

ASSURANCE NON-VIE

(Partie de Pierre THEROND)

ISFA 3A - Examen du 9 mai 2005 - 1^{re} session

Durée : 1,5 h - Calculatrices interdites.

Seuls documents autorisés : 2 feuilles recto-verso manuscrites

Exercice 1 (~8 pts)

Considérons un portefeuille regroupant exclusivement des bons risques et des mauvais risques. Notons B l'événement « être un bon risque » et B^c son complémentaire « être un mauvais risque ». Supposons que la probabilité d'être un bon risque est de 50 %, soit $\Pr[B] = 1/2$. Notons N_k le nombre de sinistres déclarés par un assuré au cours de l'année k et supposons que :

$$\begin{cases} \Pr[N_k = 1 \mid B] = 0,1 = 1 - \Pr[N_k = 0 \mid B] \\ \Pr[N_k = 1 \mid B^c] = 0,9 = 1 - \Pr[N_k = 0 \mid B^c]. \end{cases}$$

Supposons enfin que les montants de sinistres sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne 1 et que, conditionnellement à la qualité d'un risque, les variables aléatoires N_k sont mutuellement indépendantes.

1. Déterminez la prime pure d'un nouvel assuré appartenant à la population étudiée.
2. Considérons un assuré avec l'historique suivant : $(N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 0)$. Compte tenu de cet historique, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un bon risque ?
3. Quelle prime *a posteriori* exigeriez-vous de cet assuré pour la 4^e année ?

Exercice 2 (~4 pts)

Considérons un couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ dont la fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$ appartient à la classe de Fréchet $\mathbf{F}(F_1, F_2)$. Rappelons l'expression de la fonction de répartition W de la borne supérieure de Fréchet de $\mathbf{F}(F_1, F_2)$: $W(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$. Montrez que

$$\mathbf{X} \text{ comonotone} \Rightarrow F_{\mathbf{X}} = W.$$

Exercice 3 (~10 pts)

Considérons deux vecteurs aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$, de fonctions de répartition $F_{\mathbf{X}}$ et $F_{\mathbf{Y}}$, et de mêmes marginales exponentielles de paramètre 1, i. e. tels que

$$\mathbf{P}[X_i \leq z] = \mathbf{P}[Y_i \leq z] = 1 - \exp\{-z\} \text{ pour } z \in \mathbf{R}_+ \text{ et } i \in \{1, 2\}.$$

Supposons que le couple $\mathbf{X}$ soit indépendant et que le couple $\mathbf{Y}$ soit comonotone.

1. Déterminez la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$.
2. Déterminez la fonction de répartition de $X_1 + X_2$.
3. Comparez $F_{\mathbf{X}}$ et $F_{\mathbf{Y}}$. Que peut-on en déduire concernant $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$? Que peut-on en déduire concernant $X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$?