Gamma$. On conclut en répétant les arguments utilisés dans la preuve du Théorème 12. $\square$

Corollaire 18 *(Théorème de représentation) On suppose que $\mathcal{M}(\tilde{S}) = \{\mathbb{Q}\}$. Alors, tout $G \in L^1(\mathbb{Q})$ admet une représentation sous la forme :*

$$G \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G] + \sum_{s=0}^{T-1} \langle \phi_s, \tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \rangle$$

pour un $\phi \in \mathcal{A}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le Corollaire 17 à la martingale $(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G \mid \mathcal{F}_t])_{t\in\mathbb{T}}$.
□

On conclut cette section en montrant que si le marché est complet, alors, pour tout $t < T$, la loi de S_{t+1} sachant $\mathcal{F}_t$ est concentrée sur au plus $d+1$ points (aléatoires).

Proposition 19 *Supposons que $\mathcal{M}(\tilde{S}) = \{\mathbb{Q}\}$, alors, pour tout $t < T$, il existe $d+1$ vecteurs aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_{d+1} \in L^0(\mathbb{R}^d; \mathcal{F}_t)$ tels que*

$$\sum_{j=1}^{d+1} \mathbb{P}\left[\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t = \xi_j \mid \mathcal{F}_t\right] = 1 \ , \ \mathbb{P} - p.s.$$

Preuve. Supposons que cette propriété ne soit pas vérifiée pour un $t < T$. Alors, il existe un ensemble $A \in \mathcal{F}_t$ tel que $\mathbb{Q}[A] > 0$, $d+2$ variables aléatoires $\zeta_1, \ldots, \zeta_{d+2} \in L^0(\mathbb{R}^d; \mathcal{F}_t)$ et $\eta \in L^0((0,\infty); \mathcal{F}_t)$ tels que

$$\mathbb{P}[B_j \mid \mathcal{F}_t] > 0 \quad \forall\, j \leq d+2 \ \text{ sur } A$$

où $B_j := \{\|(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t) - \zeta_j\| \leq \eta\} \cap A$ et les B_j sont disjoints. Les vecteurs $(\mathbb{Q}[B_j \mid \mathcal{F}_t], \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)'\mathbf{1}_{B_j} \mid \mathcal{F}_t\right])$, $j = 1, \ldots, d+2$, ne pouvant être linéairement indépendants, il existe $d+2$ variables aléatoires $a_1, \ldots, a_{d+2}$ de $L^0(\mathbb{R}; \mathcal{F}_t)$, non $\mathbb{Q}$-p.s. nulles sur A, telles que

$$\sum_{j=1}^{d+2} a_j \ \left(\mathbb{Q}[B_j \mid \mathcal{F}_t] \ , \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)\mathbf{1}_{B_j} \mid \mathcal{F}_t\right]\right) = 0 \quad \mathbb{Q}\text{-p.s.}$$

Après avoir éventuellement normalisé les a_j, on peut supposer que chacun est essentiellement borné par $1/(2d+4)$ $\mathbb{Q}$-p.s. On définit alors

$$\bar{H} \ := \ 1 + \mathbf{1}_A \sum_{j=1}^{d+2} a_j \mathbf{1}_{B_j} \ .$$

On a alors $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\bar{H} \mid \mathcal{F}_t\right] = 1$, $\bar{H} > 0$ $\mathbb{Q}$-p.s. et, comme $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\bar{H}(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t) \mid \mathcal{F}_t\right] \ = \ 0 \ .$$

Ceci implique que la mesure $\bar{\mathbb{Q}}$ de densité $\bar{H}$ par rapport à $\mathbb{Q}$ est également un élément de $\mathcal{M}(\tilde{S})$, ce qui contredit l'hypothèse de la Proposition. □

4 Extensions à certains marchés imparfaits

4.1 Contraintes de portefeuille

On considère maintenant un marché sur lequel les agents financiers ne peuvent vendre et acheter librement n'importe quelle quantité d'actifs. Plus précisément, on impose une *contrainte de portefeuille* de la forme

$$\phi_t \in K \quad \mathbb{P}-\text{p.s. pour tout } t \in \mathbb{T}$$

où K est un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{A}_K$ l'ensemble des processus de $\mathcal{A}$ vérifiant cette condition.

Exemple 20 *1. $K = \mathbb{R}^d$: pas de contrainte*
2. $K = \mathbb{R}^d_+$: aucun actif ne peut être vendu à découvert
3. $K = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$: l'actif d ne peut être échangé.

Les arguments précédents s'étendent pour l'essentiel à ce cadre sans la moindre modification. En particulier le Théorème 1 s'écrit sous la forme suivante.

Théorème 21 *Il y a équivalence entre*
(i) (AOA^K) est vérifiée.
(ii) (AOA^K_t) est vérifiée pour tout $t = 0, \ldots, T-1$.
(ii) $\mathcal{H}^K_b(\tilde{S}) \neq \emptyset$.

Ici, (AOA^K) et (AOA^K_t) sont définis comme (AOA) et (AOA_t) mais en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_K$, et $\mathcal{H}^K_b(\tilde{S})$ désigne l'ensemble des variables aléatoires H de L^∞ d'espérance égale à 1 vérifiant

$$\sup_{\xi \in L^\infty(K;\mathcal{F}_t)} \mathbb{E}\left[H\langle \xi, \tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t\rangle\right] \leq 0 \quad \text{pour tout } t < T\,.$$

Exemple 22 *1. $K = \mathbb{R}^d$: $\mathcal{H}^K_b(\tilde{S})$ est l'ensemble des densités des mesures de $\mathcal{M}_b(\tilde{S})$.*
2. $K = \mathbb{R}^d_+$: $\mathcal{H}^K_b(\tilde{S})$ est l'ensemble des densités des mesures $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telles que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-surmartingale et $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} \in L^\infty$.
3. $K = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$: $\mathcal{H}^K_b(\tilde{S})$ est l'ensemble des densités des mesures $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telles que $(\tilde{S}^1, \ldots, \tilde{S}^{d-1})$ est une $\mathbb{Q}$-martingale et $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} \in L^\infty$.

Les résultats de la Section 2 s'étendent de la même manière. On peut définir le prix de sur-réplication comme

$$p_K(G) := \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists\, \phi \in \mathcal{A}_K \ \text{ t.q. } \ V_T^{x,\phi} - G \in L^0(\mathbb{R}_+)\}$$

et obtenir la caractérisation suivante.

Théorème 23 *Si $\mathcal{H}_b^K(\tilde{S}) \neq \emptyset$, alors les deux ensembles suivants*

$$\begin{aligned}
\Gamma_K &:= \{G \in L^\infty \ : \ p_K(G) \leq 0\} \\
\Theta_K &:= \left\{G \in L^\infty \ : \ \sup_{H \in \mathcal{H}_b^K(\tilde{S})} \mathbb{E}\left[H\beta_T G\right] \leq 0\right\}
\end{aligned}$$

sont égaux et

$$\left\{G \in L^0 \ : \ p_K(G) \leq 0\right\}$$

est fermé en probabilité.

Corollaire 24 *Soit $G \in L^\infty$. Si $\mathcal{H}_b^K(\tilde{S}) \neq \emptyset$, alors*

$$p_K(G) \ = \ \sup_{H \in \mathcal{H}_b^K(\tilde{S})} \mathbb{E}\left[H\beta_T G\right] \ .$$

Exemple (Exercice). On considère un marché financier à une période où sont échangés un actif sans risque et un actif risqué. On note par $R = 1 + r$ le rendement de l'actif sans risque (i.e. 1 euro placé en début de période rapporte R euros à la fin de la période). L'incertitude sur le rendement de l'actif risqué est décrite par un arbre binomial : il y a deux états du monde possibles ω_1 et ω_2 de probabilité strictement positive. Le rendement de l'actif risqué est donné par :

$$\frac{S_1(\omega_1)}{S_0} \ = \ u \quad \text{et} \quad \frac{S_1(\omega_2)}{S_0} \ = \ d \ ,$$

où $u > d > 0$ sont deux réels donnés.
On dit ici qu'il n'existe pas d'arbitrage si pour tout $\theta \geq \mathbf{0}$,

$$\theta(S_1 - RS_0) \ \in \ (\mathbb{R}_+)^2 \quad \Longrightarrow \quad \theta(S_1 - RS_0) \ = \ 0 \ .$$

On désigne par NA_+ cette condition d'absence d'arbitrage.

1. Donner l'interprétation économique de la condition NA_+.
2. Montrer que si la condition NA_+ est vérifiée, alors $d < R$.
3. En déduire qu'il existe un réel π tel que :

$$0 < \pi < 1 \quad \text{et} \quad \pi\, u + (1 - \pi)\, d \leq R\,.$$

4. Donner une interprétation de π en terme de probabilité neutre au risque.
5. Réciproquement, supposons qu'il existe un réel π vérifiant les conditions de la question 3. Montrer que la condition NA_+ est alors vérifiée.
6. Donner un exemple de marché financier compatible avec NA_+, dans lequel il y aurait un arbitrage au sens de la définition usuelle.

4.2 Information imparfaite

Dans certaines situations, les agents ne sont pas en mesure de passer leurs ordres de manière instantanée, il y a un décalage entre le moment où la décision est prise et celui ou l'ordre est effectivement passé. Ceci implique que la stratégie de l'agent n'est pas basée sur toute l'information disponible au moment ou l'ordre est passé. D'un point de vue mathématique, cela revient à considérer qu'elle est adaptée à une filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ qui est plus petite que $\mathbb{F}$.

On est alors amené à supposer que ϕ est un élément de $\mathcal{A}_{\mathbb{G}}$, l'espace des processus $\mathbb{G}$-adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Les arguments précédents s'étendent immédiatement à ce cadre. Il suffit de remplacer $\mathcal{M}(\tilde{S})$ par l'espace $\mathcal{M}^{\mathbb{G}}(\tilde{S})$ des mesures de probabilité $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que $\bar{S}^{\mathbb{Q}} := (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_t \mid \mathcal{G}_t\right])_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, voir [23] pour plus de détails.

Puisque S est $\mathbb{F}$-adapté, on retrouve les résultats des sections précédentes lorsque $\mathbb{G} = \mathbb{F}$, où de manière plus générale $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$.

4.3 Coûts de transaction proportionnels (exercice)

On suppose qu'il n'y a qu'un actif risqué S et que le taux sans risque est nul, $r \equiv 0$. On suppose maintenant que les achats et ventes d'actif risqué sont soumis à un coût de transaction proportionnel au montant transféré de coefficient $\lambda \geq 0$. Ces coûts sont payés en numéraire (argent). On modélise la richesse comme un processus bi-dimensionnel $V = (V^0, V^1)$, V^0 désigne le montant de numéraire (resp. d'actif risqué) détenu. On note M_n (resp. L_n) le montant cumulé des achats (resp. des ventes) d'actifs S contre du numéraire entre 0 et n.

Ces processus doivent être $\mathbb{F}$-adaptés. On suppose que S est strictement positif $\mathbb{P}$-p.s.
a. Ecrire le nombre d'unités de S détenues entre n et $n+1$ en fonction de V_n^1 et S_n.
b. En déduire la dynamique de la richesse.
c. Soit K l'ensemble des portefeuilles de la forme $x = (x^1, x^2)$ tels que l'on puisse liquider la position x^2 en actif risqué S de sorte que le nouveau portefeuille ainsi obtenu soit de la forme $(y, 0)$ avec $y \geq 0$. Déterminer K en fonction de λ. On appelle cet ensemble la région de solvabilité.
d. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des processus $\mathbb{F}$-adaptés $Z = (Z^1, Z^2)$ à valeurs dans $(0,\infty)^2$ tels que $(Z^1, Z^2 S)$ est une $(\mathbb{F},\mathbb{P})$-martingale à valeurs dans $K^o = \{(z^1, z^2) \ : \ x^1 z^1 + x^2 z^2 \geq 0 \ \ \forall\ (x^1, x^2) \in K\}$ (polaire positif de K au sens de l'analyse convexe). Montrer que $\langle Z, V\rangle$ est une $(\mathbb{F},\mathbb{P})$-martingale.
e. Montrer que $Z^1V^1 + Z^2V^2$ est une sur-martingale.
f. On dit qu'il n'y a pas d'arbitrage dans ce modèle à l'horizon N si on ne peut pas trouver (L, M) $\mathbb{F}$-adapté tel que la richesse V_N obtenue en N en partant d'une dotation initiale nulle et en suivant la stratégie (L, M) vérifie $V_N \in \mathbb{R}^d_+$ et $\mathbb{P}(V_N \neq 0) > 0$. Montrer qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage si $\mathcal{Z} \neq \emptyset$.
g. Comment modéliseriez-vous une option européenne de maturité N dans ce modèle ? Que devrait vérifier une dotation initiale x permettant de couvrir une telle option ?

4.4 Coûts de transaction fixes (exercice)

On considère un marché financier à une période, composé d'un actif sans risque B et d'un actif risqué S. L'actif sans risque vaut $B_0 = 1$ en 0 et $B_1 = (1+r)$ en 1 où $r \geq 0$ est une constante, taux sans risque. L'actif risqué vaut $S_0 = 1$ en 0 et son prix en 1, S_1, est une variable alétoire pouvant prendre les valeurs uS_0 ou dS_0, chacune avec probabilité 0.5, où $u > d$ sont deux constantes.
Une stratégie de portefeuille consiste à former en 0 un portefeuille contenant $\theta \in \mathbb{R}$ unités de l'actif risqué puis à solder cette position en actif risqué à la date 1. Si $\theta \geq 0$, il s'agit d'un achat en 0 puis d'une revente en 1. Si $\theta \leq 0$, il s'agit d'une vente puis d'un rachat. Comme d'habitude le solde de la richesse initiale non utilisé dans l'opération d'achat ou vente de l'actif risqué est emprunté ou placé au taux sans risque.
On suppose que chaque transaction sur l'actif risqué fait l'objet d'un coût de

transaction fixe $c > 0$ payé au moment de l'opération, i.e. chaque opération d'achat ou vente de l'actif risqué coûte immédiatement c en plus du "coût" de l'achat ou de la vente $|\theta S|$. On note $V_1^{x,\theta}$ la valeur du portefeuille en 1 après avoir soldé la position en actif risqué associé à la stratégie θ, et dont la valeur initiale est $x \in \mathbb{R}$ en 0 avant toute opération d'achat ou vente.
Dans ce modèle, on dit qu'il n'y a pas d'arbitrage si il n'existe pas $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\left[V_1^{0,\theta} \geq 0\right] = 1$ et $\mathbb{P}\left[V_1^{0,\theta} > 0\right] > 0$.

1. Montrer que $V_1^{x,\theta} = \theta S_1 + (x - \theta S_0 - c\mathbf{1}_{\theta\neq 0})(1+r) - c\mathbf{1}_{\theta\neq 0}$.
2. Montrer qu'il n'y a pas d'arbitrage si $1 + r \in [d, u]$.
3. On veut maintenant montrer la réciproque, i.e. $1+r \in [d, u]$ s'il n'y a pas d'arbitrage.
   - On suppose que $1 + r < d$. Montrer que l'on peut trouver $\theta > 0$ tel que $d - 1 - r > (2 + r)c/\theta$. En déduire qu'il existe un arbitrage.
   - On suppose que $1 + r > u$. Montrer que l'on peut trouver $\theta < 0$ tel que $\theta(u - 1 - r) > (2 + r)c$. En déduire qu'il existe un arbitrage.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u, d et r pour l'absence d'opportunité d'arbitrage.

<u>On suppose à partir de maintenant que $1 + r \in [d, u]$.</u>

5. On cherche maintenant à trouver une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ telle que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_1^{0,\theta}/(1 + r)] \leq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) En utilisant la notation $q := \mathbb{Q}(S_1 = uS_0) = 1 - \mathbb{Q}(S_1 = dS_0)$, écrire $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_1^{0,\theta}]$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'on doit avoir $\theta S_0(qu + (1 - q)d - (1 + r)) \leq (2 + r)c\mathbf{1}_{\theta\neq 0}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $qu + (1 - q)d = 1 + r$.
   (d) En déduire qu'il n'existe qu'une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ telle que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_1^{0,\theta}/(1 + r)] \leq 0$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. L'expliciter.
   (e) A quelle condition cette mesure est-elle équivalente à $\mathbb{P}$?
6. Soit une option européenne payant le payoff aléatoire G défini par $G = G(u) \in \mathbb{R}$ si $S_1 = uS_0$ et $G = G(d) \in \mathbb{R}$ si $S_1 = dS_0$. On suppose que $G(u) \neq G(d)$.
   (a) On pose $p^+ := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G/(1+r)] + c(1+1/(1+r))$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\left[V_1^{p^+,\theta} = G\right] = 1$.

(b) On pose $p^- := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-G/(1+r)] + c(1+1/(1+r))$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\left[V_1^{p^-,\theta} = -G\right] = 1$.

(c) Quelle est la fourchette de prix viables pour G dans ce modèle ? Justifiez brièvement.

Chapitre 3

Options américaines en marché complet

Une *option américaine* est un titre financier permettant à son acheteur de recevoir un montant G_t à une date t qu'il choisit, *date d'exercice*, avant une date T fixée à l'avance, appelée *maturité*.
Du point de vue mathématique, l'option est modélisée par un processus $G = (G_t)_{t\in\mathbb{T}}$ $\mathbb{F}$-adapté. Par la suite, on fixe un tel processus et on suppose que

$$G_t \in L^1(\mathbb{P}) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T} .$$

L'objet de cette section est de caractériser le prix d'achat de l'option américaine G quand le marché est complet et sans arbitrage, i.e. $\mathcal{M}(\tilde{S}) = \{\mathbb{Q}\}$. Pour cela, on a besoin d'introduire la notion d'*enveloppe de Snell.*

1 Sur-martingale et enveloppe de Snell

On rappelle qu'un processus $\mathbb{F}$-adapté ξ est une $\mathbb{Q}$-*surmartingale* si
1. $\xi^-_{t+1} \in L^1(\mathbb{Q})$
2. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \le \xi_t$ $\mathbb{Q}$-p.s.
pour tout $t < T$.

Remarque 1 Si ξ est une $\mathbb{Q}$-martingale, alors, on montre facilement par récurrence que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_t \mid \mathcal{F}_s\right] \le \xi_s \;\; \mathbb{Q}\text{-p.s. pour tout } s \le t \le T .$$

On commence par donner une décomposition générale des surmartingales, appelée *décomposition de Doob-Meyer.*

Théorème 2 *(Décomposition de Doob-Meyer) Si Y est une $\mathbb{Q}$-surmartingale, alors il existe une $\mathbb{Q}$-martingale M et un processus croissant prévisible A nul en 0 tels que $Y = M - A$ $\mathbb{Q}$-p.s. Cette décomposition est unique.*

Preuve. On pose $(M_0, A_0) = (Y_0, 0)$ puis on définit $(M_t, A_t)_{1 \le t \le T}$ par la récurrence

$$M_{t+1} = M_t + Y_{t+1} - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad , \quad A_{t+1} = A_t + Y_t - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \ .$$

Ce couple vérifie l'énoncé du théorème. □

Par la suite, on va montrer que le prix de l'option américaine G correspond simplement à la valeur en 0 de l'enveloppe de Snell de

$$\tilde{G} := (\beta_t G_t)_{t \in \mathbb{T}} \ ,$$

dont on rappelle la définition.

Définition 3 *On appelle enveloppe de Snell de $\tilde{G}$ sous $\mathbb{Q}$ la plus petite $\mathbb{Q}$-surmartingale Y telle que $Y \ge \tilde{G}$ $\mathbb{Q}$-p.s.*

Proposition 4 *L'enveloppe de Snell de $\tilde{G}$ est l'unique processus défini par la propriété de programmation dynamique*

$$Y_t \quad = \quad \max\left\{\tilde{G}_t \ , \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right\} \quad t < T \ , \tag{1}$$

et la condition terminale

$$Y_T \quad = \quad \tilde{G}_T \ . \tag{2}$$

Preuve. D'après (1), on a bien $Y_t \ge \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]$ pour tout $t < T$. Par ailleurs, une simple récurrence basée sur le fait que $\tilde{G}$ est un processus intégrable montre que Y l'est aussi. Donc, Y est une $\mathbb{Q}$-surmartingale. En outre, (1)-(2) implique que $Y \ge \tilde{G}$ $\mathbb{Q}$-p.s. Par définition de l'enveloppe de Snell $\bar{Y}$ de $\tilde{G}$, on a donc $Y \ge \bar{Y}$ $\mathbb{Q}$-p.s. On montre maintenant l'inégalité inverse. Tout d'abord, $Y_T = \tilde{G}_T \le \bar{Y}_T$ $\mathbb{Q}$-p.s. Supposons maintenant que $Y_{t+1} \le \bar{Y}_{t+1}$ $\mathbb{Q}$-p.s. pour un $t \le T - 1$. D'après (1)

$$Y_t \quad = \quad \max\left\{\tilde{G}_t \ , \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right\} \le \max\left\{\bar{Y}_t \ , \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\bar{Y}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right\} = \bar{Y}_t$$

car $\bar{Y}$ est une $\mathbb{Q}$-surmartingale. La preuve est complétée par une simple récurrence. □

2 Enveloppe de Snell et arrêt optimal

On montre maintenant que Y est associé à un problème d'*arrêt optimal*.

On rappelle qu'un $(\mathbb{F}, \mathbb{T})$-*temps d'arrêt* est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{T}$ tel que $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Pour $t \in \mathbb{T}$, on notera $\mathcal{T}_t$ l'ensemble des $(\mathbb{F}, \mathbb{T})$-temps d'arrêt p.s. supérieurs ou égaux à t.

Remarque 5 Si $\tau \in \mathcal{T}_0$ alors il est clair que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Remarque 6 Soit ξ une $\mathbb{Q}$-martingale et $\tau \in \mathcal{T}_0$. Alors le *processus arrêté* $\xi^\tau := (\xi_{t\wedge\tau})_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. En effet,

$$\xi_t^\tau \;=\; \xi_t \mathbf{1}_{\tau \geq t} + \sum_{s<t} \xi_s \mathbf{1}_{\tau = s} \;\; t \in \mathbb{T} \;,$$

ce qui montre que ξ^τ est bien intégrable. En outre, en utilisant la Remarque 5 et la propriété de martingale de ξ, ceci implique également que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_{t+1}^\tau \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_{t+1}\mathbf{1}_{\tau>t} + \sum_{s\leq t} \xi_s \mathbf{1}_{\tau=s} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbf{1}_{\tau>t} + \sum_{s\leq t} \xi_s \mathbf{1}_{\tau=s} \\
&= \xi_t \mathbf{1}_{\tau>t} + \sum_{s\leq t} \xi_s \mathbf{1}_{\tau=s} = \xi_t^\tau \quad \forall\, t < T \;.
\end{aligned}$$

En particulier, ceci implique que $\xi_0 = \xi_0^\tau = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_{t\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_{T\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\xi_\tau\right]$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.
On montre de même que si ξ est une $\mathbb{Q}$-surmartingale, alors $\xi^\tau := (\xi_{t\wedge\tau})_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathbb{Q}$-surmartingale.

On commence par montrer que le processus Y devient une martingale s'il est correctement arrêté.

Proposition 7 Soit

$$\hat{\tau} := \inf\{t \in \mathbb{T} \;:\; Y_t = \tilde{G}_t\} \;. \tag{3}$$

Le processus $Y^{\hat{\tau}} := (Y_{t\wedge\hat{\tau}})_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Preuve. On a déjà remarqué que Y est bien intégrable. Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la Remarque 6, on en déduit que $Y^{\hat{\tau}}$ est bien intégrable. Soit $t < T$. On a alors

$$Y_{t+1}^{\hat{\tau}} - Y_t^{\hat{\tau}} = (Y_{t+1} - Y_t)\mathbf{1}_{\hat{\tau} \geq t+1}$$

et

$$Y_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad \text{sur } \{\hat{\tau} \geq t+1\} \in \mathcal{F}_t$$

par définition de Y. Ceci combiné à la Remarque 5 implique que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1}^{\hat{\tau}} - Y_t^{\hat{\tau}} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_{t+1} - Y_t \mid \mathcal{F}_t\right]\mathbf{1}_{\hat{\tau} \geq t+1} = 0\ .$$

□

On donne maintenant la caractérisation de Y en terme de *problème d'arrêt optimal.*

Proposition 8 *On a*

$$Y_0 \quad = \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_\tau\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_{\hat{\tau}}\right]\ .$$

Preuve. Comme Y est une surmartingale et domine $\tilde{G}$, on déduit de la Proposition 7 que

$$Y_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_{\hat{\tau}}\right] \quad \geq \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_\tau\right] \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_\tau\right]\ .$$

Puisque $\hat{\tau} \in \mathcal{T}_0$, le résultat en découle. □

3 Prix et stratégie de couverture

Puisque l'option peut être exercée à tout moment, le prix de couverture sans risque, ou prix de sur-réplication, est maintenant défini par

$$p^{US}(G) := \inf\{x \in \mathbb{R}\ :\ \exists\, \phi \in \mathcal{A}\ \text{ t.q. }\ V_t^{x,\phi} - G_t \in L^0(\mathbb{R}_+)\ \forall\, t \in \mathbb{T}\}\ . \qquad (4)$$

On commence par caractériser ce prix en terme d'enveloppe de Snell de $\tilde{G}$.

Théorème 9 *Soit Y le processus défini dans la Proposition 4 et M la martingale intervenant dans la décomposition de Doob-Meyer de Y du Théorème 2. On a alors : $p^{US}(G) = Y_0$. Par ailleurs, la stratégie de couverture optimale associée à $p^{US}(G)$ coïncide avec la stratégie de couverture de l'option européenne de payoff $\beta_T^{-1} M_T$.*

Preuve. On note $p = Y_0 = M_0$ pour alléger les notations.
1. On montre tout d'abord que $p \geq p^{US}(G)$. Pour cela, on commence par déduire du Théorème 15 et de la Remarque 8 du Chapitre 1 qu'il existe $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $\tilde{V}_T^{p,\phi} = M_T$ $\mathbb{Q}$-p.s. et $\tilde{V}^{p,\phi}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. Comme M est également une $\mathbb{Q}$-martingale, ceci implique que $\tilde{V}^{p,\phi} = M \geq Y$ $\mathbb{Q}$-p.s., voir Théorème 2. Comme $Y \geq \tilde{G}$ $\mathbb{Q}$-p.s., ceci implique que $V^{p,\phi} \geq G$ $\mathbb{Q}$-p.s. et donc que $p \geq p^{US}(G)$.
2. On montre maintenant que $p \leq p^{US}(G)$. Soit $x > p^{US}(G)$. On peut alors trouver $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $\tilde{V}^{x,\phi} \geq \tilde{G}$ $\mathbb{Q}$-p.s. D'après la Remarque 8 du Chapitre 1, $\tilde{V}^{x,\phi}$ est alors une $\mathbb{Q}$-surmartingale. Comme elle domine $\tilde{G}$, elle domine, par définition, l'enveloppe de Snell Y de $\tilde{G}$. En particulier, on doit donc avoir $x > p$. Comme $x > p^{US}(G)$ est arbitraire, ceci montre le résultat recherché.
3. Puisque 1. et 2. montrent que $p = p^{US}(G)$, la stratégie de sur-réplication se déduit des arguments donnés en 1. □

Remarque 10 Puisque, d'après la Proposition 7, $Y^{\hat{\tau}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, elle coïncide nécessairement avec $M^{\hat{\tau}}$. Par ailleurs, la Remarque 8 du Chapitre 1 implique que si $(p, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ est tel que $\tilde{V}_T^{p,\phi} = M_T$ $\mathbb{Q}$-p.s. alors $\tilde{V}^{p,\phi}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale et donc $\tilde{V}^{p,\phi} = M$ $\mathbb{Q}$-p.s. Ceci implique $(\tilde{V}^{p,\phi})^{\hat{\tau}} = Y^{\hat{\tau}} = M^{\hat{\tau}}$ $\mathbb{Q}$-p.s.

On caractérise maintenant l'ensemble des prix viables pour l'option américaine. La décision d'exercice ou non de l'option à une date t donnée par le vendeur pouvant dépendre de toute l'information dont il dispose à cette date, c'est un évènement $\mathcal{F}_t$-mesurable. Ceci conduit naturellement à modéliser cette décision d'exercice comme un $(\mathbb{F}, \mathbb{T})$-temps d'arrêt.

On dit que le prix p est un prix *viable* pour l'option américaine si

1. $\nexists\ \phi \in \mathcal{A}$ t.q. $V_\tau^{x,\phi} - G_\tau \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ pour tout $\tau \in \mathcal{T}_0$
2. $\nexists\ (\phi, \tau) \in \mathcal{A} \times \mathcal{T}_0$ t.q. $V_\tau^{-x,\phi} + G_\tau \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$.

La première assertion implique qu'il n'y a pas d'arbitrage possible pour le vendeur, la seconde qu'il n'y a pas d'arbitrage possible pour l'acheteur.

Corollaire 11 *L'unique prix viable est $p^{US}(G)$.*

Preuve. On pose $x := p^{US}(G)$ pour alléger les notations.
1. On commence par montrer que $p^{US}(G)$ est viable.
1.a. On vérifie tout d'abord la condition 1. de la viabilité. Soit $\phi \in \mathcal{A}$. Si $V_T^{x,\phi} - G_T \in L^0(\mathbb{R}_+)$, alors la Remarque 8 du Chapitre 1 implique que $\tilde{V}^{x,\phi}$ est une martingale. Soit $\hat{\tau}$ le temps d'arrêt défini dans (3). D'après la Remarque 6 et la Proposition 7, $(\tilde{V}_{t\wedge\hat{\tau}}^{x,\phi} - Y_{t\wedge\hat{\tau}})_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. Comme $Y_{\hat{\tau}} = \tilde{G}_{\hat{\tau}}$, la Remarque 6 implique que $0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_{\hat{\tau}}^{x,\phi} - Y_{\hat{\tau}}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_{\hat{\tau}}^{x,\phi} - \tilde{G}_{\hat{\tau}}\right]$. Ceci implique que l'on ne peut avoir $V_{\hat{\tau}}^{x,\phi} - G_{\hat{\tau}} \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$.
1.b. On vérifie maintenant la condition 2. Supposons qu'il existe $(\phi, \tau) \in \mathcal{A} \times \mathcal{T}_0$ t.q. $V_\tau^{-x,\phi} + G_\tau \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. Alors, des arguments similaires à ceux utilisés ci-dessus implique que $-x + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G_\tau] > 0$. Ceci contredit la Proposition 8.
2. On montre maintenant que c'est l'unique prix viable. Soit p un prix.
2.a. Supposons que $p > p^{US}(G)$. Soit ϕ la stratégie de couverture de l'option G donnée par le Théorème 9. D'après l'équation de la richesse (4), on a $V^{p,\phi} = V^{x,\phi} + \beta^{-1}(p - x)$. Comme, d'après le Théorème 9, $V_t^{x,\phi} \geq G_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ $\mathbb{Q}$-p.s., on en déduit $V_\tau^{p,\phi} > G_\tau$ $\mathbb{Q}$-p.s. pour tout $\tau \in \mathcal{T}_0$. Ceci montre que p contredit 1. de la définition de la viabilité.
2.b. Supposons que $p < p^{US}(G)$. Soit ϕ la stratégie de couverture de l'option G donnée par le Théorème 9. D'après l'équation de la richesse (4), on a $V^{-p,-\phi} = V^{-x,-\phi} - \beta^{-1}(p - x) = -V^{x,\phi} + \beta^{-1}(x - p)$. Par ailleurs, on déduit de la Remarque 10 que $\tilde{G}_{\hat{\tau}} = \tilde{V}_{\hat{\tau}}^{x,\phi}$ ce qui implique que $V_{\hat{\tau}}^{-p,-\phi} + G_{\hat{\tau}} \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ ce qui contredit 2. de la définition de la viabilité. □

4 Stratégie d'exercice optimale

Les argments présentés dans la section précédente se généralisent facilement au cas d'une vente de l'option amériaine G à un temps $t \in \mathbb{T}$ quelconque. Dans ce cas, l'unique prix viable est $\beta_t^{-1} Y_t$.
L'acheteur initial n'a donc aucun intérêt à exercer son option avant le temps d'arrêt $\hat{\tau}$ défini dans (3) puisque dans ce cas il recevrait la *valeur d'exercice* G_t qui est strictement inférieure à la *valeur de continuation* $\beta_t^{-1} Y_t$ sur $\{t < \hat{\tau}\}$. Il

n'a pas non plus intérêt à l'exercer après $\hat{\tau}$. En effet, on sait que $M \geq Y$ alors que $M_{\hat{\tau}} = \tilde{G}_{\hat{\tau}}$ d'après la Remarque 10. La même remarque montre que si l'on suit la stratégie de couverture $\hat{\phi}$ du Theorem 9 entre $\hat{\tau}$ et T, on peut constituer un portefeuille de valeur $\beta^{-1}M$ sur cet intervalle. Ce portefeuille ayant une plus grande valeur que le prix de revente Y, il est toujours préférable de le constituer plutôt que de conserver l'option.
Ceci montre que, de manière rationnelle, le vendeur doit exercer son option au temps $\hat{\tau}$.

Excercice 12 *(Absence d'exercice anticipé pour le call américain sans dividendes)*
On considère un actif financier S de prix S_t à la date t. Un call américain est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer S à un prix K (strike) fixé à l'avance à une date t inférieure à T si l'acheteur exerce son option en t. On note C_t le prix à la date t du call européen de maturité T et de strike K et C_t^a le prix du call américain correspondant.
a. Montrer que $C_t^a \geq C_t$.
b. On suppose que $\mathbb{P}[S_T > K] > 0$ et que $\mathbb{P}[S_T < K] > 0$. Montrer qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage $C_t > [S_t - KB_t]^+$.
c. Montrer qu'il vaut toujours mieux vendre une option américaine plutôt que de l'exercer.
d. En déduire que $C_t^a = C_t$.

Chapitre 4

Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein est un modèle d'arbre binomial à un seul actif risqué. A chaque période, celui ne peut évoluer que de deux manières différentes. Bien que très restrictif, ce modèle sert souvent d'approximation au modèle en temps continu de Black et Scholès qui sera présenté ci-après.

1 Le modèle

Etant donnés deux réels distincts $d < u$ vérifiant $ud = 1$, on considère l'espace $\Omega = \{\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^T) \in \{d, u\}^T\}$ muni de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie par

$$\mathbb{P}[\omega] = p^{N_T(\omega)}(1-p)^{T-N_T(\omega)} \ , \ \omega \in \Omega$$

où p est un réel de $(0, 1)$ et

$$N_t(\omega) = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{1}_{w^j = u} \ , \ 1 \leq t \leq T \ ,$$

de sorte que $N_T(\omega)$ est le nombre de composantes de ω égales à u. On utilisera la convention $N_0 = 0$.

On suppose que le taux d'intérêt sans risque est constant et égal à $r > 0$. L'actif risqué est modélisé par le processus S défini par

$$S_t(\omega) := S_0 e^{bt} u^{N_t(\omega)} d^{t-N_t(\omega)} \ , \ t \in \mathbb{T}$$

avec $b \in \mathbb{R}$.

La filtration $\mathbb{F}$ est la filtration engendrée par S, i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, \ r \leq t)$.

2 (AOA) et évaluation d'options (exercice)

1. Montrer que, dans ce modèle, la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à

$$de^b < 1 + r < ue^b \ . \tag{1}$$

2. Montrer que sous la condition (1) il existe une unique mesure $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{M}(\tilde{S})$ et qu'elle est donnée par

$$\mathbb{Q}[\omega] = q^{N_T(\omega)}(1-q)^{T-N_T(\omega)} \ \ , \ \omega \in \Omega \tag{2}$$

avec

$$q := \frac{1 + r - e^b d}{e^b u - e^b d} \ . \tag{3}$$

3. On se donne une option européenne $G \in L^0(\mathcal{F}_T)$. Donner l'algorithme de calcul de son prix et de la stratégie de couverture.

4. Reprendre la question précédente pour une option américaine $G = (G_t)_{t\in\mathbb{T}} \in L^0(\mathbb{F})$.

3 Passage à la limite

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est souvent utilisé comme approximation en temps discret du modèle de Black et Scholès, modèle en temps continu qui sera présenté ci-après.
On fixe un horizon de temps T et on considère une suite de modèles à n périodes, $n \geq 1$. Ceci revient à considérer un pas de temps T/n qui tend vers 0. On considère alors la suite de modèles $(\mathcal{M}^n)_n$ définis comme dans la Section 1 avec (r, b, d, u) remplacés par

$$r_n := e^{rT/n} - 1 \ , \ b_n = b\frac{T}{n} \ , \ d_n := e^{-\sigma_n} \quad \text{et} \quad u_n := e^{\sigma_n}$$

où $\sigma_n := \sigma\sqrt{T/n}$, $r, b \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

La condition (1) de la Section 2 est bien vérifiée pour n suffisamment grand, de sorte que T/n devienne négligeable par rapport $\sqrt{T/n}$. Pour chaque modèle

$\mathcal{M}^n$, il existe donc une unique mesure risque neutre $\mathbb{Q}^n$ définie comme dans (2) et (3). Sous cette mesure S_T a la même loi que

$$S_0 e^{bT+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{k=1}^n Z_k^n}$$

sous $\mathbb{P}$ où $(Z_k^n)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ vérifiant

$$\mathbb{P}\left[Z_k^n = 1\right] = q_n := \frac{1+r_n - e^{b_n} d_n}{e^{b_n} u_n - e^{b_n} d_n} \ .$$

Si $G = g(S_T)$ est une option européenne, son prix dans le modèle $\mathcal{M}^n$ s'écrit donc

$$p_n(G) = \mathbb{E}\left[e^{-rT} g\left(S_0 e^{bT+\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{k=1}^n Z_k^n}\right)\right] \ .$$

Le passage à la limite lorsque $n \to \infty$ est justifié par la proposition suivante.

Proposition 1 *La suite $\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{k=1}^n Z_k^n$ tend en loi vers $(r-b-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T$ où W_T est une gaussienne centrée de variance T.*

Ceci implique immédiatement que

$$p_n(G) \longrightarrow \mathbb{E}\left[e^{-rT} g\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T}\right)\right]$$

pour tout fonction g continue bornée. On verra dans le Chapitre 8, que ce prix coïncide avec celui de l'option $g(S_T)$ dans le modèle de Black et Scholès associé au taux sans risque r et la volatilié σ.

Preuve de la Proposition 1. On note $X_n := \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{k=1}^n Z_k^n$ et ψ_n sa fonction caractéristique sous $\mathbb{P}$. Par indépendance des Z_k^n, on obtient que

$$\psi_n(t) \quad = \quad (f_n(t))^n \ ,$$

où

$$f_n(t) := \mathbb{E}\left[e^{it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Z_1^n}\right] = e^{it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} q_n + e^{-it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}(1-q_n) \ .$$

Il suffit alors de montrer que cette suite de fonctions caractéristiques converge vers celle d'une gaussienne de moyenne $m = (r-b-\frac{\sigma^2}{2})T$ et de variance $v = \sigma^2 T$. Pour cela, on montre que

$$f_n(t) \quad = \quad 1 + \frac{1}{n}\left(imt - vt^2/2\right) + o(\frac{1}{n}) \ .$$

$\square$

Nous renvoyons à [18] et [27] pour une analyse de la convergence des options barrières et américaines. Pour une approche très générale et pour plus de références sur le sujet, nous renvoyons à [35].

Chapitre 5

Compléments (exercices)

1 Modèle de taux de Ho et Lee

On considère un marché financier en temps discret construit sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans lequel les flux ne sont échangés qu'aux dates $1, 2, \ldots, T^*$ où T^* est un entier strictement positif. Par la suite, on notera $\mathbb{T} = \{1, \ldots, T^*\}$ et on munit $(\Omega, \mathcal{F})$ d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ supposée complète et vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_{T^*} = \mathcal{F}$.

On suppose qu'il existe un processus adapté strictement positif r et un actif financier, appelé actif sans risque, tel que 1 euro investi à la date t rapporte $1 + r_t$ euros à la date $t + 1$. Par la suite, on considérera le processus B defini par

$$B_t := \prod_{j=0}^{t-1} (1 + r_j) \ \ , \ t \leq T^* \ .$$

Un zéro coupon de maturité $T \leq T^*$ et de nominal 1 est un produit financier qui paie à son acheteur un unique flux de 1 en T. On note $P_t(T)$ son prix à la date $t \leq T$.

On suppose que, pour chaque $T \leq T^*$, il existe des processus adaptés strictement positifs $u(T)$ et $d(T)$ tels que

$$\mathbb{P}\left[\left\{P_{t+1}(T) = u_t(T)\frac{P_t(T)}{P_t(t+1)}\right\} \cup \left\{P_{t+1}(T) = d_t(T)\frac{P_t(T)}{P_t(t+1)}\right\}\right] = 1$$

$\forall \ 0 \leq t < T$,

$$u_t(T) > d_t(T) \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \ \ , \ \forall \ 0 \leq t < T - 1 \ .$$

On notera p le processus adapté défini par

$$p_t := \mathbb{P}\left[P_{t+1}(T) = u_t(T)P_t(T)/P_t(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right] ,$$

et on supposera qu'il est à valeurs dans $]0,1[$ si $t < T-1$.

1. Que vaut $P_T(T)$? Montrer que nécessairement $u_t(t+1) = d_t(t+1) = 1$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $t < T^*$. Par convention, on notera maintenant $P_t(T) := B_t/B_T$ si $t > T$.

2. On appelle stratégie financière $\phi = (\phi(1), \ldots, \phi(T^*))$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^{T^*}$. Ici, $\phi_t(T)$ correspond au montant investi dans le zéro coupon de maturité T entre t et $t+1$. On note $V^{x,\phi}$ la richesse associée à une dotation initiale $x \in \mathbb{R}$ et à une stratégie d'investissement ϕ. Donner la dynamique de la richesse $V^{x,\phi}$ sous la condition d'autofinancement.

3. Soit $t < T \le T^*$.
a. Montrer que $P_t(t+1) = B_t/B_{t+1} = (1+r_t)^{-1}$.
b. Rappeler la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage.
c. Soit $t < T-1$. Montrer que $\mathbb{P}\left[d_t(T) > 1\right] = 1$ implique $P_{t+1}(T) > P_t(T)B_{t+1}/B_t$ $\mathbb{P}-$p.s. En déduire qu'il existe alors un arbitrage (on exhibera la stratégie d'arbitrage).
d. Reprendre la question précédente en supposant seulement que $\mathbb{P}\left[d_t(T) \ge 1\right] > 0$.
e. Montrer que l'on ne peut pas non plus avoir $\mathbb{P}\left[u_t(T) \le 1\right] > 0$ pour $t < T-1$.
f. En déduire une condition sur u et d nécessaire à l'absence d'opportunité d'arbitrage.

4. On suppose maintenant que $u_t(T) > 1 > d_t(T)$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $t < T \le T^*$.
a. Montrer que, pour tout $T \le T^*$, il existe un unique processus adapté $q(T)$ à valeurs dans $]0,1[$ tel que

$$q_t(T)u_t(T)\frac{1}{P_t(t+1)} + (1-q_t(T))d_t(T)\frac{1}{P_t(t+1)} = \frac{B_{t+1}}{B_t} \ \ \mathbb{P}-\text{p.s.}\ ,\ \forall\, t < T\ .$$

b. Soit H le processus défini sur $\mathbb{T}$ par

$$H_t(T^*) := \prod_{j=0}^{t-1}\left(\frac{q_j(T^*)}{p_j(T^*)}\mathbf{1}_{A_j(T^*)} + \frac{(1-q_j(T^*))}{1-p_j(T^*)}\mathbf{1}_{A_j^c(T^*)}\right)$$

où $A_j(T) := \{P_{j+1}(T) = u_j(T)P_j(T)/P_j(j+1)\}$. Montrer que $H(T^*)$ est une $\mathbb{P}$-martingale sur $\mathbb{T}$.

c. Soit $\mathbb{Q}$ la mesure de densité $H_{T^*}(T^*)$ par rapport à $\mathbb{P}$. Montrer qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$.
d. Montrer que $\mathbb{Q}$ est l'unique mesure de probabilité sous laquelle $B^{-1}P(T^*)$ est une martingale.
e. En déduire qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage $B^{-1}P(T)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale pour tout $T \leq T^*$ et que

$$q_t(T^*)u_t(T) + (1 - q_t(T^*))d_t(T) = 1 \;\; \mathbb{P} - \text{p.s.} \; , \; \forall \, t < T \leq T^* \; .$$

5. On suppose à partir de maintenant que $u_t(T) = U(T-t)$ et $d_t(T) = D(T-t)$, où U et D sont des fonctions déterministes, et on définit la suite de variables aléatoires $(\xi_t(\delta))$ par

$$\xi_{t+1}(\delta) := U(\delta)\mathbf{1}_{A_t(t+\delta)} + D(\delta)\mathbf{1}_{A_t^c(t+\delta)} \;\; , \; t < T^* \; , \; \delta \leq T^* - t \; ,$$

de sorte que

$$P_t(T) = \xi_t(T - t + 1)\frac{P_{t-1}(T)}{P_{t-1}(t)} \; .$$

a. Montrer que

$$\prod_{j=0}^{t-1} P_j(j+1) = P_0(t) \prod_{j=1}^{t-1} \xi_j(t+1-j) \;\; , \; t \leq T^*$$

b. En déduire que

$$P_t(T) = \frac{P_0(T)}{P_0(t)} \frac{\prod_{j=1}^{t} \xi_j(T-j+1)}{\prod_{j=1}^{t-1} \xi_j(t-j+1)} \;\; , \; t \leq T \leq T^* \; .$$

c. Que vaut r_t en fonction de ξ et P_0 ?

Correction

1. $P_T(T) = 1$ puisque c'est le prix en T de l'actif payant 1 immédiatement. On a de même $P_{t+1}(t+1) = 1 = P_t(t+1)/P_t(t+1)$ ce qui implique que $u_t(t+1) = d_t(t+1) = 1$ nécessairement.
2. Si $V_t^{x,\phi}$ est la richesse en t, la condition d'autofinancement implique que

$$V_t^{x,\phi} = \langle \phi_t \; , \; \operatorname{diag}[P_t]^{-1} P_t \rangle + \left(V_t^{x,\phi} - \langle \phi_t \; , \; \mathbf{1} \rangle \right) B_t^{-1} B_t$$

où $\langle \cdot, \cdot, \rangle$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{T^*}$ et $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, et

$$\begin{aligned} V_{t+1}^{x,\phi} &= \langle \phi_t \ , \ \mathrm{diag}\,[P_t]^{-1}\, P_{t+1} \rangle \ + \left(V_t^{x,\phi} - \langle \phi_t \ , \ \mathbf{1} \rangle \right) B_t^{-1} B_{t+1} \\ &= \langle \phi_t \ , \ \mathrm{diag}\,[P_t]^{-1}\, P_{t+1} \rangle \ + \left(V_t^{x,\phi} - \langle \phi_t \ , \ \mathbf{1} \rangle \right) (1 + r_t) \ . \end{aligned}$$

avec $V_0^{x,\phi} = x$.

3.a. L'achat en t du zéro coupon de maturité $t+1$ coûte $P_t(t+1)$ en t et rapporte 1 en $t+1$. Le placement au taux sans risque du montant $(1+r_t)^{-1}$ sur la période $[t, t+1]$ coûte $(1+r_t)^{-1}$ en t et rapport 1 en $t+1$. En l'absence d'arbitrage, on doit donc avoir $P_t(t+1) = (1+r_t)^{-1}$ où $(1+r_t) = B_{t+1}/B_t$.

3.b. Voir cours pour la définition de l'absence d'opportunité d'arbitrage.

3.c. Soit $t < T$. Si $d_t(T) > 1$ $\mathbb{P} -$ p.s. alors $u_t(T) > d_t(T) > 1$ $\mathbb{P} -$ p.s. ce qui implique que $P_{t+1}(T) > P_t(T)/P_t(t+1) = P_t(T)B_{t+1}/B_t$ d'après la question précédente. On peut alors effectuer l'arbitrage suivant : on achète en t le zéro-coupon de maturité T et on le revend en $t+1$. L'achat est financé par un emprunt en t au taux sans risque r_t remboursé en $t+1$. Le coût net initial en t est nul, le gain en $t+1$ est $P_{t+1}(T) - P_t(T)(1+r_t) > 0$.

3.d. La variable $d_t(T)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable. On note $A := \{d_t(T) \geq 1\}$. Sur A, la condition $u_t(T) > d_t(T)$ $\mathbb{P}-$p.s. implique que $u_t(T) > d_t(T) \geq 1$. Si A se réalise à la date t, on peut reprendre la stratégie précédente. Quelle que soit l'évolution du prix la stratégie rapporte un gain positif. Ce gain est strictement positif si $P_{t+1}(T) = u_t(T)\frac{P_t(T)}{P_{t+1}(t+1)}$ ce qui arrive avec probabilité strictement positive.

3.e. On utilise la stratégie opposée de celle utilisée dans 3.d. sur l'évènement $\{u_t(T) \leq 1\}$.

3.f. D'après les deux dernières questions, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que $\mathbb{P}\left[u_t \leq 1\right] + \mathbb{P}\left[d_t \geq 1\right] = 0$ soit $u_t(T) > 1 > d_t(T)$ $\mathbb{P} -$ p.s.

4.a. Si $u_t(T) > 1 > d_t(T)$, alors $q_t(T) := (1 - d_t(T))/(u_t(T) - d_t(T)) \in (0,1)$ $\mathbb{P}-$p.s. vérifie $u_t(T)q_t(T) + d_t(T)(1 - q_t(T)) = 1$. Comme d'après 3.a., $P_t(t+1) = B_t/B_{t+1}$, on obtient le résultat attendu.

4.b. On a pour $t + 1 \leq T^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[H_{t+1}(T^*) \mid \mathcal{F}_t\right] &= H_t(T^*)\mathbb{E}\left[\frac{q_t(T^*)}{p_t(T^*)}\mathbf{1}_{A_t(T^*)} + \frac{1 - q_t(T^*)}{1 - p_t(T^*)}\mathbf{1}_{A_t^c(T^*)} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= H_t(T^*)\frac{q_t(T^*)}{p_t(T^*)}\mathbb{P}\left[A_t(T^*) \mid \mathcal{F}_t\right] + \frac{1 - q_t(T^*)}{1 - p_t(T^*)}\mathbb{P}\left[A_t^c(T^*) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= H_t(T^*)\frac{q_t(T^*)}{p_t(T^*)}p_t(T^*) + \frac{1 - q_t(T^*)}{1 - p_t(T^*)}(1 - p_t(T^*)) \\ &= H_t(T^*) \ . \end{aligned}$$

Une récurrence donne le résultat (l'espace de probabilité étant fini, il n'y a pas de problème d'intégrabilité).
4.c. Comme $H_0(T^*) := \mathbb{E}[H_1(T^*)] = 1 = \mathbb{E}[H_{T^*}(T^*)]$ d'après la question précédente, et que $H_{T^*}(T^*) > 0$, il s'agit bien d'une mesure de probabilité équivalente.
4.d. D'après 1., pour $t+1 = T^*$, on a $B_{t+1}^{-1}P_{t+1}(T^*) = B_{t+1}^{-1}P_t(T^*)/P_t(T^*) = B_{t+1}^{-1} = B_t^{-1}P_t(T^*)$ d'après 3.a. La propriété de martingale est donc automatique entre T^*-1 et T^*.
D'après la question 4.a., on a pour $t+1 < T^*$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_{t+1}^{-1}P_{t+1}(T^*) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&(H_t(T^*)B_{t+1})^{-1}\frac{P_t(T^*)}{P_t(t+1)}\mathbb{E}\left[H_{T^*}(T^*)\left(u_t(T^*)\mathbf{1}_{A_t(T^*)} + d_t(T^*)\mathbf{1}_{A_t^c(T^*)}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] .
\end{aligned}$$

Comme $H(T^*)$ est une $\mathbb{P}$-martingale, (u,d) est $\mathbb{F}$-adapté et $A_t(T^*)$ est $\mathcal{F}_{t+1}$-mesurable, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_{t+1}^{-1}P_{t+1}(T^*) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= (H_t(T^*)B_{t+1})^{-1}\frac{P_t(T^*)}{P_t(t+1)}\mathbb{E}\left[H_{t+1}(T^*)\left(u_t(T^*)\mathbf{1}_{A_t(T^*)} + d_t(T^*)\mathbf{1}_{A_t^c(T^*)}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= (H_t(T^*)B_{t+1})^{-1}\frac{P_t(T^*)}{P_t(t+1)}H_t(T^*) \\
&\mathbb{E}\left[\frac{q_t(T^*)}{p_t(T^*)}u_t(T^*)\mathbf{1}_{A_t(T^*)} + \frac{1-q_t(T^*)}{1-p_t(T^*)}d_t(T^*)\mathbf{1}_{A_t^c(T^*)} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= B_{t+1}^{-1}\frac{P_t(T^*)}{P_t(t+1)}\left(q_t(T^*)u_t(T^*) + (1-q_t(T^*))d_t(T^*)\right)
\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant 4.a. L'unicité provient de l'unicité de la solution de l'équation de la question 4.a. et du raisonnement précédent.
e. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, il doit exister une mesure martingale équivalente. Comme seule $\mathbb{Q}$ rend $B^{-1}P(T^*)$ martingale, c'est forcément celle-ci. L'équation se déduit des arguments de 4.d.
5.a. On a $P_j(j+1) = \xi_j(t-j)P_j(t)/P_{j+1}(t)$ d'où

$$\prod_{j=0}^{t-1} P_j(j+1) \quad = \quad \prod_{j=0}^{t-1} \xi_j(t-j)P_j(t)/P_{j+1}(t) = \frac{P_0(t)}{P_t(t)}\prod_{j=1}^{t-1}\xi_j(t+1-j)$$

or $P_t(t) = 1$. On peut changer les indices dans le produit car $\xi_{t-1}(1) = 1$.

5.b. On développe la formule de récurrence

$$\begin{aligned}
P_t(T) &= \xi_t(T-t+1)\frac{\xi_{t-1}(T-(t-1)+1)P_{t-2}(T)/P_{t-2}(t-1)}{P_{t-1}(t)} \\
&= \xi_t(T-t+1)\frac{\xi_{t-1}(T-(t-1)+1)P_{t-2}(T)}{P_{t-1}(t)P_{t-2}(t-1)} \\
&= \xi_t(T-t+1)\xi_{t-1}(T-(t-1)+1)\frac{\xi_{t-2}(T-(t-2)+1)P_{t-3}(T)}{P_{t-1}(t)P_{t-2}(t-1)P_{t-3}(t-2)} \\
&= P_0(T)\frac{\prod_{j=1}^{t}\xi_j(T-j+1)}{\prod_{j=1}^{t}P_{j-1}(j)}
\end{aligned}$$

et on conlut par la question précédente.

5.c. On sait d'après 3.a. que $r_t = P_t(t+1)^{-1}-1$. La question précédente implique que

$$r_t = \frac{P_0(t)}{P_0(t+1)}\frac{\prod_{j=1}^{t}\xi_j(t-j+1)}{\prod_{j=1}^{t}\xi_j(t+1-j+1)}.$$

2 Minimisation du risque quadratique de couverture

On considère un marché financier en temps discret sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t=1,\ldots,T}$ complète telle que $\mathcal{F}_0$ est triviale et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. On suppose qu'il y a un seul actif risqué S et que le taux sans risque est r constant. On note $\beta_t := (1+r)^{-t}$. On note $\tilde{S} := \beta S$. On suppose qu'il n'existe qu'une mesure martingale équivalente $\mathbb{Q}$ et on note $H := d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des processus adaptés (à valeur réelle). On note $V^{x,\phi}$ la valeur du portefeuille vérifiant $V_0^{x,\phi} = x$ où $\phi \in \mathcal{A}$ est tel que ϕ_t représente le nombre d'unités de S détenues entre t et $t+1$.

Etant donnée une variable aléatoire G, on définit, pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $\ell(\cdot, G(\omega)) : x \in \mathbb{R} \mapsto \ell(x, G(\omega)) = ([G(\omega)-x]^+)^2$ où $[z]^+ := \max\{z, 0\}$ pour $z \in \mathbb{R}$. Etant donné $p \in \mathbb{R}$, on définit enfin $u \ : \ \phi \in \mathcal{A} \mapsto u(\phi) := \mathbb{E}\left[\ell(V_T^{p,\phi}, G(\omega))\right]$.

1. Rappeler la dynamique de la richesse actualisée $\tilde{V}^{x,\phi}$ en terme de $\tilde{S}$.
2. Peut-on faire des arbitrages sur ce marché ?

3. Montrer que $p \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G] \Leftrightarrow \exists\, \phi \in \mathcal{A}$ tel que $u(\phi) = 0$.
4. On définit maintenant, pour tout $\omega \in \Omega$, $\tilde{\ell}(y, G(\omega)) := \sup_{x\in\mathbb{R}} (yx - \ell(x, G(\omega)))$. Montrer que si $y \leq 0$ alors $\tilde{\ell}(y, G) = I(y, G)y - \ell(I(y, G), G)$ où $I(y, G(\omega)) := y/2 + G(\omega)$.
5. On note $Y := \beta_T H$. Montrer que $u(\phi) \geq \lambda p - \mathbb{E}\left[\tilde{\ell}(\lambda Y, G)\right] =: v(\lambda)$ pour tout $\phi \in \mathcal{A}$ et $\lambda \leq 0$.
6. On suppose qu'il existe $\hat{\lambda} < 0$ tel que $v(\hat{\lambda}) = \sup_{\lambda<0} v(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T \tilde{\ell}'(\hat{\lambda} Y, G)\right] = p$ où $\tilde{\ell}'(y, G) := \partial\tilde{\ell}(y, G)/\partial y = I(y, G)$.
7. En déduire qu'il existe $\hat{\phi}$ qui minimise u sur $\mathcal{A}$ et qu'il vérifie $V_T^{p,\hat{\phi}} = G - |\hat{\lambda}|Y/2$. Un tel $\hat{\lambda} < 0$ peut-il exister si $p \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$?

3 Théorème de Kreps-Yan, Ω fini

On note x^j la j-ème composante d'un vecteur x de $\mathbb{R}^d$. Soit C un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^d$ tel que :
(i) $\lambda x \in C$ si $\lambda \geq 0$ et $x \in C$.
(ii) $(-\infty, 0]^d \subset C$.
(iii) $C \cap [0, \infty)^d = \{0\}$
On note e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ (i.e. sa i-ème composante vaut 1 et les autres 0).

1. Montrer que, pour tout $i \leq d$, il existe $Y_i \in \mathbb{R}^d$ tel que $\sup_{x\in C}\langle x, Y_i\rangle < \langle e_i, Y_i\rangle$.
2. En utilisant (i), montrer que $\sup_{x\in C}\langle x, Y_i\rangle = 0 < \langle e_i, Y_i\rangle$.
3. En déduire $Y_i^i > 0$ et montrer que $Y_i \in [0, \infty)^d$ (utiliser (ii)).
4. En déduire qu'il existe $Y \in (0, \infty)^d$ tel que $\langle x, Y\rangle \leq 0$ pour tout $x \in C$.
5. Interpréter ce résultat en finance (que représente C, Y ?).

4 Option américaine callable

Pour éviter tout problème d'intégrabilité, on suppose ici que Ω est fini. On considère un marché financier composé d'un actif sans risque, de rendement par période nul, $r = 0$, et d'un actif risqué dont le prix $S = (S_t)_{t\leq T}$ est un processus adapté. On suppose que S est une martingale sous $\mathbb{P}$ et que le marché est complet, i.e. toute variable aléatoire X admet la représentation $X = \mathbb{E}[X] + \sum_{t=0}^{T-1} \phi_t(S_{t+1} - S_t)$ pour une processus $\phi \in \mathcal{A}$, l'espace des processus à valeurs réelles adaptés.

Par la suite, étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{A}$, on note $V^{x,\phi}$ le processus de portefeuille associé : $V_s^{x,\phi} := x + \sum_{t=0}^{s-1} \phi_t(S_{t+1} - S_t)$, $s \leq T$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \ldots, T\}$. Etant donnés $\tau, \theta \in \mathcal{T}$, on note $G(\tau, \theta) := \ell_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq \theta} + L_\theta \mathbf{1}_{\tau > \theta}$ où ℓ, L sont deux processus adaptés à valeurs réelles vérifiant $\ell_t \leq L_t$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $t \leq T$.

1. Etant donnés $\theta, \tau \in \mathcal{T}$, on définit Y^θ et X^τ par

$$
\begin{aligned}
Y_T^\theta = G(T, \theta) \quad &, \quad Y_t^\theta = \max\{G(t, \theta)\ ,\ \mathbb{E}\left[Y_{t+1}^\theta \mid \mathcal{F}_t\right]\} \quad t \leq T - 1\ , \\
X_T^\tau = G(\tau, T) \quad &, \quad X_t^\tau = \min\{G(\tau, t)\ ,\ \mathbb{E}\left[X_{t+1}^\tau \mid \mathcal{F}_t\right]\} \quad t \leq T - 1\ .
\end{aligned}
$$

   (a) Caractériser Y^θ et X^τ en terme d'enveloppes de Snell de processus à préciser.

   (b) Montrer qu'il existe deux martingales M^θ et N^τ, ainsi que deux processus prévisibles croissants A^θ et B^τ vérifiant $A_0^\theta = B_0^\tau = 0$ tels que $Y^\theta = M^\theta - A^\theta$ et $X^\tau = N^\tau + B^\tau$.

   (c) Montrer que $X_\theta^\tau \leq Y_\tau^\theta$ $\mathbb{P}-$p.s. et en déduire que $X_{t\wedge\vartheta}^\tau \leq Y_{t\wedge\vartheta}^\theta$ pour tout $t \leq T$, où $\vartheta := \tau \wedge \theta$.

2. Soit l'option américaine callable de payoff G. Ici, τ s'interprète comme la date d'exercice de l'option par l'acheteur, et θ comme la date de rachat de l'option par le vendeur. Si $\tau \leq \theta$, l'acheteur reçoit du vendeur le montant ℓ_τ à la date τ. Si $\tau > \theta$, i.e. le vendeur rachète l'option avant qu'elle ne soit exercée, l'acheteur reçoit du vendeur le montant L_θ à la date θ. On suppose que l'option est vendue à la date 0 au prix p.

   (a) Montrer que si $p > y_0 := \inf_{\theta \in \mathcal{T}} Y_0^\theta$ alors le vendeur peut réaliser un arbitrage (quelle que soit la stratégie d'exercice de l'acheteur).

   (b) Montrer que si $p < x_0 := \sup_{\tau \in \mathcal{T}} X_0^\tau$ alors l'acheteur peut réaliser un arbitrage (quelle que soit la stratégie de rachat du vendeur).

3. On définit maintenant le processus Z par

$$
Z_T = \ell_T \quad , \quad Z_t = \min\{L_t\ ,\ \max\{\ell_t\ ,\ \mathbb{E}[Z_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\}\} \quad t \leq T - 1\ .
$$

   On note $\hat{\tau} := \inf\{t \geq 0\ :\ Z_t = \ell_t\}$, $\hat{\theta} := \inf\{t \geq 0\ :\ Z_t = L_t\} \wedge T$ et $\hat{\vartheta} := \hat{\tau} \wedge \hat{\theta}$.

(a) Montrer que $(Z_{t\wedge\hat{\theta}})_{t\leq T}$ est une sur-martingale minorée par le processus $(G(t,\hat{\theta}))_{t\leq T}$ et que $(Z_{t\wedge\hat{\tau}})_{t\leq T}$ est une sous-martingale majorée par le processus $(G(\hat{\tau},t))_{t\leq T}$.

(b) En déduire que $Y^{\hat{\theta}}_{t\wedge\hat{\vartheta}} = Z_{t\wedge\hat{\vartheta}} = X^{\hat{\tau}}_{t\wedge\hat{\vartheta}}$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $t \leq T$.

4. On peut maintenant calculer le prix compatible avant l'absence d'arbitrage et les stratégies de couverture et d'exercice.

   (a) Montrer que si l'option est échangée en 0 au prix Z_0 alors ni le vendeur ni l'acheteur ne peuvent réaliser un arbitrage.

   (b) Montrer qu'il existe une martingale $\bar{M}$ et un processus prévisible $\bar{A}$, nul en 0, tels que $Z = \bar{M} + \bar{A}$, $\bar{A}_{t\wedge\hat{\tau}} \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s. et $\bar{A}_{t\wedge\hat{\theta}} \leq 0$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $t \leq T$.

   (c) Montrer qu'il est rationnel pour le vendeur de racheter l'option au temps $\hat{\theta}$ (si elle n'a pas encore été exercée) et caractériser la stratégie de couverture de l'option en fonction de la représentation de $\bar{M}$ comme intégrale stochastique par rapport à S

   (d) Quelle est la date d'exercice optimale pour l'acheteur ? (justifier brièvement)

5 Options swing

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ satisfaisant les conditions habituelles, et telle que $\mathcal{F}_0$ est triviale. Ici, $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour éviter tout problème d'intégrabilité, on suppose que <u>Ω est fini</u>. On considère un marché financier composé d'un actif sans risque, de rendement par période nul (i.e. $r = 0$), et d'un actif risqué dont le prix $S = (S_t)_{t\leq T}$ est un processus adapté. On suppose que S est une martingale sous $\mathbb{P}$ et que le marché est complet, i.e. toute variable aléatoire X admet la représentation $X = \mathbb{E}[X] + \sum_{t=0}^{T-1} \phi_t(S_{t+1} - S_t)$ pour une processus $\phi \in \mathcal{A}$, l'espace des processus à valeurs réelles adaptés.

Par la suite, étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{A}$, on note $V^{x,\phi}$ le processus de portefeuille associé : $V^{x,\phi}_s := x + \sum_{t=0}^{s-1} \phi_t(S_{t+1} - S_t)$, $s \leq T$.

Soit G un processus adapté à valeur positive. Une option swing de payoff G à au plus N dates d'exercice ($2 \leq N \leq T$) est une option de type américain qui peut être exercée N fois avant T. A chaque date d'exercice τ, l'acheteur recoit le payoff G_τ. Il ne peut cependant pas exercer deux fois à la même date.

Afin de modéliser la stratégie d'exercice de l'acheteur, on définit l'ensemble $\mathcal{T}^N$ des N-uplets de temps d'arrêt $(\tau_N, \ldots, \tau_1)$ à valeur dans $\{0, \ldots, T\}$ tels que

$$\tau_{i+1} < \tau_i \;\; \mathbb{P} - \text{p.s.} \;\text{ et }\; \tau_{i+1} \leq T - i \;\text{ pour tout } i < N.$$

Ceci signifie que l'écart entre deux temps d'arrêt est d'au moins 1. On interprète τ_1 comme le dernier exercice, τ_2 comme l'avant dernier, etc.... L'indice i signifie qu'il reste i exercices y compris celui en question. Par ailleurs, le payoff étant positif, il est évident qu'il est sous-optimal d'avoir plus de i exercices restant après $T - i$.

1. Soit Y^1 le processus définit par

$$\begin{aligned} Y^1_T &= G_T \\ Y^1_t &= \max\left\{G_t \,,\, \mathbb{E}\left[Y^1_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right\} \quad \text{si } t < T\,. \end{aligned}$$

   (a) Quelle est l'interprétation financière de Y^1_t ?

   (b) Quelle est l'interprétation financière de $\tilde{\tau}^1 := \inf\{t \geq 0 \mid Y^1_t = G_t\}$?

On définit maintenant la suite $(Y^n)_{1 \leq n \leq N}$ comme suit : Y^1 est définit comme dans la question précédente et, pour $1 \leq n \leq N$,

$$Y^{n+1}_t = Y^n_t \quad \text{si } T - n < t \leq T \tag{1}$$

$$Y^{n+1}_t = \max\left\{G_t + \mathbb{E}\left[Y^n_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \,,\, \mathbb{E}\left[Y^{n+1}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]\right\} \quad \text{si } t \leq T - n \tag{2}$$

2. On étudie maintenant la propriété de sur-martingale des Y^n.

   (a) Montrer que Y^n est processus positif, pour tout $n \leq N$.

   (b) Montrer que $(Y^{n+1}_{t \wedge (T-n+1)})_{t \leq T}$ est une surmartingale pour tout $0 \leq n \leq N$ (aide : écrire la différence entre t et $t+1$ et distinguer le cas $t \leq T - n$ de son complémentaire).

   (c) En utilisant (1) et la question précédente, montrer que

$$Y^{n+1}_{T-n+1} = Y^n_{T-n+1} \geq \mathbb{E}\left[Y^n_{T-n+2} \mid \mathcal{F}_{T-n+1}\right] = \mathbb{E}\left[Y^{n+1}_{T-n+2} \mid \mathcal{F}_{T-n+1}\right]$$

   pour $2 \leq n \leq N$.

   (d) Utiliser une récurrence pour en déduire que Y^n est une surmartingale sur $[0, T]$ pour tout $1 \leq n \leq N$.

3. Etant donné $\nu := (\tau_N, \ldots, \tau_1) \in \mathcal{T}^N$, on définit

$$C_s^\nu := \sum_{i=N}^{1} G_{\tau_i} \mathbf{1}_{\tau_i \le s} \quad s \le T \ .$$

   (a) Donner une interprétation financière de $V^{x,\phi} - C^\nu$, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{A}$ et $\nu \in \mathcal{T}^N$.

   (b) Montrer qu'il existe $\phi \in \mathcal{A}$ tel $V_{\tau_N}^{Y_0^N,\phi} - C_{\tau_N}^\nu \ge \mathbb{E}\left[Y_{\tau_N+1}^{N-1} \mid \mathcal{F}_{\tau_N}\right]$ quel que soit $\nu := (\tau_N, \ldots, \tau_1) \in \mathcal{T}^N$ (aide : se rappeler que $\tau_N \le T-N+1$ par définition).

   (c) En déduire qu'il existe $\bar\phi \in \mathcal{A}$ tel $V_{\tau_N+1}^{Y_0^N,\bar\phi} - C_{\tau_N+1}^\nu \ge Y_{\tau_N+1}^{N-1} - G_{\tau_{N-1}} \mathbf{1}_{\{\tau_{N-1}=\tau_N+1\}}$ et $V_{\tau_{N-1}}^{Y_0^N,\bar\phi} - C_{\tau_{N-1}}^\nu \ge \mathbb{E}\left[Y_{\tau_{N-1}+1}^{N-2} \mid \mathcal{F}_{\tau_{N-1}}\right]$, quel que soit $\nu := (\tau_N, \ldots, \tau_1) \in \mathcal{T}^N$.

   (d) Montrer par récurrence qu'il existe $\hat\phi \in \mathcal{A}$ tel $V_{\tau_{k+1}}^{Y_0^N,\hat\phi} - C_{\tau_{k+1}}^\nu \ge \mathbb{E}\left[Y_{\tau_{k+1}+1}^{k} \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}}\right]$ pour tout $k < N$, quel que soit $\nu := (\tau_N, \ldots, \tau_1) \in \mathcal{T}^N$.

   (e) En déduire que

$$Y_0^N \ge p_N := \inf\{x \ge 0 \ : \ \exists\, \phi \in \mathcal{A} \text{ t.q. } V_s^{x,\phi} - C_s^\nu \ge 0 \ \forall\, s \le T \ , \ \forall\, \nu \in \mathcal{T}^N\} \ .$$

4. Soit $\hat\nu := (\hat\tau_N, \ldots, \hat\tau_1)$ le N-uplets de temps d'arrêt définit par

$$\begin{aligned}
\hat\tau_1 &:= \inf\{t > \hat\tau_2 \mid Y_t^1 = G_t\} \\
\hat\tau_n &:= \inf\{t > \hat\tau_{n+1} \mid Y_t^n = G_t + \mathbb{E}\left[Y_{t+1}^{n-1} \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbf{1}_{t<T}\} \quad \text{si } 2 \le n \le N \\
\hat\tau_{N+1} &:= -1 \ ,
\end{aligned}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

   (a) En utilisant le fait que $G \ge 0$, montrer que $\hat\tau_n \le T - n + 1$ pour tout $1 \le n \le N$.

   (b) Montrer que $(Y_{t\wedge\hat\tau_n}^n)_{t \le T}$ est une martingale, pour tout $1 \le n \le N$.

   (c) Soit $\phi \in \mathcal{A}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $V_s^{x,\phi} \ge C_s^{\hat\nu}$ pour tout $s \le T$.

      i. Montrer que

$$V_{\hat\tau_1}^{x,\phi} \ge C_{\hat\tau_1}^{\hat\nu} = C_{\hat\tau_1-1}^{\hat\nu} + G_{\hat\tau_1} = C_{\hat\tau_2}^{\hat\nu} + Y_{\hat\tau_1}^1$$

ii. En déduire que

$$V_{\hat{\tau}_2}^{x,\phi} \geq C_{\hat{\tau}_2}^{\hat{\nu}} + \mathbb{E}\left[Y_{\hat{\tau}_2+1}^1 \mid \mathcal{F}_{\hat{\tau}_2}\right] \geq C_{\hat{\tau}_3}^{\hat{\nu}} + Y_{\hat{\tau}_2}^2 \ .$$

iii. Déduire d'une récurrence que $V_0^{x,\phi} \geq Y_0^N$.

5. En utilisant les questions précédentes, montrer que $Y_0^N = p_N$.
6. Décrire la stratégie de couverture en fonction des représentions des parties martingales des Y^n.
7. Quelle est à votre avis la stratégie d'exercice optimale pour l'acheteur de l'option swing ? Expliquer brièvement pourquoi.

Deuxième partie

Marchés financiers en temps continu : Principes généraux

Chapitre 6

AOA et évaluation d'options dans un modèle d'Itô

A partir de maintenant, on travaille sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ supportant un mouvement brownien standard n-dimensionnel $W = (W^1, \ldots, W^n)$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la filtration naturelle engendrée par W, complétée. Ici, $\mathbb{T} = [0, T]$ où $T > 0$. On suppose que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, i.e. tout l'aléa est généré par W.

1 Actifs financiers, stratégies et portefeuilles

1.1 Actifs financiers

Le *taux sans risque* est modélisé par un processus $\mathbb{F}$-prévisible $r = (r_t)_{t\in\mathbb{T}}$, i.e. r_t est $\mathcal{F}_{t-}$-mesurable pour tout $t \in \mathbb{T}$. Un euro placé sur une intervalle dt rapporte un rendement $r_t dt$. Autrement dit, un euro placé à la date s rapporte à la date $t > s$ la somme $e^{\int_s^t r_u du}$. Ceci conduit à introduire le processus d'actualisation β défini par

$$\beta_t := e^{-\int_0^t r_u du} \quad , \; t \in \mathbb{T} \; .$$

On supposera par la suite que

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |r_t| < \infty \;\; \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

On suppose que l'on dispose en outre de d *actifs risqués* modélisés par un processus $S = (S^1, \ldots, S^d)$ vérifiant

$$S_t \;=\; S_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad , \; t \in \mathbb{T} \; . \tag{1}$$

Ici, $S_0 \in \mathbb{R}_+^d$ est fixé, (b, σ) est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}^{d,n}$. Un tel processus est bien défini dès que

$$\int_0^T \left(\|b_t\| + \|\sigma_t\|^2\right) dt < \infty \;\; \mathbb{P} - \text{p.s.} \tag{2}$$

On parle de *processus d'Itô* . On rappelle que la représentation précédente est unique (voir [24]).

Proposition 1 *Soient (b^i, σ^i), $i = 1, 2$, deux processus prévisibles à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}^{d,n}$ vérifiant chacun*

$$\int_0^T \left(\|b_t^i\| + \|\sigma_t^i\|^2\right) dt < \infty \;\; \mathbb{P} - p.s.$$

Si $\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$\int_0^t b_s^1 ds + \int_0^t \sigma_s^1 dW_s = \int_0^t b_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s^2 dW_s$$

alors

$$(b^1, \sigma^1) = (b^2, \sigma^2) \quad dt \times d\mathbb{P}\text{–p.p.}$$

Par la suite, on utilisera la notation

$$\tilde{S} = \beta S$$

pour désigner le processus de prix des actifs risqués actualisé. On peut remarquer qu'une simple application du Lemme d'Itô implique que

$$\tilde{S}_t \;=\; S_0 + \int_0^t (\tilde{b}_s - r_s \tilde{S}_s) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s dW_s \quad , \; t \in \mathbb{T} \tag{3}$$

où $(\tilde{b}, \tilde{\sigma}) = \beta(b, \sigma)$.

1.2 Stratégies et portefeuilles

Une stratégie financière est un processus $\mathbb{F}$-prévisible (α, ϕ) à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Pour chaque $i \leq d$ et $t \in \mathbb{T}$, ϕ_t^i représente la quantité d'actifs risqués S^i détenus dans le portefeuille et α_t la somme placée au taux sans risque.

La somme α_t placée au taux sans risque rapporte un rendement instantané $\alpha_t r_t dt$. La somme $\phi_t^i S_t^i$ placée en actif S^i induit un gain lié à la variation du cours de l'actif égal à $\phi_t^i dS_t^i$.

Par similitude avec les modèles en temps discret, on dira que la stratégie est *autofinancée* si la variation instantanée de la richesse V ne dépend que de la variation de cours des actifs risqués et du rendement du montant α_t placé au taux sans risque :

$$dV_t \quad = \quad r_t \alpha_t dt + \phi_t' dS_t$$

Comme la valeur du portefeuille s'écrit

$$V_t = \alpha_t + \langle \phi_t, S_t \rangle$$

on doit avoir

$$\alpha_t = V_t - \langle \phi_t, S_t \rangle \ ,$$

ce qui implique que

$$dV_t \quad = \quad (r_t V_t + \langle \phi_t, b_t - r_t S_t \rangle)\, dt + \phi_t' \sigma_t dW_t \ . \tag{4}$$

Par ailleurs, on déduit du Lemme d'Itô que la richesse actualisée $\tilde{V} = \beta V$ évolue alors selon l'équation

$$d\tilde{V}_t \quad = \quad \langle \phi_t, \tilde{b}_t - r_t \tilde{S}_t \rangle dt + \phi_t' \tilde{\sigma}_t dW_t = \phi_t' d\tilde{S}_t \ . \tag{5}$$

Par la suite, on notera $V^{x,\phi}$ (resp. $\tilde{V}^{x,\phi}$) le portefeuille (resp. actualisé) associé à une stratégie ϕ et valant x en 0.

De manière à pouvoir donner un sens aux équations (4) et (5), on se restreindra aux processus ϕ tels que

$$\int_0^T \left(\|\langle \phi_t, b_t \rangle\| + \|\langle \phi_t, S_t \rangle\| + \|\phi_t' \sigma_t\|^2 \right) dt \quad < \quad \infty \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \ ,$$

on rappelle que r est $\mathbb{P}-$ p.s. borné. Enfin, afin d'éviter des stratégies de type *doubling strategies* qui peuvent conduire à des arbitrages si l'on est prêt à s'endetter "infiniment", nous imposons une condition d'admissibilité de type *condition de non-banqueroute* :

$$\tilde{V}_t^{0,\phi} \quad \geq \quad -c_\phi^0 - \sum_{i=1}^{d} c_\phi^i \tilde{S}_t^i \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.} \;\; \text{pour tout } t \in \mathbb{T} \tag{6}$$

où $c_\phi^0, \ldots, c_\phi^d$ sont des constantes pouvant dépendre de ϕ.

On dira qu'une stratégie ϕ est *admissible* si elle vérifie les deux conditions précédentes et on notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des stratégies admissibles.

Remarque 2 La condition (6) implique que

$$\mathbb{P}\left[\forall\, q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T} \;:\; \tilde{V}_q^{0,\phi} \geq -c_\phi^0 - \sum_{i=1}^{d} c_\phi^i \tilde{S}_q^i\right] = 1\ .$$

Comme $\tilde{V}^{0,\phi}$ et $\tilde{S}$ sont des processus $\mathbb{P}-$ p.s. continus, voir le Corollaire du Théorème 30 du Chapitre IV de [36], elle est donc équivalente à

$$\tilde{V}_t^{0,\phi} \quad \geq \quad -c_\phi^0 - \sum_{i=1}^{d} c_\phi^i \tilde{S}_t^i \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T} \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

2 Absence d'opportunité d'arbitrage

On dira qu'il y a *absence d'opportunité d'arbitrage* si la condition

(AOA) : $\forall\, \phi \in \mathcal{A},\ V_T^{0,\phi} \geq 0\ \mathbb{P}-\text{p.s.} \Rightarrow V_T^{0,\phi} = 0\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$

est vérifiée.

2.1 Condition nécessaire

On commence par étudier une condition nécessaire qui caractérise l'absence d'opportunité d'arbitrage par l'existence d'une *prime de risque.*

Théorème 3 *Si (AOA) est vérifiée, alors il existe un processus $\mathbb{F}$-prévisible λ tel que*

$$\sigma\lambda = b - rS \qquad dt \times d\mathbb{P}-\text{p.p.}$$

Ce processus est appelé prime de risque.

La preuve de ce théorème repose sur la propriété selon laquelle le rendement instantané d'un *portefeuille sans risque*, i.e. tel que $\phi'\sigma = 0$, est nécessairement égal à r.

Proposition 4 *Si (AOA) est vérifiée, alors il n'existe pas de processus* $\phi \in \mathcal{A}$ *tel que*

$$\phi'\sigma = 0 \;\; dt \times d\mathbb{P}-\text{p.p.} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}\left[\int_0^T \mathbf{1}_{\{\phi_t'(b_t - r_t S_t)>0\}} dt > 0\right] > 0 \; .$$

Preuve. Supposons au contraire qu'il existe un processus $\phi \in \mathcal{A}$ tel que

$$\phi'\sigma = 0 \;\; dt \times d\mathbb{P}-\text{p.p.} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left[\int_0^T \mathbf{1}_{\{\phi_t'(b_t - r_t S_t)>0\}} dt > 0\right] > 0 \; .$$

On pose alors $\bar{\phi} = \phi \mathbf{1}_{\{\phi_t'(b_t - r_t S_t)>0\}}$. D'après (5),

$$\tilde{V}_t^{0,\bar{\phi}} \;\; = \;\; \int_0^t \phi_t'(\tilde{b}_t - r_t \tilde{S}_t) \mathbf{1}_{\{\phi_t'(b_t - r_t S_t)>0\}} ds \geq 0$$

et $\mathbb{P}\left[\tilde{V}_T^{0,\phi} > 0\right]$. Comme $\bar{\phi} \in \mathcal{A}$, ceci contredit l'hypothèse (AOA). □

Afin de compléter la preuve du Théorème 3 on fait maintenant appel au Lemme de Farkas.

Lemme 5 *(Lemme de Farkas) Soit* $(a, A) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}^{d,n}$. *S'il n'existe pas* $x \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $x'A = 0$ *et* $x'a > 0$*, alors il existe* $y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $a = Ay$*. Par ailleurs,* y *peut être choisi de manière mesurable par rapport à* (a, A)*.*

Preuve. Soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les vecteurs colonne de A. L'hypothèse signifie que $\text{Vect}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}^\perp \subset \text{Vect}\{a\}^\perp$ ce qui implique que $a \in \text{Vect}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Il existe donc $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $a = Ay$. Quitte à se ramener à une base orthogonale de $\text{Vect}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ par une procédure de Gram-Schmidt, on peut supposer que les ξ_i sont déjà orthogonaux. On obtient alors $y^i = \langle a, \xi_i \rangle / \|\xi_i\|^2$ si $\xi_i \neq 0$, $y^i = 0$ sinon. □

Preuve du Théorème 3. D'après la Proposition 4, on a $dt \times d\mathbb{P}$-p.p. $x'\sigma_t = 0$ implique $x'(b_t - r_t S_t) = 0$. D'après le Lemme 5, ceci implique qu'il existe λ_t tel que $(b_t - r_t S_t) = \sigma_t \lambda_t \;\; dt \times d\mathbb{P}$-p.p. Comme λ peut être contruit de manière mesurable par rapport à $(b - rS, \sigma)$, il peut être choisi de manière à être prévisible. □

Remarque 6 1. Si $n = d$ et σ_t est inversible alors $\lambda_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t S_t)$.
2. Si $\sigma_t'\sigma_t$ est inversible alors $\lambda_t = (\sigma_t'\sigma_t)^{-1}\sigma_t'(b_t - r_t S_t)$.

2.2 Condition suffisante

On donne maintenant une condition suffisante qui repose sur l'existence d'une *prime de risque* λ suffisamment "intégrable", voir la définition dans le Théorème 3.

Contrairement à ce que nous avons vu en temps discret, il n'est pas toujours possible d'exhiber un élément de $\mathcal{M}(\tilde{S})$, l'ensemble des mesures $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telles que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale[1]. Autrement dit, il n'existe pas toujours une *mesure martingale équivalente* et on est en général amené à considérer un ensemble de mesures plus gros : l'ensemble $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$ des mesures $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telles que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale, , i.e. il existe une suite de $\mathbb{F}$-temps d'arrêt[2] $(\tau_k)_{k\geq 1}$ telle que $\tau_k \to \infty$ $\mathbb{Q}$-p.s et $(\tilde{S}_{t\wedge\tau_k})_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, pour tout $k \geq 1$.
On parle de l'ensemble des *mesures martingales locales équivalentes.*

Théorème 7 *S'il existe une prime de risque λ telle que la solution H de l'équation*

$$H_t = 1 - \int_0^t H_s \lambda'_s dW_s$$

soit une $\mathbb{P}$-martingale, alors la mesure équivalente $\mathbb{Q}$ de densité H_T appartient à $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$.
Si $\tilde{V}^{x,\phi}$ est borné inférieurement par une $\mathbb{Q}$-martingale, alors $\tilde{V}^{x,\phi}$ est une $\mathbb{Q}$-surmartingale, $(x,\phi) \in \mathbb{R}\times\mathcal{A}$. C'est le cas en particulier si $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})$ et (AOA) est alors vérifiée.

Remarque 8 En appliquant le Lemme d'Itô, on vérifie que le processus H du Théorème 7 est donné par

$$H_t = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds - \int_0^t \lambda'_s dW_s} .$$

Dire que H est une martingale est alors équivalent à dire que $\mathbb{E}[H_T] = 1$. Une condition suffisante assurant ce résultat est la *condition de Novikov*

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds}\right] < \infty ,$$

[1]On rappelle que X est une $\mathbb{P}$-surmartingale si pour tout $s \leq t \leq T$: $X_t^- \in L^1(\mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$ $\mathbb{P}-$ p.s. Le processus X est une $\mathbb{P}$-martingale si X et $-X$ sont des surmartingales.

[2]On rappelle qu'un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt τ est une variable aléatoire positive telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

voir Proposition 5.12 dans [24]. Elle est en particulier vérifiée si λ est essentiellement borné.

La preuve du Théorème 7 repose sur le Théorème de Girsanov et quelques lemmes techniques.

Théorème 9 *(Théorème de Girsanov) Soit ξ un processus adapté $\mathbb{P}-p.s.$ de carré intégrable tel que la solution H de l'équation*

$$H_t = 1 - \int_0^t H_s \xi_s' dW_s$$

soit une $\mathbb{P}$-martingale, alors le processus $W^{\bar{\mathbb{Q}}}$ défini par

$$W^{\bar{\mathbb{Q}}} = W + \int_0^{\cdot} \xi_s ds$$

est un mouvement Brownien sous la mesure $\bar{\mathbb{Q}}$ de densité H_T.

Preuve. Voir Théorème 5.1 dans [24]. $\square$

On énonce maintenant deux résultats techniques.

Lemme 10 *Si ϕ est $\mathbb{P}-p.s.$ de carré intégrable et $\bar{W}$ est un mouvement brownien n-dimensionnel sous une mesure $\bar{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{P}$, alors le processus X défini par*

$$X_t = \int_0^t \xi_s' d\bar{W}_s \quad , \; t \in \mathbb{T} \; ,$$

est une $\bar{\mathbb{Q}}$-martingale locale.

Preuve. Voir la Proposition 2.24 dans [24]. $\square$

Théorème 11 *(Arrêt borné) Soient $\bar{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{P}$ et X une $\bar{\mathbb{Q}}$-surmartingale. Si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêts essentiellement bornés tels que $\tau_1 \leq \tau_2$ $\bar{Q}$-p.s., alors*

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{Q}}}[X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \quad \leq \quad X_{\tau_1} \; .$$

En particulier, si τ est un temps d'arrêt, alors le processus arrêté $(X_{t\wedge\tau})_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\bar{\mathbb{Q}}$-surmartingale.

Preuve. Comme la filtration est browienne, toute les martingales sont continues, voir Corollaire 1 du chapitre IV dans [36]. La première assertion provient alors du Théorème 16 du chapitre I de [36]. La seconde en est une conséquence immédiate. $\square$

Remarque 12 Le résultat précédent s'applique également aux martingales puisque X est une martingale si et seulement si X et $-X$ sont des surmartingales.

Lemme 13 *Soient $\bar{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{P}$, X une $\bar{\mathbb{Q}}$-martingale locale et M une $\bar{\mathbb{Q}}$-martingale telle que $X \geq M$ $\forall$ $t \in \mathbb{T}$ $\mathbb{P}$-p.p. Alors, X est une $\bar{\mathbb{Q}}$-surmartingale.*

Preuve. Soit $(\tau_k)_{k\geq 1}$ une suite de temps d'arrêt telle que $\tau_k \to \infty$ $\mathbb{Q}$-p.s et $(X_{t\wedge\tau_k})_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\bar{\mathbb{Q}}$-martingale, pour tout $k \geq 1$. Pour tout $k \geq 1$, on a, d'après le Théorème 11,

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{Q}}}[X_{t\wedge\tau_k} - M_{t\wedge\tau_k} \mid \mathcal{F}_s] \quad = \quad X_{s\wedge\tau_k} - M_{s\wedge\tau_k} \ .$$

Comme $X - M \geq 0$ et $(X, M)_{\cdot\wedge\tau_k} \to (X, M)$ $\bar{\mathbb{Q}}$-p.s., on déduit du Lemme de Fatou que

$$\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{Q}}}[X_t - M_t \mid \mathcal{F}_s] \quad \leq \quad X_s - M_s \ .$$

On conclut en rappelant que M est une $\bar{\mathbb{Q}}$-martingale. □

Preuve du Théorème 7. Le Théorème 9 implique que $W^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W^{\mathbb{Q}} = W + \int_0^{\cdot} \lambda_s ds$$

est un mouvement Brownien sous la mesure équivalente $\mathbb{Q}$ de densité H_T. D'après (3), on a

$$\tilde{S}_t \quad = \quad S_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}_s dW_s^{\mathbb{Q}} \quad , \; t \in \mathbb{T}$$

et la condition (2) impliquent que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. D'après (5), la dynamique de la richesse actualisé s'écrit alors

$$\tilde{V}_t^{0,\phi} \quad = \quad \int_0^t \phi_s' \tilde{\sigma}_s dW_s^{\mathbb{Q}} \ .$$

Les Lemmes 10 et 13 implique que la richesse actualisée est une $\mathbb{Q}$-surmartingale si elle est bornée inférieurement par une $\mathbb{Q}$-martingale. Etant donnée la condition d'admissibilité (6) et la Remarque 2, c'est le cas si $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})$. Ceci implique que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_T^{0,\phi}\right] \leq 0$ et donc que $\tilde{V}_T^{0,\phi} = 0$ $\mathbb{P}-$p.s. si $\tilde{V}_T^{0,\phi} \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s. La condition (AOA) et donc vérifiée. □

2.3 Condition nécessaire et suffisante

En général la condition (AOA) n'est pas suffisante pour obtenir l'existence d'une mesure de $\mathcal{M}(\tilde{S})$ et il est nécessaire de considérer une condition plus forte, portant sur une notion d'arbitrage plus faible. La condition la plus naturelle est celle du *no free-lunch with vanishing risk* proposée par [13].

On dit que la condition (NFLVR) est vérifiée s'il n'existe pas de suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{A}$ telle que
1. $(V_T^{0,\phi_n})^- \to 0$ en norme L^∞
2. $V_T^{0,\phi_n} \to f$ $\mathbb{P}-$p.s. où $f \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$.

Cette hypothèse signifie qu'il n'est pas possible de construire une suite de portefeuilles dont la valeur terminale tend uniformément vers 0 et qui à la limite conduit à un arbitrage. Autrement dit, il n'est pas possible de s'approcher aussi près que l'ont veut d'une situation d'arbitrage.

Théorème 14 *([13]) (NFLVR)* $\Leftrightarrow \mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S}) \neq \emptyset$.

Remarque 15 Il est clair que (NFLVR) implique qu'il n'y a pas d'arbitrage si l'on se restreint aux stratégies $\phi \in \mathcal{A}$ telles que $\tilde{V}^\phi$ est borné inferieurement par une constante c_ϕ. On appellera par la suite $\mathcal{A}_b$ cet ensemble de stratégies et (AOAb) la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage dans cette classe. En particulier, si $\phi \in \mathcal{A}_b$ alors $\tilde{V}^{0,\phi}$ est une sur-martingale sous $\mathbb{Q}$ quelle que soit $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$.

La proposition suivante permet de faire le lien entre $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$ et $\mathcal{M}(\tilde{S})$.

Proposition 16 *Soit* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$ *telle que* $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}} \|\tilde{S}_t\|\right] < \infty$, *alors* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})$.

Preuve. Comme chaque composante de $\tilde{S}$ (resp. $-\tilde{S}$) est bornée inférieurement par la martingale $(-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{s\in\mathbb{T}} \|\tilde{S}_s\| \mid \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}\right]$, le Lemme 13 implique que chaque composante de $\tilde{S}$ (resp. $-\tilde{S}$) est une $\mathbb{Q}$-surmartingale. $\square$

3 Evaluation d'options européennes

Comme dans la section précédente, on se restreint aux stratégies dans $\mathcal{A}_b$. Comme dans les modèles à temps discret, il existe deux notions de prix naturelles :

1. On dit qu'un prix p est *viable* pour l'option G si l'achat ou la vente de cette option à ce prix n'introduit pas d'arbitrage sur le marché, i.e. si

$$\nexists\, \phi \in \mathcal{A}_b \text{ et } \epsilon \in \{-1, 1\} \;\text{ t.q. }\; V_T^{\epsilon p,\phi} - \epsilon\, G \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}\ . \tag{7}$$

2. On dit que p est le *prix de sur-réplication* de G si

$$p = p(G) := \inf\{x \in \mathbb{R} \;:\; \exists\, \phi \in \mathcal{A}_b \;\text{ t.q. }\; V_T^{x,\phi} - G \in L^0(\mathbb{R}_+)\}\ . \tag{8}$$

Contrairement au temps discret, il est difficile ici de travailler avec la classe des actifs contingents dans L_S. Par la suite, on se restreint donc à la classe des options $G \in L^0$ tel que $\tilde{G}^-$ appartient à l'ensemble L^∞ des variables aléatoires essentiellement bornées.

Théorème 17 *([16]) Supposons que $\mathcal{M}_{\rm loc}(\tilde{S}) \neq \emptyset$ alors, pour tout $G \in L^0$ tel que $\tilde{G}^- \in L^\infty$,*

$$p(G) \;\;=\;\; \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\rm loc}(\tilde{S})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T G\right]\ .$$

Par ailleurs, il existe $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $V_T^{p(G),\phi} \geq G\ \mathbb{P} -$ p.s. si $p(G) < \infty$.

Ce théorème permet de décrire l'ensemble des prix viables.

Corollaire 18 *Supposons que $\mathcal{M}_{\rm loc}(\tilde{S}) \neq \emptyset$ alors, pour tout $G \in L^\infty$, l'ensemble des prix viables est donné par l'intérieure relatif de $[-p(-G), p(G)]$. En outre, il existe $\phi \in \mathcal{A}_b$ tel que $V_T^{p(G),\phi} = G\ \mathbb{P} -$ p.s. si et seulement si $-p(-G) = p(G)$.*

Preuve. Ce résultat découle du Théorème 17 par des arguments similaires à ceux utilisés pour prouver le Théorème 12 du Chapitre 1. □

4 Caractérisation des marchés complets

On dira que le marché est un *marché complet* si pour tout $G \in L^0$ tel que $|G| \in L^\infty$, il existe un couple $(p, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}_b$ tel que $V_T^{p,\phi} = G\ \mathbb{P} -$ p.s. Dans ce cas, on dit que G est *atteignable* ou *réplicable*.

4.1 Approche générale

Comme pour les marchés en temps discret, la complétude est caractérisée par l'unicité d'une mesure martingale (locale).

Théorème 19 *Supposons que $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S}) \neq \emptyset$. Alors le marché est complet si et seulement si $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$ est réduit à un singleton.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du Théorème 17 et du Corollaire 18. □

Le théorème précédent permet de montrer que, si $\mathbb{Q}$ est l'unique mesure martingale locale et si $\tilde{S}$ est une vraie $\mathbb{Q}$-martingale, alors les $\mathbb{Q}$-martingales admettent une représentation en terme de $\tilde{S}$. Pour le montrer, on fait appel au Théorème de représentation des martingales.

Théorème 20 *(Représentation des martingales) Si M est une $\mathbb{P}$-martingale, alors il existe ξ prévisible et $\mathbb{P}-p.s.$ de carré intégrable tel que*

$$M = M_0 - \int_0^{\cdot} \xi_s' dW_s \ .$$

Si $H \in L^1(\mathbb{P})$ vérifie $H > 0$ $\mathbb{P}-p.s.$, alors il existe ξ prévisible et $\mathbb{P}-p.s.$ de carré intégrable tel que

$$H = \mathbb{E}[H] e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} \|\xi_s\|^2 ds - \int_0^{\cdot} \xi_s' dW_s} \ .$$

Preuve. Voir Corollaires 3 et 4 p156 du Chapitre IV de [36]. □

Corollaire 21 *On suppose que $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S}) = \mathcal{M}(\tilde{S}) = \{\mathbb{Q}\}$. Alors,*
(i) il existe une prime de risque associée à $\mathbb{Q}$ vérifiant les conditions du Théorème 7,
(ii) toute $\mathbb{Q}$-martingale M vérifiant $|M_T| \in L_S$ admet la représentation $M = \tilde{V}^{M_0,\phi}$ pour un $\phi \in \mathcal{A}$,
(iii) $\tilde{V}^{M_0,\phi}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale pour tout pour $\phi \in \mathcal{A}$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que $|\tilde{V}_T^{p,\phi}| \in L_S$.

Preuve. (i) On pose H_T la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$. Soit ξ le processus prévisible intervenant dans la représentation de H_T donnée par le Théorème (20).

Alors, $H := (H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ défini par $H_t = \mathbb{E}\left[H_T \mid \mathcal{F}_t\right]$ est une martingale (martingale locale positive telle que $\mathbb{E}\left[H_T\right] = H_0 = 1$) vérifiant

$$H_t = 1 - \int_0^t H_s \xi_s' dW_s \, .$$

Dire que $\tilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale est équivalent à dire que $H\tilde{S}$ est une $\mathbb{P}$-martingale. Or le Lemme d'Itô et (3) impliquent que

$$(H\tilde{S})_t \quad = \quad S_0 + \int_0^t H_s(\tilde{b}_s - r_s\tilde{S}_s - \tilde{\sigma}_s\xi_s)ds + \int_0^t (H_s\tilde{\sigma}_s - H_s\tilde{S}_t\xi_s')dW_s \, .$$

On déduit alors de la Proposition 1 et du Théorème 20 que ξ est bien une *prime de risque* associée à $\mathbb{Q}$ vérifiant les conditions du Théorème 7.
(ii) D'après le Théorème 19, le Théorème 17 et le Corollaire 18 , il existe $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $M_T = \tilde{V}_T^{M_0,\phi}$. Comme d'après le Théorème 7, $\tilde{V}^{M_0,\phi}$ est une $\mathbb{Q}$-surmartingale, on en déduit que $M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[M_T \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_T^{M_0,\phi} \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \tilde{V}_t^{M_0,\phi}$ $\mathbb{P}-$p.s. Mais comme $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[M_t - \tilde{V}_t^{M_0,\phi}\right] \geq M_0 - M_0 = 0$, ceci montre que $M_t = \tilde{V}_t^{M_0,\phi}$ $\mathbb{P}-$ p.s. pour tout $t \leq T$. C'est donc $\mathbb{P}-$ p.s. vrai pour tout les rationnels de $\mathbb{T}$. Or, $V^{M_0,\phi}$ est continu et M aussi, de part la représentation du Théorème 20. L'égalité est donc $\mathbb{P}-$ p.s. vraie pour tout $t \in \mathbb{T}$.
(iii) La dernière assertion se montre de la même manière. □

4.2 Cas d'une volatilité inversible

On donne maintenant une condition suffisante qui porte plus explicitement sur les processus r, b et σ et qui est en général facilement vérifiable en pratique. Le cadre présenté ci-dessous permet également d'étendre la propriété de représentation du Corollaire 21 à une plus large classe de martingales.

On suppose dans cette sous-section qu'il existe une *prime de risque* λ telle que la solution H de l'équation

$$H_t = 1 - \int_0^t H_s \lambda_s' dW_s$$

soit une $\mathbb{P}$-martingale.

On note $\mathbb{Q}$ la mesure équivalente de densité H_T. D'après le Théorème 9, le processus

$$W^{\mathbb{Q}} = W + \int_0^{\cdot} \lambda_s ds$$

est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$, voir le Théorème 7.

Rappelons que la dynamique de la richesse actualisée s'écrit en terme de $W^{\mathbb{Q}}$

$$\tilde{V}_t^{0,\phi} = \int_0^t \phi_s' \tilde{\sigma}_s dW_s^{\mathbb{Q}} . \tag{9}$$

On suppose en outre que

S0. $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\tilde{S})$,

S1. $\tilde{\sigma}_t$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{T}$ $\mathbb{P} -$ p.s.,

S2. Son inverse $(\tilde{\sigma}_t)^{-1}$ est bornée uniformément sur $[0,T]$ $\mathbb{P} -$ p.s.

Remarque 22 Si λ vérifie la condition de *Novikov*, voir Remark 8, alors H est bien une $\mathbb{P}$-martingale. C'est en partuclier le cas si λ est bornée. Si en outre, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \|\tilde{\sigma}_t\|^2 dt\right] < \infty$ alors S0 est vérifié. C'est le cas si $H_T \in L^2$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\tilde{\sigma}_t\|^4 dt\right] < \infty$.

Proposition 23 *Sous les conditions S0, S1 et S2, le marché. Tout G tel que $\tilde{G}^- \in L_S$ s'écrit comme la valuer terminale d'un portefeuille issu de 0 et associé à une stratégie de $\mathcal{A}$. En outre, si M est une $\mathbb{Q}$-martingale vérifiant*

$$M_t \geq -c_M^0 - \sum_{i=1}^d c_M^i \tilde{S}_t^i \ \ \mathbb{P} - p.s. \ \ pour\ tout\ t \in \mathbb{T}$$

pour certaines constantes réelles $c_M^0, \cdots, c_M^d$, alors il existe $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $\tilde{V}^{M_0,\phi} = M$ $\mathbb{P} - p.s.$

Preuve. Soit G tel que $|\tilde{G}| \in L_S$. Comme $\tilde{S}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$, $\tilde{G} \in L^1(\mathbb{Q})$. Le processus $M := (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G} \mid \mathcal{F}_t\right])_{t\in\mathbb{T}}$ est donc une $\mathbb{Q}$-martingale qui en outre vérifie

$$M_t \geq -c_G^0 - \sum_{i=1}^d c_G^i \tilde{S}_t^i \ \ \mathbb{P} - \text{p.s. pour tout } t \in \mathbb{T}$$

pour certaines constantes réelles $c_G^0, \cdots, c_G^d$. Par ailleurs, le Théorème 20 implique qu'il est possible d'écrire M sous la forme

$$M = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}\right] + \int_0^{\cdot} \xi_s' dW_s^{\mathbb{Q}}$$

pour un certain processus prévisible ξ $\mathbb{P}-$ p.s. de carré intégrable. On déduit alors de (9) que le processus $\phi := (\xi'(\tilde{\sigma})^{-1})'$ vérifie

$$\tilde{V}^{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{G}],\phi} \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_T\right] + \int_0^{\cdot} \phi'_s \tilde{\sigma}_s dW_s^{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_T\right] + \int_0^{\cdot} \xi'_s dW_s^{\mathbb{Q}} = M$$

ainsi que la condition d'admissibilité pour $\mathcal{A}$. Enfin, comme ξ est $\mathbb{P}-$ p.s. de carré intégrable et $(\tilde{\sigma})^{-1}$ est bornée uniformément sur $[0,T]$ $\mathbb{P}-$ p.s., on vérifie bien que ϕ est $\mathbb{P}-$ p.s. de carré intégrable. □

5 Options américaines en marchés complets

On donne ici la formulation duale du prix de couverture des options américaines en marchés complets. C'est la contre-partie en temps continu du résultat démontré en temps discret dans le Chapitre 3.

On suppose que

S0'. $\{\mathbb{Q}\} = \mathcal{M}(\tilde{S}) = \mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$,

S1. $\tilde{\sigma}_t$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{T}$ $\mathbb{P}-$ p.s.,

S2. Son inverse $(\tilde{\sigma}_t)^{-1}$ est bornée uniformément sur $[0,T]$ $\mathbb{P}-$ p.s.

de sorte qu'il existe une *prime de risque* associée à $\mathbb{Q}$ vérifiant les conditions du Théorème 7, voir Corollaire 21.

Une option américaine est modélisée par un processus $G = (G_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Pour simplifier, on le supposera continu. On suppose également que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}} |\tilde{G}_t|\right] < \infty \quad , \quad |\tilde{G}| \le c_G^0 + \sum_{i=1}^{d} c_G^i \tilde{S}^i \;\; \mathbb{P}-\text{p.s.} \tag{10}$$

où $\tilde{G} = \beta G$ et $c_G^0, \ldots, c_G^d$ sont des constantes réelles.

Comme dans le Chapitre 3, on dit que le prix p est un prix *viable* pour l'option américaine si

1. $\nexists\ \phi \in \mathcal{A}$ t.q. $V_\tau^{x,\phi} - G_\tau \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ pour tout $\tau \in \mathcal{T}_0$
2. $\nexists\ (\phi,\tau) \in \mathcal{A} \times \mathcal{T}_0$ t.q. $V_\tau^{-x,\phi} + G_\tau \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$.

où $\mathcal{T}_t$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$, $t \in \mathbb{T}$.

Comme dans les marchés en temps discret, il n'y a qu'un prix viable en marché complet et il admet une représentation en terme de problème d'*arrêt optimal.*

Théorème 24 *Sous S0', S1 et S2, l'unique prix viable est donné par*

$$
\begin{aligned}
p(G) &:= \inf\left\{p \in \mathbb{R} \;:\; \exists\, \phi \in \mathcal{A} \; t.q. \; V_t^{p,\phi} \geq G_t \;\; \forall\, t \in \mathbb{T} \;,\; \mathbb{P}-p.s.\right\} \\
&= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_\tau\right] =: Y_0 \;.
\end{aligned}
$$

La preuve est sensiblement plus technique que celle présentée en temps discret dans le Chapitre 3 mais suit essentiellement les mêmes idées. On la découpe en plusieurs propositions. Certains résultats techniques intermédiaires, qui dépassent largement le cadre de ces notes, seront admis. Par la suite on travaille toujours sous S0', S1 et S2.

On montre tout d'abord que $p(G) \geq Y_0$.

Proposition 25 *On a* $p(G) \geq Y_0$.

Preuve. Si $p \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{A}$ sont tels que $V^{p,\phi} \geq G$ $\mathbb{P}-$ p.s., alors on déduit de S0', (10), du Théorème 7 et du Théorème 11 que $p \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_\tau^{p,\phi}\right] \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_\tau\right]$ pour tout $\tau \in \mathcal{T}_0$. Ceci implique que $p(G) \geq Y_0$. □

A $\vartheta \in \mathcal{T}_0$ fixé, on définit maintenant $\bar{Y}_\vartheta$ par[3]

$$
\bar{Y}_\vartheta \;:=\; \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_\vartheta} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_\tau \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] \quad ,
$$

où $\mathcal{T}_\vartheta$ est l'ensemble des temps d'arrêt de $\mathcal{T}_0$ $\mathbb{P}-$ p.s. plus grands que ϑ.

On commence par montrer que $(\bar{Y}_\vartheta,\; \vartheta \in \mathcal{T}_0)$ vérifie le *principe de programmation dynamique.*

Proposition 26 *(Programmation dynamique) Pour tout* $\vartheta \in \mathcal{T}_0$ *et* $\theta \in \mathcal{T}_\vartheta$*, on a* $\mathbb{P}-p.s.$

$$
\bar{Y}_\vartheta \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_\vartheta} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\bar{Y}_\theta \mathbf{1}_{\tau > \theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq \theta} \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] \;.
$$

Par ailleurs, $\bar{Y}_\vartheta \geq \tilde{G}_\vartheta$ $\mathbb{P}-p.s.$

[3]L'essentiel sup (esssup) d'une famille de variables aléatoires réelles est la plus petite variable aléatoire $\mathbb{P}-$p.s. plus grande que chaque élément de la famille. Si on prenait simplement le *sup*, la fonction ainsi définie pourrait ne pas être mesurable, et donc ne pas être une variable aléatoire.

Preuve. Tout d'abord, il est clair que $\vartheta \in \mathcal{T}_\vartheta$, ce qui implique que $\bar{Y}_\vartheta \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_\vartheta \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] = \tilde{G}_\vartheta$ et que

$$\tilde{G}_{\tau\wedge\theta} = \tilde{G}_\theta \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta} \leq \bar{Y}_\theta \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta}$$

d'où

$$\bar{Y}_\vartheta \quad \leq \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_\vartheta} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\bar{Y}_\theta \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta} \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] .$$

Il faut maintenant montrer l'inégalité opposée. On remarque tout d'abord que la famille $F := \{J_\mu := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_\mu \mid \mathcal{F}_\theta\right] : \mu \in \mathcal{T}_\theta\}$ est *filtrante* dans le sens où, si $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{T}_\theta$, alors il existe $\mu_3 \in \mathcal{T}_\theta$ tel que $J_{\mu_3} \geq \max\{J_{\mu_1}, J_{\mu_2}\}$ $\mathbb{P}-$p.s. Il suffit de prendre $\mu_3 = \mu_1 \mathbf{1}_A + \mu_2 \mathbf{1}_{A^c}$ où $A := \{J_{\mu_1} \geq J_{\mu_2}\} \in \mathcal{F}_\theta$. Ceci implique qu'il existe une suite $(\mu_n)_n$ de $\mathcal{T}_\theta$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow J_{\mu_n} \quad = \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\mu\in\mathcal{T}_\theta} J_\mu \ \ \mathbb{P}-\text{p.s.} ,$$

voir [32]. Par convergence monotone, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\bar{Y}_\theta \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta} \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] \quad &= \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_{\mu_n} \mid \mathcal{F}_\theta\right] \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta} \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G_{\mu_n} \mid \mathcal{F}_\theta\right] \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta} \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{G}_{\mu_n} \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta} \mid \mathcal{F}_\vartheta\right] .
\end{aligned}$$

Comme $\mu_n \mathbf{1}_{\tau>\theta} + \tau \mathbf{1}_{\tau\leq\theta} \in \mathcal{T}_\vartheta$, ceci implique l'inégalité recherchée. □

Il reste à montrer que $p(G) \leq Y_0$. Pour cela, on admet, voir [26], qu'il existe une $\mathbb{Q}$-surmartingale Y continue à droite qui aggrège $\bar{Y}$ au sens où $Y_\tau = \bar{Y}_\tau$ $\mathbb{P}-$p.s. pour tout $\tau \in \mathcal{T}_0$, et on utilise le théorème de décomposition des surmartingales.

Théorème 27 *(Décomposition de Doob-Meyer) Soit X une $\mathbb{Q}$-surmartingale continue à droite telle que la famille $\{X_\tau,\ \tau \in \mathcal{T}_0\}$ soit uniformément intégrable. Alors, il existe une $\mathbb{Q}$-martingale M et un processus croissant A nul en 0 tels que $X = M - A$.*

Corollaire 28 *On a $p(G) \leq Y_0$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 23, de la Proposition 26 et du Théorème 27. En effet, la condition (10) et le Théorème 11 impliquent que $Y \geq -c_G^0 - \sum_{i=1}^d c_G^i \tilde{S}^i \ \mathbb{P} -$ p.s. Il suffit alors de représenter par un processus de portefeuille $\tilde{V}^{M_0,\phi}$ la martingale $M \geq Y$ intervenant dans la décomposition de Doob-Meyer de Y et d'utiliser le fait que $Y = M - A \geq \tilde{G}$ ce qui implique que $M \geq \tilde{G}$ puisque A est croissant et nul en 0. Ceci montre que $p(G) \leq M_0 = Y_0$. □

L'unicité du prix viable découle des résultats précédents et des arguments déjà utilisés dans les modèles en temps discret.

Remarque 29 On peut montrer que

$$\hat{\tau} \ := \ \inf \left\{ t \in \mathbb{T} \ : \ Y_t = \tilde{G}_t \right\}$$

est optimal au sens où

$$p(G) = Y_0 \ = \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\tilde{G}_{\hat{\tau}} \right] \ ,$$

voir [26]. Ceci implique en particulier que $(Y_{t \wedge \hat{\tau}})_{t \in \mathbb{T}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Comme en temps discret, on peut également montrer que la seule stratégie d'exercice rationnelle pour l'acheteur consiste à exercer l'option au temps $\hat{\tau}$.

6 Gestion optimale de portefeuille en marchés complets

On aborde dans cette section le problème de gestion optimale de portefeuille dans le cadre d'un marché complet. On suppose qu'il existe une *prime de risque* λ vérifiant les conditions du Théorème 7. On note

$$H_t = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds - \int_0^t \lambda_s' dW_s}$$

de sorte que le processus $W^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W^{\mathbb{Q}} = W + \int_0^{\cdot} \lambda_s ds$$

est un mouvement Brownien sous la mesure $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\tilde{S})$ de densité H_T, voir la Remarque 8.

6.1 Maximisation d'utilité

On considère un agent financier dont les préférences sont modélisées par une *fonction d'utilité* U, i.e. une fonction concave et croissante. On suppose que

U1. la fermeture de $\mathrm{dom}(U) = \mathbb{R}_+$,
U2. U est C^2, strictement croissante et strictement concave,
U3. $\lim_{x \searrow 0} \nabla U(x) = +\infty$ et $\lim_{x \nearrow \infty} \nabla U(x) = 0$ (*Conditions d'Inada*).
L'objectif de l'agent est de maximiser l'espérance sous $\mathbb{P}$ de l'utilité de sa richesse terminale, i.e. étant donnée sa richesse initial $x > 0$, fixée, résoudre le problème d'optimisation :

$$u(x) := \sup_{\phi \in \mathcal{A}_U} \mathbb{E}\left[U(V_T^{x,\phi})\right] \tag{11}$$

où

$$\mathcal{A}_U \quad := \quad \left\{\phi \in \mathcal{A} \ : \ V^{x,\phi} \geq 0 \ \mathbb{P} - \text{p.s. \ et} \ \ U(V_T^{x,\phi})^- \in L^1(\mathbb{P})\right\} \ .$$

On montre dans cette section, comment l'utilisation de techniques de dualité permet une résolution rapide et "explicite" de ce problème.
Pour ce faire, nous aurons besoin de résultat sur la transformation de Fenchel d'une fonction concave.

Exercice (Transformée de Fenchel[4]) Soit f une fonction convexe semi-continue inférieurement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On note f^* sa transformée de Fenchel :

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x)) \ , \ y \in \mathbb{R} \ .$$

Soit $C := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \ : \ y \geq f(x)\}$. Etant donné $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R}^3$, on définit

$$F_{(\alpha,p,q)} := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \ : \ px + qy \leq \alpha\}$$

et $D := \{(\alpha, p, q) \in \mathbb{R}^3 \ : \ C \subset F_{(\alpha,p,q)}\}$.
- Montrer que C est convexe et fermé.
- En utilisant le théorème de séparation de Hahn-Banach, montrer que $C := \bigcap_{(\alpha,p,q) \in D} F_{(\alpha,p,q)}$.
- Montrer que $C \subset F_{(\alpha,p,q)}$ ssi $px + qy - \chi_C(x, y) \leq \alpha$ où $\chi_C(x, y) = 0\mathbf{1}_{(x,y) \in C} + \infty\mathbf{1}_{(x,y) \notin C}$

[4] Voir [38]

– En déduire que $C \subset F_{(\alpha,p,q)}$ ssi $\chi_C^*(p,q) \leq \alpha$.
– En déduire que $C = \bigcap_{(p,q)\in\mathbb{R}^2}\{(x,y) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\cup\{\infty\})\ :\ px+qy \leq \chi_C^*(p,q)\}$
– Calculer $\chi_C^*(p,q)$ en fonction de f^*.
– En déduire que $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\cup\{\infty\})\ :\ y \geq (f^*)^*(x)\} = C$ et que $(f^*)^* = f$.

Exercice (Transformation de Fenchel pour une fonction concave)
Soit U une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, strictement concave, croissante et C^1 sur son domaine. On note

$$\bar{U}(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}}(U(x) - xy)\ ,\ y \in \mathbb{R}\ .$$

On suppose que U vérifie les conditions U1, U2 et U3 ci-dessus.
– Montrer que $\bar{U}$ est la transformée de Fenchel d'une fonction convexe à déterminer en fonction de U.
– Monter que le domaine de $\bar{U}$ contient $(0,\infty)$. A quelle condition contient-il également le point 0 ?
– Montrer que $\bar{U}$ est convexe.
– Montrer que $\inf_{y\in\mathbb{R}}(\bar{U}(y) + xy) = U(x)$.
– Calculer $\bar{U}$ en fonction de U et $I := (U')^{-1}$.
– En utilisant le résultat précédent et la concavité de U montrer que $\bar{U}$ est C^1 sur l'intérieur de son domaine et que $\bar{U}' = -I$
– Caculer les transformées de Fenchel associées aux fonctions concaves : $\ln(x)$ et x^γ pour $\gamma \in (0,1)$.

Afin de résoudre le problème de gestion optimale, on commence donc par introduire la *transformée de Fenchel* $\bar{U}$ associée à la fonction concave U :

$$\bar{U}(y) \ := \ \sup_{x\in\mathrm{dom}(U)} (U(x) - xy)\ . \tag{12}$$

La condition $U3$ implique que cette fonction est bien définie sur $(0,\infty)$ et finie en 0 si et seulement si U est bornée. Par ailleurs, les conditions U2 et U3 impliquent que l'optimum dans le problème (12) est atteint en l'unique point $\hat{x}(y) > 0$ vérifiant $\nabla U(\hat{x}(y)) = y$. On a donc

$$\bar{U}(y) \ := \ U(I(y)) - I(y)y \quad \text{où} \ \ I(y) := (\nabla U)^{-1}(y)\ . \tag{13}$$

Soit $y > 0$ et $\phi \in \mathcal{A}_U$. D'après (12), on a

$$U(V_T^{x,\phi}) \ \leq \ \bar{U}(y\beta_T H_T) + V_T^{x,\phi} y\beta_T H_T\ ,$$

ce qui, d'après la dernière assertion du Théorème 7, implique

$$\mathbb{E}\left[U(V_T^{x,\phi})\right] \quad \leq \quad \mathbb{E}\left[\bar{U}(y\beta_T H_T)\right] + xy \ .$$

On en conclut que

$$\sup_{\phi \in \mathcal{A}_U} \mathbb{E}\left[U(V_T^{x,\phi})\right] \quad \leq \quad \inf_{y>0} \left(\mathbb{E}\left[\bar{U}(y\beta_T H_T)\right] + xy\right) \ . \tag{14}$$

En utilisant le Lemme suivant, on va montrer qu'on a en fait égalité.

Lemme 30 *Si* $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T I(y\beta_T H_T)\right] < \infty$ *pour tout* $y \in (0,\infty)$*, alors il existe un unique* $\hat{y} > 0$ *tel que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T I(\hat{y}\beta_T H_T)\right] \quad = \quad x \ . \tag{15}$$

Preuve. Les conditions U2 et U3 impliquent que $\mathbb{P}-$p.s. l'image de $(0,\infty)$ par $y \mapsto I(y\beta_T H_T)$ contient $(0,\infty)$ et que cette application est $\mathbb{P}-$ p.s. continue et strictement décroissante. En utilisant le théorème de convergence monotone, on vérifie alors que $y \in (0,\infty) \mapsto \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T I(y\beta_T H_T)\right]$ est continue, strictement décroissante et que l'image de $(0,\infty)$ par cette application contient $(0,\infty)$. □

D'après le Lemme précédent et (13), on a

$$\mathbb{E}\left[U(\hat{V})\right] \quad = \quad \mathbb{E}\left[\bar{U}(\hat{y}\beta_T H_T)\right] + x\hat{y} \quad \text{avec} \ \ \hat{V} := I(\hat{y}\beta_T H_T) \ .$$

Or, (15) et le Théorème 17 impliquent qu'il existe $\hat{\phi} \in \mathcal{A}$ tel que $V_T^{x,\hat{\phi}} = \hat{V}$. L'inéquation (14) permet alors de conclure que $\hat{\phi}$ est une stratégie optimale. On vérifie bien que $\hat{\phi} \in \mathcal{A}_U$ en utilisant l'inégalité $\bar{U}(y) \geq U(1) - y$ et (13). On peut donc énoncer le théorème d'existence suivant.

Théorème 31 *Sous les conditions du Lemme 30, il existe une stratégie de gestion optimale* $\hat{\phi}$ *et la valeur terminale du portefeuille optimal vérifie*

$$V_T^{x,\hat{\phi}} \quad = \quad I(\hat{y}\beta_T H_T)$$

où $\hat{y}$ *est l'unique solution de*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T I(\hat{y}\beta_T H_T)\right] \quad = \quad x \ .$$

Par ailleurs, d'après (5), on doit avoir

$$\tilde{V}_T^{x,\hat{\phi}} \quad = \quad x + \int_0^T \hat{\phi}_t' \tilde{\sigma}_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

et la condition $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_T^{x,\hat{\phi}}\right] = x$ implique que la $\mathbb{Q}$-surmartingale $\tilde{V}^{x,\hat{\phi}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Excercice 32 *Calculer la stratégie de gestion optimale quand σ est inversible $dt \times d\mathbb{P}$-p.p. et :*
1. $U(x) = \ln(x)$ (Utilité logarithmique).
2. $U(x) = x^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, (Utilité puissance).

6.2 Prix d'indifférence

Lorsque le marché est incomplet, le prix d'une option $G \in L^0(\mathcal{F}_T)$ n'est plus défini de manière unique. Une façon de sélectionner un prix dans la fourchette de prix viables est de considérer le *prix d'indifférence* qui a été introduit pour la première fois par Hodges et Neuberger. L'idée est la suivante. On considère tout d'abord le problème de maximisation d'utilité précédent :

$$u(x;0) := \sup_\phi \mathbb{E}\left[U(V_T^{x,\phi})\right] \ .$$

Puis, on considère le même problème lorsque l'agent vend l'option G au prix p. Dans ce cas, sa richesse est augmentée de p en 0 et diminuée de G en T. Il résout alors le problème :

$$u(x+p;1) := \sup_\phi \mathbb{E}\left[U(V_T^{x+p,\phi} - G)\right] \ .$$

Le prix d'indifférence p^I est défini par

$$p^I := \inf\{p \in \mathbb{R} \ : \ u(x+p;1) \geq u(x;0)\} \ .$$

Il est facile de vérifier que $p^I = p(G) = -p(-G)$ si le marché est complet et $|G| \in L_S$. D'une manière générale, on a toujours $p^I \leq p(G)$ si $G^- \in L_S$.

On peut également définir une notion de *prix marginal d'utilité* ou *prix de Davis* comme le prix p^D auquel l'agent est indifférent entre ne pas vendre l'option et en vendre une quantité infinitésimale :

$$\frac{\partial}{\partial q} u(x + qp^D; q) = 0$$

où

$$u(x+p;q) := \sup_{\phi} \mathbb{E}\left[U(V_T^{x+p,\phi} - qG)\right] .$$

La théorie générale de la dualité en marchés incomplets est trop compliquée pour être traitée ici, et de peu d'utilité pratique. Toutefois, les problèmes de gestion optimale en marchés incomplets peuvent être abordés à travers leur lien avec les équations aux dérivées partielles dans les modèles markoviens, voir la Section 4 du Chapitre 7.

6.3 Minimisation de l'erreur de couverture

On suppose maintenant que l'on veut couvrir une option de payoff aléatoire $G \in L^0(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ à partir d'une richesse initial $x > 0$ strictement inférieure au prix de couverture $p := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$. On utilise un critère de perte de la forme $\ell((G - V_T^{x,\phi})^+)$ dont on cherche à minimiser l'espérance :

$$\inf_{\phi \in \mathcal{A}_+(x)} \mathbb{E}\left[\ell((G - V_T^{x,\phi})^+)\right] \tag{16}$$

où $\mathcal{A}_+(x)$ est la restriction de $\mathcal{A}$ aux éléments ϕ tels que $V_T^{x,\phi} \geq 0$. Ici, la *fonction de perte* ℓ est C^1 strictement convexe croissante définie sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et telle que $\ell'(+\infty) = \infty$, $\ell'(0+) = 0$. Comme dans la sous-section précédente, on notera $I := (\nabla \ell)^{-1}$.

Théorème 33 *Il existe une solution optimale $\hat{\phi}$ au problème* (16) *qui vérifie*

$$V_T^{x,\hat{\phi}} = \hat{\varphi}$$

où

$$\hat{\varphi} := \mathbf{1}_{G>0} \left(1 - \frac{I(\hat{c}\beta_T H_T)}{G} \wedge 1\right)$$

avec $\hat{c} > 0$ tel que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T V_T^{x,\hat{\phi}}\right] = x .$$

Preuve. 1. Tout d'abord, on peut remarquer que

$$\mathbb{E}\left[\ell((G - V_T^{x,\phi})^+)\right] = \mathbb{E}\left[\ell(G(1 - \varphi^{\phi}))\right]$$

où $\varphi^\phi := [(V_T^{x,\phi}/G) \wedge 1]\mathbf{1}_{G>0}$ vérifie nécessairement $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T\varphi^\phi G\right] \leq x$. Réciproquement, si $\varphi \in L^0([0,1])$ vérifie la contrainte précédente, alors φG peut être atteint par un portefeuille financier admissible partant de la richesse initiale x, voir les sections précédentes. Le problème initial est donc équivalent au problème

$$\inf_{\varphi \in L^0([0,1])} \mathbb{E}\left[\ell((1-\varphi)G)\right] \tag{17}$$

sous la contrainte $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T\varphi G\right] \leq x$.

2. On vérifie maintenant qu'il existe une solution $\hat{\varphi}$ à ce problème en utilisant le lemme technique suivant.

Lemme 34 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoires uniformément bornées dans $L^1(\mathbb{P})$. Alors, il existe une suite $(\bar{X}_n)_n$ et $\bar{X}$ de $L^1(\mathbb{P})$ tels que $\bar{X}_n \to \bar{X}$ $\mathbb{P}$-p.s. et*

$$\bar{X}_n \in conv(X_k,\ k \geq n) \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

pour tout $n \geq 1$.

Comme $\varphi \mapsto \mathbb{E}\left[\ell(G(1-\varphi))\right]$ est convexe, on déduit du Lemme précédent qu'il existe une suite minimisante $(\varphi_n)_n$ qui converge $\mathbb{P}$-p.s. vers un élément $\hat{\varphi}$ de $L^0([0,1])$. On conclut alors en utilisant le Lemme de Fatou et le fait que $\ell \geq 0$.

3. A $\varphi \in L^0([0,1])$ et $\varepsilon \in [0,1]$, on associe

$$\varphi_\varepsilon := \varepsilon\varphi + (1-\varepsilon)\hat{\varphi}$$

et on définit

$$F_\varphi(\varepsilon) := \mathbb{E}\left[\ell((1-\varphi_\varepsilon)G)\right] \ .$$

Il est facile de vérifier par des arguments de convergence monotone que la dérivée à droite en 0 de F_φ existe et vérifie

$$\nabla F_\varphi(0+) = \mathbb{E}\left[\nabla\ell((1-\hat{\varphi})G)(\hat{\varphi}-\varphi)G\right] \ .$$

Comme F_φ est bien évidemment convexe, dire que $\hat{\varphi}$ est optimal, revient à dire que $\nabla F_\varphi(0+) \geq 0$ quel que soit $\varphi \in L^0([0,1])$. Ceci revient à dire que $\hat{\varphi}$ vérifie

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}}\left[\hat{\varphi}\right] \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}}\left[\varphi\right] \tag{18}$$

quel que soit $\varphi \in L^0([0,1])$ tel que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_G}[\varphi] \leq \alpha := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_G}[\hat{\varphi}] \tag{19}$$

où $\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}$ et $\mathbb{Q}_G$ sont les mesures associées aux densités

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}}{d\mathbb{P}} &= \nabla\ell((1-\hat{\varphi})G)G/\mathbb{E}\left[\nabla\ell((1-\hat{\varphi})G)G\right] \\ \frac{d\mathbb{Q}_G}{d\mathbb{Q}} &= \beta_T G/\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_T G\right] \end{aligned}$$

Mais ceci peut s'interpréter en terme de test aléatoire : il s'agit de tester l'hypothèse $\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}$ contre l'hypothèse $\mathbb{Q}_G$ au niveau α. D'après le Lemme de Neyman et Pearson[5], le test optimal $\hat{\varphi}$ vaut 0 si $d\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}/d\mathbb{P} < c\ d\mathbb{Q}_G/d\mathbb{P}$ et 1 si $d\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}/d\mathbb{P} > c\ d\mathbb{Q}_G/d\mathbb{P}$, pour une certaine constante c à calculer à partir du niveau du test. Sur $\{G = 0\}$, aucune des deux conditions ci-dessus n'est vérifiée, on peut donc choisir $\hat{\varphi} = 0$. Par ailleurs, on doit avoir $\hat{\varphi} < 1$ si $G > 0$ car $\nabla\ell(0) = 0$ et le contraire impliquerait une contradiction. Ceci implique que l'on se trouve toujours dans la région $d\mathbb{Q}_{\hat{\varphi}}/d\mathbb{Q}_G \leq c$ sur $\{G > 0\}$. Ceci conduit à la définition de $\hat{\varphi}$ donnée dans l'énoncé du théorème. Il reste à montrer que l'on peut trouver $\hat{c} > 0$ vérifiant (19) mais ceci se fait en reprenant des arguments de convergence monotone déjà utilisés dans la preuve du Lemme 30 et en utilisant le fait que $x < p$. □

[5]Lemme de Neyman et Pearson Si $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$ sont deux mesures de probabilité absolument continues par rapport à une mesure de référence $\mathbb{Q}$ et si $\alpha \in]0,1[$, alors une solution au problème

$$\sup\left\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[\xi]\ :\ \xi \in L^0([0,1]),\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\xi] \leq \alpha\right\},$$

est donnée par

$$\hat{\xi} := \mathbf{1}_{\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{Q}} > \hat{a}\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{Q}}} + \hat{\gamma}\mathbf{1}_{\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{Q}} = \hat{a}\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{Q}}}$$

où

$$\hat{a} := \inf\left\{a > 0\ :\ \mathbb{P}_0\left[\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{Q}} > a\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{Q}}\right] \leq \alpha\right\}$$

et $\hat{\gamma} \in [0,1]$ est tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}\left[\hat{\xi}\right] = \alpha$.

Ici ξ est un test aléatoire de l'hypothèse $\mathrm{Hyp}_0 : \mathbb{P}_0$ contre $\mathrm{Hyp}_1 : \mathbb{P}_1$. Pour la réalisation $\xi(\omega) = p$, on accepte Hyp_0 avec probabilité $1-p$. $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\xi]$ correspond à la probabilité de rejeter Hyp_0 alors que Hyp_0 est vrai (risque de première espèce), et $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[\xi]$ correspond à la probabilité de rejeter Hyp_0 alors que Hyp_0 est effectivement faux (puissance du test). $\hat{\xi}$ est un test UPP au seuil α.

6.4 Maximisation du ratio de succès

On cherche maintenant à maximiser le ratio de succès défini par

$$R^{x,\phi} := \frac{V_T^{x,\phi}}{G}\mathbf{1}_{V_T^{x,\phi}<G} + \mathbf{1}_{V_T^{x,\phi}\geq G}$$

avec $0 \leq x < \bar{x} := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$ où $\{\mathbb{Q}\} = \mathcal{M}(\tilde{S})$. Montrez que le probème

$$\sup_{\phi\in\mathcal{A}_+(x)} \mathbb{E}\left[R^{x,\phi}\right]$$

est équivalent à (même valeur et lien entre les optima s'ils existent)

$$\sup\left\{\mathbb{E}[\xi] \ : \ \xi \in L^0([0,1]), \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^G}[\xi] \leq x/\bar{x}\right\} ,$$

où $\mathbb{Q}^G$ est la mesure absolument continue par rapport à $\mathbb{Q}$ définie par $d\mathbb{Q}^G/d\mathbb{Q} = \beta_T G/\bar{x}$. En utilisant le Lemme de Neyman et Pearson (ci-dessus), trouvez la solution $\hat{\xi}$ du second problème et en déduire la stratégie optimale $\hat{\phi}$ du premier.

7 Remarque sur les modèles avec dividendes

Dans certains modèles, on suppose que les actifs S paient un dividende dont la valeur cumulée est modélisée par un processus prévisible cadlag C. Dans ce cas, la dynamique des actifs risqués s'écrit

$$S_t \;=\; S_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s - C_t \quad , \; t \in \mathbb{T} ,$$

car la valeur du dividende payé doit venir diminuer la valeur de l'actif sous peine d'arbitrage.

Si l'on détient une quantité ϕ_t^i d'actif i à l'instant t, on reçoit alors un dividende égal à $\phi_t^i dC_t^i$ sur la période $[t, t+dt]$. La dynamique de la richesse s'écrit donc

$$dV_t \;=\; [r_t(V_t - \langle\phi_t, S_t\rangle)]\,dt + \phi_t' dC_t + \phi_t' dS_t ,$$

voir la Section 1.2. Ceci implique que

$$dV_t \;=\; (r_t V_t + \langle\phi_t, b_t - r_t S_t\rangle)\,dt + \phi_t'\sigma_t dW_t .$$

Autrement dit, la présence du dividende ne change pas la dynamique de la richesse. Si l'on note $\tilde{Z} := \tilde{S} + \tilde{C}$, on a alors

$$\tilde{Z}_t \;=\; S_0 + \int_0^t (\tilde{b}_s - r_s\tilde{S}_s)ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s dW_s \quad , \; t \in \mathbb{T} ,$$

et

$$d\tilde{V}_t \quad = \quad \Big(\langle \phi_t, \tilde{b}_t - r_t \tilde{S}_t \rangle\Big)\, dt + \phi_t' \tilde{\sigma}_t dW_t \ = \phi_t' d\tilde{Z}_t \ .$$

Tout se passe donc comme si l'on investissait dans l'actif $\tilde{Z}$ et non dans $\tilde{S}$. Les résultats présentés précédemment restent donc valables si l'on remplace $\mathcal{M}(\tilde{S})$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\tilde{S})$) par l'ensemble des mesures équivalentes sous lesquelles $\tilde{Z}$ est une martingale (resp. locale). Dans ce cas, il faut également remplacer $\tilde{S}$ par $\tilde{Z}$ dans la définition de L_S, etc...

Chapitre 7

Evaluation et gestion par EDP

L'objectif de ce chapitre est de présenter le lien entre les problèmes d'évaluation d'actifs contingents ou de gestion de portefeuille et les Equations aux Dérivées Partielles (EDP).

1 Modèle markovien

On travaille toujours sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ supportant un mouvement brownien standard n-dimensionnel $W = (W^1, \ldots, W^n)$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ la filtration naturelle engendrée par W, complétée, $\mathbb{T} := [0, T]$ où $T > 0$, et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

On considère un marché où le taux court sans risque r et les actifs risqués $S = (S^1, \ldots, S^d)$ évoluent sur $[0, T]$ selon la dynamique

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 + \int_0^t b(r_u, S_u)du + \int_0^t a(r_u, S_u)dW_u \\ S_t &= s_0 + \int_0^t \operatorname{diag}[S_u]\, \mu(r_u, S_u)du + \int_0^t \operatorname{diag}[S_u]\, \sigma(r_u, S_u)dW_u \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Ici, (b, a, μ, σ) est une fonction de $\mathbb{R}^{1+d}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{M}^{1,n} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}^{d,n}$ continue, $s_0 \in (0, \infty)^d$ et $r_0 > 0$.

Dans ce chapitre, on supposera toujours que (3) admet une solution forte unique quelle que soit la condition initiale $\gamma_0 = (t_0, r_0, s_0) \in [0, T) \times (0, \infty)^{1+d}$. Sous ces conditions, le modèle est markovien. Ce processus vérifie même la propriété de Markov forte. Par ailleurs, sa loi conditionnelle admet une version régulière, voir Théorème 3.19 p 307 dans [24]

Pour simplifier la présentation, on supposera également que $r > 0$ $\mathbb{P}-$p.s. quel que soit sa condition initiale $r_0 > 0$.

On peut remarquer que le processus de prix actualisé $\tilde{S}$ évolue alors selon la dynamique :

$$\tilde{S}_t = s_0 + \int_0^t \mathrm{diag}\left[\tilde{S}_u\right](\mu(r_u, S_u) - r_u)\,du + \int_0^t \mathrm{diag}\left[\tilde{S}_u\right]\sigma(r_u, S_u)dW_u \ , \quad (2)$$

voir (3) du Chapitre 6.

2 Formule de Feynman-Kac et options européennes

On suppose dans cette section qu'il existe une mesure martingale équivalente $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\tilde{S})$ et un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien $W^{\mathbb{Q}}$ tel que

$$W^{\mathbb{Q}} = W + \int_0^{\cdot} \lambda(r_u, S_u)du$$

où λ est une application de $\mathbb{R}^{1+d}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\mu(r, S) - r = \sigma(r, S)\lambda(r, S) \ .$$

On a alors

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 + \int_0^t (b - a\lambda)(r_u, S_u)du + \int_0^t a(r_u, S_u)dW_u^{\mathbb{Q}} \\ S_t &= s_0 + \int_0^t r_u S_u du + \int_0^t \mathrm{diag}\left[S_u\right]\sigma(r_u, S_u)dW_u^{\mathbb{Q}} \quad , t \in \mathbb{T} \ . \end{aligned} \quad (3)$$

D'après les résultats du Chapitre 6, le marché n'admet pas d'arbitrage.

Soit g une application de $\mathbb{R}^{1+d}$ dans $\mathbb{R}_+$. D'après les résultats du Chapitre 6,

$$p(0, r_0, s_0) \ := \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u ds} g(r_T, S_T)\right] \quad (4)$$

est un prix viable à la date 0 pour l'option de payoff $g(r_T, S_T)$ en T. Comme (r, S) est un processus de Markov fort, le prix à l'instant $\tau \in \mathcal{T}_0$ est donné par

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_\tau^T r_s ds} g(r_T, S_T) \mid \mathcal{F}_\tau\right] \ = \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_\tau^T r_s ds} g(r_T, S_T) \mid (r_\tau, S_\tau)\right] \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Comme on peut trouver une version régulière de la loi conditionnelle de $(r_s, S_s)_{s\geq t}$ sachant (r_t, S_t), cela implique qu'il existe une fonction mesurable p sur $\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{1+d}$ telle que

$$p(\tau, r_\tau, S_\tau) \ = \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_\tau^T r_u du} g(r_T, S_T) \mid (r_\tau, S_\tau)\right] \ \ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

On a alors, pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_0$,

$$
\begin{aligned}
p(0, r_0, s_0) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_u du}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_\tau^T r_u du} g(r_T, S_T) \mid \mathcal{F}_\tau\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_u du}\, p(\tau, r_\tau, S_\tau)\right]. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

C'est ce que l'on appelle le *principe de programmation dynamique.*

C'est ce principe qui est à la base de la caractérisation suivante de p en terme d'EDP.

Théorème 1 *(Feynman-Kac) Supposons que p soit $C^{1,2}([0,T) \times (0,\infty)^{1+d}) \cap C^{0,0}((0,T] \times (0,\infty)^{1+d})$. Alors, p est solution sur $[0,T) \times (0,\infty)^{1+d}$ de*

$$
rp - \mathcal{L}p = 0 \qquad (6)
$$

où

$$
\mathcal{L}p := \nabla_t p + (\nabla_{(r,s)} p)\, \beta + \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\left[\Gamma\Gamma' \,(\nabla^2_{(r,s)}\, p)\right]
$$

avec

$$
\beta(r,s) := \begin{pmatrix} (b - a\lambda)(r,s) \\ sr \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma(r,s) := \begin{pmatrix} a(r,s) \\ \mathrm{diag}\,[s]\, \sigma(r,s) \end{pmatrix} ,
$$

avec condition terminale

$$
p(T, \cdot) = g(\cdot) \quad \textit{sur } (0,\infty)^{1+d}. \qquad (7)
$$

Preuve. La condition terminale est évidente puisque p est continue. Soient $\gamma_0 := (t_0, r_0, s_0) \in (0,T) \times (0,\infty)^{1+d}$ et $(r^{\gamma_0}, S^{\gamma_0})$ la solution de (3) partant de la condition initiale (r_0, s_0) en t_0. Soit θ le premier temps de sortie du processus $(t, r^{\gamma_0}, S^{\gamma_0})_t$ d'un voisinage ouvert de γ_0 contenu dans $(0,T) \times (0,\infty)^{1+d}$ sur lequel les dérivées spécifiées dans l'énoncé du Théorème sont bornées. Soit $h > 0$. Le Lemme d'Itô combiné à (5) et (3) implique alors que

$$
\begin{aligned}
& p(t_0, r_0, s_0) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[p(t_0, r_0, s_0) + \int_{t_0}^{\theta \wedge (t_0+h)} e^{-\int_{t_0}^u r_v^{\gamma_0} dv} (-r_u^{\gamma_0} p + \mathcal{L}p)(u, r_u^{\gamma_0}, S_u^{\gamma_0}) du\right] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_0}^{\theta \wedge (t_0+h)} e^{-\int_{t_0}^u r_v^{\gamma_0} dv}\, \nabla_r p(u, r_u^{\gamma_0}, S_u^{\gamma_0}) a(r_u^{\gamma_0}, S_u^{\gamma_0}) dW_u^{\mathbb{Q}}\right] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_0}^{\theta \wedge (t_0+h)} e^{-\int_{t_0}^u r_v^{\gamma_0} dv}\, \nabla_s p(u, r_u^{\gamma_0}, S_u^{\gamma_0}) \mathrm{diag}\,[S_u^{\gamma_0}]\, \sigma(r_u^{\gamma_0}, S_u^{\gamma_0}) dW_u^{\mathbb{Q}}\right].
\end{aligned}
$$

De part notre localisation, les deux intégrales stochastiques sont des $\mathbb{Q}$-martingales. On a donc

$$0 \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_0}^{\theta\wedge(t_0+h)} e^{-\int_{t_0}^{u} r_v^{\gamma_0}dv}(-r_u^{\gamma_0}p+\mathcal{L}p)p(u,r_u^{\gamma_0},S_u^{\gamma_0})du\right]. \qquad (8)$$

Par ailleurs, comme θ est strictement positif et le processus $(u, r_u^{\gamma_0}, S_u^{\gamma_0})_u$ est continu, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{\theta\wedge(t_0+h)} e^{-\int_{t_0}^{u} r_v^{\gamma_0}dv}(-r_u^{\gamma_0}p+\mathcal{L}p)p(u,r_u^{\gamma_0},S_u^{\gamma_0})du$$
$$= (-r_0p+\mathcal{L}p)p(t_0,r_0,s_0)\ \ ,\ \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

En outre, comme $\theta\wedge(t_0+h)-t_0\le h$ et $\mathcal{L}p$ est borné sur le voisinage considéré, par continuité des fonctionnelles impliquées, on déduit du Théorème de convergence dominée et du résultat précédent qu'en divisant (8) par h puis en faisant tendre h vers 0 on obtient $(-r_0p+\mathcal{L}p)(t_0,r_0,s_0)=0$. $\square$

Réciproquement, si w est solution régulière de (6)-(7), alors on peut montrer que $w=p$. C'est ce qu'on appelle un *théorème de vérification.*

Théorème 2 *(Vérification) Supposons que w soit une solution $C^{1,2}([0,T)\times(0,\infty)^{1+d})\cap C^{0,0}((0,T]\times(0,\infty)^{1+d})$ de (6)-(7). Si, quelle que soit la condition initiale $\gamma_0=(t_0,r_0,s_0)\in[0,T)\times(0,\infty)^{1+d}$,*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{t\in[t_0,T]} e^{-\int_{t_0}^{t} r_v^{\gamma_0}dv}\left|w\left(t,r_t^{\gamma_0},S_t^{\gamma_0}\right)\right|\right] \;<\; \infty\,, \qquad (9)$$

alors, $w=p$ sur $[0,T]\times(0,\infty)^{1+d}$.

Preuve. Soient $\gamma_0:=(t_0,r_0,s_0)\in(0,T)\times(0,\infty)^{1+d}$ et $(r^{\gamma_0},S^{\gamma_0})$ la solution de (3) partant de la condition initiale (r_0,s_0) en t_0. Soit θ_n le temps de sortie du processus $(t,r^{\gamma_0},S^{\gamma_0})_t$ de la boule de centre (t_0,r_0,s_0) et de rayon n, $n\ge 1$. Le Lemme d'Itô combiné à (3) et (6) implique que

$$\begin{aligned}
w(t_0,r_0,s_0) \;&=\; e^{-\int_{t_0}^{T\wedge\theta_n} r_v^{\gamma_0}dv}\,w\left(T\wedge\theta_n, r_{T\wedge\theta_n}^{\gamma_0}, S_{T\wedge\theta_n}^{\gamma_0}\right)\\
&+\int_{t_0}^{T\wedge\theta_n} e^{-\int_{t_0}^{u} r_v^{\gamma_0}dv}\,\nabla_r w(u,r_u^{\gamma_0},S_u^{\gamma_0})a(r_u^{\gamma_0},S_u^{\gamma_0})dW_u^{\mathbb{Q}}\\
&+\int_{t_0}^{T\wedge\theta_n} e^{-\int_{t_0}^{u} r_v^{\gamma_0}dv}\,\nabla_s w(u,r_u^{\gamma_0},S_u^{\gamma_0})\mathrm{diag}\left[S_u^{\gamma_0}\right]\sigma(r_u^{\gamma_0},S_u^{\gamma_0})dW_u^{\mathbb{Q}}\,.
\end{aligned}$$

Du fait de notre localisation, les termes intervenant dans les deux intégrales stochastiques sont bornés. On en déduit que

$$w(t_0, r_0, s_0) \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{t_0}^{T\wedge\theta_n} r_v^{\gamma_0} dv} w\left(T\wedge\theta_n, r_{T\wedge\theta_n}^{\gamma_0}, S_{T\wedge\theta_n}^{\gamma_0}\right)\right] .$$

Par continuité des processus, il est clair que $\theta_n \to \infty$ $\mathbb{P}-$ p.s. En utilisant la condition (9) et de nouveau la continuité des processus, on déduit du Théorème de convergence dominée que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{t_0}^{T\wedge\theta_n} r_v^{\gamma_0} dv} w\left(T\wedge\theta_n, r_{T\wedge\theta_n}^{\gamma_0}, S_{T\wedge\theta_n}^{\gamma_0}\right)\right] \to \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{t_0}^{T} r_v^{\gamma_0} dv} w\left(T, r_T^{\gamma_0}, S_T^{\gamma_0}\right)\right] .$$

Etant donnée la condition au bord (7) et l'équation précédente, ceci implique que

$$w(t_0, r_0, s_0) \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{t_0}^{T} r_v^{\gamma_0} dv} g\left(r_T^{\gamma_0}, S_T^{\gamma_0}\right)\right] = p(t_0, r_0, s_0) .$$

□

3 Inéquations variationnelles et options américaines

On se place sous les conditions de la Section 2. L'option américaine associée à g est le produit financier qui paie $g(r_\tau, S_\tau)$ au temps $\tau \in \mathcal{T}_0$ d'exercice. D'après la Section 5 du Chapitre 6, le prix est lié à la quantité

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds} g(r_\tau, S_\tau)\right] .$$

On va procéder par *théorème de vérification* et montrer que cette quantité (et donc le prix) est liée à l'équation aux dérivées partielles sous forme variationnelle

$$\mathcal{H}w := \min\{rw - \mathcal{L}w \ , \ w - g\} \quad = \quad 0 , \tag{10}$$

où $\mathcal{L}$ est défini comme dans le Théorème 1.
Etant donnée une fonction w, on note $\mathcal{C}^w$ l'ensemble

$$\mathcal{C}^w := \left\{(t, r, s) \in \mathbb{T} \times (0, \infty)^{1+d} \ : \ w(t, r, s) > g(r, s)\right\} .$$

Si w est le prix de l'option, il découle des arguments développés dans la Section 5 du Chapitre 6 que l'option n'est pas exercée tant que (s, r_s, S_s) appartient à

$\mathcal{C}^w$. On appelle cet ensemble la *région de continuation* et son complémentaire la *région d'exercice.*

Afin de simplifier la présentation, on va supposer qu'il existe une solution $C^{1,2}((0,T)\times(0,\infty)^{1+d})$ au problème variationnel. Cette hypothèse est rarement vérifiée mais le résultat suivant peut être généralisé sous des hypothèses moins restrictives.

Théorème 3 *(Vérification) Supposons que w soit une solution $C^{1,2}((0,T)\times(0,\infty)^{1+d})\cap C^{0,0}((0,T]\times(0,\infty)^{1+d})$ de (10)-(7). Si*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{-\int_0^t r_v dv}\left|w\left(t,r_t,S_t\right)\right|\right] \quad < \quad \infty\,, \tag{11}$$

alors

$$w(0,r_0,s_0)=\sup_{\tau\in\mathcal{T}_0}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}g(r_\tau,S_\tau)\right]$$

où (r,S) est la solution de (1) partant de (r_0,s_0) en 0.

Preuve. Soit $\hat\tau$ le temps de sortie du domaine $\mathcal{C}^w$. Par construction, ce temps est borné par T. Par les mêmes arguments que ceux employés pour démontrer le Théorème 2, on a

$$w(0,r_0,s_0)=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{\hat\tau} r_s ds}g(r_{\hat\tau},S_{\hat\tau})\right]\,,$$

alors que pour tout $\tau\in\mathcal{T}_0$

$$w(0,r_0,s_0)\geq\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}g(r_\tau,S_\tau)\right]\,.$$

□

4 Equations de H.-J.-B. et gestion optimale de portefeuille

On se place dans le cadre de la Section 6 du Chapitre 6. Toutefois, on remplace l'ensemble des stratégies de portefeuille $\mathcal{A}_U$ par le sous-ensemble $\mathcal{A}_K$ des éléments de $\mathcal{A}_U$ à valeurs dans $K\subset\mathbb{R}^d$. Cet ensemble permet de tenir compte de contraintes de portefeuille ou de certaines incomplétudes du marché, voir la Section 4.1 du Chapitre 1.

Comme $\mathcal{A}_K$ peut dépendre des conditions initiales du modèle, $\gamma_0 := (t_0, r_0, s_0) \in \mathbb{T} \times (0, \infty)^d$, et de la richesse initiale v_0, on le notera $\mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}$ par la suite.

On définit

$$u(t_0, r_0, s_0, v_0) := \sup_{\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}} \mathbb{E}\left[U(V_T^{\gamma_0, v_0, \phi})\right]$$

où $V^{\gamma_0, v_0, \phi}$ est le processus de portefeuille associé à la stratégie ϕ débutant en t_0 pour le marché $(r^{\gamma_0}, S^{\gamma_0})$ et vérifiant $V_{t_0}^{\gamma_0, v_0, \phi} = v_0$.

On commence par énoncer un *principe de programmation dynamique.*

Proposition 4 *(Programmation dynamique) Si u est continue, alors pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{t_0}$,*

$$u(t_0, r_0, s_0, v_0) \quad = \quad \sup_{\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}} \mathbb{E}\left[u\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0, v_0, \phi}\right)\right] .$$

Preuve. On note

$$J(t_0, r_0, s_0, v_0; \phi) := \mathbb{E}\left[U(V_T^{\gamma_0, v_0, \phi})\right]$$

pour $\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}$. Soient $(\gamma_n)_n = (t_n, r_n, s_n, v_n)_n$ une suite de points et $(B_n)_n$ une suite de partitions de $\mathrm{dom}(u)$ telle que (t_n, r_n, s_n, v_n) soit le centre de la boule B_n. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u est continue, on peut définir la suite de sorte que

$$|u - u(t_n, r_n, s_n, v_n)| \leq \varepsilon \quad \text{sur} \quad B_n \ \forall\, n . \tag{12}$$

Par ailleurs, on peut toujours trouver $\phi^n \in \mathcal{A}_K^{\gamma_n, v_n}$ tel que

$$|J(t_n, r_n, s_n, v_n; \phi^n) - u(t_n, r_n, s_n, v_n)| \leq \varepsilon \quad \text{sur} \quad B_n \ \forall\, n . \tag{13}$$

Etant donné $\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}$, on définit $\bar{\phi}$ par

$$\bar{\phi}_t \quad := \quad \phi_t \mathbf{1}_{t < \tau} + \mathbf{1}_{t \geq \tau} \sum_n \phi_t^n \mathbf{1}_{A_n}$$

où $A_n := \{\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0, v_0, \phi}\right) \in B_n\}$. On vérifie facilement que $\bar{\phi} \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}$. Le modèle étant markovien et les processus continus, on a alors, pour $\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}$,

$$\begin{aligned} u(t_0, r_0, s_0, v_0) \quad &\geq \quad \mathbb{E}\left[U(V_T^{\gamma_0, v_0, \bar{\phi}})\right] \\ &= \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[U(V_T^{\gamma_0, v_0, \bar{\phi}}) \mid \mathcal{F}_\tau\right]\right] \\ &= \quad \mathbb{E}\left[J\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0, v_0, \phi}; \bar{\phi}\right)\right] \\ &\geq \quad \mathbb{E}\left[u\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0, v_0, \phi}\right)\right] - 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$u(t_0, r_0, s_0, v_0) \quad \geq \quad \sup_{\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}} \mathbb{E}\left[u\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0, v_0, \phi}\right)\right] - 2\varepsilon \; .$$

Comme ε est arbitraire, on a donc

$$u(t_0, r_0, s_0, v_0) \quad \geq \quad \sup_{\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}} \mathbb{E}\left[u\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0, v_0, \phi}\right)\right] \; .$$

L'inégalité réciproque provient de l'équation

$$u(t_0, r_0, s_0, v_0) \quad = \quad \sup_{\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0, v_0}} \mathbb{E}\left[J\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0, v_0, \phi}; \phi\right)\right]$$

que l'on obtient en utilisant le caractère markovien du modèle. □

Ce principe de programmation dynamique permet de caractériser u comme solution de l'équation d'*Hamilton-Jacobi-Belman*

$$-\mathcal{L}w - \sup_{q \in K} \mathcal{H}^q w = 0 \tag{14}$$

où

$$\mathcal{L}w := \nabla_t w + (\nabla_{(r,s)} w)\, \beta + \frac{1}{2} \text{Trace}\left[\Gamma\Gamma' \; (\nabla^2_{(r,s)} \; w)\right]$$

avec

$$\beta(r,s) := \begin{pmatrix} b(r,s) \\ s\mu(r,s) \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma(r,s) := \begin{pmatrix} a(r,s) \\ \text{diag}\,[s]\, \sigma(r,s) \end{pmatrix} \; ,$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^q w \quad &= \quad (rv + q'(s\mu - rs))(\nabla_v w) + \frac{1}{2}(\nabla_v^2 w)\|q'\sigma\|^2 + (\nabla_r \nabla_v w)\; a\sigma' q \\ &+ \quad (\nabla_s \nabla_v w)\; \text{diag}\,[s]\, \sigma\sigma' q \; . \end{aligned}$$

Pour simplifier, on se restreint au cas où K est compact.

Théorème 5 *On suppose que K est compact. Si u est continue et $u \in C^{1,2}([0,T) \times (0,\infty)^{2+d})$ alors u est solution sur $[0,T) \times (0,\infty)^{1+d}$ de* (14) *avec pour condition au bord $u(T,r,s,v) = U(v)$ sur $(0,\infty)^{2+d}$.*

Preuve. On montre tout d'abord que

$$-\mathcal{L}u - \sup_{q \in K} \mathcal{H}^q u \geq 0 \ .$$

Soit ϕ le processus constant égal à $q \in K$ et τ le temps de sortie de $(t, r_t^{\gamma_0},\ S_t^{\gamma_0},\ V_t^{\gamma_0,v_0,\phi})_t$ d'un voisinage de (γ_0, v_0) contenu dans $[0,T) \times (0,\infty)^{2+d}$. D'après la Proposition 4, on a, pour $h > 0$,

$$u(t_0, r_0, s_0, v_0) \quad \geq \quad \mathbb{E}\left[u\left(\tau, r^{\gamma_0}_{\tau \wedge t+h}, S^{\gamma_0}_{\tau \wedge t+h}, V^{\gamma_0,v_0,\phi}_{\tau \wedge t+h}\right)\right] \ .$$

Par les mêmes arguments que ceux employés dans la preuve du Théorème 1, on obtient alors

$$-\mathcal{L}u - \mathcal{H}^q u \geq 0 \ .$$

Le résultat recherché provient alors du caractère arbitraire de $q \in K$.
On montre maintenant l'autre inégalité. Si en (t_0, r_0, s_0, v_0)

$$-\mathcal{L}u - \sup_{q \in K} \mathcal{H}^q u > 0$$

alors, d'après nos hypothèses de continuité et de compacité, ceci reste vrai pour la fonction

$$w(t,r,s,v) = u(t,r,s,v) + \|(t,r,s,v) - (t_0, r_0, s_0, v_0)\|^2$$

sur un voisinage ouvert V de (t_0, r_0, s_0, v_0) de rayon $\kappa > 0$. Soit $\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0,v_0}$ et τ le temps de sortie de $\left(t, r_t^{\gamma_0}, S_t^{\gamma_0}, V_t^{\gamma_0,v_0,\phi}\right)$ de ce voisinage. En appliquant le lemme d'Itô à w, on obtient alors

$$\begin{aligned} u(t_0, r_0, s_0, v_0) &= w(t_0, r_0, s_0, v_0) \\ &\geq \mathbb{E}\left[w\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0,v_0,\phi}\right)\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[u\left(\tau, r_\tau^{\gamma_0}, S_\tau^{\gamma_0}, V_\tau^{\gamma_0,v_0,\phi}\right)\right] + \kappa \end{aligned}$$

ce qui contredit la Proposition 4 puisque $\phi \in \mathcal{A}_K^{\gamma_0,v_0}$ est arbitraire. $\square$

Remarque 6 Comme dans les Sections 2 et 3, on peut énoncer un théorème de vérification pour ce type de problème. Il faut alors supposer qu'il existe une solution régulière w à l'équation (14) vérifiant la condition terminale $w(T,\cdot) = U(\cdot)$ et telle que l'on puisse trouver une fonction mesurable $\hat{q}$

vérifiant $\mathcal{H}^{\hat{q}} w = \sup_{q \in K} \mathcal{H}^q w$. Sous certaines hypothèses supplémentaires sur $\hat{\phi}$ et w (par exemple que l'on puisse définir une stratégie admissible à partir de $\hat{q}$, etc..), on peut montrer que $w = u$. Dans ce cas le contrôle optimal est tel que $\hat{\phi} = \hat{q}(\cdot, r^{\gamma_0}, S^{\gamma_0}, V^{\gamma_0, v_0, \hat{\phi}})$. On parle de *contrôle markovien.* Ceci est laissé en exercice.

Remarque 7 On peut traiter de la même manière les problèmes du type

$$\sup_{\phi} \mathbb{E}\left[U(V_T^{\gamma_0, v_0, \phi} - g(S_T))\right]$$

où $g(S_T)$ est le payoff d'une option européenne. Ceci permet une estimation numérique des prix d'indifférence et de Davis, voir la Section 6.2 du Chapitre 6.

Chapitre 8

Modélisation de la volatilité

1 Modèle de Black et Scholes

1.1 Le modèle

Le modèle de Black et Scholès correspond, dans sa version multidimentionnelle, au modèle présenté dans le Chapitre 6 dans le cas où (1) s'écrit

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}\,[S_s]\,\mu ds + \int_0^t \mathrm{diag}\,[S_s]\,\sigma dW_s \ , \ t \in \mathbb{T} \tag{1}$$

où $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\sigma \in \mathbb{M}^{d,n}$ sont des constantes fixées.
On vérifie alors facilement que

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}\left[\|S_t\|^p\right] < \infty \qquad \forall\, p \geq 1 \ ,$$

de sorte que la condition (2) du Chapitre 6 est bien vérifiée.

On suppose en outre que le taux sans risque r est une constante positive.

En appliquant le Lemme d'Itô, on vérifie que chaque composante S^i de S est donnée par

$$S_t^i = S_0^i e^{\left(\mu^i - \frac{1}{2}\|\sigma^i\|^2\right)t + \langle \sigma^i, W_t\rangle} \ , \ t \in \mathbb{T} \tag{2}$$

où σ^i désigne la i-ème ligne de la matrice σ. Ceci implique que

$$\tilde{S}_t^i = S_0^i e^{\left(\mu^i - r - \frac{1}{2}\|\sigma^i\|^2\right)t + \langle \sigma^i, W_t\rangle} \tag{3}$$

1.2 AOA et complétude

Le résultat suivant montre que l'on peut toujours supposer que $n \geq d$ dès que l'hypothèse (AOA) est vérifiée.

Proposition 1 *Si (AOA) est vérifiée alors*

$$\exists\, z \in \mathbb{R}^d \ \text{ t.q. } \ z'\sigma = 0 \ \Rightarrow \ \langle z, \mu - r\mathbf{1}_d \rangle = 0$$

où $\mathbf{1}_d = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 4 du Chapitre 6. □

En effet, si $d > n$, quitte à changer l'ordre de numérotation des actifs risqués, la matrice $\hat{\sigma}$ formée par les $d-n$ dernières lignes de σ peut s'écrire comme $\hat{\sigma} = A\bar{\sigma}$ où A est une matrice de $\mathbb{M}^{d-n,n}$ et $\bar{\sigma}$ est la matrice formée par les n premières lignes de σ. La proposition précédente implique alors que $\hat{\mu} - r\mathbf{1}_{n-d} = A(\bar{\mu} - r\mathbf{1}_d)$ où $\hat{\mu}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^{d-n}$ formé des $n-d$ dernières composantes de μ et $\bar{\mu}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé de ses n premières composantes. Si $\phi \in \mathcal{A}$, on vérifie alors que

$$\bar{\phi} = \begin{pmatrix} I_n & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi$$

est un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\bar{\phi}^i = 0$ pour tout $i > n$ et tel que $V^{x,\phi} = V^{x,\bar{\phi}}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, il y a au moins $d-n$ actifs qui sont redondants.

A partir de maintenant, on supposera donc que $d \leq n$. D'après les arguments déjà utilisés précédemment, on peut supposer que $\{z \in \mathbb{R}^d \ : \ z'\sigma = 0\} = \{0\}$. Ceci implique que $\sigma\sigma'$ est inversible. On pose alors $\lambda := \sigma'(\sigma\sigma')^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_d)$ et vérifie que sous la mesure $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ de densité

$$H = e^{-\frac{1}{2}\|\lambda\|^2 T - \lambda W_T}$$

$\tilde{S}$ est une martingale et le processus $W^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \lambda t \quad , \ t \in \mathbb{T}$$

est un $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien, voir les Théorèmes 7 et 9 du Chapitre 6. Ceci conduit à énoncer la “réciproque” de la Proposition 1.

Proposition 2 *Si $d \leq n$ et*

$$\exists\, z \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } z'\sigma = 0 \;\Rightarrow\; \langle z, \mu - r\mathbf{1}_d \rangle = 0$$

alors (AOA) est vérifiée.

Enfin, on peut montrer que le marché est complet seulement dans le cas où $d = n$.

Proposition 3 *Supposons que $d \leq n$ et que $\sigma\sigma'$ soit inversible. Alors le marché est complet si et seulement si $d = n$.*

Preuve. Si $d = n$, la complétude du marché se montre en suivant la preuve de Proposition 23 du Chapitre 6. Si $d < n$, alors il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|z\| = 1$ et $\sigma z = 0$. Tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$ de la forme $\lambda := \sigma'(\sigma\sigma')^{-1}(\mu - r\mathbf{1}_d) + \kappa z$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$ définit alors une prime de risque vérifiant les conditions du Théorème 7. Ceci montre que $\mathcal{M}(\tilde{S})$ ne peut être réduit à un singleton. On conclut en utilisant le Théorème 19. □

1.3 Options européennes dans le cas complet

Dans cette section, on suppose que

1. $d = n$,
2. σ est inversible.

Il résulte alors des résultats de la Section 1.2 que le marché est complet et sans arbitrage. On note $\mathbb{Q}$ l'unique élément de $\mathcal{M}(\tilde{S})$. Sa densité est donnée par

$$H = e^{-\frac{1}{2}\|\lambda\|^2 T - \lambda W_T} .$$

On rappelle que le processus $W^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \lambda t \quad , \; t \in \mathbb{T}$$

est un $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien. On remarque que S peut s'écrire en terme de $W^{\mathbb{Q}}$ sous la forme

$$\tilde{S}_t = S_0 + \int_0^t \operatorname{diag}\left[\tilde{S}_s\right] \sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \quad , \quad t \in \mathbb{T} . \tag{4}$$

D'après le Théorème 17 et le Corollaire 18 du Chapitre 6, l'unique prix viable pour une option $G \in L_b^2(\mathbb{P})$ est donné par le prix de sur-réplication

$$p(G) \;\; = \;\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} G\right] . \tag{5}$$

Si $G = g(S_T)$[1] pour une fonction mesurable g de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} p(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}g(S_T)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-rT}g\left(\left(S_0 e^{(r-\|\sigma^i\|^2)T+\langle\sigma^i,N_T\rangle}\right)_{i=1,\ldots,d}\right)\right] \end{aligned}$$

où σ^i est la i-ème ligne de σ et N désigne une gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, TI_d)$ sous $\mathbb{P}$.

Le problème d'évaluation se ramène donc au calcul de l'espérance d'une fonction déterministe d'un vecteur gaussien qu'il est très souvent possible de calculer en pratique, voir la Section 1.5.

On passe maintenant au problème de la couverture.

Proposition 4 *Supposons que la fonction réelle u définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}_+^d$ par*

$$u(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid S_t = x\right]$$

soit $C_b^{1,2}$. Alors, la stratégie de couverture ϕ de l'option $g(S_T)$ est donnée par

$$\phi_t = \nabla u(t, S_t)' \quad , \; t \in \mathbb{T} \, . \tag{6}$$

Preuve. La formule d'Itô appliquée à $(e^{-rt}u(t,S_t))_{t\in\mathbb{T}}$ implique que

$$\begin{aligned} e^{-rT}g(S(T)) &= e^{-rT}u(T,S_T) \\ &= u(0,S_0) + \int_0^T v_s ds \\ &+ \int_0^T e^{-rs}\nabla u(s,S_s)\mathrm{diag}\left[S_s\right]\sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \quad \mathbb{P}-\text{p.s.} \end{aligned}$$

où v est un processus prévisible. Comme $(e^{-rt}u(t,S_t))_{t\in\mathbb{T}}$ est par construction une martingale, on déduit de la Proposition 1 et du Théorème 20 du Chapitre 6 que $v = 0$ $dt \times d\mathbb{P}$-p.p. Donc,

$$e^{-rT}g(S(T)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}g(S_T)\right] + \int_0^T \nabla u(s,S_s)\mathrm{diag}\left[\tilde{S}_s\right]\sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Or, en notant $p := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}g(S_T)\right]$ et en désignant par ϕ le processus défini dans (6), on a

$$\begin{aligned} \tilde{V}_T^{p,\phi} &= p + \int_0^T \phi_s'\mathrm{diag}\left[\tilde{S}_s\right]\sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \\ &= p + \int_0^T \nabla u(s,S_s)\mathrm{diag}\left[\tilde{S}_s\right]\sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

[1] On dit que g est le *payoff* de l'option.

d'après (4) et (5) du Chapitre 6. □

1.4 Erreur de couverture discrète : rebalancement à pas constants

En pratique, il est évidemment impossible de rebalancer le portefeuille en temps continu, ce qui engendre une erreur de couverture. Dans cette section, nous analysons l'erreur L^2 engendrée par un rebalancement à pas de temps régulièrement espacés $t_i := iT/n$, $i = 0, \ldots, N$.

On suppose donc que le trader veut couvrir une option de payoff g (supposée lipschitz et presque partout dérivable) dans le modèle de Black et Scholes, en suivant une stratégie de delta-hedging discrète, i.e. sa tratégie de couverture est donnée par

$$\hat{\phi}_t = \nabla u(t_i, S_{t_i})' \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}) \ .$$

La valeur de son portefeuille en T est

$$V_T^{p,\hat{\phi}} \quad = \quad e^{rT}\left(p + \int_0^T \hat{\phi}_s' \text{diag}\left[\tilde{S}_s\right] \sigma dW_s^{\mathbb{Q}}\right) \ .$$

D'après la section précédente et l'isométrie d'Itô, l'erreur de couverture $L^2(\mathbb{Q})$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}
\text{Err}_N \quad &:= \quad e^{rT}\left\|e^{-rT}g(S_T) - \tilde{V}_T^{p,\hat{\phi}}\right\|_{L^2(\mathbb{Q})} \\
&= \quad e^{rT}\left\|\int_0^T (\phi_s - \hat{\phi}_s)' \text{diag}\left[\tilde{S}_s\right] \sigma dW_s^{\mathbb{Q}}\right\|_{L^2(\mathbb{Q})} \\
&= \quad e^{rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \left\|(\phi_s - \hat{\phi}_s)' \text{diag}\left[\tilde{S}_s\right] \sigma\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \ .
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
e^{-2rT}\text{Err}_N^2 \quad &\leq \quad 2\sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|(\phi_s' \text{diag}\left[\tilde{S}_s\right] - \phi_{t_i}' \text{diag}\left[\tilde{S}_{t_i}\right])\sigma\right\|^2 ds\right] + 2B_N \\
&\leq \quad 2\sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\psi_s - \psi_{t_i}\|^2 ds\right] + 2B_N
\end{aligned}$$

où $\psi_s := \phi_s' \text{diag}\left[\tilde{S}_s\right] \sigma$ et

$$B_N := \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|\phi_{t_i}'(\text{diag}\left[\tilde{S}_{t_i}\right] - \text{diag}\left[\tilde{S}_s\right])\sigma\right\|^2 ds\right]$$

On remarque maintenant que

$$u(t, S_t) \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

implique (en dérivant de part et d'autre par rapport à la valeur initiale de S et en inversant dérivation et espérance) que

$$e^{-rt}\nabla u(t, S_t)\mathrm{diag}\,[S_t]\,\mathrm{diag}\,[S_0]^{-1} \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}\nabla g(S_T)\mathrm{diag}\,[S_T]\,\mathrm{diag}\,[S_0]^{-1} \mid \mathcal{F}_t\right] .$$

On en déduit que le processus donné par le terme de droite est une martingale de carré intégrable. Autrement dit $(\psi_t)_{t\leq T}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale de carré intégrable. En particulier, il existe η de carré intégrable tel que

$$\psi_t = \psi_0 + \int_0^t \eta_s' dW_s^{\mathbb{Q}} \ \ , t \leq T \ ,$$

ce qui a pour conséquence que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\psi_s - \psi_{t_i}\|^2 \, ds\right] \quad &= \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{s} \|\eta_v\|^2 \, dvds\right] \\ &\leq \quad \frac{T}{N}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_v\|^2 \, dv\right] \ . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$e^{-2rT}\mathrm{Err}_N^2 \quad \leq \quad \frac{2T}{N}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \|\eta_v\|^2 \, dv\right] + 2B_N \ .$$

Il reste à étudier le terme B_N. On a

$$B_N \leq C \max_{i \leq N-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\|\phi_{t_i}|^4\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} \left\|\tilde{S}_{t_i} - \mathrm{diag}\left[\tilde{S}_s\right]\right|^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de N. On vérifie facilement par les arguments déjà utilisés précédemment que $\max_{i\leq N-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\|\phi_{t_i}|^4\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$. Il est par ailleurs standard de montrer que $\max_{i\leq N-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} \left\|\tilde{S}_{t_i} - \mathrm{diag}\left[\tilde{S}_s\right]\right|^4\right]^{\frac{1}{2}} \leq$ $\bar{C}/N$ où $\bar{C} > 0$ est une constante indépendante de N.
On obtient finalement,

$$\mathrm{Err}_N^2 \quad \leq \quad \hat{C}/\sqrt{N} \ ,$$

où $\hat{C} > 0$ est une constante indépendante de N.

Autrement dit, l'erreur Err_n est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Toutefois, elle dépend de la régularité de ψ à travers $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \|\eta_v\|^2 \, dv\right]^{\frac{1}{2}}$. Ce dernier terme est intimement lié au gamma $\nabla^2 u$ du prix de l'option (appliquer Itô sur ∇u).

On peut en déduire une borne similaire sur l'erreur calculée sous $\mathbb{P}$, mais c'est un peu plus technique.

Par ailleurs, ce résultat se généralise à des modèles de diffusion plus généraux en utilisant des arguments très similaire, mais qui font intervenir le processus tangent de S.

Enfin, cette erreur de couverture peut être améliorée en mettant en place une stratégie de type gamma neutre.

1.5 Exemples d'évaluation de produits dérivés (exercices)

On utilise dans cette section, les notations de la section précédente. Nous renvoyons à [28] pour de nombreux autres exercices, voir également [24] et [31].

Excercice 5 *(Call et put européens). On suppose que $d = 1$ et on considère l'option de payoff $g(x) = [x - K]^+$ où $K > 0$ est appelé strike. Cette option est appelée call européen. Montrer que le prix $\mathrm{p}^{\mathrm{call}}$ de l'option s'écrit*

$$
\begin{aligned}
p^{\mathrm{call}} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} [S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x} - K]^+ f(x)dx \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} \left(S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K\right) f(x)dx
\end{aligned}
$$

où f est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$
d_2 := \frac{\ln(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} .
$$

En déduire que

$$
p^{\mathrm{call}} = S_0 F(d_1) - e^{-rT} K F(d_2)
$$

où F est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$
d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} .
$$

On considère maintenant le payoff $\bar{g}(x) = [K - x]^+$. On parle alors de put européen. Soit $\mathrm{p}^{\mathrm{put}}$ le prix du put. Montrer que

$$
p^{\mathrm{put}} = p^{\mathrm{call}} + e^{-rT}K - S_0 .
$$

Cette relation est appelée parité call-put.

Excercice 6 *(EDP de Black et Scholes). On se place dans le cadre de l'exercice précédent. On note $p(t,x)$ le prix du call à la date t si $S_t = x$. Vérifier que p est solution de*

$$\begin{aligned} \nabla_t p(t,x) + rx\nabla_x p(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \nabla_x^2 p(t,x) &= rp(t,x) \\ p(T,x) &= [x-K]^+ \ . \end{aligned}$$

Excercice 7 *On suppose que $d = 1$. Calculer le prix et la couverture des options de payoff :*
1. Option digitale : $g(x) = \mathbf{1}_{x \geq K}$, $K > 0$.
2. Option Butterfly : $g(x) = (x - K + a)\mathbf{1}_{K-a \leq x < K} + (a + K - x)\mathbf{1}_{K<x\leq K+a}$, $K > a > 0$.
3. Option Straddle : $g(x) = (K - x)\mathbf{1}_{x\leq K+a} + (x - K - 2a)\mathbf{1}_{K+a<x}$, $K, a > 0$.

Excercice 8 *(Option barrière). On veut calculer le prix p d'une option de payoff $[S_T - K]^+\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}$ où $\tau := \inf\{t \geq 0 \ : \ S_t < B\}$ avec $K, B > 0$ deux constantes.*
1. Introduire la mesure martingale associée au modèle de Black et Scholes. On notera $W^{\mathbb{Q}}$ le mouvement brownien associé.
2. Trouver une mesure $\bar{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{Q}$ telle que $\bar{W}$ défini par $\bar{W}_t := W_t^{\mathbb{Q}} + t(r - \sigma^2/2)/\sigma$ soit un mouvement brownien sous $\bar{\mathbb{Q}}$.
3. Ecrire S et $H := d\bar{\mathbb{Q}}/d\mathbb{Q}$ en fonction de $\bar{W}$. Montrer que

$$p = e^{-rT}\mathbb{E}^{\bar{\mathbb{Q}}}\left[H^{-1}[S_T - K]^+\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\right].$$

4. Montrer que $\{\tau > T \ , \ S_T \geq K\} = \{\min_{t\in[0,T]} \bar{W}_t \geq \bar{B} \ , \ \bar{W}_T \geq \bar{K}\}$ où $\bar{B}, \bar{K}$ sont des réels à définir.
5. On calcule maintenant la loi jointe de $\min_{t\in[0,T]} \bar{W}_t$ et $\bar{W}_T$ sous $\bar{\mathbb{Q}}$. Par la suite, on se donne $a, b \in \mathbb{R}$.
– Soit $\theta_a := \inf\{t \geq 0 \ : \ \bar{W}_t = a\}$ le temps d'atteinte de $a < 0$. Montrer que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{Q}}\left[\min_{t\in[0,T]} \bar{W}_t \leq a \ , \ \bar{W}_T \geq b\right] &= \bar{\mathbb{Q}}\left[\theta_a \leq T \ , \ \bar{W}_T \geq b\right] \\ &= \bar{\mathbb{Q}}\left[\theta_a \leq T \ , \ \bar{W}_T - \bar{W}_{\theta_a} \geq b - a\right] \ . \end{aligned}$$

– *En utilisant le fait que θ_a est $\mathcal{F}_{\theta_a}-$mesurable et que $\bar{W}_{T\vee\theta_a} - \bar{W}_{\theta_a}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{\theta_a}$ et de même loi que $\bar{W}_{\theta_a} - \bar{W}_{T\vee\theta_a}$, montrer que*

$$\bar{\mathbb{Q}}\left[\min_{t\in[0,T]} \bar{W}_t \leq a \ , \ \bar{W}_T \geq b\right] \quad = \quad \bar{\mathbb{Q}}\left[\theta_a \leq T \ , \ \bar{W}_T \leq 2a - b\right]$$

– *En déduire que, si $a < 0$ et $b \geq a$, alors*

$$\bar{\mathbb{Q}}\left[\min_{t\in[0,T]} \bar{W}_t \leq a \ , \ \bar{W}_T \geq b\right] \quad = \quad \bar{\mathbb{Q}}\left[\bar{W}_T \leq 2a - b\right] \ .$$

– *En déduire $\bar{\mathbb{Q}}\left[\min_{t\in[0,T]} \bar{W}_t \leq a \mid \bar{W}_T = b\right]$ ainsi que la densité f de $(\min_{t\in[0,T]} \bar{W}_t, \bar{W}_T)$ quand $b \geq a$.*

– *Que peut-on dire si $a \geq 0$?*

– *Que peut-on dire si $b < a$?*

6. Déduire de la question 3 que le prix de l'option barrière est donné par

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi(a,b) f(a,b) da db$$

pour une certaine fonction ψ à déterminer.

7. Faire le calcul.

Excercice 9 *On suppose que $d = 1$. Calculer le prix et la couverture des options de payoff :*

1. Option digitale : $g(x) = \mathbf{1}_{x\geq K}$, $K > 0$.

2. Option Butterfly : $g(x) = (x - K + a)\mathbf{1}_{K-a\leq x<K} + (a + K - x)\mathbf{1}_{K<x\leq K+a}$, $K > a > 0$.

3. Option Straddle : $g(x) = (K - x)\mathbf{1}_{x\leq K+a} + (x - K - 2a)\mathbf{1}_{K+a<x}$, $K, a > 0$.

Excercice 10 *(Swap) On suppose que $d = 1$. Un swap est un produit par lequel deux personnes, A et B, échangent des flux (appelés jambes). A paie un flux fixe ρ (jambe fixe) et B paie en échange un flux variable V (jambe variable). Au moment de la signature du contrat les valeurs des deux jambes sont égales. Il faut donc calculer ρ, appelé taux swap, tel que la valeur en 0 de la jambe fixe soit égale à celle de la jambe variable. On suppose que les dates de paiement sont $0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ et que le flux de la jambe variable à la date t_i est $V_{t_i} = [S_{t_i} - K]^+$, où $K > 0$. Calculer le taux swap ρ.*

Excercice 11 *(Option spread). On se place dans le modèle de Black et Scholes de dimension 2 et on considère l'option de payoff $g(S_T) = [S^1_T - S^2_T]^+$. On parle de call sur spread . Soit*

$$\bar{H} := \tilde{S}^2_T / S^2_0 \ .$$

Montrer que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H] = 1$. *Soit* $\bar{\mathbb{Q}}$ *la mesure équivalente à* $\mathbb{Q}$ *de densité* $\bar{H}$ *par rapport à* $\mathbb{Q}$. *Montrer que le prix de l'option est*

$$p := S_0^2\, \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{Q}}}\left[\left[S_T^1/S_T^2 - 1\right]^+\right] .$$

En utilisant le théorème de Girsanov, exhiber un $\bar{Q}$*-mouvement Brownien et écrire* S_T^1/S_T^2 *en fonction de celui-ci. Déduire de l'Exercice 5 une formule fermée pour la valeur du call spread.*

Excercice 12 *(Contrat forward sur taux de change). On considère un modèle dans lequel deux marchés co-existent. Le taux sans risque sur le marché domestique est* r. *On note* r *le taux sans risque (constant) sur le marché domestique. Le taux sans risque sur le marché étranger est* r^f. *On suppose qu'une unité de monnaie étrangère vaut* S *unités de monnaie domestique, où* S *suit l'équation* (1) *correspondant à* $d = n = 1$ *et* $\sigma > 0$. *On suppose qu'il n'y a pas pas d'arbitrage. On considère un contrat qui paie en* T *une unité de monnaie étrangère. Que vaut se contrat en monnaie domestique à la date* 0 *si la prime est payée en* 0 *? Si la prime est payée en* 0*, en* T *? Quelle relation existe-t-il entre* r, r_f *et* S_0 *en l'absence d'arbitrage.*

Excercice 13 *(Décomposition de payoff) On considère un marché formé d'un actif risqué de prix* S_t *à la date* $t \leq T$ *et d'un actif sans risque évoluant selon la dynamique* $B_t = e^{rt}$, $t \leq T$, *où* $r \in \mathbb{R}_+$. *On suppose qu'il n'y a pas d'arbitrage.*
1. Soit l'instrument financier de flux final :

$$min(max(S_T, K_1), K_2) \quad avec \quad K_1 < K_2 \in \mathbb{R} .$$

Tracer le payoff de cet instrument. Décomposer son prix à l'aide de zéro-coupons et de calls bien choisis.
2. Une chooser option est une option qui donne le droit à son détenteur de choisir en T_0 *entre un call et un put sur* S *de prix d'exercice* K *et de maturité* $T > T_0$. *Montrer que cette option est une combinaison appropriée d'un call et d'un put.*

Excercice 14 *(Call sur Forward) Dans le cadre du modèle de Black-Scholes (taux d'intérêt constant* r, *actif risqué de processus de prix défini par* $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$, W *étant un mouvement brownien sous la probabilité neutre au risque* $\mathbb{Q}$*), on note par* $\{F_t, t \in [0, T]\}$ *le prix du contrat forward sur* S *de* *maturité $\theta > 0$ donnée, i.e. qui paie $S_\theta - m$ en θ. Sachant que sa valeur est nulle en $t = 0$, que vaut m ? Utiliser la formule de Black et Scholes pour donner le prix d'un call européen sur F de maturité donnée $T \in [0, \theta]$ et de prix d'exercice $K > 0$ (i.e. défini par le paiement $(F_T - K)^+$ à la maturité T).*

2 Modèles à volatilité locale

Si le modèle de Black et Scholes présenté dans le paragraphe précédent est si populaire c'est qu'il permet de calculer un grand nombre de prix d'options européennes classiques. Cependant, l'hypothèse de volatilité constante n'est pas cohérente avec les prix observés sur le marché.
Plus précisément, supposons que le taux sans risque r soit fixe et que l'on observe les prix C_i de call européens de maturité T_i et de strike K_i, $i = 1, \ldots, I$, écrits sur le même sous-jacent S de prix spot S_0 aujourd'hui. On doit alors avoir

$$C_i = BS(0, S_0, K_i, T_i, \sigma) \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, I$$

où σ est la volatilité et $BS(t, x, K, T, \sigma)$ est le prix dans le modèle de Black et Scholes d'une option d'achat sur S à la date t de maturité T et de strike K si $S_t = x$.
En particulier, on peut retrouver le paramètre de volatilité σ en inversant par rapport à cette variable la formule de Black et Scholes, voir l'Exercice 5 du Chapitre 8, i.e. chercher σ tel que

$$C_i = BS(0, S_0, K_i, T_i, \sigma) \ .$$

On appelle *volatilité implicite* la solution $\sigma_{\text{imp}}(T_i, K_i)$ de cette équation. Dans le modèle de Black et Scholes, la volatilité implicite ne doit évidemment pas dépendre de i. Or, ceci n'est pas vérifié en pratique. Typiquement, on observe que, pour une même maturité, la volatilé implicite est non constante en fonction du strike. Elle a souvent une forme en U que l'on appelle *smile*.

Une première solution pour résoudre ce problème est de considérer des modèles à *volatilité locale*. On suppose alors que σ dépend de t et de S_t, i.e.

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

où W est un mouvement brownien sous une mesure risque neutre $\mathbb{Q}$.

Dans ce cas, il est nécessaire de calibrer la volatilité, i.e. chercher la fonction de volatilité locale σ telle que les prix théoriques V_g des options cotées sur le marché coïncident avec les prix observés. En général, on se base sur les prix de produits très liquides comme les calls.

2.1 Formule de Dupire et EDP d'évaluation en strike et maturité

On admet à partir de maintenant que la loi de S_τ sachant $S_t = x > 0$ admet une densité régulière $f(\tau, y; s, x)$ sous $\mathbb{Q}$ pour $t < \tau \leq T$.

Equation de Fokker-Planck

On montre le résultat par un argument formel (mais que l'on peut rendre rigoureux...). Soit $g \in C_b^\infty$ à support compact contenu dans $(0, \infty)$. Alors $(v(s, S_s) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(S_T) \mid \mathcal{F}_s])_{s \leq T}$ est une martingale. Ceci implique que, pour tout $t \leq \tau < \tau + \varepsilon \leq T$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v(\tau+\varepsilon, S_{\tau+\varepsilon}) - v(\tau, S_\tau) \mid S_t = x] = 0 \, .$$

Comme f est régulière et $g \in C_b^\infty$, v est régulière. Le Lemme d'Itô implique alors que

$$\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \int \mathcal{L}v(s,y) f(s,y;t,x) dy ds = 0 \, ,$$

où

$$\mathcal{L}v := \nabla_t v + r \nabla_s v + \frac{1}{2} \sigma(t,s)^2 s^2 \nabla_s^2 \, v \, .$$

Si on suppose que σ est borné, on vérifie que

$$\lim_{y \to 0} v(s,y) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \to \infty} v(s,y) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

puisque le support de g est compact et contenu dans $(0, \infty)$. En intégrant par parties, on obtient alors

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int \left([v(s,y) f(s,y;t,x)]_\tau^{\tau+\varepsilon} - \int_\tau^{\tau+\varepsilon} v(s,y) \nabla_\tau f(s,y;t,x) ds \right) dy \\ &-\; \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \int \left(v(s,y) \nabla_y (ryf(s,y;t,x)) \right) dy ds \\ &+\; \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \int \left(\frac{1}{2} v(s,y) \nabla_y^2 (\sigma^2(s,y) y^2 f(s,y;t,x)) \right) dy ds \, . \end{aligned}$$

On remarque maintenant que

$$\int [v(s,y)f(s,y;t,x)]_\tau^{\tau+\varepsilon} dy \;=\; \int (v(\tau+\varepsilon,y)f(\tau+\varepsilon,y;t,x) - v(\tau,y)f(\tau,y;t,x))\, dy$$
$$= \; v(t,x) - v(t,x) = 0 \; .$$

On obtient alors en divisant par ε l'équation précédente et en faisant tendre ce paramètre vers 0 que :

$$0 \;=\; \int v(\tau,y)\left(\nabla_\tau f(\tau,y;t,x) + \nabla_y(ryf(\tau,y;t,x)) - \frac{1}{2}\nabla_y^2(\sigma^2(\tau,y)y^2 f(\tau,y;t,x))\right) dy \; .$$

En faisant maintenant tendre $\tau \to T$, on obient que $v(\tau,y) \to g(y)$, et donc, avec un peu de régularité,

$$0 \;=\; \int g(y)\left(\nabla_\tau f(T,y;t,x) + \nabla_y(ryf(T,y;t,x)) - \frac{1}{2}\nabla_y^2(\sigma^2(T,y)y^2 f(T,y;t,x))\right) dy \; .$$

Comme g est quelconque, ceci implique que f est solution de l'*équation de Fokker-Planck* (7) ci-dessous, encore appelée *équation de Kolmogorov forward.*

Proposition 15 *Soient* $(t,x) \in [0,\infty)\times(0,\infty)$. *Si* $(\sigma, f(\cdot;t,x)) \in C^{1,2}((t,\infty)\times(0,\infty))$ *alors* $f(\cdot;t,x)$ *vérifie*

$$\nabla_\tau f(T,y;t,x) \;=\; -\nabla_y(ryf(T,y;t,x)) + \frac{1}{2}\nabla_y^2(\sigma^2(T,y)y^2 f(T,y;t,x)) \quad (7)$$

sur $(t,\infty)\times(0,\infty)$.

Equation et formule de Dupire

Si g est maintenant le payoff d'un call européenne de maturité τ, strike K et de prix $\Pi_C(0,x;\tau,K)$, on doit avoir

$$\Pi_C(0,x;\tau,K) \;=\; e^{-r\tau}\int_K^\infty (y-K)f(\tau,y;0,x)dy \; .$$

Si Π_C est régulière en ses deux dernières variables, on a alors, en dérivant puis en utilisant (7),

$$\begin{aligned}
\nabla_\tau \Pi_C(0,x;\tau,K) &= -r\Pi_C(0,x;\tau,K) + e^{-r\tau}\int_0^\infty (y-K)^+ \nabla_\tau f(\tau,y;0,x)dy \\
&= -r\Pi_C(0,x;\tau,K) \\
&+ \; e^{-r\tau}\int_0^\infty (y-K)^+ \left(-\nabla_y(ryf(\tau,y;0,x))\right) dy \\
&+ \; e^{-r\tau}\int_0^\infty (y-K)^+ \left(\frac{1}{2}\nabla_y^2(\sigma^2(\tau,y)y^2 f(\tau,y;0,x))\right) dy \; .
\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\nabla_\tau \Pi_C(0,x;\tau,K) &= -re^{-r\tau}\int_0^\infty (y-K)\mathbf{1}_{y\geq K} f(\tau,y;0,x)dy \\
&+ e^{-r\tau}\int_0^\infty ry\mathbf{1}_{y\geq K} f(\tau,y;0,x)dy \\
&+ e^{-r\tau}\left(\int_0^\infty \delta_K(y)\frac{1}{2}\sigma^2(\tau,y)y^2 f(\tau,y;0,x)\right)dy \\
&= -rK\nabla_K\Pi_C(0,x;\tau,K) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau,K)K^2\nabla_K^2\Pi_C(0,x;\tau,K)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\nabla_K\Pi_C(0,x;\tau,K) &= \int \mathbf{1}_{y\geq K} f(\tau,y;0,x)dy \\
\nabla_K^2\Pi_C(0,x;\tau,K) &= \int \delta_K(y) f(\tau,y;0,x))dy\ .
\end{aligned}$$

Si le prix $\Pi_C(0,x;\tau,K)$ est suffisamment régulier en (τ,K), il vérifie donc l'*équation de Dupire.*

Proposition 16 *Sous les conditions de la Proposition 15,* $\Pi_C(0,x;\cdot)$ *vérifie*

$$\nabla_\tau\Pi_C(0,x;\tau,K) = -rK\nabla_K\Pi_C(0,x;\tau,K) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau,K)K^2\nabla_K^2\Pi_C(0,x;\tau,K) \tag{8}$$

pour $(\tau,K)\in(0,T]\times(0,\infty)$ *avec condition initiale* $\Pi_C(0,x;0,K)=[x-K]^+$ *en* $\tau=0$ *et condition au bord* $\Pi_C(0,x;\tau,0)=x$ *pour tout* $\tau\in[0,T]$.

Cette équation à deux conséquence importantes :

1. On peut calculer en résolvant (8) les prix des calls pour toutes les maturités τ et strike K d'un seul coup. Ceci est très important d'un point de vue numérique pour la calibration !

2. La volatilité locale σ doit nécessairement satisfaire la *formule de Dupire* :

$$\sigma^2(\tau,K) = 2\frac{\nabla_\tau\Pi_C(0,x;\tau,K) + rK\nabla_K\Pi_C(0,x;\tau,K)}{K^2\nabla_K^2\Pi_C(0,x;\tau,K)}\ . \tag{9}$$

Si l'on disposait des prix des calls pour toutes les valeurs de (τ,K) sur $(0,T]\times(0,\infty)$, on pourrait donc calculer la fonction de volatilité locale permettant de rendre compte de ces prix. En pratique, on ne connait les prix des calls que pour certaines maturités et strikes. Il n'est donc pas possible d'estimer les dérivées intervenant dans la formule précédente. La seule manière d'utiliser celle-ci consiste à interpoler les prix observés par rapport aux maturités et strikes, par des splines, puis à en déduire les dérivées associées. Le problème est que bien évidemment la nappe de volatilité locale ainsi obtenue, i.e. la fonction $(t,x) \mapsto \sigma(t,x)$, dépend largement du mode d'interpolation retenu. En général, elle se révèle très instable.

Remarque 17 (Extensions possibles) Une preuve purement probabiliste de (8) peut être trouvée dans [21]. La preuve est basée sur des techniques d'inversion de temps pour les EDS. Ce papier traite en outre des diffusions avec sauts pour lesquelles un résultat similaire est valable. On y trouvera également deux extensions (options digitales sur deux sous-jacents et option barrière). Voir également [34].

2.2 Calibration de la nappe de volatilité à partir d'un nombre fini de call

Une autre approche consiste à rechercher une nappe de volatilité $(t,x) \mapsto \sigma(t,x)$ pour laquelle

$$\Pi_i(\sigma) := e^{-rT_i}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[[S_{T_i} - K_i]^+\right] = C_i \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, I \ .$$

En pratique, on est amené à considérer une forme paramétrique particulière de $\sigma : \sigma(a)$, $a \in A \subset \mathbb{R}^M$. Dans ce cas, le problème précédent peut ne pas avoir de solution. On cherche alors à trouver la solution de

$$\min \sum_{i=1}^{I} \omega_i |\Pi_i(\sigma(a)) - C_i|^2 \ ,$$

où ω_i est un poids strictement positif et C_i est un proxy du prix de marché (moyenne de la fourchette bid/ask ou prix de la dernière transaction en général).

Il existe plusieurs choix naturels de poids :
1. Les poids peuvent être utilisés pour donner plus d'importance aux options liquides.
2. Ils peuvent également servir à donner autant d'importance aux options hors de la monnaie pour lesquelles C_i est petit qu'à celles dans la monnaie pour lesquelles C_i est grand. Une façon de procéder consiste par exemple à choisir $\omega_i = 1/C_i$, ce qui revient à calculer une erreur relative.

3. Ils peuvent tenir compte du niveau de précision recherché sur chaque couple maturité/strike en fonction de la fourchette bid/ask. Si on note C_i^b et C_i^a les prix à la vente et à l'achat de l'option, il est important que l'erreur de calibration ne dépasse pas l'écart $C_i^a - C_i^b$. Il est alors naturel d'utiliser les poids $\omega_i = 1/(C_i^a - C_i^b)$.
4. Une autre approche consiste à poser $\omega_i = 1/(\mathcal{V}\text{ega}(K_i, T_i, \sigma_{\text{imp}}(T_i, K_i)))^2$ où $\mathcal{V}$ega est la dérivée du prix de Black et Scholes par rapport à la volatilité. Un développement à l'ordre 1 montre alors que ceci revient essentiellement à regarder l'erreur en terme de volatilités implicite.

Toutefois, cette approche seule conduit à des résultats instables par rapport aux données initiales et en général à des nappes de volatilités très irrégulières. Afin de corriger ces problèmes, il est nécessaire d'imposer un terme de pénalité dont l'objectif est de stabiliser la solution et d'en assurer une certaine régularité.

Régularisation de Tikhonov

Dans [11], voir également les références données dans ce papier, il est proposé d'utiliser une pénalisation de Tikhonov

$$\min \left(\sum_{i=1}^{I} \omega_i |\Pi_i(\sigma(a)) - C_i|^2 \right) + \alpha_1 \|\sigma(a) - \sigma(a_0)\|_H^2 + \alpha_2 \|\nabla\sigma(a) - \nabla\sigma(a_0)\|_H^2$$

où ω_i est un poids strictement positif, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ sont fixés et

$$\|h\|_H^2 := \int_0^T \int_0^\infty |h(t,x)|^2 dx dt \ .$$

Le premier terme de pénalisation permet de stabiliser la solution, le second en assure la régularité.

Afin de minimiser cette quantité, il est naturel d'utiliser une méthode de gradient. Le calcul du gradient du terme de pénalisation dépend de la paramétrisation retenue et n'est pas difficile en général. Le problème est d'estimer le gradient du terme $\sum_{i=1}^{I} \omega_i |\Pi_i(\sigma(a)) - C_i|^2$, i.e.

$$2 \sum_{i=1}^{I} \omega_i \nabla_a \Pi_i(\sigma(a)) \left(\Pi_i(\sigma(a)) - C_i\right) \ . \tag{10}$$

Différences finies

A $a \in A$ fixé, on peut calculer tous les $\Pi_i(\sigma(a))$ en résolvant (8). Ceci permet d'estimer $\nabla_a \Pi_i(\sigma(a))$ numériquement et ainsi d'obtenir une estimation numérique du gradient (10).

Approche par arbre

Dans [11], l'auteur propose d'estimer $(\Pi_i(\sigma(a)))_{i\leq I}$ en utilisant un schéma de discrétisation de (8) par arbre trinomial et de calculer $(\nabla_a \Pi_i(\sigma(a)))_{i\leq I}$ en dérivant la solution du schéma numérique par rapport au paramètre a, i.e. $(\Pi_i(\sigma(a)))_{i\leq I}$ est estimé par $(\tilde{\Pi}_i(\sigma(a)))_{i\leq I}$ et $(\nabla_a \Pi_i(\sigma(a)))_{i\leq I}$ par $(\nabla_a \tilde{\Pi}_i(\sigma(a)))_{i\leq I}$ qui est obtenu en dérivant les coefficients dans le schéma de discrétisation associé à $(\tilde{\Pi}_i(\sigma(a)))_{i\leq I}$. Ici a représente l'ensemble des volatilités locales à chaque noeud de l'arbre. Ceci permet de mettre en oeuvre un méthode de gradient pour résoudre le problème approché

$$\min \left(\sum_{i=1}^{I} \omega_i |\tilde{\Pi}_i(\sigma(a)) - C_i|^2 \right) + \alpha_1 \|\sigma(a) - \sigma(a_0)\|_H^2 + \alpha_2 \|\nabla\sigma(a) - \nabla\sigma(a_0)\|_H^2 \ .$$

Les volatilités locales à chaque noeud sont ensuite interpolées par des splines pour donner une nappe de volatilité sur tout l'espace.

Régularisation par "entropie"

Dans [2], les auteurs proposent de chercher les paramètres a vérifiant

$$\Pi_i(\sigma(a)) = C_i \quad \forall\, i \leq I$$

qui minimizent

$$\mathbb{E}^a \left[\int_0^T \eta(\sigma(a)_s^2 - \sigma_0^2) ds \right]$$

où $\mathbb{E}^a$ est l'espérance sous la loi de S si sa volatilité est donnée par $\sigma(a)$, σ_0 est une constante, et η est une fonction positive, coercive, strictement convexe, atteignant son minimum 0. Typiquement, $\eta(y) = y^2$. Ceci conduit à optimiser, sous $\lambda \in \mathbb{R}^I$ et $a \in A$, le Lagrangien

$$V(0, S_0; \lambda, \sigma(a)) := \mathbb{E}^a \left[- \int_0^T \eta(\sigma(a)_s^2 - \sigma_0^2) ds \right] + \sum_{i=1}^{I} \lambda^i (\Pi_i(\sigma(a)) - C_i) \ .$$

On cherche alors la solution du problème

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}^I} \sup_{a \in A} V(0, S_0; \lambda, \sigma(a)) \ . \tag{11}$$

Lorsque $\{\sigma(a),\ a \in A\}$ est l'ensemble des processus de la forme $\sigma(t, S_t)$ à valeur dans un ensemble de la forme $[\sigma_{min}, \sigma_{max}]$, on peut justifier par un argument de type programmation dynamique, voir Chapitre 7, que le max est atteint dans

$$W(0, S_0; \lambda) := \sup_{a \in A} V(0, S_0; \lambda, \sigma(a))$$

et que la fonction W, étendue à des conditions initiales quelconques, est solution sur $[0, T) \times (0, \infty)$ de

$$\begin{aligned} &\nabla_t W + r\nabla_x x W + \sup_{\sigma_{min} \le z \le \sigma_{max}} \left(\frac{1}{2} z^2 x^2 \nabla_x^2 W - e^{rt}\eta(z^2 - \sigma_0^2) \right) \\ &= rW - \sum_{i=1}^{I} \lambda^i \delta_{T_i}(t)([x - K_i]^+ - e^{rT_i} C_i) \end{aligned} \tag{12}$$

avec condition terminale $W(T, \cdot) = 0$ si $T_i < T$ pour tout $i \le I$.

Si $\hat{\lambda}$ atteint le minimum de W, la solution $\sigma(a)$ du problème initial est donc formellement donnée par

$$\hat{\sigma}(t, x) := \arg \max_{\sigma_{min} \le z \le \sigma_{max}} \left(\frac{1}{2} z^2 x^2 \nabla_x^2 W(\cdot, \hat{\lambda}) - e^{rt}\eta(z^2 - \sigma_0^2) \right)$$

que l'on calcule en fonction de $x^2\nabla_x^2 W$, η et σ_0^2.

Pour trouver la solution $\hat{\lambda}$ au problème de minimisation de W, on montre que W est continument différentiable en λ et que sa dérivée W^i par rapport à λ^i est solution de

$$\nabla_t W^i + r\nabla_x x W^i + \frac{1}{2}\hat{\sigma}(t, x)^2 x^2 \nabla_x^2 W^i = rW^i - \delta_{T_i}(t)([x - K_i]^+ - e^{rT_i} C_i) \tag{13}$$

avec condition terminale $W(T, \cdot) = 0$ si $T_i < T$.

La résolution du problème (11) peut donc être menée en itérant les deux étapes suivantes :
- Calcul de $\hat{\sigma}$ par résolution de (12)
- Estimation du gradient de W par résolution de (13) et utilisation d'un pas de descente de gradient pour minimiser W.

Cette approche donne de bons résultats en terme de calibration. Malheureusement, aucun critère n'impose de régularité sur $\hat{\sigma}$ et les nappes de volatilité ainsi obtenues sont généralement très irrégulières.

3 Modèles à volatilité stochastique

3.1 Impact d'une erreur sur la spécification de la volatilité

On suppose ici que la vraie volatilité σ est un processus prévisible de carré intégrable :

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s r ds + \int_0^t S_s \sigma_s dW_s \ , \ t \in \mathbb{T} . \tag{14}$$

Supposons que le trader évalue le prix v d'une option de payoff g et de maturité T en fixant $\sigma_t = \bar{\sigma}(t, S_t)$, une fonction de volatilité locale. D'après les résultats du Chapitre 7, si v est suffisamment régulière, elle vérifie

$$\begin{aligned} \nabla_t v(t,x) + rx\nabla_x v(t,x) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}(t,x)^2 x^2 \nabla_x^2 v(t,x) &= rv(t,x) \\ v(T,x) &= g . \end{aligned}$$

Par ailleurs, la stratégie de couverture consiste alors à détenir un nombre d'actions $\phi_t = \nabla_x v(t, S_t)$ à la date t. On note $V = V^{v(0,S_0),\phi}$. D'après le Lemme d'Itô et l'équation précédente, la dynamique de $Z := V - v(\cdot, S)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} dZ_t &= rV_t dt - \left(\nabla_t v(t,S_t) + rS_t \nabla_x v(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \nabla_x^2 v(t,S_t)\right) dt \\ &= rV_t dt - \left(rv(t,S_t) + \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - \bar{\sigma}(t,S_t)^2) S_t^2 \nabla_x^2 v(t,S_t)\right) dt \\ &= \left(rZ_t + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}(t,S_t)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \nabla_x^2 v(t,S_t)\right) dt . \end{aligned}$$

Comme $v(T, S_T) = g(S_T)$, l'erreur de couverture est donc donnée par

$$Z_T = V_T - v(T,S_T) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{r(T-t)}(\bar{\sigma}(t,S_t)^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \nabla_x^2 v(t,S_t) dt .$$

Autrement dit :

1. si $\nabla_x^2 v \geq 0$, une sur-estimation de la volatilité assure un gain, une sous-estimation assure une perte.
2. le contraire est évidemment vrai si $\nabla_x^2 v \leq 0$.
3. si $\nabla_x^2 v(t, S_t) \approx 0$, la couverture est peu sensible à la volatilité réalisée. C'est ce qu'on appelle une couverture en gamma neutre.

3.2 Sur-réplication lorsque la volatilité n'est pas couvrable

D'après la sous-section précédente, on ne peut être sûr de couvrir l'option que si v est convexe quand $\bar{\sigma}(t, S_t)^2 - \sigma_t^2 \geq 0$ et concave autrement.
Intuitivement, le prix de sur-réplication p devrait donc être solution de l'équation de *Black-Scholes-Barenblatt*

$$\begin{aligned} \nabla_t p(t,x) + rx\nabla_x p(t,x) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}(t,x)^2 x^2 \nabla_x^2 p(t,x) &= rp(t,x) \\ p(T,x) &= g \end{aligned} \qquad (15)$$

où $\hat{\sigma}(t,x)^2 = \sup_{t,\omega} \sigma_t^2$ si $\nabla_x^2 p(t,x) \geq 0$ et $\hat{\sigma}(t,x)^2 = \inf_{t,\omega} \sigma_t^2$ sinon.

Lorsque $\sigma = \sigma(Y) \geq 0$ où Y est un processus d'Itô de la forme

$$dY_t = b_t dt + a_t^1 dW_t^1 + a_t^2 dW_t^2$$

avec $a_t^2 \geq \varepsilon > 0$ $dt \times d\mathbb{P}$-a.e. et S est de la forme

$$dS_t = S_s r dt + S_t \sigma(Y_t) dW_t^1$$

on peut effectivement montrer que le prix de sur-réplication vérifie (15), au moins dans un sens faible, avec

$$\hat{\sigma}(t,x)^2 = \sup_y \sigma(y) \mathbf{1}_{\nabla_x^2 p(t,x) \geq 0} + \inf_y \sigma(y) \mathbf{1}_{\nabla_x^2 p(t,x) < 0}$$

lorsque la fermeture de $\{\sigma(y); y \in \mathbb{R}\}$ est contenue dans $(0, \infty)$.

Lorsque la fermeture de $\{\sigma(y); y \in \mathbb{R}\}$ est $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, on obtient juste une propriété de sur-solution dont on déduit cependant que $\nabla_x^2 p(t,x) \leq 0$, i.e. le prix est concave en x, et que

$$rp(t,x) - \nabla_t p(t,x) - rx\nabla_x p(t,x) \geq 0 \ , \ p(T,\cdot) \geq g \ .$$

La propriété de concavité implique que $p(T,\cdot) \geq G$ où G dénote l'enveloppe concave de g. L'inéquation implique que $t \mapsto e^{-rt} p(t, xe^{rt})$ est décroissante en t, d'où

$$p(t, xe^{rt}) \geq e^{-r(T-t)} p(T, x^{rT}) \geq e^{-r(T-t)} G(x^{rT}) \ .$$

Ceci implique que $p(t,x) \geq e^{-r(T-t)} G(xe^{r(T-t)})$. Comme G est concave et au-dessus de g, il est alors facile de vérifier qu'une stratégie *buy-and-hold* consistant à détenir exactement une quantité $\Delta \in -\partial(-G(xe^{r(T-t)}))$ d'actifs risqués permet de couvrir l'option[2]

$$\begin{aligned} e^{r(T-t)}\left(e^{-r(T-t)}G(xe^{r(T-t)}) - \Delta x\right) + \Delta S_T &= G(xe^{r(T-t)}) - e^{r(T-t)}\Delta x + \Delta S_T \\ &\geq G(S_T) \geq g(S_T)\ . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$p(t,x) = e^{-r(T-t)}G(xe^{r(T-t)})$$

et que la stratégie de couverture est de type *buy-and-hold*, i.e. le nombre d'actions détenues dans le portefeuille de couverture est constant.

3.3 Couverture à l'aide d'options liquides et trading de la volatilité

Une manière naturelle de se couvrir contre les évolutions de la volatilité consiste à acheter ou vendre de manière dynamique des options liquides (typiquement des calls ou des puts).

Pour simplifier, supposons que l'on veuille couvrir une option europénne de payoff G, de maturité T et telle que G est $\sigma(W_s, s \leq T)$-mesurable où W est un mouvement brownien de dimension 2. On suppose que l'on ne dispose que d'un sous-jacent S de dynamique (on suppose le taux sans risque r nul pour simplifier)

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma(S_t, Y_t)dW_t \\ dY_t &= \gamma(S_t, Y_t)dt + \beta(S_t, Y_t)dW_t \end{aligned} \tag{16}$$

où les fonctions σ, γ et β sont mesurables et telles qu'une solution forte existe pour le système précédent, quelles que soient les conditions initiales.

Ici, le processus Y ne correspond pas a-priori à un actif négociable, ce qui rend le marché a-priori incomplet, et impossible une couverture parfaite de G, en général.

On suppose maintenant que l'on peut également traiter une option vanille de payoff $g(S_{T'})$ où $T' \geq T$. On note $p(t,s,y)$ le prix de cette option à la date t si $(S_t, Y_t) = (s,y)$ et on suppose $p \in C^{1,2}$.

[2]Pour une fonction convexe f, on note $\partial f(y)$ son sous-gradient en y, i.e. l'ensemble des $q \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \geq f(y) + q(x-y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On peut alors former un portefeuille $V^{x,\phi}$ où ϕ_t^1 (resp. ϕ_t^2) denote le nombre d'unités de S (resp. de p) détenues en t. Sa dynamique est donnée par

$$dV_t^{x,\phi} = \phi_t^1 dS_t + \phi_t^2 dp(t, S_t, Y_t) \ .$$

Si la dynamique (16) correspond à la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ sous laquelle p est calculé (i.e. W est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien), on obtient alors :

$$dV_t^{x,\phi} = \left(\phi_t^1 \sigma(S_t, Y_t) + \phi_t^2 (\nabla_S p(t, S_t, Y_t)\sigma(S_t, Y_t) + \nabla_y p(t, S_t, Y_t)\beta(S_t, Y_t))\right) dW_t$$

puisque $p(t, S_t, Y_t)$ doit être une $\mathbb{Q}$-martingale (locale).
Par ailleurs, si G est $\mathbb{Q}$-intégrable, il admet une représentation de la forme

$$G = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g] + \int_0^T \zeta_s dW_s \ .$$

Pour couvrir cette option, il suffit alors de trouver $\phi = (\phi^1, \phi^2) \in \mathcal{A}$ tel que, $dt \times d\mathbb{P}$ – a.e.,

$$\phi_t^1 \sigma(S_t, Y_t) + \phi_t^2 (\nabla_S p(t, S_t, Y_t)\sigma(S_t, Y_t) + \nabla_y p(t, S_t, Y_t)\beta(S_t, Y_t)) = \zeta_t$$

sur $[0, T]$. La question principale est donc de savoir si l'on est ou non capable d'inverser ce système. En pratique, c'est généralement le cas à partir du moment où les atifs ne sont pas redondants.

Tout se passe comme si l'on pouvait "traiter" indirectement Y à travers une combinaison d'options liquides et de sous-jacent. Une telle stratégie permet donc également de prendre des positions indirectes sur le processus de volatilité.

On pourra consulter [12] pour des résultats généraux et une condition suffisante facile à vérifier sur le modèle.

3.4 Couverture statique approchée et semi-statique par calls et puts, application aux swaps de variance

L'objet de cette section est de montrer comment l'on peut couvrir une option vanille à partir de positions statiques sur des calls et puts de même maturité.

Décomposition de payoff sur une base de calls et puts

Soit une option vanille de payoff $g(S_T)$ où S_T est une variable aléatoire réelle positive quelconque représentant la valeur terminale d'un actif sous-jacent. On a alors le résultat suivant :

Lemme 18 *Si g admet des dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre 2, alors, pour tout $\kappa \geq 0$ tel que g est dérivable en κ, on a*

$$\begin{aligned} g(S_T) &= g(\kappa) + g'(\kappa)\left[(S_T-\kappa)^+ - (\kappa - S_T)^+\right] \\ &+ \int_0^\kappa g''(K)(K-S_T)^+ dK + \int_\kappa^\infty g''(K)(S_T-K)^+ dK \ . \end{aligned}$$

Preuve. On note δ la masse de Dirac en 0. On

$$g(S_T) \ = \ \int_0^\kappa g(K)\delta(S_T-K)dK + \int_\kappa^\infty g(K)\delta(S_T-K)dK \ .$$

En intégrant par parties, on obtient alors

$$\int_0^\kappa g(K)\delta(S_T-K)dK = g(\kappa)\mathbf{1}_{S_T<\kappa} - \int_0^\kappa g'(K)\mathbf{1}_{S_T<K}dK$$

où

$$\int_0^\kappa g'(K)\mathbf{1}_{S_T<K}dK = g'(\kappa)(\kappa-S_T)^+ - \int_0^\kappa g''(K)(K-S_T)^+dK \ .$$

On procède de la même manière pour le second terme dans la première équation. □

Cette formule s'interprète facilement. Le terme $g(\kappa)$ correspond à une position en cash. Le second terme est une position position sur le sous-jacent et en cash, de part la parité call-put. Les deux derniers termes correspondent à des positions d'un niveau $g''(K)dK$ sur des calls et puts de strike K.

Par absence d'opportunité d'arbitrage (et en supposant un peu d'intégrabilité sur les différentes quantités...), ceci implique en particulier que la valeur v_0 du contrat de payoff $g(S_T)$ est donnée par

$$v_0 \ = \ g(\kappa) + g'(\kappa)\left[S_0 - \kappa\right] + \int_0^\kappa g''(K)P_0(K,T)dK + \int_\kappa^\infty g''(K)C_0(K,T)dK$$

où $P_0(K,T)$ et $C_0(K,T)$ sont les prix des puts et calls de strike K et de maturité T sur S. Si l'on dispose déjà d'un pricer efficace pour ces quantités, il suffit donc de l'utiliser pour estimer les deux intégrales.

En pratique, cette formule n'est évidemment pas applicable telle qu'elle pour la couverture puisque tous les strikes ne sont pas liquides, mais elle suggère d'approximer le payoff g par une somme pondérée de calls et puts liquides et qui l'approchent au mieux.

Supposons par exemple que les calls de strike K_i, $i = 1, \dots, I$, soient liquides. On cherche les poids c, ω_0, $\omega := (\omega_i)_{i \leq I}$ qui minimisent

$$\mathbb{E}\left[\ell\left(\Delta(c, \omega_0, \omega, S_T)\right)\right]$$

où ℓ est une fonction de perte choisie (par exemple $\ell(x) = x^2$ ou $\ell(x) = (x^+)^2$), et

$$\Delta(c, \omega_0, \omega, S_T) := g(S_T) - V(c, \omega_0, \omega, S_T)$$

est l'erreur de couverture si

$$V(c, \omega_0, \omega, S_T) := c + \omega_0 S_T + \sum_{i=1}^{I} \omega_i (S_T - K_i)^+$$

est la valeur terminale du portefeuille de couverture statique. Ici, on utilise la parité call-put pour se ramener à ne considérer que des calls, du cash c et une position sur le sous-jacent. Evidemment, si v_0 est le prix de l'option $g(S_T)$, l'optimisation se fait sous la contrainte que le coût de la couverture soit inférieur à v_0.

L'intérêt de cette approche est double : 1. elle ne dépend pas de la dynamique de S, seul le problème d'optimisation dépend de la loi de S_T ; 2. Lorsque l'on connaît la dynamique de S, on peut compléter cette approche par une couverture partielle de l'erreur résiduelle $\Delta(c, \omega_0, \omega, S_T)$. Même pour des modèles simples, cette dernière approche de couverture semi-statique peut s'avérer très performante. En effet, toute couverture dynamique est en pratique approchée puisque le rebalancement du portefeuille en temps continu est impossible. Par ailleurs, ceci est coûteux à cause des frictions (coûts de transaction). Plus la position à couvrir est "petite" et plus le coût de couverture, et l'erreur associée, est "faible". On a donc tout intérêt à couvrir la majeur partie du payoff de manière statique.

Application aux swaps de variance

Un swap de variance sur un sous-jacent S est un produit d'échange d'un jambe variable de la forme

$$J_T^n := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \right)^2$$

contre une prime fixe κ. Ici les t_k forment une suite strictement croissance de $[0,T]$ et $t_n = T$.
Ce genre de produit est actuellement très à la mode car il permet de s'exposer (ou se couvrir) directement sur les variations de la variance réalisée, sans avoir à se positionner sur le marché des options, voir Section 3.3.

Si la dynamique de S est de la forme (sous une mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ donnée et en supposant le taux sans risque nul pour simplifier)

$$dS_t = S_t \sigma_t dW_t$$

alors le Lemme d'Itô implique que

$$\begin{aligned} J_T^n &= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma_t^2 dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma_t dW_t\right)^2 \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^n \left(-\int_{t_{k-1}}^{t_k} (Z_t^k\sigma_t^2 - \sigma_t^2)dt + 2\int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_t^k \sigma_t dW_t\right) \end{aligned}$$

avec

$$Z_t^k := -\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^t \sigma_s^2 ds + \int_{t_{k-1}}^t \sigma_s dW_s \ \text{ sur } [t_{k-1}, t_k]\ .$$

Si on fait tendre le pas de temps vers 0, i.e. $n \to \infty$, on obtient alors

$$J_T^n \ \sim \ J_T := \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt\ .$$

En effet, si par exemple $\int_0^T \sigma_t^4 dt \in L^2$ alors (en notant $C > 0$ une constante générique indépendante de n)

$$\left\|\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_t^k \sigma_t^2 dt\right\|_{L^1} \le C \max_k \sup_{t\in[t_{k-1},t_k]} \left\|Z_t^k\right\|_{L^2}$$

où

$$\left\|Z_t^k\right\|_{L^2}^2 \ \le \ C\ \left(\sqrt{t_k - t_{k-1}} + t_k - t_{k-1}\right)\ .$$

De la même manière, on montre facilement que cette hypothèse implique que

$$\left\|\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_t^k \sigma_t dW_t\right\|_{L^2} \to 0\ .$$

A partir de maintenant, on supposera donc que le payoff de la jambe variable est J_T au lieu de J_T^n. A la vue de la discussion précédente, l'erreur de couverture $J_T - J_T^n$ est faible pour une division suffisamment fine de $[0, T]$.

On observe maintenant que

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = -\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2 dt + \int_0^T \sigma_t dW_t \ ,$$

d'où

$$J_T = -\frac{2}{T}\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) + \int_0^T \frac{2}{TS_t} dS_t \ .$$

Au dernier terme près (portefeuille dynamique sur S), la jambe variable est donc essentiellement une position short sur un "log-contract" de payoff $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ sur S. Comme un tel contrat n'existe pas, il faut le couvrir dynamiquement ou en utilisant l'approche par couverture semi-statique de la Section 3.4, c'est ce qui est fait en pratique.

L'approche de la Section 3.4 permet aussi dans certain cas d'évaluer rapidement la jambe variable. En effet, on a d'après le Lemme 18 appliquée à $\kappa = S_0$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) &= \frac{1}{S_0}\left[(S_T - S_0)^+ - (S_0 - S_T)^+\right] \\
&- \int_0^{S_0} \frac{1}{K^2}(K - S_T)^+ dK - \int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{K^2}(S_T - K)^+ dK \\
&= \frac{S_T - S_0}{S_0} - \int_0^{S_0} \frac{1}{K^2}(K - S_T)^+ dK - \int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{K^2}(S_T - K)^+ dK \ .
\end{aligned}$$

Sous de bonnes hypothèses d'intégrabilité, ceci implique que la valeur v_0 du contrat de payoff $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ est donnée par

$$v_0 = -\int_0^{S_0} \frac{1}{K^2} P_0(K, T) dK - \int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{K^2} C_0(K, T) dK$$

où $P_0(K, T)$ et $C_0(K, T)$ sont les prix des puts et calls de strike K et de maturité T sur S. Si l'on dispose déjà d'un pricer efficace pour ces quantités, il suffit donc de l'utiliser pour estimer les deux intégrales.

Nous renvoyons à [33] pour une analyse détaillée de ce type de produits et d'autres produits liés.

4 Exemples de modèles

4.1 Modèle CEV et processus de Bessel

Le modèle CEV (appelé également modèle de Cox) est un modèle à volatilité locale de la forme $\sigma_t = \sigma S_t^\rho$, i.e.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\rho dW_t \tag{17}$$

où $\sigma > 0$ et $0 \leq \rho < 1$ sont des paramètres fixes. Le terme CEV signifie "Constant Elasticity Variance" et ce nom provient de la propriété

$$(\partial \sigma S_t^\rho / \partial S_t) S_t / \sigma S_t^\rho = \rho \; .$$

Autrement dit, l'élasticité de la volatilité en terme de S est constante, égale à ρ/σ. Dans ce modèle, $\sigma_t/S_t = \sigma S_t^{\rho-1}$ est décroissant en fonction de S_t : la variance conditionnelle du taux de rendement est décroissante en fonction du sous-jacent, ce qui semble correspondre à un certains nombre d'études portant sur la dynamique des prix des actions.

L'existence d'un tel processus a notamment été t́udiée par [15]. Comme pour le modèle CIR, voir Section 3 du Chapitre 9, il s'agit essentiellement d'un processus de Bessel carré correctement transformé. On rappelle qu'un Bessel carré de dimension $d \in \mathbb{N}$ correspond au carré de la norme euclidienne d'un mouvement brownien d-dimensionnel, voir ci-dessous. Ici, on a besoin de considérer des processus de Bessel carré X^δ de dimension $\delta \in \mathbb{R}$ non entière définis comme suit :

Définition 19 *Soit $\delta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. On appelle processus de Bessel carré de dimension δ issu de x, l'unique solution forte $X^{\delta,x}$ de l'équation :*

$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{|Z_s|} d\hat{W}_s + \delta t \; , \; t \geq 0 \; , \tag{18}$$

où $\hat{W}$ est un mouvement Brownien de dimension 1.

On remarque que, pour $\delta \in \mathbb{N}$, si W est mouvement Brownien de dimension δ alors $\rho := \|W\|$ vérifie

$$\rho_t^2 = 2 \sum_{i=1}^{\delta} \int_0^t W_s^i dW_s^i + \delta t \; .$$

Pour $\delta \geq 1$, on vérifie que $\rho > 0$ $dt \times d\mathbb{P}$-a.e. ce qui permet de définir le processus

$$\hat{W} := \sum_{i=1}^{\delta} \int_0^{\cdot} (W_s^i/\rho_s) dW_s^i$$

qui est un mouvement Brownien (calculer le crochet). Par ailleurs, ρ^2 est solution de

$$\rho_t^2 = 2 \int_0^t \rho_s d\hat{W}_s + \delta t \ .$$

On retrouve bien la définition précédente.

En ce qui concerne l'unicité d'une solution, on utilise le résultat suivant (voir Théorème 3.5 du Chapitre IX de [37])

Théorème 20 *Soit b et a deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que b est Lipschitz et*

$$|a(x) - a(y)|^2 \quad \leq \quad \varphi(|x - y|)$$

où φ vérifie $\int_{0+}^{\infty} dz/\varphi(z) = \infty$. Soit W un mouvement brownien de dimension 1*. Alors, l'EDS*

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t b(Z_s) ds + \int_0^t a(Z_s) dW_s$$

a au plus une solution.

Pour conclure sur l'existence d'une solution forte à (18), i.e. un processus Z vérifiant (18) à W fixé :
1. On a montré l'existence d'une solution faible, i.e. l'existence d'un couple $(Z, \hat{W})$ vérifiant (18).
2. On a montrer qu'à W fixé, cette équation admet au plus une solution. On parle d'unicité trajectorielle.
3. On utilise alors le résultat bien connu : s'il existe une solution faible et s'il y a unicité trajectorielle, alors il y a existence forte.

Le cas général découle des résultats d'existence d'une solution faible que l'on peut trouver dans [37].

Remarque 21 Il est clair que si $\delta = 0$ alors le point 0 est un point d'absorption. Pour $0 < \delta < 2$, on peut montrer qu'il s'agit d'un point de reflection, et que 0 n'est jamais atteint ssi $\delta \geq 2$. Voir [37].

On peut maintenant construire le processus S. Tout d'abord, on considère le processus $X := X^{\delta,x}$ avec $x := S_0^{\frac{2}{2-\delta}}$ et on appelle ζ le premier temps de passage de X en 0. Etant donnés $\nu > 0$ et $\delta < 2$, on considère le changement de temps

$$\tau_t^{(\delta,\nu)} := \frac{\sigma^2}{2\nu(2-\delta)}(1 - e^{-2\nu t/(2-\delta)}) \ .$$

On définit $Y^{\nu,\delta}$ par

$$Y_t := e^{\nu t}\left(X_{\tau_t^{(\delta,\nu)}\wedge\zeta}\right)^{1-\delta/2} \ . \tag{19}$$

Pour poursuivre, on a besoin de la formule de changement de temps (voir [37]).

Théorème 22 *Soit W un mouvement Brownien de dimension 1. Soit α un processus positif adapté strictement croissant et absolument continu tel que $\alpha_0 = 0$ et $\mathbb{E}[\alpha_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors, pour tout processus ξ prévisible, $\mathbb{P}-p.s.$ de carré intégrable,*

$$\int_0^{\alpha_t} \xi_s dW_s = \int_0^t \xi_{\alpha_s}\sqrt{\alpha_s'}d\tilde{W}_s$$

où α' est la densité de α, $\tilde{W}$ est défini par

$$\tilde{W}_t = \int_0^{\alpha_t} \sqrt{c_s}dW_s$$

et c est défini par $c_{\alpha_t} := (\alpha_t')^{-1}$.

En utilisant la formule d'Itô ainsi que la formule de changement de temps précédente, on obtient alors que $Y^{\nu,\delta}$ vérifie

$$dY_t^{\nu,\delta} = \begin{cases} \nu Y_t^{\nu,\delta}dt + \sigma\left(Y_t^{\nu,\delta}\right)^{\frac{1-\delta}{2-\delta}} dW_t^{(\nu,\delta)} & \text{sur } \tau_t^{(\delta,\nu)} \leq \zeta \\ 0 & \text{sur } \tau_t^{(\delta,\nu)} > \zeta \end{cases}$$

où $W^{(\nu,\delta)}$ est le mouvement Brownien défini par

$$W_t^{(\nu,\delta)} = \int_0^{\tau_t^{(\delta,\nu)}} \frac{2-\delta}{\sqrt{\sigma^2 - 2\nu(2-\delta)s}}dW_s \ .$$

Si maintenant on pose $\delta_\rho := (1-2\rho)/(1-\rho)$, on peut vérifier que Y^{μ,δ_ρ} est solution faible de (17). D'après le Théorème 20 et les commentaires qui le suivent, il existe donc une solution forte à (17).

On note que $\delta_\rho < 1$, ce qui implique que la probabilité que S touche 0 n'est pas nulle, voir Remarque 21. C'est un défaut de ce modèle.

La représentation (19) permet d'obtenir la loi du processus comme transformation de la loi d'un chi-2 décentré. Ceci permet en particulier d'obtenir des formules d'évaluation quasi-explicites pour certains payoffs simples comme le call ou le put, voir [15].

4.2 Modèle d'Heston

Le modèle d'Heston ([20]) est un modèle à volatilité stochastique de la forme

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1 \\ d\sigma_t^2 &= a(b - \sigma_t^2)dt + \gamma \sigma_t dZ_t \end{aligned}$$

où $Z = \sqrt{\rho} W^1 + \sqrt{1-\rho} W^2$ avec $\rho \in [0,1]$, $a, b > 0$. Autrement dit, σ^2 est un processus CIR, voir Section 3 du Chapitre 9. On peut noter que $e^{-abt}\sigma_t^2$ suit une dynamique similaire au processus S du modèle CEV de la section précédente. Il est donc également lié à un processus de Bessel carré.

Ce modèle (très populaire) permet de rendre compte de différents types de corrélation entre le sous-jacent et sa volatilité, selon la valeur de ρ et le signe de γ. Ce dernier paramètre permet également de contrôler la volatilité de la volatilité (Vo-Vol).
Ici a est appelé vitesse de retour à la moyenne et b la volatilité de long terme. Ce modèle produit un smile symétrique lorsque le paramètre de corrèlation ρ est nul. La volatilité de la volatilité contrôle la pente du skew (plus grande quand γ augmente). Une corrélation négative produit un skew négatif (pente négative du smile) et déplace le centre de gravité du skew vers la droite. Le phénomène inverse apparait pour une corrélation positive. On peut noter que la probabilité que la volatilité s'annule est positive si $2ab < \gamma^2$.

Dans ce modèle, on peut obtenir des formes quasi-explicites pour le prix d'un call et autres options simples qui peuvent être calculés par méthode d'inversion de transformée de Fourrier rapide. Le calcul de la transformée de Fourier se fait comme suit :
On pose $\mu = 0$, ce qui revient à travailler sous la mesure risque neutre. On fait ensuite le changement de variable $X = \ln(S)$. On calcule $\psi(t, x, v; \theta) :=$

$\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_T} \mid (X_t, \sigma_t^2) = (x, v)\right]$. Pour ce faire, on utilise le théorème de Feynman-Kac (Théorème 1 du Chapitre 7) pour écrire que ψ (si elle est régulière) doit vérifier :

$$\nabla_t \psi + \mathcal{L}\psi = 0$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur de la diffusion (X, σ^2), avec la condition terminale $\psi(T, x, v; \theta) := e^{i\theta x}$. On cherche ensuite une forme particulière de solution sous la forme

$$\psi(t, x, v; \theta) = e^{C(t,T;\theta)+D(t,T;\theta)v+i\theta x}$$

pour des fonctions à valeurs complexes à définir. En remplaçant dans l'EDP précédente, on obtient une formule explicite pour C et D. Un argument de vérification, voir Chapitre 7, permet de conclure. Nous renvoyons à [20] pour la forme explicite.

4.3 Modèle d'Heston à sauts de Bates

Le modèle d'Heston à sauts de [3] reprend le modèle d'Heston mais ajoute un processus de saut pur J, indépendant de W, dans la dynamique dS/S :

$$dS_t \;\; = \;\; \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1 + S_t dJ_t$$

Le processus de saut J est un processus de Poisson composé dont l'intensité est constante et dont la taille des sauts est gaussienne. L'avantage de cette approche est que, conditionnellement au processus de saut, on connait déjà la fonction caractéristique de S_T. Il suffit donc d'en faire le produit avec la partie correspondant aux sauts. On gagne donc en flexibilité sans perdre en tractabilité.

Ce modèle corrige un défaut du modèle d'Heston qui permet de rendre compte du skew pour les grandes maturités mais pas pour les petites. L'introduction de sauts permet d'augmenter le risque sur une petite échelle de temps et ainsi d'augmenter le skew des petites maturités. Par contre, le phénomène de moyennisation des sauts sur le long terme rend leur impact faible sur les options de maturité grande. On peut donc calibrer séparément le skew à court terme (par les sauts) et celui à long terme (par la corrélation entre les deux mouvements browniens).

4.4 Modèle SABR

Le modèle SABR introduit par [19] est de la forme

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha_t S_t^{\beta} dW_t^1 \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dZ_t \end{aligned}$$

avec $Z = \rho W^1 + \sqrt{1-\rho^2} W^2$, $\rho \in [0,1]$, $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Un premier avantage de ce modèle est qu'il est possible d'obtenir une bonne approximation de la volatilité implicite directement à partir des paramètres, voir [19] pour la formule (compliquée). Ceci permet une calibration rapide. Il est par ailleurs facile de reproduire des smiles très prononcés.

Sur cette même formule, on peut noter que la volatilité implicite se déplace (au premier ordre) dans le même sens que l'actif S, ce qui correspond à ce que l'on observe sur le marché. Ce modèle a d'ailleurs été introduit pour palier à un défaut des modèles à volatilité locale qui ont tendance à reproduire l'effet inverse, voir de nouveau [19] pour le cas où la volatilité locale ne dépend pas du temps.

Par contre, la probabilité que S touche 0 n'est pas nulle dès que $\beta < 1$.

4.5 Autres modèles de diffusion à volatilité stochastique...

Evidemment, on peut rafiner et mélanger tous ces modèles (à condition que le processus associé existe...). Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'il faut tout de même être capable de le calibrer facilement et que plus le nombre de paramètres est grand et plus la calibration risque d'être instable.

4.6 Variance swap market models

Comme pour les modèles de taux, voir Section 4 du Chapitre 9, l'objectif de ce type de modèle est de rendre compte de la stucture par terme des swaps de variance en la modélisant directement, puis d'en déduire une dynamique du sous-jacent, cette dernière pouvant par ailleurs être utilisée pour évaluer et couvrir tout autre produit un peu élaboré.

Comme dans le modèle HJM, voir Section 4 du Chapitre 9, on modélise directement les processus de prix $V(T) := (V_t(T))_{t \le T^*}$ des "variances swap" de payoff $\int_0^T \sigma_t^2 dt$ de différentes maturités $T \leq T^*$ (on oublie la division par T). En pratique, on modélise la *variance forward* $v(T) := (v_t(T))_{t \leq T^*}$ définie comme

$$v_t(T) := \frac{\partial}{\partial T} V_t(T)$$

de sorte que

$$V_t(T) = \int_t^T v_t(s) ds \tag{20}$$

puisque par contruction $V_t(t) = 0$.

Notons que, si les $V(T)$ sont négociables, il en est essentiellement de même des $v(T)$ (au moins en tant que limites de différences de produits négociables). Il est donc raisonnable de supposer qu'il s'agit de martingales sous une mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ donnée.

On passe ensuite à une paramétrisation en *temps à maturité*

$$u_t(x) := v_t(t + x) \ .$$

La modélisation de type HJM consiste alors à supposer une dynamique de la forme

$$du_t(x) = b_t(x) dt + a_t(x) dW_t$$

où W est de dimension d et $b(x)$ et $a(x)$ sont prévisibles et de carré intégrable. Ceci implique, en supposant ci-dessous toutes les quantités bien définies, que

$$dv_t(T) = du_t(T - t) = (b_t(T - t) - \nabla_x u_t(T - t))\, dt + a_t(T - t) dW_t$$

en suivant les arguments de la preuve de la Proposition 6 du Chapitre 9. Puisque les $v(T)$ doivent être des martingales, on en déduit la condition de drift de type HJM

$$b_t(T - t) = \nabla_x u_t(T - t) \ \ dt \times d\mathbb{P} - \text{a.e.}$$

Autrement dit, u doit vérifier

$$du_t(x) = \nabla_x u_t(x) dt + a_t(x) dW_t$$

et la modélisation ne porte que sur la volatilité a.

Pour reconstituer un processus de prix, on peut choisir un processus prévisible ρ à valeurs dans $[-1,1]^d$ telle que $\|\rho_t\| = 1$ pour tout $t \leq T^*$. On défini ensuite le $\mathbb{Q}$-mouvement brownien B par

$$B_t := \int_0^t \rho_s dW_s$$

et on défini S par

$$dS_t = S_t \sqrt{u_t(0)} dB_t \ . \tag{21}$$

Dans ce modèle, la volatilité est $\sqrt{u(0)}$ et on a bien

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T u_s(0) ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T v_s(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \int_t^T v_t(s) ds = V_t(T)$$

puisque $v(s)$ est un martingale pour tout $s \leq T^*$ et en utilisant (20). Autrement dit le modèle de prix (21) est automatiquement compatible avec les prix des swaps de variance.

5 Evaluation par FFT

On a vu dans les sections précédente qu'il est souvent possible de calculer la transformée de Fourier de S_T. Il reste à utiliser cette transformée de Fourier pour calculer le prix d'option.

On utilise ici les idées proposées dans [7] qui permettent d'en déduire la transformée de Fourier du call.

Première approche

Soit $C_T(k)$ le prix d'un call de maturité T et de strike e^k. On note q_T la densité de $\ln(S_T)$ et ϕ_T sa transformée de Fourier. On a alors

$$\phi_T(\theta) = \int e^{i\theta x} q_T(x) dx \text{ et } C_T(k) = \int_k (e^x - e^k) q_T(x) dx \ .$$

Comme C_T n'est pas intégrable (constante quand $k \to -\infty$), on va plutôt travailler avec $c_T(k) := e^{\alpha k} C_T(k)$ pour un $\alpha > 0$. Ceci permet de rendre C_T intégrable sur l'orthant positif.

On note alors que la transformée de Fourier de c_T vérifie

$$\begin{aligned}
\psi_T(\theta) &:= \int e^{i\theta k} c_T(k)dk \\
&= \int e^{i\theta k} \int_k e^{\alpha k}(e^x - e^k) q_T(x)dxdk \\
&= \int e^{i\theta k} q_T(x) \int_{-\infty}^{x} (e^{x+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k})dkdx \\
&= \frac{\phi_T(\theta - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \theta^2 + i(2\alpha+1)\theta} .
\end{aligned}$$

Afin de s'assurer que ψ_T est bien défini, il faut maintenant s'assurer que c_T est bien intégrable sur l'orthant négatif. Ceci revient à supposer que $\psi_T(0) < \infty$, i.e. $\phi_T(-(\alpha+1)i) < \infty$ ou encore $\mathbb{E}\left[S_T^{1+\alpha}\right] < \infty$. Ceci impose évidemment une restriction sur α en fonction des paramètres du modèle, mais celle-ci peut être calculée explicitement puisque ϕ_T est connue.

Pour retrouver le prix du call, il suffit maintenant d'inverser la transformation

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\theta k} \psi_T(\theta) d\theta .$$

Afin d'assurer une certaine stabilité au voisinage de 0, il faut choisir α le plus grand possible (sous la contrainte indiquée ci-dessus). Il est également possible de contrôler l'erreur de troncature de l'intégrale en remarquant que $\psi_T(\theta)$ se comporte en $1/\theta^2$ pour θ grand ce qui implique que $C_T(k) - \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\bar{\theta}} e^{-i\theta k} \psi_T(\theta) d\theta$ est au plus de l'ordre de $1/\bar{\theta}$.

En pratique, on utilise une technique de type Fast Fourier Transform pour calculer l'intégrale en différents point k d'un seul coup et rapidement. Ceci est très avantageux lors de procédures de calibration au cours desquelles il est nécessaire de recalculer des prix théoriques pour différentes valeurs de strike.
La méthode consiste dans un premier temps à discrétiser l'intégrale

$$C_T(k) \sim \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{n=1}^{N} e^{-i\theta_n k} \psi_T(\theta_n) \Delta_\theta$$

où $\Delta_\theta := \bar{\theta}/N$, $N > 1$ et $\theta_n := (n-1)\Delta_\theta$.
On procède ensuite à une discrétisation en strike autours 0, en posant $k_\ell := -\bar{k} + (\ell - 1)\Delta_k$ pour $1 \leq \ell \leq N$, avec $\bar{k} > 0$ et $\Delta_k := 2\bar{k}/(N-1)$ de sorte que $k_0 = -\bar{k}$ et $k_N = \bar{k}$.

Ceci implique que

$$C_T(k_\ell) \sim \frac{e^{-\alpha k_\ell}}{\pi} \sum_{n=1}^{N} e^{-i(n-1)(\ell-1)\Delta_\theta \Delta_k} e^{i\bar{k}\theta_n} \psi_T(\theta_n)\Delta_\theta \; .$$

On choisit enfin les paramètres de sorte que $\Delta_\theta \Delta_k = 2\pi/N$, ce qui donne

$$C_T(k_\ell) \sim \frac{e^{-\alpha k_\ell}}{\pi} \sum_{n=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)(\ell-1)} e^{i\bar{k}\theta_n} \psi_T(\theta_n)\Delta_\theta \; .$$

On est ainsi ramené à un calcul du type

$$f_\ell = \sum_{n=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)(\ell-1)} g_n \;\; , \; \ell = 1, \ldots, N \; .$$

Pour ce type de problèmes il existe des algorithmes permettant le calcul de tous les f_ℓ en $O(N \ln N)$, voir [9].

Autres pénalisations possibles

On peut noter que la multiplication par $e^{-\alpha k}$ n'a servit qu'à assurer l'intégrabilité de la fonction à intégrer et qu'en pratique, le choix de α est assez difficile. On peut cependant utiliser d'autres approches. Par exemple, on peut considérer la transformation $\tilde{c}_T^{\hat{\sigma}_0}(k) = C_T(k) - BS_T^{\hat{\sigma}_0}(k)$ où $BS_T^{\hat{\sigma}_0}(k)$ est le prix du call de maturité T et de strike e^k calculé pour un niveau de volatilité $\hat{\sigma}_0$ correspondant à la volatilité implicite à la monnaie.

Il est facile de vérifier que $\tilde{c}_T^{\hat{\sigma}_0}(k)$ est bien de carré intégrable dès qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[S_T^{1+\alpha}\right] < \infty$. Enfin, on obtient par un calcul analogue à celui développé ci-dessus que

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{i\theta k} \tilde{c}_T^{\hat{\sigma}_0}(k) dk = \frac{\phi_T(\theta - i) - \phi_T^{\hat{\sigma}_0}(\theta - i)}{-\theta^2 + i\theta}$$

où

$$\phi_T^{\hat{\sigma}_0}(k) := \frac{1}{2\pi} \int e^{i\theta k} BS_T^{\hat{\sigma}_0}(k) d\theta = e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}(\theta^2 + i\theta)} \; .$$

Dans presque tous les modèles utilisés en pratique, l'expression ci-dessus décroit plus vite que toute puissance de θ quand sa partie réelle tend vers l'infini. La convergence de l'intégrale est donc rapide.

Chapitre 9

Modèles de taux

On présente dans ce chapitre les principaux modèles de taux en temps continu. L'objectif final est de donner un prix aux *obligations zéro-coupon* ou d'évaluer des options sur actions dans des modèles à taux d'intérêt stochastiques.

Comme dans le Chapitre 6, on travaille sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ supportant un mouvement brownien standard n-dimensionnel $W = (W^1, \ldots, W^n)$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ la filtration naturelle engendrée par W, complétée. Ici, $\mathbb{T} = [0, T]$ où $T > 0$. On suppose que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

1 Généralités

Comme dans le Chapitre 6, on considère un marché comportant un placement sans risque au *taux sans risque* r, qui est supposé $\mathbb{F}$-adapté et $\mathbb{P}-$p.s. borné, et on note β le *processus d'actualisation*. Comme il s'agit d'un taux de rendement instantané, on parle également de *taux court* .

1.1 Zéro-coupon et AOA

On suppose que l'on dispose en outre de *zéro-coupons* de maturités $\tau \leq T$, i.e. de produits financiers qui permettent à leur acheteur de recevoir 1 euro en τ. On notera $B_t(\tau)$ le prix du zéro-coupon de maturité τ en $t \leq T$. Par convention, on posera

$$B_t(\tau) \quad := \quad \beta_\tau / \beta_t = e^{\int_\tau^t r_s ds} \quad \text{si} \quad t \geq \tau \, . \tag{1}$$

Ceci revient à dire qu'une fois le paiement de 1 euro reçu en τ, ce montant est placé au taux sans risque. On notera

$$\tilde{B}(\tau) := \beta B(\tau) \ .$$

On supposera par la suite qu'il existe un processus $(b(\cdot), \Gamma(\cdot)) = (b_t(\cdot), \Gamma_t(\cdot))_{t\in\mathbb{T}}$ $\mathbb{F}$-prévisible à valeurs dans l'espace des fonctions mesurables définies sur $[0, T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{M}^{1,n}$ tel que, pour tout $\tau \leq T$, $B(\tau)$ vérifie

$$dB_t(\tau) = B_t(\tau) b_t(\tau) dt + B_t(\tau)\Gamma_t(\tau) dW_t \ .$$

D'après les résultats du Chapitre 6, nous savons qu'afin d'assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage, obtenu en investissant dans un nombre fini de zéro-coupons, il est nécessaire que, pour chaque N-uplet $U := (\tau_1, \ldots, \tau_N) \in [0, T]^N$, il existe une mesure équivalente $\mathbb{Q}^U$ qui rende martingale (locale) les prix actualisés des zéro-coupons correspondant $\tilde{B}(\tau_1), \ldots, \tilde{B}(\tau_N)$, $N \geq 1$. Si l'on suppose en outre que, pour N suffisamment grand (plus grand que d), la matrice de volatilité σ des actifs est de rang d, alors la prime de risque associée à ce N-uplet est unique. Le fait d'ajouter des éléments au N-uplet ne peut pas la modifier. Cela revient à dire qu'il existe une mesure équivalente $\mathbb{Q}$ qui rend simultanément martingale (locale) tous les prix actualisés des zéro-coupons. Par la suite, on fera donc l'hypothèse suivante :

$$\exists\, \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \ : \ \tilde{B}(\tau) \text{ est une } \mathbb{Q}\text{-martingale quel que soit } \tau \leq T. \tag{2}$$

Comme $B_\tau(\tau) = 1$, un prix *viable* pour $B(\tau)$ est alors donné par

$$B_t(\tau) \quad = \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad , \ t \leq \tau \leq T \ . \tag{3}$$

On supposera en outre que

$$\exists \ \text{ un } \mathbb{Q}\text{-mouvement brownien } W^{\mathbb{Q}} \text{ t.q. } \ d\tilde{B}_t(\tau) = \tilde{B}_t(\tau)\Gamma_t(\tau) dW_t^Q \quad t \leq \tau \tag{4}$$

pour tout $\tau \leq T$. On peut noter que la convention (1) implique que

$$\Gamma(\tau) = 0 \quad \text{sur } [\tau, T] \ dt \times d\mathbb{P}-\text{p.p.} \tag{5}$$

1.2 Courbe des taux spot

On appelle *taux sans risque de maturité τ à la date t* le taux de rendement $R_t(\tau)$ à composition continue fixé à la date t qui correspond à une opération sans risque rapportant 1 euro en τ. Comme acheter une unité de $B(\tau)$ à la date t rapporte 1 euro en τ, il doit vérifier

$$B_t(\tau) = e^{-R_t(\tau)(\tau - t)} \ . \tag{6}$$

On appelle *courbe des taux* à l'instant t, la fonction

$$\tau \in [t, T] \quad \mapsto \quad R_t(\tau) \ .$$

1.3 Courbe de taux forward

On appelle *zéro-coupon forward* fixé à la date t d'échéance $\tau_1 \geq t$ et de maturité $\tau_2 \geq \tau_1$, un produit dont le prix est fixé en t, qui est effectivement livré en τ_1 et qui livrera à son acheteur 1 euro en τ_2. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, son prix $B_t(\tau_1, \tau_2)$ est donné par

$$B_t(\tau_1, \tau_2) \quad = \quad B_t(\tau_2)/B_t(\tau_1) \ . \tag{7}$$

En, particulier, il est clair que $B_t(t, \tau_2) = B_t(\tau_2)$.

On appelle *taux forward* fixé à la date t d'échéance $\tau_1 \geq t$ et de maturité $\tau_2 \geq \tau_1$ le taux de rendement $R_t(\tau_1, \tau_2)$ à composition continue fixé à la date t qui correspond à une opération sans risque consistant à placer une certaine somme d'argent en τ_1 de manière à recevoir 1 euro en τ_2. Comme acheter une unité de $B_t(\tau_1, \tau_2)$ à la date t correspond à cette opération, il doit vérifier

$$B_t(\tau_1, \tau_2) = e^{-R_t(\tau_1, \tau_2)(\tau_2 - \tau_1)} \ . \tag{8}$$

On appelle *courbe des taux forward* à l'instant t d'échéance τ_1, la fonction

$$\tau_2 \in [\tau_1, T] \quad \mapsto \quad R_t(\tau_1, \tau_2) \ .$$

Le *taux court forward*, ou *taux forward instantané*, $f_t(\tau_1)$ est la limite du taux forward quand la maturité τ_2 tend vers l'échéance τ_1, i.e.

$$f_t(\tau_1) \quad := \quad \lim_{\tau_2 \to \tau_1} R_t(\tau_1, \tau_2) = \lim_{\tau_2 \to \tau_1} \left(- \frac{\ln\left(B_t(\tau_1, \tau_2)\right)}{(\tau_2 - \tau_1)} \right) \ ,$$

en supposant que cette limite est bien définie. Si c'est le cas, on a alors, d'après (7),

$$f_t(\tau) \quad = \quad -\nabla_\tau \ln\left(B_t(\tau)\right) \ , \tag{9}$$

de sorte que

$$B_t(\tau) = e^{-\int_t^\tau f_t(u)du} \quad \text{et} \quad R_t(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_t^\tau f_t(u)du \ . \tag{10}$$

Par ailleurs, il est naturel d'identifier le taux court comme un taux forward dont l'échéance est immédiate, i.e.

$$r_t \quad = \quad f_t(t) = \lim_{\tau \to t} f_t(\tau) \ . \tag{11}$$

2 Modèle de Vasicek

2.1 Le modèle

On considère un premier modèle dans lequel le *taux court* r est de la forme

$$r_t \quad = \quad r_0 + \int_0^t a_s(b_s - r_s)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^{\mathbb{Q}} \ , \ t \leq T \tag{12}$$

où (a, b, σ) est une fonction déterministe positive bornée à valeur dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{M}^{1,n} \setminus \{0\})$, $\inf_{t \geq 0} a_t > 0$.

Le coefficient b s'interprète comme une tendance alors que le coefficient a est une force de rappel. Plus a est grand et plus r aura tendance à se rapprocher rapidement de b s'il s'en éloigne du fait de chocs liés à la partie brownienne $\sigma_s dW_s$.

On vérifie facilement que

$$r_t \quad = \quad r_0 e^{-\int_0^t a_u du} + \int_0^t e^{-\int_s^t a_u du} a_s b_s ds + \int_0^t e^{-\int_s^t a_u du} \sigma_s dW_s \ , \ t \leq T \tag{13}$$

en appliquant le Lemme d'Itô et la Proposition 1 du Chapitre 6.
En particulier, si a et b sont constants, on a

$$r_t \quad = \quad r_0 e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right) + \int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma_s dW_s \ , \ t \leq T \ . \tag{14}$$

Dans tous les cas, il est clair que r est un processus gaussien sous $\mathbb{Q}$ et que

$$r_t \sim \mathcal{N}(m_{r_t}, v_{r_t}) \quad \text{sous } \mathbb{Q}$$

avec

$$
\begin{aligned}
m_{r_t} &:= r_0 e^{-\int_0^t a_u du} + \int_0^t e^{-\int_s^t a_u du} a_s b_s ds \\
v_{r_t} &:= \int_0^t e^{-2\int_s^t a_u du} \sigma_s^2 ds \; .
\end{aligned}
$$

2.2 Prix du zéro-coupon et courbe des taux

La formule d'intégration par parties pour les intégrales stochastiques, voir [36], implique que

$$
\begin{aligned}
I(t,\tau) &:= \int_t^\tau r_s ds \\
&= r_t \int_t^\tau e^{-\int_t^s a_u du} ds + \int_t^\tau \int_u^\tau e^{-\int_u^s a_v dv} b_u ds du + \int_t^\tau \int_u^\tau e^{-\int_u^s a_v dv} \sigma_u ds dW_u^{\mathbb{Q}} \; .
\end{aligned}
$$

Conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, $I(t,\tau)$ est donc une variable aléatoire gaussienne

$$
I(t,\tau) \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(m(t,\tau), v(t,\tau)) \quad \text{sous } \mathbb{Q}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
m(t,\tau) &:= r_t \int_t^\tau e^{-\int_t^s a_u du} ds + \int_t^\tau \int_u^\tau e^{-\int_u^s a_v dv} b_u ds du \\
v(t,\tau) &:= \int_t^\tau \left(\int_u^\tau e^{-\int_u^s a_v dv} ds\right)^2 \sigma_u^2 du \; .
\end{aligned}
$$

Connaissant la transfomée de Laplace d'une gaussienne, on en déduit que le prix du zéro-coupon dans ce modèle peut s'écrire

$$
B_t(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^\tau r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{-m(t,\tau)+\frac{1}{2}v(t,\tau)} \quad , \; t \leq \tau \leq T \; . \tag{15}
$$

Lorsque a, b et σ sont constants, on obtient alors une formule explicite.

Proposition 1 *Si a, b et σ sont constants alors pour tout $t \leq \tau \leq T$:*

$$
B_t(\tau) = e^{-R_\infty(\tau-t)+(R_\infty-r_t)\frac{1-e^{-a(\tau-t)}}{a}-\frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a(\tau-t)})^2}
$$

où

$$
R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \; .
$$

Par ailleurs, pour tout $t \leq \tau \leq T$ la fonction Γ est donnée par

$$\Gamma_t(\tau) \;=\; \sigma\frac{1-e^{-a(\tau-t)}}{a}\,,$$

et la courbe des taux vérifie

$$R_t(\tau) \;=\; R_\infty - (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a(\tau-t)}}{a(\tau-t)} + \frac{\sigma^2}{4a^3(\tau-t)}(1-e^{-a(\tau-t)})^2\,. \quad (16)$$

Preuve. La formule obtenue pour B se déduit de (15) par un calcul direct. La fonction Γ s'obtient en applicant le Lemme d'Itô à B et en utilisant (1). La forme de la courbe des taux se déduit de (6). $\square$

On peut remarquer que $R_t(\tau) \to R_\infty$ quand $\tau \to \infty$. La quantité R_∞ peut donc s'interpréter comme un taux long.

C'est le caractère explicite de ce modèle qui le rend populaire. Cependant il a plusieurs défauts :
(a) Tout d'abord, les taux sont gaussiens et peuvent donc prendre des valeurs négatives avec probabilité non nulle.
(b) Par ailleurs, d'un point de vue pratique, il est naturel de fixer le taux court spot r_0 et le taux long R_∞ en fonction des données de marché. Ceci implique qu'il ne reste que deux paramètres pour expliquer toute la courbe de taux, ce qui est peu. En particulier, comme $a > 0$, (16) implique que ce modèle ne permet pas de reproduire des courbes des taux de type *inversé* où le taux court spot r_0 est plus grand que le taux long R_∞ et il existe $\tau > 0$ tel que $R_0(\tau) \in (R_\infty, r_0)$. Afin de palier à ce défaut, il est nécessaire de considérer des paramètres non-constants.
(c) Le seul paramètre aléatoire expliquant l'évolution de la courbe des taux est r et la déformation induite par l'évolution de r est essentiellement une translation.

3 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

3.1 Le modèle

Dans ce modèle, le taux de rendement instantané est modélisé par un processus *racine carré* de la forme

$$r_t \;=\; r_0 + \int_0^t a(b-r_s)ds + \int_0^t \sqrt{r_s}\sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \quad (17)$$

où $a, r_0, b > 0$ et $\sigma \in \mathbb{M}^{1,n} \setminus \{0\}$.
On peut noter que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'étant pas Lipschitzienne, l'existence d'une solution à (17) ne se déduit pas des résultats classiques d'existence. Il est toutefois possible de montrer que r est bien défini, quitte à changer de mouvement brownien. Pour b suffisamment grand, on vérifie également que r est toujours strictement positif.

Proposition 2 *Soit $X_0 > 0$. Alors, il existe un mouvement brownien $\bar{W}^{\mathbb{Q}}$ sous $\mathbb{Q}$ pour lequel il existe une solution à l'équation*

$$X_t \;=\; X_0 + \int_0^t a(b - X_s)ds + \int_0^t \sqrt{X_s}\sigma d\bar{W}_s^{\mathbb{Q}} \quad , \; t \le T \; . \tag{18}$$

En outre, $X > 0$ sur $[0,T]$ $\mathbb{P} - p.s.$ si $b \ge \frac{1}{2a}\mathrm{Trace}(\sigma\sigma') > 0$.

Preuve. On se restreint au cas $b = \sigma^2/(4a)$, le cas général fait l'objet de l'exercice ci-dessous. Soit Y la solution de l'équation

$$Y_t \;=\; \sqrt{X_0} - \int_0^t \frac{1}{2}aY_s ds + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma \; dW_s^{\mathbb{Q}} \; . \tag{19}$$

Le processus $\bar{W}^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$\bar{W}_t^{\mathbb{Q}} = \int_0^t \left(1_{\{Y_s \ge 0\}} - 1_{\{Y_s < 0\}}\right) dW_s^{\mathbb{Q}}$$

est alors également un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$ et on vérifie que le processus X défini par $X_t := Y_t^2$ est solution de l'équation (18) pour $b = \sigma^2/(4a)$. On suppose maintenant $\alpha := \frac{2ab}{\sigma\sigma'} > 1$ et on pose

$$\forall x > 0, \; s(x) = \int_1^x y^{-\alpha} e^{\alpha y/b} dy \; .$$

Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $1/n \le x_0 \le k$, on pose

$$\tau_n^k = \inf\{t \ge 0, \; X_t \notin]1/n, k[\} \; , \; \tau^k = \inf\{t \ge 0, \; X_t \ge k\} \; .$$

On peut vérifier en utilisant (19), qui implique que Y est un processus gaussien, et le lien entre X et Y que $\mathbb{Q}\left[\tau_n^k < +\infty\right] = 1$ pour tout $1/n \le x_0 \le k$. Un calcul direct montre également que $s''(x) = -\alpha \frac{(b-x)}{bx} s'(x)$. En appliquant le Lemme d'Itô à $s(X)$, on en déduit que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[s\left(X_{\tau_n^k}\right)\right] = s(x_0)$. En calculant $\lim_{n\to+\infty} s(1/n)$, on vérifie alors que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{Q}\left[X_{\tau_n^k} = 1/n\right] = 0$ et que $\mathbb{Q}\left[\forall t \le \tau_k, \; X_t > 0\right] = 1$ en utilisant le lemme de Borel Cantelli. Ceci permet de conclure que $\mathbb{Q}\left[\forall t \ge 0, \; X_t > 0\right] = 1$. $\square$

Excercice 3 *L'objet de cet exercice est de montrer l'existence d'un processus vérifiant* (17) *dans le cas où* $b \neq \sigma^2/(4a)$. *Soit* Y *un processus de Bessel carré de dimension* $\delta := 4ab/\sigma^2$, *voir Définition 19 du Chapitre 8. En utilisant le Théorème 22 du Chapitre 8, trouver* Y_0 *tel que* $\bar{Y}$ *défini par* $\bar{Y}_t := e^{-at} Y_{\frac{\sigma^2}{4a}(e^{at}-1)}$ *vérifie* (17) *pour un mouvement brownien bien choisi.*

3.2 Prix du zéro-coupon et courbe des taux

Comme dans le modèle précédent, il est possible de calculer explicitement le prix d'un zéro-coupon.

Proposition 4 *On pose* $\gamma := \sigma\sigma'$ *et on suppose que* $b > \frac{1}{2a}\gamma > 0$. *Pour tout* $t \leq T$, *la transformée de Laplace de* r_t *sous* $\mathbb{Q}$ *est donnée par*

$$\phi_{r_t}(\lambda) = (2\lambda L(t) + 1)^{-2ab/\gamma} e^{-\frac{\lambda L(t)\zeta(t,r_0)}{2\lambda L(t)+1}}$$

où $L(t) = (\gamma/4a)(1 - e^{-at})$ *et* $\zeta(t,x) = 4xae^{-at}/(\gamma(1 - e^{-at}))$.
Par ailleurs, on a pour $t \leq \tau \leq T$

$$B_t(\tau) \;=\; A_t(\tau) e^{-r_t C_t(\tau)}$$

où

$$\begin{aligned}
A_t(\tau) &:= \left(\frac{2\rho e^{\frac{\rho+a}{2}(\tau-t)}}{(\rho+a)(e^{\rho(\tau-t)} - 1) + 2\rho} \right)^{\frac{2ab}{\gamma}} \\
C_t(\tau) &:= \frac{2(e^{\rho(\tau-t)} - 1)}{(\rho+a)(e^{\rho(\tau-t)} - 1) + 2\rho} \\
\rho &:= \sqrt{a^2 + 2\gamma}\,.
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant le Lemme d'Itô à $(F(t-s, r_s))_{s \leq t}$ où

$$F(t,x) := (2\lambda L(t) + 1)^{-2ab/\gamma} e^{-\frac{\lambda L(t)\zeta(t,x)}{2\lambda L(t)+1}}$$

on vérifie qu'il s'agit d'une $\mathbb{Q}$-martingale. Comme $F(0, r_t) = e^{-\lambda r_t}$, on a bien $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\lambda r_t}\right] = F(t, r_0)$. La formule pour $B(\tau)$ se vérifie de la même manière, on vérifie que $(\tilde{B}_t(\tau))_{t \leq \tau}$ est bien une $\mathbb{Q}$-martingale satisfaisant $B_\tau(\tau) = 1$ et on conclut en utilisant (15). □

On en déduit la forme de la courbe des taux :

Proposition 5 *On pose $\gamma := \sigma\sigma'$ et on suppose que $b > \frac{1}{2a}\gamma > 0$. Alors, pour tout $t < \tau \leq T$,*

$$
\begin{aligned}
R_t(\tau) = -\ln(B_t(\tau))/(\tau - t) &= -\frac{\ln(A_t(\tau))}{\tau - t} + r_t \frac{C_t(\tau)}{\tau - t} \\
&= R_t(\infty) + r_t \frac{C_t(\tau)}{\tau - t} + G_t(\tau) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
G_t(\tau) &:= \frac{2ab}{\gamma(\tau - t)} \Big(-\ln(2\rho) + \ln((\rho + a)(1 - e^{-\rho(\tau - t)}) + 2\rho e^{-\rho(\tau - t)}) \Big) \\
R_t(\infty) &:= \lim_{\tau \to \infty} R_t(\tau) = \frac{ab(\rho - a)}{\gamma} .
\end{aligned}
$$

Ce modèle s'avère plus flexible que le modèle de Vasicek. D'après (20), le taux dépend d'une fonctionnelle du taux court et du taux long, ce dernier pouvant être calé sur les données de marché.
Toutefois, le taux instantané n'est plus gaussien ce qui rend son implémentation plus difficile (on pourra consulter [1] et [17] pour des techniques de simulation du taux r). En outre, comme dans le modèle de Vasicek, seul r explique les déformations aléatoires de la courbe des taux et ces déformations sont essentiellement des translations.

3.3 Simulation exacte (exercice)

On considère le processus de Cox Ingersoll Ross (CIR) X^x de dimension 1 défini sur $[0, T]$ par

$$
X_t^x = x + \int_0^t a(b - X_s^x)ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s^x} dW_s
$$

où x, a, b, $\sigma > 0$. On suppose que $ab \geq \sigma^2/2$ ce qui implique que $X^x > 0$ $\mathbb{P}-$p.s.

Par la suite on se donne $\pi := \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = T\}$ une partition de $[0, T]$.

1. On utilise les notations de la Proposition 4. Quelle est la transformée de Laplace $\phi_{Y_t^x}$ de $Y_t^x := X_t^x / L(t)$?

2. On suppose que $4ab/\sigma^2 =: k \in \mathbb{N}$.
2.1. Soit N une gaussienne de variance 1 et de moyenne m. Calculer la densité f_{N^2} de N^2 et sa transformée de Laplace ϕ_{N^2}.

2.2. En déduire une méthode de simulation des accroissements $(X^x_{t_{i+1}} - X^x_{t_i})_{i<n}$ lorsque $4ab/\sigma^2$ est un entier.

3. On considère maintenant le cas où $4ab/\sigma^2$ est un réel strictement positif quelconque.
3.1. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{x>0} \,,$$

la densité de la loi Gamma $G(\alpha, \beta)$, où Γ est la fonction Gamma. Comment simuler une variable aléatoire (U, V) de loi uniforme sur $D := \{(u, v) \in (0, \infty)^2 \;:\; 0 \leq u \leq \sqrt{f_{\alpha,\beta}(v/u)}\}$ quand $\alpha > 1$? On commencera par montrer que D est contenu dans un rectangle Δ.

3.2. On suppose $\alpha > 1$. Soit (U, V) une variable aléatoire uniformément distribuée sur D. Quelle est la loi de V/U ?

3.3. Déduire des questions précédentes une méthode de simulation de copies i.i.d. de loi $G(\alpha, \beta)$ quand $\alpha > 1$. Donner le coût moyen d'un tirage en fonction du volume $|D|$ de D.

3.4. Que faire quand $\alpha = 1$?

3.5. On rappelle que, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la transformée de Laplace de la loi $G(\alpha, \beta)$ est donnée par

$$\phi_{\alpha,\beta}(y) \;\;=\;\; (1 + y/\beta)^{-\alpha} \;\; y \geq 0 \,.$$

Soit $\nu > 0$, M une variables aléatoire de loi de Poisson de paramètre $p > 0$ et $(\chi_{\nu+i})_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes (et indépendantes de M) telle que $\chi_{\nu+i} \sim G((\nu+i)/2, 1/2)$ pour chaque $i \geq 0$. Calculer la transformée de Laplace $\phi_{\nu+M}$ de $\chi_{\nu+M} := \sum_{i\geq 0} \chi_{\nu+i} \mathbf{1}_{i=M}$.

3.6. Comment simuler des copies i.i.d. de $\chi_{\nu+M}$?

3.7. Déduire des questions précédentes un mode de simulation des accroissements $(X^x_{t_{i+1}} - X^x_{t_i})_{i<n}$.

Remarque : En pratique cette méthode est assez coûteuse numériquement. Lorsque le pas de temps est petit, on préfèrera discrétiser l'EDS associée à X^x en adaptant l'approche par schéma d'Euler (voir à ce sujet les travaux récents de [1]).

4 Approche de Heath, Jarrow et Morton

L'approche de Heath, Jarrow et Morton consiste à modéliser directement la courbe de *taux forward* instantanés.

4.1 Dynamique du taux court forward et du zéro-coupon

Dans le modèle de Heath, Jarrow et Morton, on suppose que la courbe des taux courts forward vérifie

$$f_t(\tau) = f_0(\tau) + \int_0^t \alpha_u(\tau)du + \int_0^t \sigma_u(\tau)dW_u^{\mathbb{Q}} \quad \text{pour tout } \tau \leq T \ , \tag{21}$$

où $(\alpha(\cdot), \sigma(\cdot)) = (\alpha_t(\cdot), \sigma_t(\cdot))_{t \in \mathbb{T}}$ est un processus $\mathbb{F}$-prévisible à valeurs dans l'espace des fonctions mesurables définies sur $[0, T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{M}^{1,n}$ tel que

$$\int_0^t |\alpha_u(\tau)|du + \int_0^t \|\sigma_u(\tau)\|^2 du \quad < \quad \infty \ \ \mathbb{P}-\text{p.s.} \quad \text{pour tout } \tau \leq T \ .$$

Le gros avantage de ce modèle est qu'il repose sur la donnée de la courbe de taux courts forward à l'instant initial, $\tau \mapsto f_0(\tau)$. Il est donc facile de calibrer parfaitement cette courbe.

On caractérise maintenant la dynamique des prix des zéro-coupons dans ce modèle.

Proposition 6 *Pour tout $\tau \leq T$, la dynamique de $B(\tau)$ est donnée sur $[0, \tau]$ par*

$$dB_t(\tau) = B_t(\tau)\left(r_t - \bar{\alpha}_t(\tau) + \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}_t(\tau)\|^2\right)dt - B_t(\tau)\bar{\sigma}_t(\tau)dW_t^{\mathbb{Q}}$$

où

$$(\bar{\alpha}_t(\tau), \bar{\sigma}_t(\tau)) \quad = \quad \int_t^\tau (\alpha_t(u), \sigma_t(u))du \ .$$

Preuve. D'après (10), (21) et le Lemme d'Itô, on a

$$\begin{aligned} -\ln(B_t(\tau)) &= \int_t^\tau f_t(u)du \\ &= \int_t^\tau f_0(u)du + \int_t^\tau \left(\int_0^t \alpha_v(u)dv + \int_0^t \sigma_v(u)dW_v^{\mathbb{Q}}\right)du \ . \end{aligned}$$

En utilisant deux fois la version stochastique du Théorème de Fubini, voir [36] Théorème IV.45, on obtient

$$
\begin{aligned}
-\ln(B_t(\tau)) &= \int_0^\tau f_0(u)du + \int_0^t \bar{\alpha}_v(\tau)dv + \int_0^t \bar{\sigma}_v(\tau)dW_v^{\mathbb{Q}} \\
&- \int_0^t f_0(u)du - \int_0^t \int_v^t \alpha_v(u)dudv + \int_0^t \left(\int_v^t \sigma_v(u)du\right) dW_v^{\mathbb{Q}} \\
&= \int_0^\tau f_0(u)du + \int_0^t \bar{\alpha}_v(\tau)dv + \int_0^t \bar{\sigma}_v(\tau)dW_v^{\mathbb{Q}} \\
&- \int_0^t f_0(u)du - \int_0^t \left(\int_0^u \alpha_v(u)dv + \int_0^u \sigma_v(u)dW_v^{\mathbb{Q}}\right) du \;.
\end{aligned}
$$

On déduit alors de (10), (11) et (21) que

$$
-\ln(B_t(\tau)) \;=\; -\ln(B_0(\tau)) - \int_0^t r_u du + \int_0^t \bar{\alpha}_v(\tau)dv + \int_0^t \bar{\sigma}_v(\tau)dW_v^{\mathbb{Q}} \;. \quad (22)
$$

On conclut en utilisant le Lemme d'Itô. □

Sous l'hypothèse (4), on déduit de la proposition précédente une condition sur (α, σ) :

$$
\bar{\alpha}_t(\tau) \;=\; \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}_t(\tau)\|^2 \;\; dt \times d\mathbb{P}\text{-p.p. sur } [0,\tau] \;\; \forall\, \tau \leq T \;.
$$

Ceci, combiné à (9) et (22) et à la version stochastique du Théorème de Fubini, conduit à la caractérisation suivant de la dynamique de B et f.

Proposition 7 *Sous l'hypothèse* (4)*, on a nécessairement :*

$$
\begin{aligned}
B_t(\tau) &= B_0(\tau) e^{\int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}_s(\tau)\|^2\right)ds - \int_0^t \bar{\sigma}_s(\tau)dW_s^{\mathbb{Q}}} \\
f_t(\tau) &= f_0(\tau) + \int_0^t \sigma_s(\tau)\bar{\sigma}_s(\tau)'ds + \int_0^t \sigma_s(\tau)dW_s^{\mathbb{Q}} \\
r_t &= f_0(t) + \int_0^t \sigma_s(t)\bar{\sigma}_s(t)'ds + \int_0^t \sigma_s(t)dW_s^{\mathbb{Q}}
\end{aligned}
$$

sur $[0, \tau]$*, pour tout* $\tau \leq T$*.*

Corollaire 8 *Sous l'hypothèse* (4)*, on a pour tout* $\theta \geq 0$

$$
\begin{aligned}
dB_t(t+\theta) &= \left(B_t(t+\theta)r_t + \nabla_\theta B_t(t+\theta)\right) dt - B_t(t+\theta)\bar{\sigma}_t(t+\theta)dW_t^{\mathbb{Q}} \\
dR_t(t+\theta) &= \left(\frac{1}{2\theta}\|\bar{\sigma}_t(t+\theta)\|^2 + \nabla_\tau R_t(t+\tau, t+\theta)_{|\tau=0}\right) dt + \frac{1}{\theta}\bar{\sigma}_t(t+\theta)dW_t^{\mathbb{Q}} \\
df_t(t+\theta) &= \left(\nabla_\theta f_t(t+\theta) + \sigma_t(t+\theta)\bar{\sigma}_t(t+\theta)'\right) dt + \sigma_t(t+\theta)dW_t^{\mathbb{Q}} \\
dr_t &= \nabla_\theta f_t(t+\theta)_{|\theta=0} dt + \sigma_t(t)dW_t^{\mathbb{Q}}
\end{aligned}
$$

sur $[0, T-\theta]$.

Preuve. On remarque tout d'abord que pour $s \leq t$

$$\begin{aligned} B_t(t+\theta) &= B_t(s+\theta) + \int_s^t \nabla_\theta B_t(u+\theta)du \\ &= B_t(s+\theta) + \int_s^t \nabla_\theta \left(B_u(u+\theta) + \int_u^t dB_v(u+\theta) \right) du \ . \end{aligned}$$

En utilisant la version stochastique du Théorème de Fubini, on vérifie ensuite que

$$\begin{aligned} A_s^t &:= \int_s^t \nabla_\theta \int_u^t dB_v(u+\theta)du \\ &= \int_s^t \left(\int_u^t \nabla_\theta (B_v(u+\theta)r_v)dv - \int_u^t \nabla_\theta (B_v(u+\theta)\bar{\sigma}_v(u+\theta))dW_v^{\mathbb{Q}} \right) du \\ &= \int_s^t \int_s^v \nabla_\theta (B_v(u+\theta)r_v)du\, dv - \int_s^t \int_s^v \nabla_\theta (B_v(u+\theta)\bar{\sigma}_v(u+\theta))du\, dW_v^{\mathbb{Q}} \\ &= \int_s^t (B_v(v+\theta)r_v - B_v(s+\theta)r_v)\, dv \\ &- \int_s^t (B_v(v+\theta)\bar{\sigma}_v(v+\theta) - B_v(s+\theta)\bar{\sigma}_v(s+\theta))\, dW_v^{\mathbb{Q}} \\ &= \int_s^t B_v(v+\theta)r_v dv - \int_s^t B_v(v+\theta)\bar{\sigma}_v(v+\theta)dW_v^{\mathbb{Q}} \\ &+ B_s(s+\theta) - B_t(s+\theta) \end{aligned}$$

ce qui, étant donnée l'équation précédente, conduit au premier résultat recherché. On procède de la même manière pour obtenir la dynamique de $f_t(t+\theta)$. Comme $\theta R_t(t+\theta) = -\ln(B_t(t+\theta))$, on déduit de la dynamique de $B_t(t+\theta)$ que

$$dR_t(t+\theta) = \frac{1}{\theta}\left(-r_t + \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}_t(t+\theta)\|^2 - \nabla_\theta \ln(B_t(t+\theta)) \right) dt + \frac{1}{\theta}\bar{\sigma}_t(t+\theta)dW_t^{\mathbb{Q}} \ .$$

Or

$$\nabla_\tau \ln(B_t(t+\theta)) = \nabla_\theta \left(-\int_t^{t+\theta} f_t(u)du \right) = -f_t(t+\theta)$$

et

$$\begin{aligned} f_t(t+\theta) - r_t &= -\lim_{\tau\to 0} (\nabla_\tau \ln(B_t(t+\theta+\tau)) - \nabla_\tau \ln(B_t(t+\tau))) \\ &= \lim_{\tau\to 0} \nabla_\tau \ln(B_t(t+\tau, t+\theta+\tau)) \\ &= \theta \nabla_\tau R_t(t+\tau, t+\theta)_{|\tau=0} \ . \end{aligned}$$

□

On observe que, si σ est déterministe, alors $B_t(\tau)$ est lognormal. Il est alors facile de calculer des dérivés simples sur B (call, put, etc...). Par ailleurs, une dépendance non triviale de σ en τ permet de reproduire des déformations (non triviales) de la courbe des taux si $n > 1$. De même, la dynamique de r est gaussienne et on peut facilement calculer la prime de swaps et autres produits dérivés simples ayant r comme sous-jacent. Bien entendu, l'aspect gaussien de r est une limite au modèle, puisque les taux peuvent alors être négatifs. Pour remédier à cela, on peut supposer que σ dépend de f. Toutefois, comme f_t est de dimension infini, l'existence d'une solution à (21) est plus problématique dans ce cas, si la dépendance n'est pas triviale. On renvoie au Chapitre 13.1 de [31] pour des références sur ce sujet.

4.2 Exemples de paramétrisation

Volatilité constante

Si σ est constante alors, d'après la Proposition 7,

$$r_t \;=\; f_0(t) + \frac{t^2}{2}\|\sigma\|^2 ds + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}$$

et l'égalité $B_t(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^\tau r_s ds}\right]$ implique que

$$B_t(\tau) = \frac{B_0(\tau)}{B_0(t)} e^{-(\tau-t)\left(r_t - f_0(t) + \frac{1}{2}\|\sigma\|^2 t(\tau-t)\right)} .$$

Dans ce cas, la dynamique du prix du zéro coupon est entièrement donnée par celle du taux court r et des constantes correspondants à l'état du marché en 0.

Modèles à facteurs

On suppose maintenant que

$$f_t(\tau) = b(t,\tau) + a(\tau - t)' F_t$$

où b, a sont des processus déterministes à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^\kappa$, $\kappa \geq 1$, réguliers par rapport à leur première variable, et F est adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^\kappa$ donné par

$$F_t = F_0 + \int_0^t D_s ds + \int_0^t V_s dW_s^{\mathbb{Q}}$$

où D et Γ sont prévisibles vérifiant les conditions usuelles.
Dans ce cas, la dynamique de f est donnée par

$$df_t(\tau) = \big(\nabla_t b(t,\tau) - \nabla_t a(\tau-t)' F_t + a(\tau-t)' D_t\big)\, dt + a(\tau-t)' V_t dW_t^{\mathbb{Q}} \ .$$

D'après la Proposition 7, on doit avoir

$$\begin{aligned} &\nabla_t b(t,\tau) - \nabla_t a(\tau-t)' F_t + a(\tau-t)' D_t = \sigma_t(\tau)\bar{\sigma}_t(\tau)' \\ &a(\tau-t)' V_t = \sigma_t(\tau) \ . \end{aligned} \tag{23}$$

A partir de maintenant, on suppose que $\sigma_t(\tau)$ s'écrit $\sigma(F_t, \tau-t)$ et on pose $A(\tau-t) = \int_0^{\tau-t} a(s)ds$, ce qui implique que

$$\bar{\sigma}(F_t, \tau-t) = A(\tau-t)' V_t \ .$$

En utilisant (23), on obtient alors

$$\nabla_t b(t,\tau) - \nabla_t a(\tau-t)' F_t + a(\tau-t)' D_t = a(\tau-t)' V_t V_t' A(\tau-t) \ . \tag{24}$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour tout $t \leq \tau \leq T$, en considérant un nombre suffisamment grand de maturités différentes τ, on obtient un système d'équations d'inconnues D_t et $V_t V_t'$ que l'on peut s'attendre à pouvoir inverser. Si c'est le cas, ces deux quantités sont nécessairement des fonctions affines de F_t. Les coefficients obtenus ne peuvent alors pas dépendre de τ.
On suppose que c'est le cas et qu'ils admettent une écriture de la forme :

$$\begin{aligned} V_t V_t' &= \alpha F_t + \beta_t \\ D_t &= \phi_t - \Gamma F_t \end{aligned}$$

où les matrices α et β sont nécessairement symétriques par symétrie de $V_t V_t'$.
En utilisant (24), on obtient alors

$$\begin{aligned} a(\tau-t)'\beta_t A(\tau-t) &= \nabla_t b(t,\tau) - \big(\nabla_t a(\tau-t)' + a(\tau-t)'\Gamma\big) F_t \\ &- a(\tau-t)'\alpha F_t A(\tau-t) + a(\tau-t)'\phi_t \ . \end{aligned}$$

Comme seul F est aléatoire, on a nécessairement

$$\big(\nabla_t a(\tau-t)' + a(\tau-t)'\Gamma\big) F_t + a(\tau-t)'\alpha F_t A(\tau-t) = 0$$

ce qui implique que

$$\nabla A(x) = \nabla A(0) - \Gamma' A(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Trace}[\alpha A(x) A(x)'] \ .$$

C'est une équation de Riccati de dimension κ. En général, on ne peut pas résoudre cette équation analytiquement, sauf dans le cas $\kappa = 1$.

5 Mesure forward neutre

5.1 Motivation et définition de la mesure forward neutre

Supposons que l'on veuille calculer le prix d'un call de maturité τ_1 sur un zéro-coupon de maturité $\tau_2 \geq \tau_1$:

$$p := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{\tau_1} r_s ds}[B_{\tau_1}(\tau_2) - K]^+\right] .$$

L'idée du passage à la mesure forward neutre est de considérer $\mathbb{Q}_{\tau_1} \sim \mathbb{Q}$ définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}_{\tau_1}}{d\mathbb{Q}} := \frac{e^{-\int_0^{\tau_1} r_s ds}}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{\tau_1} r_s ds}\right]} = \frac{\beta_{\tau_1}}{B_0(\tau_1)} .$$

On peut alors ré-écrire p comme

$$p = B_0(\tau_1)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\tau_1}}\left[[B_{\tau_1}(\tau_2) - K]^+\right] .$$

Comme $\frac{d\mathbb{Q}_{\tau_1}}{d\mathbb{Q}}$ est une variable aléatoire strictement positive et intégrable, on déduit du théorème de représentation des martingales qu'il existe un processus prévisible λ p.s. de carré intégrable tel que

$$\frac{d\mathbb{Q}_{\tau_1}}{d\mathbb{Q}} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \|\lambda_s\|^2 ds + \int_0^{\tau_1} \lambda_s' dW_s^{\mathbb{Q}}}$$

et le théorème de Girsanov implique que

$$W^{\mathbb{Q}_{\tau_1}} := W^{\mathbb{Q}} - \int_0^{\cdot} \lambda_s ds$$

est un $\mathbb{Q}_{\tau_1}$ mouvement brownien. Une fois le λ explicité, on peut alors ré-écrire $B_{\tau_1}(\tau_2)$ en fonction de $W^{\mathbb{Q}_{\tau_1}}$.
Par exemple, dans le modèle de Vasicek, si a, b et σ sont constants, les calculs de la Section 2.2 conduisent à

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau_1} r_s ds &= r_0 \int_0^{\tau_1} e^{-sa} ds + \int_0^{\tau_1}\int_u^{\tau_1} e^{-(s-u)a} b ds du \\ &+ \int_0^{\tau_1} \frac{1}{a}\left[1 - e^{-(\tau_1-u)a}\right]\sigma dW_u^{\mathbb{Q}} .\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que $\lambda'_u = -\frac{1}{a}\left[1 - e^{-(\tau_1 - u)a}\right]\sigma$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
r_t &= r_0 e^{-at} + b[e^{-at} - 1] + \int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \\
&= r_0 e^{-at} + b[e^{-at} - 1] - \frac{1}{a}\int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma\sigma' \left[1 - e^{-(\tau_1 - s)a}\right] ds \\
&+ \int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma dW_s^{\mathbb{Q}_{\tau_1}} .
\end{aligned}$$

Dans le modèle de HJM, le Corollaire 8 et la Proposition 7 impliquent que $\lambda'_u = -\bar{\sigma}_u(\tau_1)$.

De manière plus générale, on remarque que

$$1 = B_{\tau_1}(\tau_1) = B_0(\tau_1) e^{\int_0^{\tau_1} r_s ds} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \|\Gamma_s(\tau_1)\|^2 ds + \int_0^{\tau_1} \Gamma_s(\tau_1) dW_s^{\mathbb{Q}}}$$

ce qui implique que $\lambda' = \Gamma(\tau_1)$.

5.2 Propriété de martingale du zéro-coupon forward

En utilisant le fait que $\tilde{B}(\tau_2)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale et que

$$B(\tau_1) B(\tau_1, \tau_2) = B(\tau_2) , \tag{25}$$

on observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\tau_1}}\left[B_t(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_{\tau_1} B_t(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_s\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_t B_t(\tau_1) B_t(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_s\right]}{\beta_s B_s(\tau_1)} \\
&= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_t B_t(\tau_2) \mid \mathcal{F}_s\right]}{\beta_s B_s(\tau_1)} \\
&= \frac{\beta_s B_s(\tau_2)}{\beta_s B_s(\tau_1)} = B_s(\tau_1, \tau_2) .
\end{aligned}$$

Proposition 9 *Pour tout $\tau_1 \leq \tau_2$, $B(\tau_1, \tau_2)$ est une $\mathbb{Q}_{\tau_1}$-martingale.*

Ceci combiné à (25) permet de trouver la dynamique de $B(\tau_1, \tau_2)$ sous $\mathbb{Q}_{\tau_1}$. Par exemple, dans le modèle HJM, on déduit de la Proposition 6 que

$$dB_t(\tau_1, \tau_2) = B_t(\tau_1, \tau_2)\left(\bar{\sigma}_t(\tau_1) - \bar{\sigma}_t(\tau_2)\right) dW_t^{\mathbb{Q}_{\tau_1}} \tag{26}$$

5.3 Propriété de martingale du taux Libor forward

Le taux LIBOR (London Interbak Offer Rate) est un taux à intérêts simples payé en fin de période. On note $L_t(\tau)$ le taux d'emprunt à la date t pour un remboursement en τ. Pour un emprunt d'un euro à la date t, on rembourse donc $1 + (\tau - t)L_t(\tau)$ euros en τ. Si $B_t(\tau)$ est le prix d'un zéro coupon en t de maturité τ sur ce taux, on doit donc avoir

$$B_t(\tau) = (1 + (\tau - t)L_t(\tau))^{-1} .$$

Par la suite, on notera $L_t(\tau_1, \tau_2)$ la valeur à la date t du taux LIBOR forward pour un emprunt en τ_1 de maturité τ_2. On a également

$$B_t(\tau_1, \tau_2) = (1 + (\tau_2 - \tau_1)L_t(\tau_1, \tau_2))^{-1} . \tag{27}$$

En particulier,

$$(\tau_2 - \tau_1)L_t(\tau_1, \tau_2)B_t(\tau_2) = B_t(\tau_1) - B_t(\tau_2) ,$$

ce qui implique que $L(\tau_1, \tau_2)B(\tau_2)\beta$ doit être une $\mathbb{Q}$-martingale. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\tau_2}}\left[L_t(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_{\tau_2} L_t(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_s\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_t B_t(\tau_2) L_t(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_s\right]}{\beta_s B_s(\tau_2)} \\
&= \frac{\beta_s B_s(\tau_2) L_s(\tau_1, \tau_2)}{\beta_s B_s(\tau_2)} \\
&= L_s(\tau_1, \tau_2) .
\end{aligned}$$

Proposition 10 *Pour tout $\tau_1 \leq \tau_2$, $L(\tau_1, \tau_2)$ est une $\mathbb{Q}_{\tau_2}$-martingale.*

Ceci combiné à (27) permet de trouver la dynamique de $L(\tau_1, \tau_2)$ sous $\mathbb{Q}_{\tau_2}$. Par exemple, dans le modèle HJM, on déduit de (26) que

$$dL_t(\tau_1, \tau_2) = \frac{\bar{\sigma}_t(\tau_2) - \bar{\sigma}_t(\tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)B_t(\tau_1, \tau_2)} dW_t^{\mathbb{Q}_{\tau_2}}$$

où encore

$$d\bar{L}_t(\tau_1, \tau_2) = \bar{L}_t(\tau_1, \tau_2)\left(\bar{\sigma}_t(\tau_2) - \bar{\sigma}_t(\tau_1)\right) dW_t^{\mathbb{Q}_{\tau_2}}$$

avec $\bar{L}(\tau_1, \tau_2) := 1 + (\tau_2 - \tau_1)L(\tau_1, \tau_2)$.

6 Quelques produits dérivés de taux

6.1 Call sur obligation

On considère une obligation payant un coupon c_i (connu à l'avance) aux dates t_i, $i = 1, \ldots, \kappa$, de maturité t_κ. Le dernier flux c_κ comprend à la fois le coupon payé en t_κ et le remboursement du nominal. La valeur de l'obligation en $t < t_\kappa$ est donnée par

$$O_t = \sum_{t_i \geq t} B_t(t_i) c_i \ .$$

La valeur en 0 d'un call de date d'exercice t sur l'obligation et de strike K est

$$C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_s ds} [O_t - K]^+ \right] \ .$$

Dans de nombreux modèles, O_t est de type lognormal lorsqu'il n'y a qu'une date de paiement de coupon $\kappa = 1$, ce qui revient en fait à supposer que l'obligation est un zéro-coupon. Dans ce cas, on obtient de manière classique une formule explicite pour C_0.

On suppose maintenant que le prix du zéro coupon $B_t(s)$, $s \geq t$, est décroissant par rapport au taux spot r_t. On met en évidence cette dépendance en notant $B_t(s) = b(t, r_t, s)$ où on suppose que b est une fonction déterministe. Ce type décriture est valable dans la pluspart des modèles simples (voir les section précédentes). De même, on note $O_t = o(t, r_t)$ et on suppose qu'il existe $\hat{r}$ tel que $o(t, \hat{r}) = K$. Dans ce cas, on définit les constantes

$$K_i := b(t, \hat{r}, t_i)$$

de sorte que

$$K = \sum_{t_i \geq t} K_i c_i$$

et

$$[O_t - K]^+ = \sum_{t_i \geq t} c_i [B_t(t_i) - K_i]^+ \ .$$

Sous les hypothèses précédentes, on est donc ramené à évaluer une somme de calls sur zéro-coupons.

6.2 Swap de taux

Un *swap de taux* est composé de deux jambes associées à des flux payés à des dates $t_1 < \ldots < t_\kappa$ fixées à l'avance (on note $t_0 := 0$) :

- la jambe fixe est payée par l'acheteur. A chaque date t_{i+1} celui-ci paie un montant $N\rho(t_{i+1} - t_i)$. N est le nominal et ρ un taux fixé à l'avance, appelé *taux swap*.

- la jambe variable est reçue par l'acheteur. A chaque date t_{i+1} celui-ci reçoit un montant $NL_{t_i}(t_{i+1})((t_{i+1} - t_i)$, où $L_{t_i}(t_{i+1})$ est un taux variable à intérêts simples pour la période $[t_i, t_{i+1}]$, connu en t_i.

Au moment de la création du swap, le taux swap est choisi de manière ce que les deux jambes aient la même valeur, i.e.

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{\kappa-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{t_{i+1}} r_s ds}(t_{i+1} - t_i)\left(\rho - L_{t_i}(t_{i+1})\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\kappa-1} B_0(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i)\rho - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{t_{i+1}} r_s ds}(t_{i+1} - t_i)L_{t_i}(t_{i+1})\right] .
\end{aligned}
$$

En utilisant l'identité

$$
(t_{i+1} - t_i)L_{t_i}(t_{i+1}) = B_{t_i}(t_{i+1})^{-1} - 1 ,
$$

on remarque, en prenant l'espérance conditionnelle à $\mathcal{F}_{t_i}$ dans la partie de droite de l'équation précédente, que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{t_{i+1}} r_s ds}(t_{i+1} - t_i)L_{t_i}(t_{i+1})\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_{t_i}(t_{i+1})e^{-\int_0^{t_i} r_s ds}\left(B_{t_i}(t_{i+1})^{-1} - 1\right)\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{t_i} r_s ds}\right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{t_i} r_s ds} B_{t_i}(t_{i+1})\right] \\
&= B_0(t_i) - B_0(t_{i+1}) ,
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$
\rho = \frac{1 - B_0(t_\kappa)}{\sum_{i=0}^{\kappa-1} B_0(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i)} .
$$

6.3 Swaption

Un swaption est une option permettant de rentrer dans un swap de taux à une date t fixée à un taux swap ρ fixé à l'avance. Sa valeur en 0 est donc

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^t r_s ds}\left[\sum_{t_{i+1}\geq t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{t_{i+1}} r_s ds}N(t_{i+1}-t_i)(L_{t_i}(t_{i+1})-\rho)\mid \mathcal{F}_t\right]\right]^+\right] .$$

Ceci s'écrit également, voir les calculs de la Section 6.2,

$$V_0 \quad = \quad N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^t r_s ds}\left[\sum_{t_{i+1}\geq t}(B_t(t_i)-(1+\rho(t_{i+1}-t_i))B_t(t_{i+1}))\right]^+\right] ,$$

et nous ramène à caculer le prix d'un call sur obligation versant des coupons.

6.4 Cap et floor

Un *cap* est un produit qui paie la différence positive entre les intérêts simples liés à un taux variable et un taux fixé à l'avance. Si N est le nominal, $L_{t_i}(t_{i+1})$ le taux variable pour la période $[t_i, t_{i+1}]$ et ρ le taux fixe, le paiement à la date t_{i+1} est

$$N(t_{i+1}-t_i)[L_{t_i}(t_{i+1})-\rho]^+ .$$

Ce paiement est effectué aux dates $t_1 < \ldots < t_\kappa$. Le prix à la date $t_0 := 0$ est donc donné par

$$\sum_{i=0}^{\kappa-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{t_{i+1}} r_s ds}N(t_{i+1}-t_i)[L_{t_i}(t_{i+1})-\rho]^+\right] .$$

On parle de *caplet* lorsqu'il n'y a qu'une date de paiement, i.e. un cap est une somme de caplets. On parle de *floor* (resp. de *floorlet*) lorsque le paiement en t_{i+1} est $N(t_{i+1}-t_i)[\rho - L_{t_i}(t_{i+1})]^+$.

Lorsque $L_{t_i}(t_{i+1})$ est gaussien ou lognormal sous $\mathbb{Q}_{t_{i+1}}$, le prix est explicite (même type de formules que pour les calls et puts dans le modèle de Black et Scholes).

On peut remarquer qu'acheter un cap et vendre un floor de taux fixe ρ revient à acheter un swap.

Chapitre 10

Modèles avec risque de défaut

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'évaluation de produits de taux en présence de risque de défaut[1]. Plus précisément, on cherche à évaluer des titres financiers, typiquement un zéro-coupon, émis par une firme qui peut faire *défaut*, i.e. ne pas être en mesure d'honorer ses engagements.

Le temps aléatoire θ à partir duquel la firme fait défaut est appelé *temps de défaut*. Par convention, on posera toujours $\theta = \infty$ si ce temps est plus grand que T.

Par la suite, on supposera qu'il existe une mesure risque neutre $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sous laquelle les actifs financiers actualisés au taux sans risque r sont des martingales, voir le Chapitre 6. On notera $W^{\mathbb{Q}}$ un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$.

1 Modèles de la firme (ou modèles structurels)

1.1 Modèle de Merton

L'objectif de ce modèle est d'évaluer un zéro-coupon de maturité T, i.e. qui paie 1 en T.

Dans ce modèle, on suppose que la firme fait défaut quand la valeur de la firme en T, F_T, passe sous le niveau de la dette, ici 1, en T. Autrement dit

$$\theta = T\mathbf{1}_{F_T<1} + \infty\mathbf{1}_{F_T\geq 1} .$$

Si la firme fait défaut en T, l'acheteur de l'obligation reçoit la valeur de la firme F_T en T au lieu de 1. Il reçoit donc : $X := F_T \wedge 1$.

[1]Nous renvoyons à [4] pour de nombreux développements sur le sujet.

Le prix du titre est donc, voir Chapitre 6,

$$B_0^{\mathrm{d}}(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds}\left(F_T \wedge 1\right)\right] .$$

Dans ce modèle, on suppose en outre que r est constant et que la valeur de la firme évolue selon la dynamique

$$F_t = F_0 + \int_0^t F_s(r-\kappa)ds + \int_0^t F_s \sigma dW_s^{\mathbb{Q}} \ , \ t \in \mathbb{T} ,$$

où $F_0, \sigma > 0$ et $\kappa \geq 0$ est un taux de dividende fixe. On a alors

$$B_0^{\mathrm{d}}(T) = e^{-rT}\left(\int_{-\infty}^{\alpha} F_0 e^{(r-\kappa-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx + \int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\right)$$

où

$$\alpha = \frac{\ln(1/F_0) - (r-\kappa-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} ,$$

qui se calcule explicitement en fonction de la fonction Φ de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On peut en déduire une valeur du *spread de taux* implicite, i.e. de l'écart entre le taux de rendement constant r^{d} de cette obligation si l'entreprise ne faisait pas défaut et le taux sans risque. En effet, le taux de rendement r^{d} d'un titre valant p en 0 et versant 1 en T doit vérifier $p = e^{-r^{\mathrm{d}}T}$, i.e.

$$r^{\mathrm{d}} = -\ln(p)/T .$$

Le spread par rapport au taux sans risque est donc

$$\mathrm{spread}^{\mathrm{d}} := r^{\mathrm{d}} - r = -\ln(p)/T - r .$$

Dans ce modèle, on peut vérifier que le spread est strictement positif et qu'il tend vers 0 (resp. ∞) quand T tend vers 0 si $F_0 > 1$ (resp. si $F_0 < 1$).

1.2 Modèle de Black and Cox

Le modèle de Black et Cox repose sur la même idée que le modèle de Merton sauf que l'on suppose que la firme fait défaut dès que sa valeur passe sous la valeur d'un processus L défini par

$$L_t = L_0 e^{\gamma t} ,$$

avec $\gamma, L_0 > 0$, où si la valeur de la firme en T est inférieure à un niveau $K > 0$. On a alors

$$\theta := \hat{\theta}\mathbf{1}_{\hat{\theta}<T} + T\mathbf{1}_{V_T<K} + \infty\mathbf{1}_{\{\hat{\theta}>T\ ,\ F_T\geq K\}}$$

où

$$\hat{\theta} := \inf\{t \in \mathbb{T}\ :\ F_t < L_t\}$$

avec la convention usuelle $\inf \emptyset = \infty$. Dans le cas où l'entreprise fait défaut, on reçoit un *recovery* proportionnel à la valeur de la firme $\zeta_1 F_\theta$ au temps θ si $\theta < T$ et $\zeta_2 F_T$ si $\theta = T$, $\zeta_1, \zeta_2 \geq 0$.

Le prix du zéro coupon risqué s'écrit donc

$$B_0^{\mathrm{d}}(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds}\left(\mathbf{1}_{\theta>T} + \zeta_2 F_T \mathbf{1}_{\theta=T}\right) + e^{-\int_0^\theta r_s ds}\zeta_1 F_\theta \mathbf{1}_{\theta<T}\right] .$$

Lorsque r est constant, un calcul explicite peut être effectué en utilisant le Corollaire 3 ci-dessous. La formule étant relativement longue, nous ne la donnons pas ici, voir p73 dans [4].

Comme dans la section précédente, on obtient un spread strictement positif dès que $\zeta_1, \zeta_2, K, L_T < 1$ et $\gamma > r$.

1.3 Remarques générales

On peut émettre deux critiques principales sur ces modèles :

1. La dynamique de la valeur de la firme est simpliste et il n'y a aucune raison pour qu'elle soit observable.

2. Ces modèles produisent des primes de risque qui sont souvent plus faibles que celles observées sur le marché lorsque l'on s'approche de la maturité (proches de 0). Ceci pourrait s'expliquer par le fait que le temps de défaut est un temps d'*arrêt prévisible*.[2] Autrement dit, il existe une suite d'"évènements" qui annoncent le défaut et celui-ci n'est pas une surprise. Il n'est donc pas "attendu" si l'on est proche de la maturité et que la valeur de la firme est suffisamment élevée. Pour remédier à ce problème, on peut ajouter des sauts dans la dynamique de F.

[2] On dit qu'un temps d'arrêt θ est prévisible, s'il existe une suite de temps d'arrêt $(\theta_n)_n$ telle que $\theta_n \to \theta$ $\mathbb{P}$ − p.s. et $\theta_n < \theta$ $\mathbb{P}$ − p.s. sur $\{\theta > 0\}$.

1.4 Rappels sur la loi du maximum d'un brownien drifté

On commence par étudier la loi du minimum d'un mouvement brownien conditionné par sa valeur terminale.

Lemme 1 *Soit $W^{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien unidimensionelle. Alors pour tout $a \leq 0$, $b \geq a$ et $h > 0$*

$$\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \leq a \mid W_h^{\mathbb{Q}} = b\right] \quad = \quad e^{-\frac{2}{h}a(a-b)} \ .$$

Preuve. Soit $\theta_a := \inf\{t \geq 0 \ : \ W_t^{\mathbb{Q}} = a\}$, le temps d'atteinte de a par $W^{\mathbb{Q}}$. On a alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \leq a \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} \geq b\right] &= \mathbb{Q}\left[\theta_a \leq h \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} \geq b\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[\theta_a \leq h \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} - W_{\theta_a}^{\mathbb{Q}} \geq b - a\right] \ .\end{aligned}$$

Comme θ_a est $\mathcal{F}_{\theta_a}-$mesurable et que $W_{h\vee\theta_a} - W_{\theta_a}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{\theta_a}$ par la propriété de Markov forte du mouvement brownien, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \leq a \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} \geq b\right] &= \mathbb{Q}\left[\theta_a \leq h \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} - W_{\theta_a} \leq a - b\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[\theta_a \leq h \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} \leq 2a - b\right]\end{aligned}$$

car $W_{h\vee\theta_a}^{\mathbb{Q}} - W_{\theta_a}^{\mathbb{Q}}$ et $W_{\theta_a}^{\mathbb{Q}} - W_{h\vee\theta_a}$ ont la même loi (propriété de symétrie). Comme $2a - b \leq a$, on a donc

$$\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \leq a \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} \geq b\right] \quad = \quad \mathbb{Q}\left[W_h^{\mathbb{Q}} \leq 2a - b\right] \ .$$

Finalement, comme

$$\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \leq a \mid W_h^{\mathbb{Q}} = b\right] \quad = \quad \frac{\frac{\partial}{\partial b}\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \leq a \ , \ W_h^{\mathbb{Q}} \leq b\right]}{\frac{\partial}{\partial b}\mathbb{Q}\left[W_h^{\mathbb{Q}} \leq b\right]} \ ,$$

un calcul direct donne le résultat. $\square$

Puisque $-W^{\mathbb{Q}}$ est également un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien et que $W_h^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{h})$ sous $\mathbb{Q}$, on déduit du Lemme 1 la loi du max et du min d'un mouvement brownien par un calcul d'intégration direct.

Corollaire 2 *Soit $W^{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien unidimensionelle. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$*

$$\mathbb{Q}\left[\max_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \le a\right] \;=\; \mathbb{Q}\left[|W_h^{\mathbb{Q}}| \le a\right] = \Big(\Phi(a/\sqrt{h}) - \Phi(-a/\sqrt{h})\Big)\,\mathbf{1}_{a\ge 0}\ .$$

Par ailleurs, $\max_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}} \overset{en\ loi}{=} -\min_{t\in[0,h]} W_t^{\mathbb{Q}}$.

On peut maintenant considérer le cas d'un brownien drifté.

Corollaire 3 *Soit $W^{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien unidimensionelle et Y défini par $Y_t = y_0 + \nu t + \eta W_t^{\mathbb{Q}}$, $\eta > 0$, $y_0, \nu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $a \le 0$, $b \ge a$ et $h > 0$*

$$\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} Y_t \ge a\ ,\ Y_h \ge b\right] = \Phi\left(\frac{-b^a + y_0^a + \nu h}{\eta\sqrt{h}}\right) - e^{-2\frac{\nu}{\eta^2}y_0^a}\,\Phi\left(\frac{-b^a - y_0^a + \nu h}{\eta\sqrt{h}}\right)$$

et

$$\mathbb{Q}\left[\min_{t\in[0,h]} Y_t \le a\right] \;=\; \Phi\left(\frac{-y_0^a - \nu h}{\eta\sqrt{h}}\right) + e^{-2\frac{\nu}{\eta^2}y_0^a}\,\Phi\left(\frac{-y_0^a + \nu h}{\eta\sqrt{h}}\right)$$

où $y_0^a := y_0 - a$ et $b^a = b - a$.

Preuve. Par un changement de mesure, voir Théorème 9 du Chapitre 6, on se ramène à considérer le cas où $X := (Y - y_0)/\eta$ est un mouvement brownien. Le résultat découle alors du Lemme 1 et du Corollaire 2 par des calculs d'intégration directs. □

Excercice 4 *(Loi du temps d'atteinte)*
Soit B un Mouvement Brownien Standard. Etant donné un réel $a \ge 0$ on note $T_a := \inf\{t \ge 0\ :\ B_t = a\}$.
a. Montrer que T_a est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ de B. (i.e. $\{T_a \le t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \ge 0$).
b. Par la suite on fixe $\lambda > 0$. Soit M défini par $M_t = \exp\big(\lambda B_t - \lambda^2 t/2\big)$. On admet que pour tout $n \ge 1$ $(M_{t\wedge T_a^n})_{t\ge 0}$ est une martingale où $T_a^n = T_a \wedge n$. Calculer $\mathbb{E}[M_{T_a^n}]$.
c. Montrer que $M_{T_a^n} \le e^{\lambda a}$
d. Montrer que sur $\{T_a = \infty\}$, $M_{T_a^n} \to 0$ quand $n \to \infty$.
e. Que se passe-t-il sur $\{T_a < \infty\}$?
f. En déduire que $\mathbb{E}[1_{T_a<\infty} e^{-\lambda^2 T_a/2}] = e^{-\lambda a}$.
g. En déduire que $\mathbb{P}[T_a < \infty] = 1$ et que $\mathbb{E}[e^{-\lambda^2 T_a/2}] = e^{-\lambda a}$.
h. Que dire si $a < 0$?

2 Approche (réduite) par fonction de hasard

Cette approche consiste à modéliser la probabilité conditionnelle du défaut sachant l'information courante : $P_t := \mathbb{Q}[\theta \le t \mid \mathcal{F}_t]$. Ici, $\mathbb{Q}$ est une mesure risque neutre pour le marché, θ est le temps de défaut et $\mathbb{F}$ est une filtration par rapport à laquelle le taux sans risque r est prévisible, la filtration de l'agent financier pouvant être plus grande. Pour simplifier, on supposera en outre que P admet une intensité prévisible p, i.e.

$$P = \int_0^{\cdot} p_s ds \ ,$$

et que

$$P_t < 1 \quad \text{pour tout } t < T \ \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

Cette dernière condition signifie simplement que l'information donnée par $\mathbb{F}$ n'est pas suffisante pour être sûr que le défaut a déjà eu lieu. Elle implique en particulier que θ n'est pas un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. Ceci permet de rendre éventuellement compte d'un effet de "surprise" au moment du défaut.

2.1 Cas du défaut indépendant du taux sans risque

On note $B_0^{\mathrm{d}}(\tau)$ la valeur du zéro-coupon avec défaut de maturité τ en 0. On suppose que le *recovery* R, constant, est payé en τ en cas de défaut. On a alors

$$B_0^{\mathrm{d}}(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}(\mathbf{1}_{\theta > \tau} + R\mathbf{1}_{\theta \le \tau})\right] \ .$$

Si l'on suppose que θ est indépendant de $\mathbb{F}$, alors P est déterministe et

$$B_0^{\mathrm{d}}(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[1 - (1-R)\mathbf{1}_{\theta \le \tau}\right] = B_0(\tau)\left(1 - (1-R)P_\tau\right) \ . \tag{1}$$

Nous allons maintenant ré-écrire cette identité en fonction de la *fonction de hasard* Γ de θ. Elle est définie par :

$$\Gamma_t \ := \ -\ln(1 - P_t)$$

de sorte que

$$1 - P_t = e^{-\Gamma_t} = e^{-\int_0^t \gamma_s ds}$$

où

$$\gamma_t = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_t = \frac{p_t}{1 - P_t} \ .$$

On peut noter que

$$\gamma_t = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \frac{P_{t+h}}{1-P_t} = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{Q}[\theta \leq t+h \mid (\theta > t) \vee \mathcal{F}_t] \; .$$

Autrement dit, γ, appelé *taux de hasard*, ou *intensité de défaut*, s'interprète à la date t comme la probabilité que le défaut survienne entre t et $t+dt$ sachant qu'il n'est pas survenu avant t.

L'équation (1) devient alors

$$B_0^{\mathrm{d}}(\tau) = B_0(\tau) \left(e^{-\int_0^\tau \gamma_s ds} + R(1 - e^{-\int_0^\tau \gamma_s ds}) \right) \; .$$

Lorsque $R = 0$ et r est déterministe, ceci s'écrit simplement

$$B_0^{\mathrm{d}}(\tau) = e^{-\int_0^\tau (r_s + \gamma_s) ds} \; .$$

Le "taux" γ peut donc s'interpréter comme un *spread de taux* : le rendement, avant défaut, de l'obligation risquée doit être plus élevé que le taux sans risque de manière à rémunérer le risque lié au défaut.
Dans le cas où $0 \leq R < 1$, on peut également écrire

$$B_0^{\mathrm{d}}(\tau) = e^{-\int_0^\tau (r_s + \kappa_s) ds}$$

avec

$$\kappa_s := \gamma_s - \frac{1}{\tau} \ln \left(1 + R(e^{\int_0^\tau \gamma_s ds} - 1) \right) .$$

Autrement dit, la présence d'un *recovery* non nul vient diminuer le *spread de taux*.

D'un point de vue pratique, si l'on connaît le recovery R, on peut déduire le taux de hasard γ à partir du spread observé sur le marché.

Remarque 5 On peut remarquer que, si U est une variable de loi uniforme sur $[0,1]$ sous $\mathbb{Q}$, alors la variable aléatoire

$$\inf\{t \geq 0 \; : \; -\ln(1-U) \leq \int_0^t \gamma_s ds\}$$

a la même moi que θ sous $\mathbb{Q}$. Ceci fournit une manière naturelle de simuler θ.

2.2 Défaut non indépendant

On se place maintenant dans le cadre général où θ et $\mathbb{F}$ ne sont plus indépendants. Dans ce cas, P n'est plus déterministe.

Zéro-coupon risqué

En reprenant les arguments de la section précédente, on obtient que la valeur du zéro-coupon avec défaut de maturité τ en 0 et de *recovery* R, constant, est

$$\begin{aligned} B_0^{\mathrm{d}}(\tau) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}(\mathbf{1}_{\theta>\tau} + R\mathbf{1}_{\theta\leq\tau})\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\theta>\tau} + R\mathbf{1}_{\theta\leq\tau} \mid \mathcal{F}_\tau\right]\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}(1-(1-R)P_\tau)\right] . \end{aligned}$$

Si l'on suppose en outre qu'il existe un processus γ $\mathbb{P}-$p.s. intégrable tel que

$$\Gamma_t := -\ln(1-P_t) = \int_0^t \gamma_s ds$$

alors

$$B_0^{\mathrm{d}}(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau (r_s+\gamma_s)ds} + e^{-\int_0^\tau r_s ds}R(1-e^{-\int_0^\tau \gamma_s ds})\right] .$$

Si $R=0$, on retrouve l'interprétation de γ comme un spread de taux, mais, cette fois-ci, aléatoire.

Obligation risquée

On suppose maintenant que le titre paie un coupon $C_{t_i} \in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{F}_{t_i})$ aux temps $0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_k \leq \tau$ jusqu'au temps de défaut, et 1 en τ si le défaut n'est pas survenu. On modélise le recovery par un processus $\mathbb{F}$-prévisible R borné : l'acheteur du titre reçoit R_θ en θ si $\theta \leq \tau$. D'après les résultats précédents, le prix du titre est

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau (r_s+\gamma_s)ds}\right] + \sum_{i=1}^k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{t_i}(r_s+\gamma_s)ds}C_{t_i}\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^\tau e^{-\int_0^s (r_u+\gamma_u)du}R_s\gamma_s ds\right] ,$$

où le dernier terme est obtenu en utilisant le lemme suivant.

Lemme 6 *Sous les conditions précédentes, on a*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\zeta_\theta \mathbf{1}_{\theta\leq\tau}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^\tau e^{-\Gamma_s}\zeta_s\gamma_s ds\right]$$

pour tout processus $\mathbb{F}$-prévisible ζ borné.

Preuve. Tout d'abord, il est clair que $dP_t = e^{-\Gamma_t}\gamma_t dt$. Il faut donc montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\zeta_\theta \mathbf{1}_{\theta \le \tau}\right] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^\tau \zeta_s p_s ds\right] .$$

Puisque ζ est prévisible, il suffit de montrer le résultat pour des processus de la forme

$$\zeta = \sum_{j=1}^{J-1} \xi_j \mathbf{1}_{(s_j, s_{j+1}]}$$

où $(s_j)_{1\le j\le J}$ est suite croissante de $[0,\tau]$ et $\xi_j \in L^\infty(\mathcal{F}_{s_j})$ pour tout $j \le J$, puis d'étendre le résultat par approximation. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\zeta_\theta \mathbf{1}_{\theta \le \tau}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{J-1} \xi_j \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{s_j < \theta \le s_{j+1}} \mid \mathcal{F}_{s_j}\right]\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{J-1} \xi_j \int_{s_j}^{s_{j+1}} p_s ds\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^\tau \zeta_s p_s ds\right] .
\end{aligned}$$

□

3 Approche par processus de Cox (franchissement de barrière)

Dans cette approche, on modélise le temps de défaut par le premier temps où un processus croissant $\mathbb{F}$-adapté Λ franchit une barrière Θ de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de $\mathbb{F}$:

$$\theta := \inf\{t \in [0,T] \;:\; \Lambda_t \ge \Theta\} .$$

On remarque alors que $\{\theta > t\} = \{\Lambda_t < \Theta\}$, pour tout $t \in [0,T]$, de sorte que, par indépendance de Θ et $\mathbb{F}$,

$$\mathbb{Q}[\theta > t \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{Q}[\Lambda_t < \Theta \mid \mathcal{F}_t] = e^{-\Lambda_t} .$$

On retrouve donc la modélisation de la Section 2.2 :

$$P_t := \mathbb{Q}[\theta \le t \mid \mathcal{F}_t] = 1 - e^{-\Lambda_t}$$

ce qui implique que $\Gamma := -\ln(1-P) = \Lambda$.

Réciproquement, si $P = 1 - e^{-\Lambda}$ et si Θ est une loi exponentielle de paramètre 1 alors la variable aléatoire

$$\inf\{t \in [0,T] \ : \ \Lambda_t \geq \Theta\}$$

admet P_t comme fonction de répartition conditionnellement à $\mathcal{F}_t$. Autrement dit l'approche de la Section 2.2 et celle par processus de Cox sont équivalentes. L'avantage de cette dernière est qu'elle procure une manière naturelle de simuler le temps de défaut conditionnellement à (r, R).

4 Modèle de Heath-Jarrow-Morton avec défaut

On se place dans le cadre du modèle de la Section 4 du Chapitre 9, i.e. le taux forward sans risque instantanné suit la dynamique du modèle de Heath-Jarrow-Morton. En particulier, le prix du zéro-coupon sans risque suit la dynamique donnée dans la Proposition 6 du Chapitre 9 sous la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$.

4.1 Courbe de taux forward risqué

Cette fois-ci, on modélise directement la courbe de taux forward risqué, associé à une classe de titre obligataire présentant un risque de défaut. On suppose que le taux forward risqué instantané $f^{\mathrm{d}}(\tau)$ de maturité $\tau \leq T$ suit la dynamique

$$f_t^{\mathrm{d}}(\tau) \quad = \quad f_t^{\mathrm{d}}(\tau) + \int_0^t \alpha_s^{\mathrm{d}}(\tau) ds + \int_0^t \sigma_s^{\mathrm{d}}(\tau) dW_s^{\mathbb{Q}} \ \ , \ t \leq T \ ,$$

où $(\alpha^{\mathrm{d}}, \sigma^{\mathrm{d}})$ vérifient les mêmes hypothèses que (α, σ) dans la Section 4 du Chapitre 9.

On note $B^{\mathrm{d}}(\tau)$ la valeur d'un zéro-coupon soumis à défaut sans recovery, i.e. qui paie 1 en τ si et seulement si il n'y a pas eu défaut. On note θ le temps de défaut.

La valeur du zéro-coupon soumis à défaut est donc donnée par

$$B_t^{\mathrm{d}}(\tau) = e^{-\int_t^T f_t^{\mathrm{d}}(u) du} \mathbf{1}_{\theta > t} \ \ , \ t \leq T \ ,$$

autrement dit

$$B_t^{\mathrm{d}}(\tau) = B_t(\tau) e^{-\int_t^T s_t(u) du} \mathbf{1}_{\theta > t} \ \ , \ t \leq T \ ,$$

où

$$s^{\mathrm{d}}(\tau) := f^{\mathrm{d}}(\tau) - f(\tau)$$

est le *spread de taux forward instantané*. On interprètera le processus s^{d} défini par

$$s_t^{\mathrm{d}} := \lim_{\tau \searrow t} s_t^{\mathrm{d}}(\tau)$$

comme le *spread de taux court*, si cette limite à un sens.

4.2 Dynamique du zéro-coupon risqué sous la mesure risque neutre et intensité de défaut

Par les mêmes arguments que ceux employés dans la Section 4 du Chapitre 9, on obtient une expression explicite de la dynamique de B^{d} :

$$\begin{aligned} dB_t^{\mathrm{d}}(\tau) &= B_t^{\mathrm{d}}(\tau)\left(r_t + s_t^{\mathrm{d}} - \bar{\alpha}_t^{\mathrm{d}}(\tau) + \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}_t^{\mathrm{d}}(\tau)\|^2\right)dt - B_t^{\mathrm{d}}(\tau)\bar{\sigma}_t^{\mathrm{d}}(\tau)dW_t^{\mathbb{Q}} \\ &- B_{t-}^{\mathrm{d}}(\tau)dH_t \end{aligned}$$

où

$$(\bar{\alpha}_t^{\mathrm{d}}(\tau), \bar{\sigma}_t^{\mathrm{d}}(\tau)) = \int_t^\tau (\alpha_t^{\mathrm{d}}(u), \sigma_t^{\mathrm{d}}(u))du$$

et

$$H_t := \mathbf{1}_{t \geq \theta} .$$

Le processus H modélise le saut à zéro de B^{d} au moment du défaut.

On suppose maintenant qu'il existe un processus prévisible positif λ $\mathbb{P}$ − p.s. intégrable tel que

$$M^{\mathbb{Q}} := H_{\cdot} - \int_0^{\cdot} \mathbf{1}_{\theta > s}\lambda_s ds$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale. On a alors :

$$\mathbb{Q}[\theta \leq t + dt \mid (\theta > t) \vee \mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[H_{t+dt} - H_t \mid \mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\theta > t} \mid \mathcal{F}_t\right]} \approx \int_t^{t+dt} \lambda_s ds .$$

Le processus λ correspondant donc au taux de hasard de la Section 2.

Par ailleurs, la dynamique précédente se ré-écrit en fonction de λ sous la forme

$$\begin{aligned} dB_t^{\mathrm{d}}(\tau) &= B_t^{\mathrm{d}}(\tau)\left(r_t + s_t^{\mathrm{d}} - \bar{\alpha}_t^{\mathrm{d}}(\tau) + \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}_t^{\mathrm{d}}(\tau)\|^2 - \lambda_t\right)dt \\ &- B_t^{\mathrm{d}}(\tau)\bar{\sigma}_t^{\mathrm{d}}(\tau)dW_t^{\mathbb{Q}} - B_{t-}^{\mathrm{d}}(\tau)dM_t^{\mathbb{Q}} . \end{aligned}$$

Un calcul direct montre alors que $\tilde{B}^{\mathrm{d}}$ ne peut être une $\mathbb{Q}$-martingale locale que si

$$s^{\mathrm{d}} - \bar{\alpha}^{\mathrm{d}}(\tau) + \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}^{\mathrm{d}}(\tau)\|^2 = \lambda \ \ d\mathbb{Q} \times dt\text{-p.p. sur } [0, \theta) \ .$$

Autrement dit, si l'on suppose que $\bar{\alpha}^{\mathrm{d}}(\tau) = \frac{1}{2}\|\bar{\sigma}^{\mathrm{d}}(\tau)\|^2 \ d\mathbb{Q} \times dt$ a.e. , on peut identifier l'intensité de défaut λ au spread de taux instantanné s^{d}. Ceci est cohérent avec les modèles des sections précédentes.

5 Modèles de migration du risque de crédit

On suppose maintenant qu'il existe κ classes de titres risqués, regroupés par classes de notation (credit rating). A l'intérieur de chaque classe, on suppose que le risque de défaut est le même et, pour un titre donné, on modélise le passage d'une classe à l'autre par une chaine de Markov C, $C_t = i$ signifiant que le titre est dans la classe i. La classe κ correspond à la situation de défaut. L'instant de défaut peut alors s'écrire sous la forme

$$\theta = \inf\{t \in [0, T] \ : \ C_t = \kappa\} \ .$$

Il est naturel de modéliser l'évolution du processus C comme une chaîne de Markov. Pour simplifier, supposons qu'elle évolue en temps discret sur des périodes de longueur 1. On décrit l'évolution de la chaîne par sa matrice de transition (éventuellement aléatoire) dont les probabilités de transition conditionnellement à un processus Y fixé $(\mathbb{P}[C_{t+1} = j \mid C_t = i, Y])_{i,j \leq \kappa}$ sont déterministes et données par

$$\Pi_t(Y) = \begin{pmatrix} \pi_t^{11}(Y) & \pi_t^{12}(Y) & \dots & \pi_t^{1\kappa}(Y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_t^{(\kappa-1)1}(Y) & \pi_t^{(\kappa-1)2}(Y) & \dots & \pi_t^{(\kappa-1)\kappa}(Y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On suppose en outre que C est encore une chaîne de Markov sous la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ de matrice de transition $(\mathbb{Q}[C_{t+1} = j \mid C_t = i, Y])_{i,j \leq \kappa}$déterministe conditionnellement à Y

$$\Pi_t^{\mathbb{Q}}(Y) = \begin{pmatrix} \pi_t^{\mathbb{Q}11}(Y) & \pi_t^{\mathbb{Q}12}(Y) & \dots & \pi_t^{\mathbb{Q}1\kappa}(Y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_t^{\mathbb{Q}(\kappa-1)1}(Y) & \pi_t^{\mathbb{Q}(\kappa-1)2}(Y) & \dots & \pi_t^{\mathbb{Q}(\kappa-1)\kappa}(Y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sous $\mathbb{Q}$ la probabilité de faire défaut avant τ sachant Y est donc donnée par

$$\mathbb{Q}\left[C_\tau = \kappa \mid Y\right] \quad = \quad (\prod_{t=0}^{\tau-1} \Pi_t^{\mathbb{Q}}(Y))^{C_0\kappa} \; .$$

Si le temps de défaut θ est indépendant du taux spot sans risque r conditionnellement à Y, le prix du zéro coupon risqué s'écrit donc

$$\begin{aligned} B_0^{\mathrm{d}}(\tau) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}\mathbf{1}_{C_\tau<\kappa}\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds} \mid Y\right]\left(1-(\prod_{t=0}^{\tau-1}\Pi_t^{\mathbb{Q}}(Y))^{C_0\kappa}\right)\right] \; . \end{aligned}$$

En particulier, si $\Pi^{\mathbb{Q}}$ est déterministe, ne dépendant pas de Y, on obtient :

$$B_0^{\mathrm{d}}(\tau) \quad = \quad B_0(\tau)\left(1-(\prod_{t=0}^{\tau-1}\Pi_t^{\mathbb{Q}})^{C_0\kappa}\right) \; .$$

Une dernière hypothèse simplificatrice consiste à supposer qu'il existe un processus déterministe $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^\kappa)$ tel que

$$\pi_t^{\mathbb{Q}ij} = \alpha^i(t)\pi_t^{ij} \text{ si } j \neq i \; .$$

Dans ce cas, l'équation précédente écrite pour les maturités allant de 1 à τ conduit à un système permettant de retrouver α en fonction de Π et des prix de marché des zéro-coupons risqués de maturités différentes. Il reste alors à estimer les probabilités de transition sous $\mathbb{P}$ ce qui peut être fait par des méthodes statistiques classiques si on les suppose constante en temps. Cependant, il faut bien noter que les hypothèses faites ci-dessus sont très simplificatrices et qu'en général, rien ne garantit que le système décrit ci-dessus ait une solution α telle que les matrices $(\alpha^i(t)\pi_t^{ij})_{ij}$ soient effectivement des probabilités de transition.

6 Exemple de produits dérivés

6.1 Option sur défaut

Soit $O^{\mathrm{d}}(t)$ le prix d'une obligation soumise à risque de défaut. On note θ le temps de défaut. Une option sur défaut de maturité τ sur le titre O^{d} (de maturité plus grande que τ) et de valeur faciale L est un titre payant à son acheteur $[L - O^{\mathrm{d}}(\theta)]^+\mathbf{1}_{\theta\leq\tau}$ au moment de défaut θ. La valeur $O^{\mathrm{d}}(\theta)$ dépend du recovery.

Dans certains cas, le temps de défaut correspond en fait à un évènement plus général que le défaut stricto sensus (on parle d'"évènement de crédit" au sens large). Dans ce cas, $O^{\mathrm{d}}(\theta)$ peut être non nul même en l'absence de recovery.

Dans certains cas, la valeur faciale L est remplacée par un pourcentage de la valeur $O(\theta)$ de la même obligation lorsque le risque défaut est nul (pour un zéro coupon, on prendra par exemple la valeur d'un zéro coupon sans risque de défaut de même maturité et même valeur faciale).

Le paiement peut enfin être de la forme $[O^{\mathrm{d}}(\theta-) - O^{\mathrm{d}}(\theta)]^{+}\mathbf{1}_{\theta \le \tau}$, i.e. on perçoit une compensation liée à la perte de valeur du titre au moment du défaut.

6.2 Swap de défaut (CDS)

Un CDS (Credit Default Swap) est un swap sur obligation risquée. Pour simplifier, on considère un CDS sur le titre O^{d} de la section précédente. L'acheteur paie alors à certaines dates $t_1 < t_2 < \ldots < t_\kappa$ une prime ρ si le défaut n'a pas encore eu lieu. En échange, le vendeur verse à l'acheteur un montant $L - O^d(\theta)$ au moment du défaut si celui-ci survient avant la date τ de maturité du swap. Comme pour les swaps *standards*, la prime ρ est calculée de manière à ce que la valeur du swap soit égale à 0 au moment de sa création.

Là encore, le paiement au moment du défaut peut être de la forme $O(\theta) - O^d(\theta)$ ou $O^{\mathrm{d}}(\theta-) - O^{\mathrm{d}}(\theta)$ selon les produits.

6.3 Total Return Swap (TRS)

On parle également de Total Rate of Return Swap (TROR). Le "payeur" verse tous les rendements associés à un sous-jacent (ici une obligation risquée), y compris le gain/perte en capital. En échange, le "receveur" paie une prime ρ à des dates fixées à l'avance. Dès que le défaut survient, le contrat se termine et plus aucun flux n'est payé mais le receveur doit alors payé la différence de valeur entre le prix de l'obligation au moment du défaut et son prix à l'origine du contrat. De manière plus synthétique, si c_j sont des coupons versés par le titre aux dates s_j et la prime est payée aux dates t_i, le flux à la date t du point de vue du receveur est :

$$\sum_j c_j \mathbf{1}_{\theta > s_j} \mathbf{1}_{t=s_j} + [O^{\mathrm{d}}(\theta) - O^{\mathrm{d}}(0)]\mathbf{1}_{t=\theta} - \rho \sum_i \mathbf{1}_{\theta > t_i} \mathbf{1}_{t=t_i} \,.$$

Chapitre 11

Autres exercices

1 Modèle de Vasicek à coefficients constants et call sur zéro-coupon

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ supportant un $\mathbb{P}$-mouvement brownien W. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$ la filtration naturelle de W complétée et on suppose que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
On considère un marché financier dans lequel le taux sans risque r évolue selon la dynamique :

$$r_t \quad = \quad r_0 + \int_0^t a(b - r_s)ds + \int_0^t \sigma dW_s \ \ , \ t \leq T \tag{1}$$

où r_0, a, b, σ sont des constantes strictement positives. On suppose que le marché est complet et que l'unique mesure risque neutre est $\mathbb{P}$.
1. Montrer en utilisant le Lemme d'Itô que

$$r_t = r_0 e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right) + \int_0^t e^{-a(t-s)}\sigma dW_s \ .$$

2. On suppose que le prix P_t à la date t du zéro-coupon de nominal 1 et de maturité T, i.e. le produit qui paie 1 en T et aucun flux avant, est une fonction $p \in C^{1,2}$ du temps et de r : $P_t = p(t, r_t)$. Montrer que p est solution de

$$\begin{aligned}\partial_t p(t,r) + a(b-r)\partial_r p(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2\partial^2_{rr}p(t,r) &= rp(t,r) \quad \text{sur } [0,T)\times\mathbb{R} \\ p(T,\cdot) &= 1 \ . \end{aligned}\tag{2}$$

3. On cherche une solution de (2) sous la forme $p(t,r) = e^{m(t)-n(t)r}$. Montrer que m et n doivent alors satisfaire

$$\begin{aligned} \partial_t n(t) = an(t) - 1 \quad &, \quad \partial_t m(t) = abn(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 n^2(t) \\ n(T) = 0 \quad &, \quad m(T) = 0 \; . \end{aligned} \tag{3}$$

4. Montrer que la solution de (3) est donnée par

$$n(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \quad , \quad m(t) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T n^2(u)du - ab\int_t^T n(u)du \; .$$

5. Soit $\tau \in (0,T)$ et $\mathbb{Q}_\tau \sim \mathbb{P}$ la mesure de densité H_τ par rapport à $\mathbb{P}$ où

$$H_\tau := e^{-\int_0^\tau r_s ds}/P_0(\tau) \; .$$

On admettra que

$$H_\tau := e^{-\frac{1}{2}\int_0^\tau \lambda_s^2 ds + \int_0^\tau \lambda_s dW_s}$$

avec

$$\lambda_s = -\frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(\tau-s)}\right)\sigma$$

a. Calculer $e_\tau := \mathbb{E}[r_\tau]$ et $v_\tau :=$Var$[r_\tau]$.
b. Donner la loi de $\ln(P_\tau)$ sous $\mathbb{Q}_\tau$ en fonction de m, n, e_τ, v_τ et de $\Lambda(\tau) := \int_0^\tau e^{-a(\tau-s)}\lambda(s)ds$ (on introduira un $\mathbb{Q}_\tau$-mouvement brownien W^τ construit en utilisant le théorème de Girsanov).
6. On veut calculer le prix à la date 0, $C_0(\tau,K)$, d'un call européen de maturité τ et de strike K écrit sur le zéro-coupon de maturité T.
a. Montrer que

$$C_0(\tau,K) = P_0(\tau)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_\tau}\left[[P_\tau(T) - K]^+\right] \; .$$

b. Déduire des questions précédentes une formule de type Black et Scholes pour $C_0(\tau,K)$.

Correction
1. Utilisation directe d'Itô + unicité de la solution car coefficients Lipschitz.
2. On a $p(t,r_t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid r_t\right]$. L'équation est une conséquence du théorème de Feynman-Kac. On pouvait également dire que le processus de prix actualisé $(e^{-\int_0^t r_s ds} p(t,r_t)_{t\le T}$ est nécessairement une martingale (locale) et utiliser le lemme d'Itô pour calculer le terme en dt.

3. Il suffit de remplacer et de considérer les cas $r = 0$ dans l'équation obtenue.
4. C'est évident...
5.a. D'après 1., on a

$$e_\tau = r_0 e^{-a\tau} + b(1 - e^{-a\tau})$$

puisque le processus intervenant dans l'intégrale d'Itô est borné (i.e. l'intégrale est d'espérance nulle). Par ailleurs, par l'isométrie d'Itô,

$$\vartheta_\tau = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau e^{-a(\tau-s)}\sigma dW_s\right)^2\right] = \sigma^2 \int_0^\tau e^{-2a(\tau-s)} ds = (2a)^{-1}\sigma^2(1 - e^{-2a\tau}) .$$

5.b. On a

$$\ln(P_\tau) = m(\tau) - n(\tau) r_\tau = m(\tau) - n(\tau)\left(e_\tau + \int_0^\tau e^{-a(\tau-s)}\sigma dW_s^{\mathbb{Q}} + \sigma\Lambda(\tau)\right)$$

où $W^{\mathbb{Q}} = W - \int_0^\cdot \lambda_s ds$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. On en déduit que $\ln(P_\tau)$ a une distribution gaussienne de moyenne $e_\tau^{\mathbb{Q}} := m(\tau) - n(\tau)\left(e_\tau + \sigma\Lambda(\tau)\right)$ et de variance $\vartheta_\tau^{\mathbb{Q}} := n(\tau)^2\vartheta_\tau$.
6. a. On a

$$\begin{aligned} C_0(\tau, K) &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds}[P_\tau(T) - K]^+\right] \\ &= P_0(\tau)\mathbb{E}\left[H_\tau [P_\tau(T) - K]^+\right] \\ &= P_0(\tau)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_\tau}\left[[P_\tau(T) - K]^+\right] . \end{aligned}$$

6.b. D'après la question précédente $ln(P_\tau(T))$ a la même loi sous $\mathbb{Q}_\tau$ que $e_\tau^{\mathbb{Q}} + \sqrt{\vartheta_\tau^{\mathbb{Q}}/\tau} W_\tau^{\mathbb{Q}}$. Soit $\gamma = (e_\tau^{\mathbb{Q}} + \vartheta_\tau^{\mathbb{Q}}/2)/\tau$.
On peut écrire

$$C_0(\tau, K) = P_0(\tau) e^{\gamma\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_\tau}\left[e^{-\gamma\tau}[P_\tau(T) - K]^+\right]$$

où le terme

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_\tau}\left[e^{-\gamma\tau}[P_\tau(T) - K]^+\right]$$

peut être calculé en utilisant la formule de Black et Scholes pour le strike K, la maturité τ, le taux sans risque γ, la volatilité $\sqrt{\vartheta_\tau^{\mathbb{Q}}/\tau}$ et le spot $P_0(\tau)$.

2 Option asiatique : moyenne géométrique

On considère un marché financier constitué d'un actif sans risque, de taux d'intérêt $r \geq 0$, et d'un actif risqué S dont la dynamique est définie par le modèle de Black et Scholes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t^o \ , \ S_0 > 0$$

où $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ sont des paramètres donnés, et W^o est un mouvement Brownien sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions *habituelles*. Une option asiatique sur la moyenne géométrique continue est définie par la payoff à la maturité $T > 0$:

$$G := \left(\overline{S}_T - K\right)^+ \quad \text{où} \quad \overline{S}_T = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log{(S_t)}dt\right).$$

1. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité risque-neutre et W le mouvement brownien associé par le théorême de Girsanov. Ecrire la densité de $\mathbb{Q}$ et W en fonction de W^o.
2. Montrer que $\int_0^T W_t dt = \int_0^T (T-t)dW_t$.
3. Montrer que

$$\bar{S}_T = \bar{S}_0 e^{\bar{r}T - \frac{1}{2}\int_0^T \bar{\sigma}(t)^2 dt + \int_0^T \bar{\sigma}(t)dW_t},$$

   où

$$\bar{S}_0 = S_0 e^{-\sigma^2 T/12}, \ \bar{r} = \frac{r}{2}, \qquad \bar{\sigma}(t) = \sigma\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

4. En déduire la distribution sous $\mathbb{Q}$ de la variable aléatoire $\overline{S}_T$.
5. Donner la formule explicite de prix de non arbitrage p_0 à la date 0 de l'option asiatique géométrique ci-dessus.
6. Expliciter comment construire le portefeuille de couverture de cette option.

3 Option asiatique : moyenne arithmétique

On considère le même modèle que dans l'Exercice précédent sauf que l'on suppose que le processus de volatilité $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ est aléatoire, strictement positif, et que σ_t et σ_t^{-1} sont bornés uniformément en (t,ω). On s'intéresse à l'évaluation et la couverture de l'option asiatique définie par le paiement à la maturité $T>0$:

$$G \;=\; (Y_T-K)^+ \quad \text{où} \quad Y_T=\int_0^T S_u g(u)du$$

et $g:\ [0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction (déterministe) continue donnée. On notera par $\mathbb{Q}$ la probabilité risque-neutre, W le mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$ obtenu à partir de W^o, et par $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[.|\mathcal{F}_t]$ l'opérateur d'espérance conditionnelle associé.

1. (a) Vérifier que

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}Y_T\right] \;=\; \hat\theta(t)S_t+e^{-r(T-t)}\int_0^t g(u)S_u du,$$

où $\hat\theta:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction déterministe à déterminer.

(b) On considère la stratégie de portefeuille autofinancée qui consiste à détenir $\hat\theta(t)$ unités de l'actif risqué à chaque date $t\in[0,T]$, et on note par X_t la valeur de ce portefeuille à la date t. Donner la dynamique du processus $\tilde X$ défini par $\tilde X_t=e^{-rt}X_t$ pour $t\in[0,T]$ en fonction de W.

(c) Avec la notation $\tilde S_t=e^{-rt}S_t$, $t\in[0,T]$, montrer que

$$\hat\theta(0)S_0+\int_0^T\hat\theta(u)d\tilde S_u \;=\; e^{-rT}Y_T.$$

Donner l'interprétation financière de $\hat\theta(t)$ et de $\hat\theta(0)S_0$.

(d) En déduire l'existence d'un capital initial $\widehat X_0$ tel que $\widehat X_t:=e^{rt}\widehat X_0+e^{rt}\int_0^t\hat\theta(u)d\tilde S_u$ vérifie

$$e^{-rT}\widehat X_T=\widehat X_0+\int_0^T\hat\theta(u)d\tilde S_u \;=\; e^{-rT}\left(Y_T-K\right)\ .$$

2. On note $Z_t:=\frac{\widehat X_t}{S_t}$, $t\in[0,T]$.

(a) Montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}G\right] \;=\; S_0\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[Z_T^+\right]$$

où $\hat{\mathbb{Q}}$ est une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{Q}$ que l'on déterminera.

(b) Ecrire la dynamique du mouvement Brownien B associé à $\hat{\mathbb{Q}}$ par le théorême de Girsanov.

(c) En appliquant la formule d'Itô, déterminer la dynamique du processus $Z_t = \frac{\widehat{X}_t}{S_t}$, $t \in [0, T]$ en fonction de B.

(d) On suppose que $(\sigma_t)_t$ est constant égal à σ. Utiliser la représentation obtenue en (a) pour proposer une EDP d'évaluation de l'option ne faisant intervenir que le temps, une variable z et $\hat{\theta}$.

3. On suppose désormais que $g(t) = 1$ pour tout $t \in [0, T]$ et que le processus de volatilité est constant : $\sigma_t = \sigma > 0$ pour tout $t \geq 0$. On note $K = e^{-k}$ et on introduit la double transformée de Laplace :

$$L(\lambda, \mu) := \iint \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rt}(Y_t - e^{-k})^+ \right] e^{-\mu t} e^{-\lambda k} dk dt \quad \text{pour} \quad \lambda, \mu > 0.$$

(a) Montrer que

$$L(\lambda, \mu) \quad = \quad \frac{1}{\mu\lambda(1+\lambda)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r\theta} Y_\theta^{1+\lambda} \right]$$

où θ est une variable aléatoire indépendante du mouvement brownien W et de distribution exponentielle de paramètre μ, i.e. $\mathbb{P}[\theta \leq t] = (1 - e^{-\mu t}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

(b) Vérifier que pour tout $t \geq 0$:

$$S_t^{1+\lambda} = S_0^{1+\lambda} e^{(1+\lambda)(r + \frac{\sigma^2}{2}\lambda)t} L_t \quad \text{où} \quad L_t := e^{(1+\lambda)\sigma W_t - \frac{1}{2}(1+\lambda)^2 \sigma^2 t}.$$

(c) Vérifier que $\mathbf{R}$ définie par $d\mathbf{R} := L_t d\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$, et donner la distribution du mouvement brownien W sous $\mathbf{R}$.

(d) Montrer que

$$L(\lambda, \mu) = \frac{S_0^{(1+\lambda)}}{\lambda(1+\lambda)} \mathbb{E}^{\mathbf{R}} \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \xi_t^{1+\lambda} dt \right] \quad \text{où} \quad \xi_t := \frac{Y_t}{S_t}, \ t \geq 0,$$

et $\beta := r + \mu - (1+\lambda)(r + \frac{\sigma^2}{2}\lambda)$.

(e) Ecrire la dynamique de ξ et en déduire que ξ est un processus de Markov.

(f) On admet que la fonction

$$f(\xi_0) \quad := \quad \mathbb{E}^{\mathbf{R}}\left[\int_0^\infty e^{-\beta u}\xi_u^{1+\lambda}\, du\right]$$

est de classe C^2. En utilisant la formule d'Itô, trouver une équation différentielle ordinaire linéaire dont f est solution.

(g) En admettant que vous sachiez résoudre l'équation précédente et que vous ayez à votre disposition un logiciel d'inversion de la transformée de Laplace, proposer une méthode pour calculer numériquement le prix de l'option asiatique.

4 Gamma hedging et rebalancement discret

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ satisfaisant les conditions habituelles, et telle que $\mathcal{F}_0$ est triviale. Ici, $T > 0$. Soit W un mouvement brownien sur cet espace. On considère un marché financier composé d'un actif sans risque, de rendement nul, et d'un actif risqué dont le prix $S = (S_t)_{t\geq 0}$ est l'unique solution forte de

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s\sigma(S_s)dW_s \quad t \geq 0\ .$$

Ici $a \ : \ x \in [0,\infty) \to a(x) := x\sigma(x) \in [0,\infty)$ est supposée uniformément lipschtiz. Par la suite, on note $\mathcal{L}$ l'opérateur de Dynkin associé à cette EDS, i.e.

$$\mathcal{L}\varphi(t,x) := \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) + \frac{1}{2}a(x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x)$$

pour toute fonction $\varphi \in C^{1,2}$.
On note $\mathcal{A}$ l'espace des processus prévisibles ϕ tels que $\mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi_s a(S_s)|^2 ds\right] < \infty$ pour tout $T > 0$, et, on suppose que, pour tout $T > 0$ et toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable X telle que $\mathbb{E}\left[|X|^2\right] < \infty$, il existe $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $V_T^{\mathbb{E}[X],\phi} = X$ $\mathbb{P}-$ p.s. où $V_t^{x,\phi} := x + \int_0^t \phi_s dS_s$, $t \geq 0$, $(x,\phi) \in \mathbb{R}\times\mathcal{A}$.

1. Estimations a-priori :

   (a) Montrer que, pour tout $T > 0$ et $p \geq 1$, il existe une constante $C_{T,p} > 0$ telle que $\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|S_t|^p\right] \leq C_{T,p}$.

   (b) Montrer que S est une martingale sous $\mathbb{P}$.

2. Soit G une fonction borélienne à croissance polynomiale et $T_2 > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'une fonction g de $[0, T_2] \times [0, \infty)$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(t, S_t) = \mathbb{E}\left[G(S_{T_2}) \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{P} - \text{p.s. si } t \le T_2$.
   (b) Quelle EDP doit être satisfaite par g si celle-ci est régulière ? (justifier brièvement).
   (c) On suppose que $\mathbb{E}\left[\int_0^{T_2} \left|\frac{\partial}{\partial x} g(t, S_t) a(S_t)\right|^2 dt\right] < \infty$. Quel est le prix de l'option de payoff $G(S_{T_2})$ payé en T_2 compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage ? Exprimer la stratégie de couverture de l'option en fonction des dérivées de g et de a.
3. On considère maintenant une autre fonction borélienne F à croissance polynomiale et $0 < T_1 < T_2$. On suppose que $g \in C_b^{1,2}([0, T_1] \times [0, \infty))$.[1] Etant donnés $x \in \mathbb{R}$, $\phi, \alpha \in \mathcal{A}$, on note

$$V_t^{x,\phi,\alpha} := x + \int_0^t \phi_s dS_s + \int_0^t \alpha_s dg(s, S_s) \;\; t \in [0, T_1] \; .$$

   On suppose qu'il existe $\bar{\phi}, \bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ tels que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\phi}_t + \bar{\alpha}_t \frac{\partial}{\partial x} g(t, S_t) - \frac{\partial}{\partial x} f(t, S_t) &\quad (4) \\ &= \bar{\alpha}_t \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t, S_t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, S_t) \;\; \mathbb{P} - \text{p.s.} \; \forall \, t < T_1 \, , &\quad (5) \end{aligned}$$

   où $f \in C^{1,2}([0, T_1) \times [0, \infty))$ vérifie $f(t, S_t) = \mathbb{E}\left[F(S_{T_1}) \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{P} - \text{p.s.}$ pour tout $t \le T_1$.
   (a) Donner une interprétation financière de $V^{x,\bar{\phi},\bar{\alpha}}$.
   (b) Trouver $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{V} := V^{\bar{x},\bar{\phi},\bar{\alpha}}$ vérifie $\bar{V}_{T_1} = F(S_{T_1})$.
4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t_i := iT_1/n$, $i \le n$. On note $\eta_t := \max\{t_i, \; i \le n \text{ t.q. } t_i \le t\}$, i.e. $\eta_t = t_i$ si $t \in [t_i, t_{i+1})$, $t \ge 0$. A partir de maintenant, on considère la stratégie constante par morceaux $(\tilde{\phi}, \tilde{\alpha})$ définie par $(\tilde{\phi}_t, \tilde{\alpha}_t) := (\bar{\phi}_{\eta_t}, \bar{\alpha}_{\eta_t})$, $t \le T_1$. On note $\tilde{V} := V^{\bar{x},\tilde{\phi},\tilde{\alpha}}$. Pour simplifier on suppose en outre que g et f sont C^∞ à dérivées bornées et que le processus $\bar{\alpha}$ est essentiellement borné.[2]

[1] Le $_b$ signifie que les dérivées sont bornées sur l'intervalle considéré.
[2] même si c'est peu réaliste

(a) En utilisant (4), montrer que

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}_{T_1} - F(S_{T_1}) \\
&= \int_0^{T_1} \bar{\alpha}_{\eta_t} \left(\frac{\partial}{\partial x} g(t, S_t) - \frac{\partial}{\partial x} g(\eta_t, S_{\eta_t}) \right) a(S_t) dW_t \\
&- \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, S_t) - \frac{\partial}{\partial x} f(\eta_t, S_{\eta_t}) \right) a(S_t) dW_t \\
&= \int_0^{T_1} A_t a(S_t) dW_t
\end{aligned}$$

où $A_t := \int_{\eta_t}^t B_s a(S_s) dW_s + \int_{\eta_t}^t C_s ds$ avec

$$\begin{aligned}
B_s &:= \bar{\alpha}_{\eta_s} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(s, S_s) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, S_s) \\
C_s &:= \bar{\alpha}_{\eta_s} \mathcal{L} \left[\frac{\partial}{\partial x} g(s, S_s) \right] - \mathcal{L} \left[\frac{\partial}{\partial x} f(s, S_s) \right] .
\end{aligned}$$

(b) Montrer en utilisant (4) à nouveau que

$$\begin{aligned}
B_s &:= \int_{\eta_s}^s \left(\bar{\alpha}_{\eta_s} \frac{\partial^3}{\partial x^3} g(u, S_u) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(u, S_u) \right) a(S_u) dW_u \\
&+ \int_{\eta_s}^s \left(\bar{\alpha}_{\eta_s} \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(u, S_u) \right] - \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u, S_u) \right] \right) du .
\end{aligned}$$

(c) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|B_s|^2\right] \leq C/n$ pour tout $s \leq T_1$.

(d) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|A_t|^2\right] \leq C/n^2$ pour tout $t \leq T_1$.

(e) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|\tilde{V}_{T_1} - F(S_{T_1})|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq C/n$.

5. Peut-on arriver à un résultat similaire dans un modèle à volatilité stochastique ? Si oui, expliquer brièvement comment procéder et notamment combien d'options liquides il faut avoir à sa disposition.

5 Couverture sous contrainte de portefeuille

On considère un marché financier sur lequel le taux sans risque est nul ($r = 0$) et ne supportant qu'un seul actif risqué S. On suppose en outre qu'il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$. La filtration sous-jacente est engendrée par un $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien W univarié et est notée $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sous cette probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, la dynamique de l'actif risqué S est donnée par

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s \sigma_s dW_s \;\; t \leq T,$$

où σ est un processus réel prévisible $\mathbb{P}$-p.s. strictement positif et tel qu'il existe $C > 0$ vérifiant $|\sigma| + |\sigma^{-1}| \leq C \; dt \times d\mathbb{P}$-p.p. sur $[0, T]$.

On s'intéresse au problème de couverture d'un payoff modélisé par une variable aléatoire bornée G payé en T, sous la contrainte que le nombre d'actifs risqués détenus à chaque date appartienne à $[-m, M]$ où $M, m > 0$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des processus prévisibles à valeurs dans $[-m, M]$. Etant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{A}$, on note

$$V_t^{x,\phi} := x + \int_0^t \phi_s dS_s$$

le processus de richesse associé.

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des processus prévisibles réels ν tels qu'il existe $C > 0$ (pouvant dépendre de ν) vérifiant $|\nu| \leq C \; dt \times d\mathbb{P}$-p.p. sur $[0, T]$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on note $\delta(u) := u^+ M + u^- m$ où $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{0, -u\}$. Enfin, étant donné $\nu \in \mathcal{U}$, on défini $\mathbb{Q}^\nu \sim \mathbb{P}$ et Y^ν par

$$\frac{d\mathbb{Q}^\nu}{d\mathbb{P}} := e^{-\frac{1}{2}\int_0^T |\nu_s/\sigma_s|^2 ds + \int_0^T (\nu_s/\sigma_s) dW_s} \;,\; Y_t^\nu := \int_0^t S_s \delta(\nu_s) ds \;\; t \leq T \;.$$

1. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et $(\phi, \nu) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$. Ecrire la dynamique de $V^{x,\phi}$ en fonction du mouvement Brownien W^ν associé à W sous $\mathbb{Q}^\nu$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $(\phi, \nu) \in \mathcal{A} \times \mathcal{U}$, $V^{x,\phi} - Y^\nu$ est une surmartingale sous $\mathbb{Q}^\nu$.
3. On note

   $$p := \inf\{x \in \mathbb{R} \;:\; \exists \phi \in \mathcal{A} \text{ t.q. } V_T^{x,\phi} \geq G \; \mathbb{P}\text{-p.s.}\}$$

   le prix de sur-réplication sous contrainte de portefeuille. Montrer que

   $$p \geq \bar{p} := \sup_{\nu \in \mathcal{U}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\nu}[G - Y_T^\nu] \;.$$

On admet à partir de maintenant qu'il existe un processus P défini par

$$P_t := \operatorname*{esssup}_{\nu \in \mathcal{U}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\nu}[G - (Y_T^\nu - Y_t^\nu) \mid \mathcal{F}_t] \;\; t \leq T$$

tel que $Z^\nu := P - Y^\nu$ est une sur-martingale sous $\mathbb{Q}^\nu$ pour tout $\nu \in \mathcal{U}$.

4. Par la suite on note par 0 le processus $\nu \in \mathcal{U}$ défini par $\nu = 0$ sur $[0, T]$. Justifier pourquoi l'on peut écrire $Z^0 = M^0 - A^0$ où M^0 est une martingale sous $\mathbb{Q}$ et A^0 est un processus croissant nul en 0.

5. Justifier pourquoi il existe une processus prévisible ψ^0 vérifiant $\int_0^T |\psi_s^0|^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}$-p.s. tel que $M_t^0 = Z_0^0 + \int_0^t \psi_s^0 dS_s$ pour $t \in [0, T]$.

6. Montrer que

$$Z_t^\nu = P_t - Y_t^\nu = P_0 + \int_0^t S_s(\psi_s^0 \nu_s - \delta(\nu_s))ds + \int_0^t \psi_s^0 S_s \sigma_s dW_s^\nu - A_t^0 \quad t \leq T$$

   où W^ν est le mouvement Brownien associé à W sous $\mathbb{Q}^\nu$, $\nu \in \mathcal{U}$.

7. En déduire en utilisant le fait que $Z^\nu = P - Y^\nu$ est une sur-martingale sous $\mathbb{Q}^\nu$ pour tout $\nu \in \mathcal{U}$ que

$$\int_0^T S_s(\psi_s^0 \nu_s - \delta(\nu_s))ds \leq A_T^0 \quad \forall\, \nu \in \mathcal{U} \; .$$

8. En déduire par un argument formel que $\psi^0 \in [-m, M]$ $dt \times d\mathbb{P}$-p.p.

9. En utilisant le fait que $P = Z^0 = M^0 - A^0$, montrer que $P_0 + \int_0^T \psi_s^0 dS_s \geq G$ $\mathbb{P}$-p.s.

10. En déduire que $P_0 = \bar{p} \leq p$.

Bibliographie

[1] Alfonsi A. (2006). On the discretisation schemes for CIR (and Bessel squared) processes. *Prépublication.*

[2] Avellaneda M., C. Friedman, R. Holmes et D. Samperi (1997). Calibrating Volatility Surfaces Via Relative-Entropy Minimization. *Appl. Math. Finance.*

[3] Bates D. (1996). Jumps and stochastic volatility : Exchange rate process implicit in deutschmark options. *Review of Financial Studies*, 9, 69-107.

[4] Bielecki T. et M. Rutkowski (2002). *Credit Risk : Modelling Valuation and Hedging*. Springer Finance.

[5] Brézis H. (1983). *Analyse fonctionnelle*. Masson.

[6] Campi L. (2008). Market completeness with American put options under the optimal exercise policy. *Preprint CEREMADE.*

[7] Carr P. et D. Madan (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 2, 61-73.

[8] Cont R. et P. Tankov (2004). *Financial Modelling with Jump Processes.* Chapman et Hall.

[9] Cooley J. W. et J. W. Tukey (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, 19, 297Ð301.

[10] Cherny A.. Introduction to Fast Fourer Transform in Finance. http ://www3.imperial.ac.uk/pls/portallive/docs/1/40346.PDF

[11] Crépey S. (2001). *Contribution à des méthodes numériques appliquées à la finance et aux jeux différentiels*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.

[12] Davis M. et J. Obloj (2008). Market completion using options. *Prépublication.*

[13] Delbaen F. et W. Schachermayer (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Annalen*, 300, 463-520.

[14] Delbaen F. et W. Schachermayer (1994). The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Annalen*, 312 (2), 215-250.

[15] Delbaen F. and H. Shirakawa (2006). A Note of Option Pricing for Constant Elasticity of Variance Model. Prépublication.

[16] Föllmer H. et Y. Kabanov (1998). Optional decomposition and Lagrange multipliers. *Finance and Stochastics*, 2, 69-81.

[17] Glasserman P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer.

[18] Gobet E. (1999). Analysis of the zigzag convergence for barrier options with binomial trees. preprint LPMA.

[19] Hagan P, D. Kumar, A. Lesniewski et D. Woodward (2002). Managing smile risk. *Wilmott*, 84-108.

[20] Heston S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.

[21] Jourdain B. (2007). Stochastic flows approach to Dupire's formula. *Finance and Stochastics*, 11(4), 521-535.

[22] Kabanov Y. et C. Stricker (2001). A teachers' note on no-arbitrage criteria. *Séminaire de Probabilités XXXV*, Lect. Notes Math. 1755, Springer, 149-152.

[23] Kabanov Y. et C. Stricker (2003). The Dalang-Morton-Willinger theorem under delayed and restricted information. Prépublication.

[24] Karatzas I. et S.E. Shreve (1990), *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer Verlag.

[25] Karatzas I. et S.E. Shreve (1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer Verlag.

[26] El Karoui N. (1979). Les aspects probabilistes du contrôle stochastique, *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour* IX, Lecture Notes in Mathematics 876, Springer Verlag.

[27] Lamberton D. (1998). Error estimates for the binomial approximation of American put options. *The Annals of Applied Probability*, 8(1), 206-233.

[28] Lamberton D. et B. Lapeyre (1999). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses, Paris.

[29] Mc Kean H. P. (1969). *Stochastic integrals*, Academic Press.

[30] Moodley N. (2005). The Heston Model : A Practical Approach. Prépublication.

[31] Musiela M. et M. Rutkowski (1997). *Martingale methods in financial modeling*, Springer.

[32] Neveu J. (1972). *Martingales à temps discret*, Masson.

[33] Overhaus M. et al. (2007). *Equity hybrid derivatives*, Wiley Finance.

[34] Pironneau O. (2007). Dupire-like identities for complex options. *Comptes Rendus Mathematique*, 344 (2), 127-133.

[35] Prigent J.-L. (2003). *Weak Convergence of Financial Markets*. Springer Verlag, Berlin.

[36] Protter P. (1990). *Stochastic integration and differential equations*. Springer Verlag, Berlin.

[37] Revuz D. and M. Yor (1990). *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer.

[38] Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ.