

ASSURANCE NON-VIE



Année universitaire 2004-2005

Mesures et comparaison de risques

Pierre-E. THEROND

ptherond@jwa.fr

1. Introduction	2
2. Définition et propriétés	2
2.1. Chargement de sécurité	2
2.2. Mesure de risque cohérente	3
2.3. Mesure de risque comonotone additive	3
3. Quelques mesures de risque	3
3.1. L'écart-type et la variance	3
3.2. La Value-at-Risk (VaR)	4
3.3. La Tail-Value-at-Risk (TVaR)	5
3.4. Mesures de risque de Wang	6
3.5. Mesure de risque d'Esscher	7
3.6. Choix d'une mesure de risque pour déterminer un capital économique	8
4. Comparaison des risques	9
4.1. Relation associée à une mesure de risque	9
4.2. Ordre stochastique	9
4.3. Ordre convexe	10
4.4. Théorème de séparation	11
4.5. Bornes comonotones d'une somme de variables aléatoires	11
Bibliographie.....	12
Exercices.....	13

1. Introduction

L'activité d'assurance repose sur le concept de transfert de risque : moyennant une prime, l'assuré se protège d'un risque financier aléatoire. Mesurer le risque assuré s'avère donc inévitable puisque cette information est nécessaire dans le cadre de la tarification pour déterminer les chargements de sécurité à ajouter à la prime pure et dans une approche de solvabilité pour déterminer le niveau de fonds propres dont doit disposer l'assureur pour être solvable.

En effet, bien que bénéficiant de l'effet de mutualisation, l'assureur ne peut se contenter de demander la prime pure des risques qu'il assure. Ce pour une raison évidente : la mutualisation ne saurait être parfaite et dès lors ne demander que la prime pure reviendrait à ce que, en moyenne, la société d'assurance soit en perte un exercice sur deux.

Le niveau de fonds propres vient ensuite comme un matelas de sécurité destiné à amortir une sinistralité excessive mais aussi des placements risqués.

Le but de ce cours est de présenter les outils permettant de comparer les risques et d'apprécier leur dangerosité.

2. Définition et propriétés

Nous reprenons ici la définition d'une mesure de risque telle qu'elle est formalisée dans DENUIT et CHARPENTIER [2004].

Définition 1 : *On appelle mesure de risque toute application ρ associant un risque X à un réel $\rho(X) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*

En particulier, cette définition nous permet d'établir que lorsqu'ils existent, l'espérance, la variance ou l'écart-type sont des mesures de risque.

Si un grand nombre d'applications répondent à la définition de mesure de risque, pour être jugée « satisfaisante » il est souvent exigé d'une mesure de risque d'avoir certaines propriétés dont les plus fréquentes sont rappelées *infra*.

2.1. Chargement de sécurité

La notion de chargement de sécurité est étroitement liée à celle de tarification : un principe de prime contient un chargement de sécurité s'il conduit à exiger une prime supérieure à celle qui est exigée si la mutualisation des risques est parfaite (cf. PARTRAT et BESSON [2004]).

Définition 2 : *Une mesure de risque ρ contient un chargement de sécurité si pour tout risque X , on a $\rho(X) \geq \mathbf{E}[X]$.*

Nous verrons dans la suite qu'une Tail-Value-at-Risk (TVaR), lorsqu'elle existe, contient un chargement de sécurité ce qui n'est pas le cas d'une Value-at-Risk (VaR).

2.2. Mesure de risque cohérente

Propriété 1 : Une mesure de risque ρ est invariante par translation si $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ pour toute constante c .

Propriété 2 : Une mesure de risque ρ est sous-additive si $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y .

Propriété 3 : Une mesure de risque ρ est homogène si $\rho(cX) = c\rho(X)$ pour toute constante positive c .

Propriété 4 : Une mesure de risque ρ est monotone si $\Pr[X < Y] = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y .

Une mesure de risque qui satisfait ces quatre propriétés est qualifiée de *cohérente* par ARTZNER et al. [1999]. Par exemple la Tail-VaR est cohérente mais pas la VaR qui ne respecte pas l'axiome de sous-additivité (cf. *infra*).

2.3. Mesure de risque comonotone additive

Définition 3 : Le vecteur aléatoire $(X_1; X_2)$, de fonctions de répartition marginales F_1, F_2 , est un vecteur comonotone s'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0;1]$ telle que $(X_1; X_2)$ a la même loi que $(F_1^{-1}(U); F_2^{-1}(U))$.

Définition 4 : On appelle mesure de risque comonotone additive toute mesure de risque ρ telle que : $\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2)$ pour tout vecteur comonotone $(X_1; X_2)$.

Une mesure de risque comonotone additive intègre donc le fait que deux risques comonotones ne se mutualisent pas puisque dès que le risque U se produit, les risques X_1 et X_2 se produisent également avec une ampleur croissante avec celle de U .

3. Quelques mesures de risque

L'objet de ce paragraphe est de présenter les mesures de risque les plus usuelles. On s'attardera particulièrement sur la Value-at-Risk et la Tail-Value-at-Risk dont l'utilisation en assurance va être pérennisée par le futur système de solvabilité européen (Solvabilité 2) puisqu'elles seront vraisemblablement à la base de la détermination du niveau prudentiel des provisions techniques et du besoin en fonds propres (« capital cible »).

3.1. L'écart-type et la variance

Ce sont les premières mesures de risque à avoir été utilisées ; on les retrouve notamment dans le critère de Markowitz (moyenne-variance) qui sert de socle aux premières théories d'évaluation des actifs (MEDAF).

Toutefois ce critère n'est pas bien adapté à l'activité d'assurance, notamment parce qu'il est symétrique et pénalise autant les « bonnes variations » que les « mauvaises ».

3.2. La Value-at-Risk (VaR)

La notion de *Value-at-Risk* ou valeur ajustée au risque s'est originellement développée dans les milieux financiers avant d'être largement reprise dans les problématiques assurantielles.

Définition 5 : La *Value-at-Risk* (VaR) de niveau α associée au risque X est donnée par :

$$VaR(X, \alpha) = \inf \{x \mid \Pr[X \leq x] \geq \alpha\}.$$

On notera que $VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$ où F_X^{-1} désigne la fonction quantile de la loi de X .

Cette mesure de risque a le mérite de reposer sur un concept simple et directement justifiable : $VaR(X, \alpha)$ est le montant qui permettra de couvrir le montant de sinistres engendré par le risque X avec une probabilité α . Ce concept est directement lié à celui de probabilité de ruine puisque si une société, disposant d'un montant de « ressources » égal à $VaR(X, \alpha)$, assure un unique risque X , sa probabilité de ruine est égale à $1 - \alpha$.

Proposition 1 : La VaR n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive.

Démonstration : Cette proposition peut se démontrer à l'aide d'un contre-exemple. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Pareto de paramètres $(2;1)$ et $(2;2)$, alors $\exists \alpha \in]0;1[, VaR_\alpha(X+Y) > VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$ comme le montre le graphique suivant.

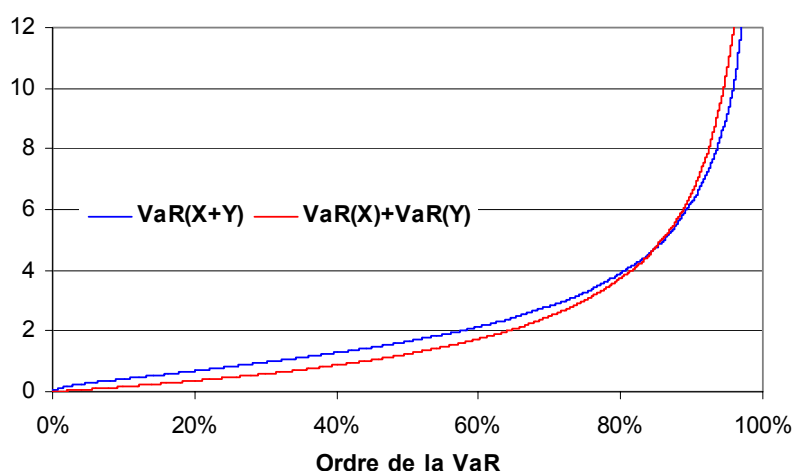


Fig. 1 - Value-at-Risk de la somme de deux v.a. de Pareto.

Rappelons qu'une variable aléatoire X de loi de Pareto $Par(\alpha; \theta)$ a pour fonction de répartition $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^\alpha$ si $x > 0$ et $F_X(x) = 0$ sinon. $\square$

Proposition 2 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}$ et soit $0 < \alpha < 1$. Pour toute fonction g croissante et continue à gauche, on a : $VaR_\alpha(g(X)) = g(VaR_\alpha(X))$.

Proposition 3 : *La VaR est comonotone additive.*

Démonstration : Ce résultat est immédiat à l'aide de la proposition 2 puisque pour tout $\alpha \in]0;1[$, on a $VaR_\alpha((F_1^{-1} + F_2^{-1})(U)) = (F_1^{-1} + F_2^{-1})(VaR_\alpha(U))$. $\square$

3.3. La Tail-Value-at-Risk (TVaR)

Définition 6 : *La Tail-Value-at-Risk (TVaR) de niveau α associée au risque X est donnée*

$$\text{par : } TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 F_X^{-1}(p) dp.$$

On remarque que la TVaR peut s'exprimer en fonction de la VaR :

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbf{E}[(X - VaR(X, \alpha))^+].$$

Il vient de cette réécriture que pour tout $\alpha \in]0;1[$, $TVaR_\alpha(X) < +\infty \Leftrightarrow \mathbf{E}[X] < +\infty$. Par ailleurs, le deuxième terme du membre de droite représente la perte moyenne au-delà de la VaR, la TVaR est donc très sensible à la forme de la queue de distribution.

Définition 7 : *L'expected shortfall (ES_α) de niveau de probabilité α est la perte moyenne au-delà de la VaR au niveau α , i. e. $ES_\alpha(X) = \mathbf{E}[(X - VaR(X, \alpha))^+]$.*

On peut remarquer que si X représente la charge brute de sinistres, $ES_\alpha(X)$ est le montant de la prime Stop-Loss dont la rétention pour l'assureur est la VaR au niveau α .

Définition 8 : *La Conditionnal Tail Expectation (CTE) de niveau α est le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR au niveau α , i. e. $CTE(X, \alpha) = \mathbf{E}[X | X > VaR(X, \alpha)]$.*

Proposition 4 : *Si la fonction de répartition F_X du risque X est continue, la TVaR coïncide avec la Conditionnal Tail Expectation (CTE).*

Proposition 5 : *La TVaR est cohérente.*

Proposition 6 : *Pour tout $\alpha \in [0;1]$, la TVaR au niveau α inclut un chargement de sécurité.*

Démonstration : Pour tout $\alpha \geq 0$, $TVaR(X; \alpha) \geq TVaR(X; 0) = \mathbf{E}[X]$. $\square$

Proposition 7 : *La TVaR est comonotone additive.*

Démonstration : Ce résultat provient du fait que la TVaR est une somme de VaR (cf. définition 6) et du fait que la VaR est comonotone additive (cf. proposition 3). $\square$

Remarquons que si la TVaR est comonotone additive, ce n'est, en général, pas le cas de la CTE (cf. DHAENE, VANDUFFEL et al. [2004] pour un contre-exemple).

3.4. Mesures de risque de Wang

Les mesures de risque de Wang utilisent l'opérateur espérance sur des transformations de la distribution de la variable aléatoire d'intérêt. L'idée est en effet d'alourdir la queue de la distribution de la variable d'intérêt afin d'engendrer un chargement par rapport à la prime pure. Cette transformation de la fonction de répartition sera effectuée à l'aide d'une fonction de distorsion.

Définition 9 : On appelle fonction de distorsion toute fonction non décroissante $g : [0;1] \rightarrow [0;1]$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Définition 10 : On appelle mesure de risque de Wang issue de la fonction de distorsion g , la mesure ρ_g définie par : $\rho_g(X) = \int_0^\infty g(\Pr[X > x])dx$.

Proposition 8 : Toute mesure de Wang peut s'écrire comme somme de VaR, i. e.

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR(X, 1-\alpha) dg(\alpha).$$

Démonstration : Notons $\bar{F}_X(x) = 1 - \Pr[X \leq x]$, $g(\bar{F}_X(x)) = \int_0^{\bar{F}_X(x)} dg(\alpha)$ puisque $g(0) = 0$

donc $\rho_g(X) = \int_0^\infty \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\alpha \leq \bar{F}_X(x)\}} dg(\alpha) dx$. Puis, en utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$\rho_g(X) = \int_0^1 \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\alpha \leq \bar{F}_X(x)\}} dx dg(\alpha) = \int_0^1 F_X^{-1}(1-\alpha) dg(\alpha). \quad \square$$

Définition 11 : On appelle Wang-Transform (WT) la mesure de risque de Wang issue de la fonction de distorsion $g_\alpha(x) = \Phi[\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\alpha)]$.

Certaines mesures de risque usuelles telles que la VaR ou la TVaR sont des mesures de risque de Wang, le tableau ci-dessous reprend les fonctions de distorsion correspondantes.

Mesure de risque	Paramètre	Fonction de distorsion
Value-at-Risk	VaR_α	$g(x) = \mathbf{1}_{[\alpha; +\infty)}(x)$
Tail-Value-at-Risk	$TVaR_\alpha$	$g(x) = \mathbf{Min}(x/\alpha; 1)$
Mesure de risque PH	PH_ξ	$g(x) = x^{1/\xi}$
Wang-transform	WT_α	$g(x) = \Phi[\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\alpha)]$

Voici le graphe de chacune de ces fonctions.

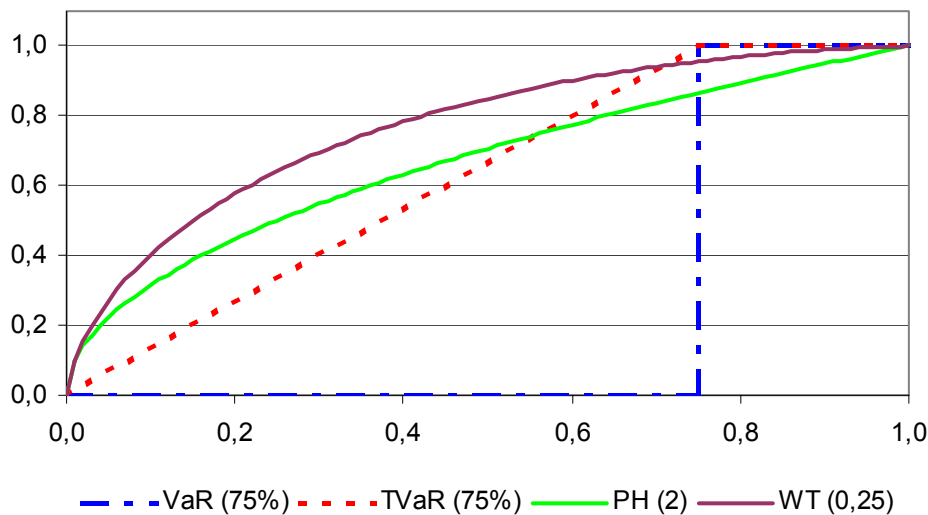


Fig. 2 - Quelques fonctions de distorsion.

Proposition 9 : *Les mesures de risque de Wang sont homogènes, invariantes par translation et monotones.*

Proposition 10 : ρ_g sous-additive $\Leftrightarrow g$ concave.

Ces deux propriétés nous permettent d'établir qu'une mesure de Wang est cohérente si, et seulement si, la fonction de distorsion correspondante est concave.

Proposition 11 : *Toute mesure de risque de Wang est comonotone additive.*

Démonstration : Une mesure de risque de Wang est une somme de VaR qui sont comonotones additives. $\square$

3.5. Mesure de risque d'Esscher

La mesure de risque d'Esscher consiste à mesurer le risque comme étant la prime pure, i. e. l'espérance de la transformée d'Esscher du risque initial.

Définition 12 : *On appelle mesure d'Esscher de paramètre $h > 0$ du risque X , la mesure de risque donnée par :*

$$Es(X; h) = \frac{\mathbf{E}[X e^{hX}]}{\mathbf{E}[e^{hX}]} = \frac{d}{dh} \ln \mathbf{E}[e^{hX}].$$

Proposition 12 : *La mesure de risque d'Esscher n'est pas cohérente car elle n'est ni homogène, ni monotone.*

Proposition 13 : *La mesure de risque d'Esscher contient un chargement de sécurité.*

Démonstration : $Es(X; h)$ est une fonction croissante en h et $Es(X; 0) = \mathbf{E}[X]$. $\square$

3.6. Choix d'une mesure de risque pour déterminer un capital économique

Les travaux en cours sur Solvabilité 2 évoquent l'utilisation de mesures de risque dans la détermination du capital cible nécessaire à une société d'assurance pour pérenniser son activité. Ce capital cible sera déterminé en référence à une mesure de risque appliquée au risque global supporté par la société. Ce risque global sera modélisé à partir d'une formule commune à toutes les compagnies d'assurance européenne ou à partir d'un modèle interne. Les mesures de risque les plus souvent citées sont la Value-at-Risk et la Tail-Value-at-Risk. À l'heure où ces lignes sont écrites, la préférence semblerait aller vers la TVaR du fait de sa cohérence (rappelons que la VaR n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive).

Néanmoins les travaux récents de DHAENE, LAEVEN et al. [2004] montrent que la propriété de sous-additivité est parfois trop forte. En effet considérons deux risques X_1 et X_2 , et ρ la mesure de risque associée à la détermination du capital réglementaire. Si ρ est « trop » sous-additive, on peut se retrouver dans une situation où

$$\mathbf{E}[(X_1 + X_2 - \rho(X_1 + X_2))^+] > \mathbf{E}[(X_1 - \rho(X_1))^+] + \mathbf{E}[(X_2 - \rho(X_2))^+].$$

Cette inégalité signifie que l'ampleur de la ruine moyenne d'une société pratiquant les risques X_1 et X_2 et disposant d'un capital de niveau $\rho(X_1 + X_2)$ est plus importante que la somme de l'ampleur de la ruine moyenne de deux sociétés de capitaux respectifs $\rho(X_1)$ et $\rho(X_2)$ couvrant respectivement les risques X_1 et X_2 . DHAENE, LAEVEN et al. [2004] illustrent cette inégalité lorsque la mesure de risque considérée est la TVaR, en prenant deux risques indépendants de loi de Bernoulli de même paramètre.

Dans le cadre du choix de la mesure de risque permettant de déterminer le capital cible (au sens de Solvabilité 2), ils proposent donc de ne retenir que les mesures de risque qui respectent la *condition du régulateur*, à savoir les mesures de risques ρ telles que pour ε fixé dans $]0;1[$ et pour tous risques X_1 et X_2 , l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\mathbf{E}[(X_1 + X_2 - \rho(X_1 + X_2))^+] + \rho(X_1 + X_2)\varepsilon \leq \sum_{i=1}^2 \left\{ \mathbf{E}[(X_i - \rho(X_i))^+] + \rho(X_i)\varepsilon \right\}.$$

Notons que ε peut s'interpréter comme le coût de l'immobilisation du capital. A partir de cette condition, ils démontrent les trois propriétés suivantes.

Proposition 14 : Soit $\varepsilon \in]0;1[$. La condition du régulateur en référence au niveau ε est satisfaite

- (1) pour les $TVaR_p$ telles que $p > 1 - \varepsilon$,
- (2) pour la $VaR_{1-\varepsilon}$,
- (3) pour toute mesure de risque sous-additive ρ telle que $\rho(X) \geq VaR(X, 1 - \varepsilon)$.

En conclusion, ils démontrent enfin que la VaR de niveau $1 - \varepsilon$ est la mesure de risque respectant la *condition du régulateur* qui conduit au plus petit niveau de capital.

4. Comparaison des risques

L'objet de ce paragraphe est de présenter des outils permettant de classer les risques selon leur dangerosité.

4.1. Relation associée à une mesure de risque

Dans le paragraphe 3, nous avons étudié un certain nombre de mesures de risque. Une idée naturelle pour comparer deux risques X et Y est de choisir une mesure de risque ρ et de comparer $\rho(X)$ et $\rho(Y)$, ce que l'on peut toujours faire puisque $\mathbf{R}$ est ordonné par la relation d'ordre totale $\leq$. Cette démarche nous permet d'introduire la relation $\prec_\rho$ définie comme suit.

Définition 13 : Pour toute mesure de risque ρ , pour tous risques X et Y , on définit la relation $\prec_\rho$ par : $X \prec_\rho Y$ si $\rho(X) \leq \rho(Y)$

Proposition 15 : La relation $\prec_\rho$ issue de la mesure de risque ρ est réflexive et transitive. De plus il est toujours possible de comparer par $\prec_\rho$ deux lois de probabilité ou deux variables aléatoires.

N.B. Cette relation n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique. En effet, avoir simultanément $\rho(X) \leq \rho(Y)$ et $\rho(X) \geq \rho(Y)$ n'implique pas que $X =_{loi} Y$ (et *a fortiori* que $X = Y$).

Le principal mérite de ce type de relation est qu'il est toujours possible de comparer deux risques. Il faut néanmoins rester prudent car l'on peut avoir simultanément $X \prec_\rho Y$ et $X \succ_{\rho'}, Y$ pour deux mesures de risque ρ et ρ' différentes. C'est pour cette raison que l'on préférera se tourner vers des ordres partiels qui permettent de disposer de davantage de propriétés.

4.2. Ordre stochastique

Définition 14 : On dit que X domine selon l'ordre stochastique Y ($Y \prec_{st} X$) si pour toute fonction de distorsion g , on a : $\rho_g(Y) \leq \rho_g(X)$.

Cette notion est équivalente à celle de comparaison uniforme des VaR puisque toute mesure de risque de Wang peut s'écrire comme somme de VaR (cf. proposition 8) :

$$\begin{aligned} X \prec_{st} Y &\Leftrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y) \text{ pour toute fonction de distorsion } g \\ &\Leftrightarrow \text{Var}(X, \alpha) \leq \text{Var}(Y, \alpha) \forall \alpha \in [0;1]. \end{aligned}$$

Proposition 16 : La relation $\prec_{st}$ est un ordre partiel sur l'ensemble des lois de probabilités.

L'ordre stochastique ne permet pas de comparer toutes les variables aléatoires. En effet, il est possible d'avoir simultanément

$$\text{Var}(X, \alpha) \leq \text{Var}(Y, \alpha)$$

et

$$\text{Var}(X, \beta) > \text{Var}(Y, \beta).$$

Proposition 17 : On a : $X \prec_{st} Y \Leftrightarrow \mathbf{E}[\varphi(X)] \leq \mathbf{E}[\varphi(Y)]$ pour toute fonction φ croissante, pour autant que les espérances existent.

En particulier, on a : $X \prec_{st} Y \Rightarrow \mathbf{E}[X] \leq \mathbf{E}[Y]$ qui signifie intuitivement que le risque X est plus « petit » que le risque Y . Cette conséquence explique le fait que l'on parle de dominance stochastique au premier ordre pour désigner la relation $\prec_{st}$.

4.3. Ordre convexe

Définition 15 : On dit que X est moins dangereux que Y sur la base de l'ordre convexe croissant ($\prec_{icx}$) et l'on note $X \prec_{icx} Y$ si, pour toute fonction de distorsion g concave, on a : $\rho_g(X) \leq \rho_g(Y)$.

Cette notion est équivalente à celle de comparaison uniforme des TVaR, puisque :

$$\begin{aligned} X \prec_{icx} Y &\Leftrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y) \text{ pour toute fonction de distorsion } g \text{ concave} \\ &\Leftrightarrow \text{TVaR}(X, \alpha) \leq \text{TVaR}(Y, \alpha) \text{ pour tout } \alpha \in [0; 1]. \end{aligned}$$

On supposera dans la suite que les risques ont des primes pures finies ce qui garantit l'existence des TVaR. Cette relation est également connue sous les noms de dominance stochastique du deuxième ordre, d'ordre Stop-Loss et d'ordre sur les TVaR.

Définition 16 : On dira que le risque X est moins dangereux que le risque Y de même prime pure au sens de l'ordre convexe ($\prec_{cx}$), s'il est moins dangereux au sens de l'ordre convexe croissant, i. e. si $X \prec_{cx} Y \Leftrightarrow X \prec_{icx} Y$ et $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y]$.

Proposition 18 : Pour toute fonction φ convexe croissante et pour autant que les variances existent, on a : $X \prec_{cx} Y \Leftrightarrow \mathbf{E}[\varphi(X)] \leq \mathbf{E}[\varphi(Y)]$.

En particulier pour $\varphi : x \mapsto x^2$ pour $x \geq 0$, on a : $X \prec_{cx} Y \Rightarrow \mathbf{Var}[X] \leq \mathbf{Var}[Y]$ pour autant que les variances existent. Intuitivement cette propriété signifie que si $X \prec_{cx} Y$, le risque X est moins « variable » que le risque Y .

L'ordre convexe permet de comparer des variables aléatoires de même espérance, ce que ne permettait pas l'ordre stochastique puisque

$$X \prec_{st} Y \text{ et } \mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] \Leftrightarrow X =_{loi} Y.$$

4.4. Théorème de séparation

Proposition 19 : *Théorème de séparation : $X \prec_{icx} Y \Leftrightarrow \exists Z$ tel que $X \prec_{st} Z \prec_{cx} Y$.*

Le théorème de séparation permet d'établir que si X est moins dangereux que Y selon l'ordre convexe croissant, X est à la fois plus « petit » ($\prec_{st}$) et moins « variable » ($\prec_{cx}$) que Y .

4.5. Bornes comonotones d'une somme de variables aléatoires

L'ordre convexe nous permet de disposer de bornes pour une somme de variables aléatoires.

Proposition 20 : *Pour tout vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ et pour toute variable aléatoire Λ , on*

a les inégalités : $\sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i | \Lambda] \prec_{cx} \sum_{i=1}^n X_i \prec_{cx} \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(U)$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$.

Démonstration : Cf. KAAS et al. [2000]. $\square$

Le majorant de cette double inégalité est appelé la contrepartie comonotone du vecteur X . En effet ces deux vecteurs ont les mêmes marginales mais le vecteur $X^c = (F_{X_1}^{-1}, \dots, F_{X_n}^{-1})$ est comonotone.

Grâce aux propriétés de l'ordre convexe, cette majoration nous permet de disposer d'un maximum pour les primes Stop-Loss de la somme de risques $\sum_{i=1}^n X_i$. Concernant la minorant, lorsque c'est possible, on choisira Λ de manière à ce que $X^l = (\mathbf{E}[X_1 | \Lambda], \dots, \mathbf{E}[X_n | \Lambda])$ soit un vecteur comonotone ce qui permettra parfois d'explicitier analytiquement $\sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i | \Lambda]$. On trouvera dans DHAENE, VANDUFFEL et al. [2004] une procédure pour déterminer Λ de manière à ce que X^l soit comonotone lorsque les marginales de X sont log-normales.

De plus lorsque l'on évaluera le risque associé à $\sum_{i=1}^n X_i$ par une mesure de risque de distorsion, on disposera d'un encadrement dont les bornes seront simples à déterminer puisque les mesures de risque de distorsion sont comonotones additives (cf. propriété 11).

Bibliographie

ARTZNER PH., DELBAEN F., EBER J.M., HEATH D. [1999] « Coherent measures of risk ». *Mathematical Finance*, Vol. 9, p. 203-228.

DENUIT M., CHARPENTIER A. [2004] *Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome 1 : principes fondamentaux de théorie du risque*. Economica.

DENUIT M. [2004] « Actuarial theory for dependent risks ». *8th international Congress on Insurance: Mathematics and Economics*. Rome, 14-16 juin 2004.

DHAENE J., LAEVEN R.J.A., VANDUFFEL S., DARKIEWICZ G., GOOVAERTS M.J. [2004] « Can a coherent risk measure be too subadditive? ». Research Report OR 0431, Department of Applied Economics, Katholieke Universiteit Leuven.

DHAENE J., VANDUFFEL S., TANG Q.H., GOOVAERTS M., KAAS R., VYNCKE D. [2004] « Solvency capital, risk measures and comonotonicity: a review ». Research Report OR 0416, Department of Applied Economics, Katholieke Universiteit Leuven.

DHAENE J., WANG S., YOUNG V., GOOVAERTS M. [2000] « Comonotonicity and maximal Stop-Loss premiums ». *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, Vol. 2, p. 99-113.

GOURIEROUX CH. [1999] *Statistique de l'assurance*. Economica.

HÜRLIMANN W. [1999] « On risk and price : Stochastic orderings and measures ». *Actes du 27^e colloque ASTIN*. Cancun, 22 mars 2002.

KASS R., DHAENE J., GOOVAERTS M. [2000] « Upper and lower bounds for sums of random variables ». *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 27, p. 151-168.

PARTRAT CH., BESSON J.L. [2004] *Assurance non-vie. Modélisation, simulation*. Economica.

WANG S. [2002] « A risk measure that goes beyond coherence ». *Actes du 12^e colloque AFIR*. Cancun, 18 mars 2002.

Exercices

Exercice 1 : Montrez à l'aide de deux variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli que la Tail-Value-at-Risk peut être « trop sous-additive » au sens du paragraphe 3.6.

Exercice 2 : Soient ρ une mesure de risque et $\prec_\rho$ la relation associée à cette mesure de risque.

1. Montrez que $\prec_\rho$ n'est pas une relation d'ordre.
2. Soient X et Y deux risques et ρ' une mesure de risque. Montrez que l'on peut avoir simultanément $X \prec_\rho Y$ et $X \succ_{\rho'} Y$.

Exercice 3 : Considérons le vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ dont les marginales sont des lois log-normales de paramètres (μ_i, σ_i) . Donnez un majorant de $\sum_{i=1}^n X_i$ dont vous exprimerez la loi en fonction de celle d'une variable aléatoire uniforme sur $[0;1]$.

Exercice 4 : Une société d'assurance couvre un risque Y dont la charge globale de sinistres est telle que $\ln Y \sim \mathbf{N}(m, s)$.

1. Explicitiez la VaR de niveau α de ce risque. Dans la suite, ce sera le niveau initial de la provision destinée à régler les sinistres.
2. En 0, la société a constitué une provision et dispose d'un niveau de fonds propres e_0 . A cette même date, provision et fonds propres sont investis dans un actif X dont la dynamique est donnée par $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$ avec $X_0 = 1$ et où B est un mouvement brownien standard. En supposant que tous les sinistres engendrés par le risque Y sont payés à la date t , écrivez la condition de la ruine de l'assureur à la date t .
3. Explicitiez le niveau de fonds propres e_0 qui contrôle, avec une probabilité π , la ruine de l'assureur à la date t .