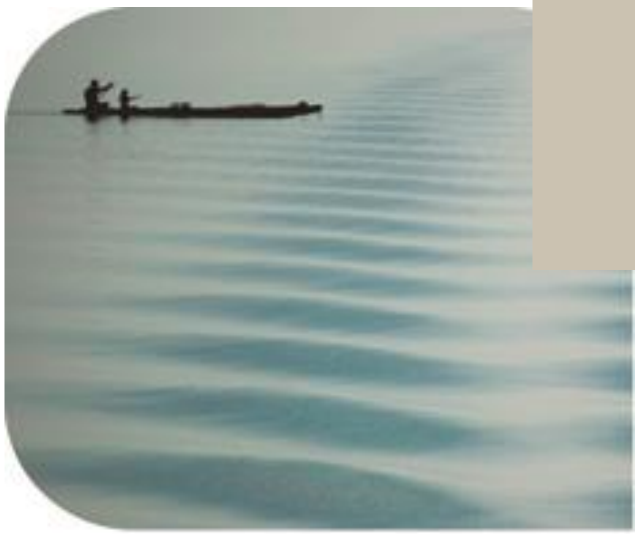
Introduction aux mathématiques financières

Octobre 2014 Version 1.0



Aymric Kamega *Actuaire*
aymric.kamega@univ-brest.fr

Préambule : à propos des mathématiques financières

On peut définir globalement les mathématiques financières « comme l'application des mathématiques aux opérations financières non instantanées (c'est-à-dire faisant intervenir le temps) » (*cf*. Le Borgne [2003]).

Traditionnellement, elles se rattachent à l'analyse des opérations de prêts et d'emprunts dans un environnement certain (principalement bancaire).

Au cours de ces quarante dernières années toutefois, est apparu en matière de financement un glissement vers des systèmes d'économie des marchés financiers.

L'une des caractéristiques de ces marchés est la grande volatilité des cours boursiers et des taux d'intérêt, qu'il convient de prendre en compte. Une question apparaît alors : qu'est-ce qu'un cours boursier ? Qu'est-ce qu'un taux d'intérêt ?

Préambule : à propos des cours boursiers

Le cours d'une société cotée est sensé refléter sa « valeur fondamentale » (somme de ses revenus futurs actualisés), telle qu'elle peut ressortir d'une analyse économique de l'activité de l'entreprise et de ses perspectives.

Les écarts entre la valeur fondamentale et la capitalisation boursière d'une société sont en général interprétés comme la conséquence de comportements spéculatifs qui auraient pour conséquence de créer un décalage entre l'« économie réelle » et le monde de la finance.

En pratique, cette dichotomie entre une analyse économique objective d'une part et un comportement largement irrationnel des marchés boursiers d'autre part peut être dépassée au prix d'une réflexion sur la nature de l'aléa sous-jacent à la détermination de la valeur.

En effet, le cours de bourse est principalement déterminé par l'offre et la demande de financement d'une société, et celles-ci sont très sensibles aux anticipations de revenu, elles-mêmes très sensibles au modèle d'anticipation retenu sachant que l'horizon de vie d'une société est souvent indéterminé, voire infini.

Préambule : à propos des taux d’intérêt

Un taux d’intérêt peut s’interpréter comme le prix de l’argent, mais aussi comme un « taux de change » explicite entre le présent et le futur.

En notant *r* le taux d’intérêt pour la date 1, fixer un taux d’intérêt pertinent revient ainsi à fixer le niveau de richesse $1+r > 1$ désiré en 1 (dans le futur) en échange d’une unité de richesse en 0 (dans le présent).

Le taux d’intérêt dépend ainsi de la capacité à « créer de la richesse » pour la génération future et de la « part de la richesse créée » transférée à la génération future.

En pratique, sauf à provoquer des arbitrages entre activité financière et activité réelle, on considère généralement que :

Taux d’intérêt réel à long terme = Taux de croissance réel à long terme

Parallèlement, à long terme, il est également considéré que :

Taux d’intérêt nominal = Taux d’intérêt réel + Taux d’inflation anticipé

Préambule : à propos des taux d’intérêt

Au-delà de la distinction classique taux nominaux / taux réels, il existe un clivage entre les taux courts et les taux longs, les taux d’intérêts étant différenciés par l’échéance du crédit.

La courbe des taux représente graphiquement la relation entre le niveau des taux d’intérêt et leur échéance (3 mois, 1 an, 2 ans, … , 10 ans). Elle peut être, selon les circonstances, croissante (les taux courts sont supérieurs aux taux longs), inversée (les taux courts sont inférieurs aux taux longs), en « cloche », etc.

La forme de la courbe dépend en particulier des anticipations des agents privés concernant l’évolution de l’inflation et de la politique monétaire (en effet, les taux d’intérêt relèvent de mécanismes de marché, la banque centrale ne contrôlant directement que les taux directeurs).

Enfin, le taux d’intérêt dépend également de la plus ou moins grande prime de risque exigée par les investisseurs lorsqu’ils consentent à placer leurs capitaux sur le long terme. Cette prime de risque compense la moindre liquidité des placements longs et le risque croissant avec l’échéance de perte en capital.

SOMMAIRE

Mathématiques financières

1. Intérêts et emprunts directs

1.1. Intérêts simples

L'opération se déroule sur T périodes, et nous analysons le point de vue de l'emprunteur (celui du prêteur est symétrique).

En cas d'un emprunt d'un capital C au taux d'intérêt r entre les dates $t=0$ et $t=T$, avec un remboursement du capital et des intérêts en une fois à la date finale $t=T$, les intérêts simples sont proportionnels au taux r et au nombre de périodes T :

$$I = CrT$$

Le flux terminal est donc $F = -(C + CrT) = -C(1 + rT)$.

Le plus souvent, cette approche s'applique avec un taux annuel et pour une durée $T<1$ an (il existe alors différentes conventions pour le calcul de T en fonction du nombre de jours pour l'opération : convention « exact/exact », convention « exact/360 », etc.).

1.2. Intérêts composés

Le principe est le suivant : supposons un capital *C* placé à un taux d'intérêt *r* pendant *T* périodes situées entre t=0 et t=T et notées 0-1, 1-2, 2-3,…, (T-1)-T.

Les intérêts sont calculés à la fin de chaque période puis ajoutés au capital (on dit qu'ils sont capitalisés) et produisent à leur tour des intérêts au même taux *r* dans les périodes ultérieures.

En *T*, qui est la date terminale ou échéance du prêt, l'emprunteur rembourse $C(1+r)^T$. Ce prêt aura donc généré la séquence : { $-C$, 0, …, $+C(1+r)^T$ }.

On remarque les intérêts sont égaux à : $I = C[(1+r)^T - 1]$.

Dans le cas des intérêts composés, *r* correspond au taux actuariel.

1.3. Comparaison entre intérêts simples et composés

Pour un taux r, un capital C et une durée T donnés, les intérêts simples (taux proportionnel) sont inférieurs aux intérêts composés (taux actuariel) si et seulement $T>1$ (si $T=1$, les intérêts simples sont égaux aux intérêts composés), du fait de la linéarité de $f(T) = (1+ rT)$ et de la convexité de $g(T) = (1+ r)^T \approx e^{rT}$.

Pour que ces deux taux soient « équivalents », tant pour le prêteur que pour l'emprunteur, il faut que les flux qu'ils génèrent soient égaux, soit (avec r_p le taux proportionnel et r_{act} le taux actuariel) :

$$(1 + r_p T) = (1+ r_{act})^T$$

Cette relation peut être utilisée pour trouver le taux proportionnel équivalent au taux actuariel, et vice versa.

On remarque par ailleurs que deux taux r_{act} et r_p équivalent sur une durée T ne le sont pas sur une durée T' différente de T.

1.4. Intérêts simples post-comptés et précomptés

Les intérêts peuvent être payés en fin de période (intérêts post-comptés ou à terme échu) ou en début de période (intérêts précomptés ou à terme à échoir).

Les intérêts post-comptés correspondent à ceux vus précédemment.

Les intérêts précomptés sont des intérêts versés au début de l'opération. Le flux initial F_0 correspond ainsi au montant du capital, diminué des intérêts I. En fin de placement, le capital est ensuite versé par l'emprunteur.

Une première méthode classique pour les intérêts précomptés consiste à utiliser un taux d'escompte r_e, le flux initial est alors : $F_0 = C(1-r_eT)$.

Le paiement immédiat des intérêts est pénalisant pour l'emprunteur si l'on utilise le même taux que pour des intérêts post-comptés. La deuxième méthode consiste alors à ajuster le taux d'escompte à la baisse pour le rendre équivalent à un taux in fine, le flux initial est dans ce cas : $F_0 = C\,/\,(1+rT)$.

1.5. Valeur acquise et valeur actualisée

La valeur acquise est égale au montant final (capital et intérêts) récupéré par le prêteur à l'échéance de l'opération. Pour un capital placé C sur une durée T à un taux r, la valeur acquise est donnée par :

$F = C(1+r_p T)$ si le taux est proportionnel ;
$F' = C(1+r_{act})^T$ si r le taux est actuariel.

Inversement, un flux F en T peut être obtenu moyennant un placement au taux r, en t=0, d'un montant égal à (avec C et C' les valeurs actualisées en 0 du flux F disponible en T) :

$C = F / (1+r_p T)$ si le taux est proportionnel ;
$C' = F / (1+r_{act})^T$ si le taux est actuariel.

Dans un contexte d'investissement, lorsque F, C et T sont connus, le taux actuariel correspond au taux de rentabilité interne (TRI).

1.6. Séquence de flux : VAN et taux actuariel

Le principe d'actualisation peut facilement s'étendre au cas de séquences faisant intervenir plusieurs flux F_i (i allant de 0 à T). Dans ce cas on a la valeur actuelle nette (VAN) suivante, en considérant des intérêts composés uniquement :

$$\mathrm{VAN} = F_0 + F_1(1+r)^{-1} + F_2(1+r)^{-2} + \ldots + F_T(1+r)^{-T}$$

La VAN d'un investissement représente le flux de trésorerie en 0 par lequel on peut remplacer tous les flux de trésorerie de cet investissement (y compris mise de fonds initiale). Un investissement ne doit être retenu que si sa VAN est positive.

En pratique, le taux actuariel (le TRI dans le cas d'un investissement) est le taux d'actualisation qui annule la VAN de la séquence de flux.

Le critère de TRI peut au final se formuler ainsi : un investissement doit être accepté si et seulement si le TRI de la séquence de flux qu'il génère est supérieur au taux de rendement minimal r souhaité par l'investisseur.

1.7. Annuités et rentes : cas des annuités constantes

Une rente est une suite d'annuités, mais nous considérons ici rentes et annuités comme synonymes. Par ailleurs, on considère ici également des intérêts composés uniquement.

En considérant *T*+1 dates (0 étant la date de début et *T* la date de fin) et *T* périodes, la valeur acquise d'une suite d'annuités *a* de fin de période s'écrit :

$$a(1+r)^{T-1} + a(1+r)^{T-2} + \ldots + a = a\,[\,((1+r)^{T}-1)\,/\,r\,]$$

La valeur actuelle s'écrit :

$$a(1+r)^{-1} + a(1+r)^{-2} + \ldots + a(1+r)^{-T} = a\,[\,(1-(1+r)^{-T})\,/\,r\,]$$

Dans le cas des annuités en début de période, il convient de multiplier les valeurs acquises et actuelles ci-dessus par (1+*r*).

1.8. Emprunts indivis

Un emprunt indivis est un emprunt accordé par un seul prêteur à un unique emprunteur. On en présente trois types ici :
- l’emprunt avec remboursement *in fine* ;
- l’emprunt avec amortissement constant du capital ;
- l’emprunt par annuités constantes.

Les emprunts donnent lieu à des échéanciers appelés aussi tableaux d’amortissement du capital, dans lequel figurent les périodes, le capital restant dû, les intérêts, l’amortissement du capital et les annuités.

Dans les exemples ci-après, on considère un emprunt de C = 1 000 000 €, sur une durée T = 5 ans et au taux r = 5 %. Les exemples ci-après sont par ailleurs donnés pour des échéances annuelles.

1. Intérêts et emprunts directs

1.8. Emprunts indivis

Dans le cas du remboursement *in fine*, un 1er mode de remboursement correspond à un remboursement du principal et des intérêts en une seule fois à l'échéance. Soit C la somme empruntée, le débiteur paiera à l'échéance T pour un taux r : $C(1+r)^T$. L'annuité payée à la dernière période est donc 1 276 281,56 €.

Dans le 2ème mode de remboursement, le capital est remboursé à l'échéance et le paiement des intérêts s'observe en fin de chaque période. Le tableau d'amortissement du capital est dans ce cas :

Période	Capital dû en début de période	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	1 000 000	50 000	0	50 000
2	1 000 000	50 000	0	50 000
3	1 000 000	50 000	0	50 000
4	1 000 000	50 000	0	50 000
5	1 000 000	50 000	1 000 000	1 050 000
Total	**s.o.**	**250 000**	**1 000 000**	**1 250 000**

1.8. Emprunts indivis

<u>Dans le cas du remboursement avec amortissement constant du capital</u>, le remboursement du capital est de C/T à chaque période et le calcul des intérêts porte sur le capital restant dû. Les annuités, qui comprennent le remboursement partiel du principal et les intérêts, sont payées en fin de période.

Les annuités et les intérêts sont en progression arithmétique de raison $-rC/T$ et la somme des intérêts versés est de $rC(T+1)/2$. Le tableau d'amortissement du capital est dans ce cas :

Période	Capital dû en début de période	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	1 000 000	50 000	200 000	250 000
2	800 000	40 000	200 000	240 000
3	600 000	30 000	200 000	230 000
4	400 000	20 000	200 000	220 000
5	200 000	10 000	200 000	210 000
Total	**s.o.**	**150 000**	**1 000 000**	**1 150 000**

1.8. Emprunts indivis

Dans le cas du remboursement par annuités constantes, pour déterminer l'annuité *a*, on considère comme équivalent la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes et la valeur acquise du montant du prêt *C*, capitalisé au taux *r* sur *T* périodes, soit :

$$a\,[\,((1+r)^{T}-1)\,/\,r\,] = C\,(1+r)^{T} \quad \text{d'où} \quad a = C\,[\,(1-(1+r)^{-T})\,/\,r\,]^{-1}$$

Le tableau d'amortissement du capital est dans ce cas :

Période	Capital dû en début de période	Intérêts	Annuités	Amortissements
1	1 000 000	50 000	230 975	180 975
2	819 025	40 951	230 975	190 024
3	629 002	31 450	230 975	199 525
4	429 477	21 474	230 975	209 501
5	219 976	10 999	230 975	219 976
Total	**s.o.**	**154 874**	**1 154 874**	**1 000 000**

1.8. Emprunts indivis

On peut par ailleurs obtenir quelques formules utiles, en notant :
- C_p le capital dû au début de la $p^{ième}$ période (date p) ;
- A_p l'amortissement du capital de la période p ;
- a_p l'annuité de la $p^{ième}$ période (payée en p).

On a alors :

$$A_p = C_p - C_{p+1}$$
$$a_p = rC_p + A_p$$

Dans le cas du remboursement par annuités constantes, les annuités étant constantes on en déduit que les amortissements sont en progression géométrique de raison 1+r, soit :

$$A_p = A_1(1+r)^{p-1}$$

SOMMAIRE

Mathématiques financières

2. Marchés de base

2.1. Présentation du marché monétaire

Des emprunts sur les marchés monétaire (pour le court et moyen terme) et obligataire (pour le long terme) peuvent être émis par les entreprises, les banques, les Etats et les collectivités locales.

Les emprunts émis sur les marchés sont matérialisés par des titres négociables, appelés « obligations » sur le marché obligataire, et « titres de créance négociables » (TCN) sur le marché monétaire.

Les TCN se distinguent des financements bancaires par :

- une meilleure liquidité due à leur capacité d'être cédés sur le marché secondaire ;

- le fait d'être évalué en valeur de marché et non sur la base du capital restant dû ;

- l'absence d'intermédiaire entre les agents économiques qui ont des capacités de placements et ceux qui ont des besoins de financement.

2.1. Présentation du marché monétaire

Un TCN à court terme (moins d'un an à l'émission) est :

- un Bon du Trésor à taux fixe (BTF) quand il est émis par l'Etat ;

- un certificat de dépôt négociable (CDN) quand il est émis par une banque ou une institution financière ;

- un billet de trésorerie (BT) quand il est émis par une entreprise industrielle et commerciale.

Un TCN à moyen terme (durée à l'émission supérieure à un an) est :

- un Bon du Trésor à intérêts annuels (BTAN) quand il est émis par l'Etat ;

- un Bon à moyen terme négociable (BMTN) quand il est émis par des agents autre que l'Etat.

2.2. Présentation du marché obligataire

À l'instar du marché monétaire, le marché obligataire est un marché de taux. Quelques différences distinguent ces deux marchés :

- la durée à l'émission : inf. à 2 ans pour le monétaire et sup. à 7 ans pour l'obligataire, sachant qu'entre 2 et 7 ans cela dépend des conventions ;

- la cotation et la négociation : taux de rendement sur le monétaire, prix sur l'obligataire.

L'obligation classique est une forme particulière de titre à long terme dans laquelle le taux facial (ie coupons ou intérêts servis à chaque échéance) et le prix de remboursement sont fixes. Une 2ème catégorie est constituée de titres obligataires pour lesquels le coupon et (ou) la valeur de remboursement sont indexés sur une référence (taux d'intérêt, résultats entreprise, *etc*.). Une 3ème catégorie comprend des titres obligataires à clauses optionnelles (obligations convertibles, *etc*.).

2.2. Présentation du marché obligataire

Sur le plan financier, **un emprunt obligataire classique** est principalement caractérisé à l'émission par : la date d'émission, le taux d'intérêt nominal (ou facial), la valeur nominale, la valeur initiale (ou valeur d'émission payée par les souscripteurs), la valeur de remboursement (payé par l'émetteur à la date de remboursement), le profil de remboursement, etc.

Lorsque la valeur nominale, la valeur d'émission et la valeur de remboursement sont égales, on dit que l'emprunt est émis et remboursé au pair (généralement toutefois, la valeur nominale est égale à la valeur de remboursement mais diffère de la valeur d'émission).

Quand le prix de remboursement est fixé au dessus du pair et/ou que la valeur d'émission est fixée en dessous du pair, le taux actuariel brut à l'émission est supérieur au taux d'intérêt nominal (le taux actuariel brut à l'émission étant le coût actuariel du financement, avant impôts et hors frais d'émission pour l'émetteur).

2.2. Présentation du marché obligataire

Le taux de rentabilité d'un investissement en une obligation donné, exigé par le marché à un instant quelconque, dépend du niveau des taux obligataires prévalant sur le marché à cet instant, ainsi que de l'appréciation par ce même marché du risque de signature de l'émetteur.

En effet, d'une part la valeur boursière d'une obligation est sensible aux taux en vigueur sur le marché, pour les obligations de même risque et de même durée.

D'autre part, l'investisseur doit apprécier le risque de crédit que lui fait subir l'émetteur. Ce risque comprend le risque de défaut (si l'investisseur détient le titre jusqu'à son terme) et le risque de signature (si l'investisseur ne détient pas le titre jusqu'à son terme).

La notation (ou *rating*) permet à l'investisseur d'apprécier, au vu d'une « simple note », la qualité de la signature de l'émetteur.

2.2. Présentation du marché obligataire

Les obligations à taux variable ou révisable ont un coupon qui varie en fonction du niveau des taux prévalant sur le marché. L'objectif de cette indexation est de limiter l'influence des fluctuations des taux de marché sur la valeur des titres.

En général, le taux nominal i_t qui sert de base au calcul du coupon versé en t est (où les références retenues relèvent du marché monétaire ou du marché obligataire, et où la marge, fixée à l'émission, dépend du *rating* de l'émetteur et de la référence) : i_t = *référence(t)* + *marge.*

Ainsi, le coupon est révisé en fonction des conditions de marché et la valeur de l'obligation est ainsi soumise à des fluctuations bien inférieures à celles d'une obligation à taux fixe.

Pour l'investisseur, le choix entre le taux fixe et le taux variable est fondé sur ses anticipations de taux d'une part, et sur l'exposition au risque de taux qu'il est prêt à accepter d'autre part.

2.2. Présentation du marché obligataire

Les obligations indexées ont un coupon qui varie en fonction du niveau d'une variable économique. Il peut s'agir : d'un indice boursier, de la valeur de l'action d'un émetteur, de la valeur d'un panier d'action, d'un indice de prix, etc.

Les TIPS américains et les OATi émises par le Trésor français constituent un exemple notable : leur valeur nominale est indexée sur l'IPC ; coupon et capital suivent donc l'évolution de l'IPC ; les flux engendrés sont donc fixés en termes réels (en € constants) et le taux de coupon affiché est un taux réel et non un taux nominal comme dans les autres emprunts.

Les obligations convertibles permettent à l'émetteur de payer un coupon plus faible que celui des obligations classiques. Elle peut être convertie en actions par son détenteur :
- en tant qu'obligation il donne droit à un coupon et à un remboursement de capital ;
- en tant que titre convertible il donne, à tout moment ou pendant une période, une possibilité de conversion contre un nombre d'actions déterminé dans le contrat.

2.3. Marché monétaire et obligataire : risque de taux

Considérons un titre générant une séquence de flux fixes F_{t1}, …, F_{tn}. La valeur du titre est déterminée par :

$$V(r) = \frac{F_{t1}}{(1+r)^{t1}} + \frac{F_{t2}}{(1+r)^{t2}} + \ldots + \frac{F_{tn}}{(1+r)^{tn}} = \sum_{\theta=t1}^{tn} \frac{F_\theta}{(1+r)^\theta}$$

Dans ce contexte d'évaluation, *r* s'interprète comme le « taux d'intérêt » en vigueur sur le marché à l'instant courant qui est égal, à l'équilibre, au taux actuariel du titre.

Une variation infinitésimale *dr* du taux d'intérêt sur le marché se traduit par une variation *dV* de la valeur du titre obtenue par dérivation de l'équation ci-dessus :

$$\frac{dV}{dr}(r) = \frac{-t1 \times F_{t1}}{(1+r)^{t1+1}} + \frac{-t2 \times F_{t2}}{(1+r)^{t2+1}} + \ldots + \frac{-tn \times F_{tn}}{(1+r)^{tn+1}} = \frac{-1}{(1+r)} \times \sum_{\theta=t1}^{tn} \frac{\theta \times F_\theta}{(1+r)^\theta}$$

dV / dr représente alors la « variation » du titre.

2.3. Marché monétaire et obligataire : risque de taux

Calculons maintenant l'expression de :

$$S = -\, dV / Vdr \;=\; -\, d\ln(V(r)) / dr$$

qui s'interprète comme la variation en pourcentage de V induite par une variation absolue de 1% de *r.*

S s'appelle la « sensibilité » du titre. *S* est une mesure du risque de taux qui entache un titre à revenus fixes.

La variation $\Delta V / V$ induite par une variation Δr non infinitésimale du taux est alors appréciée à l'aide de la relation approximative :

$$\Delta V / V = -S\, \Delta r$$

2.3. Marché monétaire et obligataire : risque de taux

Posons maintenant : $$D=\frac{t1\times F_{t1}}{V(1+r)^{t1}}+\frac{t2\times F_{t2}}{V(1+r)^{t2}}+\ldots+\frac{tn\times F_{tn}}{V(1+r)^{tn}}=\sum_{\theta=t1}^{tn}\frac{\theta F_{\theta}}{V(1+r)^{\theta}}$$

D est appelé la « duration » du titre, et s'interprète comme une durée moyenne pondérée des durées *t1*, *t2*, …, *tn*, correspondant aux différentes échéances (on vérifie facilement que la somme des coefficients est égal à 1).

Il apparaît que la duration est liée à la sensibilité par la relation : $D = S(1+r)$.

On vérifie facilement que la duration d'un zéro coupon est égal à sa durée *T*.

De même, on peut montrer que la sensibilité d'une rente perpétuelle versant le flux x chaque année est égale à l'inverse de son taux de rentabilité, soit : $S = 1 / r$. Sa duration, est donc $D = (1+r) / r$.

2.3. Marché monétaire et obligataire : risque de taux

La sensibilité définie précédemment ne donne des résultats acceptables que pour de faibles variations de taux, puisqu'on apprécie

$$\frac{V(r+\Delta r)-V(r)}{V} \equiv \frac{\Delta V}{V}$$

par

$$\frac{\Delta V}{V} = -S\Delta r = \frac{1}{V}\frac{dV}{dr}\Delta r$$

Afin d'obtenir une précision accrue, on peut toutefois calculer ΔV à l'aide d'un développement d'ordre deux, approximé par :

$$V(r+\Delta r)-V(r) = \left(\frac{dV}{dr}\right)\Delta r + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dr^2}(\Delta r)^2$$

On a alors : $\frac{\Delta V}{V} = -S\Delta r + \frac{1}{2}C(\Delta r)^2$, en considérant $C = \frac{1}{V}\frac{d^2V}{dr^2}$.

C est appelé la convexité du titre, et est positif puisque la fonction *V*(*r*) est convexe.

2.3. Marché monétaire et obligataire : risque de crédit

Soit un investisseur qui achète un titre dans l'intention de le garder jusqu'au terme. Le risque de défaut confère au taux de rentabilité actuariel un caractère aléatoire. Le taux promis r_{max} est le taux maximum que l'investisseur peut espérer (dans les circonstances les plus favorables). Il se décompose en un taux de marché sans risque et un spread :

$$r_{max} = r + s$$

En présence d'un risque de défaut, le taux de rentabilité $\check{r}$ est aléatoire et tel que $E(\check{r}) < r_{max}$. La 1ère raison d'être du spread est ainsi de compenser l'investisseur pour cette baisse de l'espérance de rentabilité induite par le risque de défaut.

Le marché est caractérisé par une aversion au risque, et exige donc une prime de risque ($\pi = E(\check{r}) - r$). Dans ce cas, on a : $s = [\, r_{max} - E(\check{r}) \,] + \pi$

Par ailleurs, une prime de liquidité, notée l, peut également apparaître pour compenser la faible liquidité du titre. On a alors : $s = [\, r_{max} - E(\check{r}) \,] + \pi + l$

2.3. Marché monétaire et obligataire : risque de crédit

Pour modéliser le spread, on peut considérer un titre risqué, valant 1 € en 0 et promettant r_{max} . Le flux terminal est aléatoire, avec une probabilité de défaut $p > 0$. On considère par ailleurs un taux de recouvrement α $(0 \leq \alpha < 1)$.

Le titre génère un flux X et une rentabilité r^* aléatoires, et on a donc :

$$E(X) = E(1 + r^*) = (1 + r_{max}) [\alpha p + (1 - p)] = (1 + r_{max}) [1 - p(1 - \alpha)]$$

Par ailleurs, sachant que $r_{max} = r + s$, on a : $E(1 + r^*) = (1 + r + s) [1 - p(1 - \alpha)]$.

Au final, pour compenser le risque de défaut et une insuffisance de liquidité, il faut :
$(1 + r + s) [1 - p(1 - \alpha)] = 1 + r + \pi + l$

En négligeant les termes d'ordre 2 (en rp et sp), on a : $s = \pi + l + p(1 - \alpha)$.

En négligeant (à tord) π et l, on écrit souvent : $s \approx p(1 - \alpha)$.

2.4. Présentation du marché action

À la différence des obligations ou des TCN les actions sont des droits sur les fonds propres (parts de capital social) qui confèrent des droits de propriété à leur détenteur.

Les actions donnent ainsi une prérogative quant à la direction de l'entreprise, concrétisée par un droit de vote aux AG des associés (aux cours desquelles un président est mandaté pour agir au mieux de leurs intérêts).

En général, les actions donnent également à leur détenteur droit à une part proportionnelle des dividendes (prélevés sur les bénéfices), des réserves (bénéfices antérieurs non distribués) et de l'actif net (en cas de liquidation).

Ces avantages trouvent toutefois leur contrepartie en une moindre priorité dans la distribution des flux disponibles générés par l'activité de la société (le paiement des intérêts et le remboursement des dettes à leur échéance est prioritaire sur le versement des dividendes).

2.4. Présentation du marché action

Le cours boursier d'une action reflète l'analyse et l'évaluation que fait globalement le marché de l'entreprise concernée.

Ici, on fait l'hypothèse arbitraire qu'une action s'assimile à une chronique infinie de flux constituée par les dividendes. La valeur d'une action en 0 s'écrit donc (avec r_a la rentabilité exigée par les actionnaires ou coût des fonds propres) :

$$S(0) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E\left[D(t)\right]}{\left(1+r_a\right)^t}$$

Pour rendre opérationnelle cette évaluation, il faut faire des hypothèses sur les flux attendus de dividendes.

Les approches les plus simples pour évaluer les actions, et donc les sociétés, sont le modèle de Gordon et Shapiro et la méthode du PER, présentés ci-après (dans tous les cas, nous faisons une hypothèse de dividendes déterministes).

2.4. Présentation du marché action

Dans le cadre du modèle de Gordon et Shapiro, on commence par le cas où les dividendes sont constants : $D(t) = D$. On a alors :

$$S(0) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+r_a)^t} = \frac{D}{r_a}$$

On notera que dans ce cas l'action peut être assimilée à une rente perpétuelle où le taux de marché est r_a.

Gordon et Shapiro font ensuite l'hypothèse d'une croissance du dividende à un taux constant g, inférieur à r_a. La formule devient :

$$S(0) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_1 (1+g)^{t-1}}{(1+r_a)^t} = \frac{D_1}{r_a - g}$$

Au final, on peut également noter que $r_a = [\ D_1 \ /\ S(0)\ ] + g$, ce qui revient à considérer que le taux de rendement r_a exigé par les actionnaires est égal au taux de rendement associé au dividende augmenté du taux de croissance de celui-ci.

2.4. Présentation du marché action

Avec la méthode du PER (*Price Earning Ratio*), on définit :

$$PER = Cours / Bénéfice$$

Dans le cas d'un dividende constituant une fraction λ du bénéfice en croissance g présumée constante, la relation de Gordon-Shapiro conduit à :

$$PER = S / \text{Bénéfice net par action} = \lambda / (r_a - g)$$

Par conséquent, le PER est d'autant plus élevé que g est élevé et que r_a est faible. Puisque r_a augmente avec le taux d'intérêt et avec le risque affectant les flux de dividendes futurs, le PER est d'autant plus élevé que :
- les anticipations de croissance g sont optimistes ;
- le taux d'intérêt sans risque en vigueur sur le marché est faible ;
- le risque entachant les anticipations et les flux afférents est faible.

On note que le PER et la valeur des actions n'augmentent pas en pratique avec λ, compte tenu de la relation inverse qui existe entre g et λ (g devrait s'écrire $g(\lambda)$).

SOMMAIRE

Mathématiques financières

3.1. Les contrats à terme ferme

L'un des traits majeurs des marchés financiers est la grande variabilité des cours. Les marchés dérivés, qui définissent de façon précise toutes les conditions de l'échange futur (en particulier sa nature et son mode de règlement), permettent dans une certaine mesure de maîtriser ce risque de prix.

Ces contrats constituent des engagements qui peuvent être fermes ou conditionnels.

Un contrat à terme ferme est un engagement ferme de livraison du support ou sous-jacent du contrat, à une date future, notée T et appelée échéance, moyennant le paiement à cette date future d'une somme définie à l'origine du contrat, appelée aussi prix de livraison.

Ce type de contrat permet à un opérateur possédant en t (date initiale) le support et désirant le vendre en T (échéance) de s'assurer de le vendre en T pour le prix F_t connu en t, et donc d'éliminer toute incertitude sur le prix futur.

3.1. Les contrats à terme ferme

Un opérateur peut être acheteur ou vendeur de contrat à terme ferme :
- l'acheteur (pos. longue) a obligation de prendre livraison du support à l'échéance ;
- le vendeur (pos. courte) a obligation de livrer le support à l'échéance.

L'achat d'un contrat à terme ferme détenu entre t et T engendre un gain ou une perte, qualifié de marge, dont la valeur algébrique est $F_T - F_t$ (en symétrie, une vente se traduit par une marge algébriquement égale à $F_t - F_T$) : l'achat (resp. la vente) en T du sous-jacent pour un prix F_t, alors que sa valeur est $S_T = F_T$, implique effectivement un gain algébriquement égal à $F_T - F_t$ (resp. $F_t - F_T$).

Les contrats des marchés dérivés peuvent par ailleurs être négociés sur :
- des marchés de gré à gré (contrats de type *forward*, dans ce cas la marge globale est versée en un bloc) ;
- des marchés organisés (contrats de type *futures,* dans ce cas la marge globale est versée progressivement).

3.1. Les contrats à terme ferme

Dans les contrats *futures*, l'organisme de contrôle, la chambre de compensation :

- réclame avant toute prise de position un dépôt de garantie initial, couvrant une perte maximale d'un jour de bourse ;

- surveille les marges quotidiennes.

Si les marges quotidiennes viennent entamer le dépôt de garantie, la chambre de compensation demande à l'opérateur de combler son déficit, faute de quoi elle utilise le dépôt de garantie pour liquider d'office la position de l'opérateur.

De ce fait, le système évite toute défaillance.

Pour assurer une meilleure protection, les chambres de compensation imposent d'autres règles de sécurité : ratios de surface financière, limite d'emprise, etc.

3.1. Les contrats à terme ferme

La sortie du marché peut se faire de deux façons : soit en allant jusqu'à l'échéance et en se conformant à ses obligations, soit en renversant sa position initiale (dans ce cas, un vendeur se porte acheteur et un acheteur vendeur). La très grande majorité des opérations sur les marchés à terme ne donne pas lieu à livraison, et fait donc l'objet de renversement.

Examinons les flux de trésorerie engendrés sur un contrat de type *futures* en position longue à l'instant *t'*, qui sort du marché à l'instant *v'*, avant l'échéance.

Date	t	t+1	t+2	…	v	v+1	…	T
Contrat 1	Ft - Ft'	Ft+1 - Ft	Ft+2 - Ft+1	…	Fv - Fv-1	Fv+1 - Fv	…	FT - FT-1
Contrat 2	0	0	0	0	Fv' - Fv	Fv - Fv+1	…	FT-1 - FT
Total	**Ft - Ft'**	**Ft+1 - Ft**	**Ft+2 - Ft+1**		**Fv' - Fv-1**	**0**	**0**	**0**

Le résultat de cette stratégie est en v : $F_{v'} - F_{t'}$. Cela revient à considérer que *v'* joue pour cet opérateur un rôle de date d'échéance.

Dans le cas des marchés *forward*, le résultat $F_{v'} - F_{t'}$ est reçu en *T*, et non en *v*.

3.2. Les contrats à terme conditionnels

Les marchés à terme conditionnels sont des marchés où les contrats négociés possèdent un caractère conditionnel : tel paiement ne se fera que si tel évènement précis se réalise.

Dans ces marchés on retrouve notamment les options, qui sont des contrats donnant le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent :
- à un prix convenu (le prix d'exercice, *strike*, défini à la création de l'option) ;
- à ou jusqu'à une date future (la date d'échéance) ;
- moyennant le paiement immédiat d'une prime.

Lorsque le paiement prévu dans le contrat ne peut s'effectuer qu'à l'échéance, l'option est dite européenne ; et lorsque ce paiement peut s'effectuer à tout moment de la durée de vie de l'option, on parle d'option américaine.

Il existe des options d'achats (*calls*) et des options de vente (*puts*).

3.2. Les contrats à terme conditionnels

Si un acheteur d'option possède un droit, le vendeur d'option a une obligation :
- un vendeur de call a l'obligation de livrer au propriétaire du call, qui exerce son droit, l'actif support du contrat contre le paiement par l'acheteur du prix d'exercice ;
- le vendeur d'un put doit prendre livraison du support en échange du prix d'exercice.

En raison de la situation dissymétrique entre acheteur et vendeur, les vendeurs reçoivent immédiatement le montant de la prime.

Il y a quatre situations élémentaires : achat d'un call, vente d'un call, achat d'un put et vente d'un put. Il est commode de visualiser, dans le cas de l'exercice, le solde (perte ou profit) obtenu en fonction de la valeur du sous-jacent au moment de l'exercice.

Il apparaît alors que les ventes d'options sont dangereuses et peuvent être catastrophiques (théoriquement la perte sur la vente d'un call peut être infinie…).

3.2. Les contrats à terme conditionnels

La valeur intrinsèque de l'option est la valeur qu'aurait ce contrat s'il était exercé immédiatement.

Soit en t=T, date d'échéance, la valeur intrinsèque s'écrit :

- dans le cas d'un call : $[S(t) - K]^+ = \max[S(t) - K, 0]$;

- dans le cas d'un put : $[K - S(t)]^+ = \max[K - S(t), 0]$.

Avant l'exercice, la valeur de l'option est la somme de sa valeur intrinsèque et d'une valeur qu'on appelle valeur temps.

On note par ailleurs que :
- si le cours du support est égal au prix d'exercice, l'option est à la monnaie ;
- si la valeur intrinsèque de l'option est nulle, l'option en dehors de la monnaie ;
- si la valeur intrinsèque de l'option est positive, l'option en dans la monnaie.

3.2. Les contrats à terme conditionnels

Concernant la prime de l’option, il apparaît que :

- la valeur d’un call varie dans le même sens que le cours S du support, tandis que l’effet est inverse pour le put ;

- l’action de K (prix d’exercice) a un effet inverse sur un call et va dans le même sens pour un put ;

- la probabilité d’exercer l’option est d’autant plus grande que la volatilité est forte, la prime est donc croissante avec la volatilité.

3.2. Les contrats à terme conditionnels

Il existe de nombreuses inégalités et égalités remarquables avec les puts et les calls.

Ainsi, en notant C et P respectivement la valeur de la prime d'un call et celle d'un put européen, et en indiçant par le « us » le cas des options américaines, on a :

- un call permettant d'acquérir le sous-jacent à un prix convenu, ne peut être supérieur à la valeur du support : $C \leq S$ et $C_{us} \leq S$;

- sur le même principe, la valeur du put est majorée par le prix d'exercice : $P \leq K$ et $P_{us} \leq K$;

- l'option américaine offrant plus de possibilités qu'une option européenne, elle vaut plus cher : $C \leq C_{us}$ et $P \leq P_{us}$.

3.2. Les contrats à terme conditionnels

Une égalité très importante connue sous le nom de relation de parité put-call est donnée par :

$$C - P = S - K^{*}e^{-r(T-t)}$$

Plusieurs démonstrations sont possibles, nous adoptons la suivante :
- une position longue sur le support ;
- un achat de put ;
- un emprunt au taux r de durée égale à la maturité de l'option, et dont le montant est égal à la valeur actuelle du prix d'exercice. À l'échéance, on a :

Variations du support en T	0	K ∞
Valeur du support en T	S(T)	S(T)
Put	K - S(T)	0
Emprunt	-K	-K
Solde	**0**	**S(T) - K**

La valeur en T est donc celle d'un call de mêmes caractéristiques que le put. On obtient ainsi une forme de duplication de ce dernier. À l'équilibre en t, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, et la relation de parité put-call doit donc être vérifiée.

3.2. Les contrats à terme conditionnels

Avec la relation put-call, on montre également facilement que :

$$C \geq S - K^*e^{-r(T-t)} \quad \text{et} \quad P \geq K^*e^{-r(T-t)} - S.$$

La relation de parité put-call permet par ailleurs de facilement se représenter la prime du call avant l'échéance, en fonction du prix du sous-jacent. En effet, la courbe représentative de C(S) tend asymptotiquement, quand S tend vers l'infini, vers la demi-droite de pente égale à 45 degré issue du point ($K^*e^{-r(T-t)}$,0), car la quantité [C(S) – (S - $K^*e^{-r(T-t)}$)] tend vers 0 quand S tend vers l'infini.

On remarque par ailleurs que la valeur temps du call européen est toujours strictement positive, puisqu'on a : $C \geq S - K^*e^{-r(T-t)} \geq S - K$.

En revanche, la valeur temps du put européen est négative lorsque ce dernier est fortement dans la monnaie : la courbe de la prime du put prend son origine au point $K^*e^{-r(T-t)}$, strictement inférieur à K sur l'axe des ordonnées, et croise la valeur intrinsèque pour une valeur de S strictement positive.

SOMMAIRE

Mathématiques financières

4.1. Deux marchés, deux états du monde

Considérons les deux marchés de base :

- celui de l'actif risqué (appelé action) : la valeur en date 0 de l'action est égale à S ; en date 1, l'action peut prendre deux valeurs, que l'on note respectivement uS et dS, avec $u > d$;

- celui du prêt-emprunt (sans risque) : on considère les opérations prêt-emprunt, sous la forme d'achat ou de vente d'un actif sans risque, qui pour 1 euro placé en date 0 donne $1+r$ euros en date 1.

L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) impose que : $d < 1 + r < u$.

Considérons par ailleurs une option sur l'action, par exemple un call de prix d'exercice K et de maturité 1 :

- en cas de hausse de l'action, le payoff de l'option est égal à : $C_1^u = \max(uS - K, 0)$
- en cas de baisse de l'action, le payoff de l'option est égal à : $C_1^d = \max(dS - K, 0)$

4.2. Stratégie de couverture

Pour dupliquer la payoff de l'option en date 1, on considère en date 0 un investissement dans les deux actifs de base, avec α la quantité d'actions achetées (α > 0) ou vendues (α < 0) en date 0, et β le montant placé dans l'actif sans risque (β positif indique un prêt, β négatif un emprunt) en date 0.

La valeur en date 0 du portefeuille (α, β) est donc donné par : $V_0 = \alpha S + \beta$

En date 1, on obtient :
- en cas de hausse de l'action : $V_1^u = \alpha uS + \beta(1+r)$
- en cas de baisse de l'action : $V_1^d = \alpha dS + \beta(1+r)$

Pour dupliquer le call il faut déterminer (α*, β*) tels que la valeur en date 1 du portefeuille soit égale à celle de l'option dans les deux états du monde, soit résoudre :

$$\alpha uS + \beta(1+r) = C_1^u \quad \left(= \max(uS - K, 0)\right)$$

$$\alpha dS + \beta(1+r) = C_1^d \quad \left(= \max(dS - K, 0)\right)$$

4.2. Stratégie de couverture

Au final, en AOA, on a donc :

$$C_0 = V_0 = \alpha^* S + \beta^*$$

avec

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} \quad ; \quad \beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1+r}$$

Exemple : soit un parapluie de valeur *S* = 100 €, en date 0. En date 1, le prix du parapluie augmentera de 10 % s'il pleut (*uS* = 110) et diminuera de 10 % s'il ne pleut pas (*dS* = 90). On considère par ailleurs que le taux de prêt-emprunt est nul et que la météo estime (avec raison) qu'il pleuvra avec une probabilité *p* = 90 %.

Quel est le prix d'un call sur le parapluie, de prix d'exercice 100 € et de maturité 1 ?

On a : $\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} = \frac{10-0}{110-90} = 0,5 \quad ; \quad \beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1+r} = \frac{10 - 0,5\times 110}{1+0} = -45$

Le prix du call est donc de 5 €,… et non de de 9 € (=90 %*10 + 10 %*0).

4.3. Probabilité « risque-neutre »

Après quelques calculs simples, on trouve :

$$C_0 = V_0 = \alpha^* S + \beta^* = \frac{1}{1+r}\left(C_1^u \frac{(1+r)-d}{u-d} + C_1^d \frac{u-(1+r)}{u-d} \right)$$

Dans cette équation, le payoff C_1^u de l'option en cas de hausse est ainsi pondéré par un facteur multiplicatif que nous notons *q* :

$$q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

Par ailleurs, le facteur multiplicatif portant sur C_1^d est égal à 1-*q* :

$$1-q = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Rappelons que l'hypothèse d'AOA implique *d* < *1+r* < *u*. Ces deux inégalités impliquent en particulier que *q* est compris entre 0 et 1 et peut donc s'interpréter comme une probabilité.

4.3. Probabilité « risque-neutre »

Sous cette probabilité, l'espérance du payoff du call s'écrit :

$$E^q[C_1] = qC_1^u + (1-q)C_1^d$$

et on a :

$$C_0 = \frac{1}{1+r} E^q[C_1]$$

Au final, la valeur d'une option s'exprime donc comme une espérance actualisée de son payoff ; calculée sous la probabilité dite « risque-neutre » (q, 1-q), définie ci-avant, et l'actualisation est opérée au taux sans risque *r.*

On note que sous la probabilité risque-neutre (RN), tous les actifs du marché (action, option, actif sans risque) ont la même espérance de rentabilité, égale au taux sans risque *r* (on en déduit que sous la probabilité RN, les valeurs actualisées au taux sans risque de tous les actifs suivent des processus martingales).

4.3. Probabilité « risque-neutre »

Pour s'en convaincre, calculons l'espérance de rentabilité dans l'univers RN. Soit l'action de prix *S*, dont le taux de rentabilité est *R*. On a donc $R_u = u - 1$ et $R_d = d - 1$.

On obtient donc en espérance : $E^q[R] = q(u-1)+(1-q)(d-1) = qu+(1-q)d-1$

Soit : $E^q[R] = \frac{(1+r)-d}{u-d}u + \frac{u-(1+r)}{u-d}d - 1 = r$

Considérons maintenant une option de prix C ; on obtient : $E^q[C_1] = C_0(1+r)$. On en déduit que l'espérance sous *q* de la rentabilité du call est *r*.

Pour illustrer cette caractéristique, on reprend l'exemple précédent. En calculant le rendement de l'actif risqué sous *q* (avec *q* = 0,5) :

$$E^q\left[\frac{S_1 - S_0}{S_0}\right] = 0,5\times 10\,\% - 0,5\times 10\,\% = r = 0\,\%$$

On remarque par ailleurs que sous *p* : $E^p\left[\frac{S_1 - S_0}{S_0}\right] = 0,9\times 10\,\% - 0,1\times 10\,\% = 8\,\%$

4.4. Prime de risque et prix de marché du risque

On s'intéresse désormais au rendement sous la probabilité historique (réelle) p. Considérons les actions ; l'espérance m_S du taux de croissance du prix de l'action :

$$m_S = E^p\,[\,(S_1 - S_0) / S_0\,] = pu + (1 - p)d - 1$$

et la variance v_S :

$$v_S = E^p\,[\,(R - m_S)^2\,] = p(u - 1 - m_S)^2 + (1 - p)(d - 1 - m_S)^2 = p(1 - p)(u - d)^2$$

On dit qu'il y a excès de rendement lorsque, sous la probabilité p, la rentabilité espérée de l'action est supérieure au taux sans risque r, i.e. lorsque : $m_S > r$. La différence $m_S - r$ s'interprète comme une prime de risque.

Le risque affectant S étant mesuré par l'écart-type σ_S, il est naturel de penser que cette prime soit proportionnelle au risque et donc de poser :

$$m_S - r = \lambda * \sigma_S$$

où λ s'interprète comme le prix de marché d'une unité de risque.

Références (extraits)

Le Bellac M., Viricel A. [2012] « Mathématiques des marchés financiers – Modélisation du risque et de l'incertitude », *EDP Sciences*.

Le Borgne H. [2003] « Calculs bancaires », *Economica*.

Portait R., Poncet P. [2012] « Finance de marché – Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques », *Dalloz (3ème édition)*.

Quittard-Pinon F. [2002] « Mathématiques financières », *EMS*.

Annexe : suites géométriques et sommes des premiers entiers

La somme des n premiers termes d'une suite en progression géométrique s'écrit :

$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n$

$= (q^{n+1} - 1) / (q - 1)$

$= (1 - q^{n+1}) / (1 - q)$

Par ailleurs, la somme des *n* premiers entiers s'écrit :

$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$

$= n(n + 1) / 2$

Contacts

Aymric Kamega

aymric.kamega@univ-brest.fr

EURIA

Université de Bretagne Occidentale
6 avenue le Gorgeu
CS 93837
29238 Brest Cedex 3
Tél : +33-2-98-01-66-55

http://www.ressources-actuarielles.net
http://blog.ressources-actuarielles.net
http://afrique.ressources-actuarielles.net