ASSURANCE NON-VIE

Année universitaire 2004-2005

Analyse de la dépendance

Pierre-E. THEROND

ptherond@jwa.fr

1. Limites de l'hypothèse d'indépendance

L'activité d'assurance repose sur le principe de mutualisation découlant de la loi des grands nombres.

Proposition 1 : *(Loi faible des grands nombres). Soit* $X_1, X_2, \ldots$ *une suite de variables aléatoires indépendantes d'espérances* $m_1, m_2, \ldots$ *finies et de variances* $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ *finies. Si* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \to m$ *et si* $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to 0$*, alors* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbf{Pr}} m$.

La loi des grands nombres requiert l'indépendance des risques. Si les risques ne sont pas indépendants, on a toujours la propriété limite $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = m$, mais on ne dispose plus de la convergence en probabilité qui assure la mutualisation.

Intéressons-nous par exemple à deux variables aléatoires X_1 et X_2 de loi exponentielle négative de paramètre 1, *i. e.* telles que $\mathbf{Pr}[X_i < x] = 1 - e^{-x}$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

Supposons que ces deux variables modélisent deux risques supportés par un assureur. En faisant l'hypothèse d'indépendance, la charge globale de sinistres $X_1 + X_2$ est distribuée selon une loi $\mathbf{G}(2;1)$ alors qu'elle sera distribuée selon une loi exponentielle négative de paramètre 2 lorsque la dépendance est parfaitement positive. Si les espérances de ces deux lois sont égales, il en sera autrement des primes Stop-Loss ou encore des Value-at-Risk.

Aussi la prise en compte de la dépendance stochastique est primordiale dans une approche de contrôle du risque. Notons enfin la part croissante prise par la théorie des copules dans la cadre de la modélisation des risques d'assurance. Cette théorie ne sera pas abordée ici mais le lecteur y trouvera une introduction dans PLANCHET [2004].

2. Mesures de dépendance

L'objet de ce paragraphe est de définir ce qu'est une mesure de dépendance et de présenter les mesures les plus usuelles.

2.1. Définition

Définition 1 : *Une mesure de dépendance est une application qui associe à deux variables aléatoires un réel permettant de quantifier la force de la dépendance qui lie ces deux variables aléatoires.*

Cette définition n'est pas très restrictive mais en pratique, on demandera souvent à une mesure de risque de posséder un certain nombre de « bonnes propriétés », *i. e.* d'être une mesure de concordance définie comme suit.

Définition 2 : *Une mesure de dépendance* δ *est une mesure de concordance si elle possède les propriétés suivantes :*

(P1) $\delta(X_1, X_2) = \delta(X_2, X_1)$ *(symétrie) ;*

(P2) $-1 \leq \delta(X_1, X_2) \leq 1$ *(normalisation) ;*

(P3) $\delta(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow (X_1, X_2) =_{loi} \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right)$ *où* $U \sim \mathbf{U}[0;1]$ *;*

(P4) $\delta(X_1, X_2) = -1 \Leftrightarrow (X_1, X_2) =_{loi} \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)\right)$ *où* $U \sim \mathbf{U}[0;1]$ *;*

(P5) Si f est strictement monotone,

$$\delta(f(X_1), X_2) = \begin{cases} \delta(X_1, X_2) & \text{si } f \uparrow \\ \\ -\delta(X_1, X_2) & \text{si } f \downarrow . \end{cases}$$

Proposition 2 : *Soit* δ *une mesure de dépendance qui a la propriété*

$$\delta(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ indépendantes.}$$

Cette mesure de dépendance n'est pas une mesure de concordance.

Démonstration : Soit $(X_1, X_2) =_{loi} (\cos Z, \sin Z)$ où $Z \sim \mathbf{U}[0;2\pi]$. Puisque $(X_1, X_2) =_{loi} (-X_1, X_2)$, on a : $\delta(X_1, X_2) = \delta(-X_1, X_2)$. Par ailleurs $f : x \mapsto -x$ est strictement décroissante donc $\delta(X_1, X_2) = \delta(-X_1, X_2) = -\delta(X_1, X_2) = 0$ alors que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes. ❑

En revanche, nous verrons que la plupart des mesures de dépendance utilisées en pratique vérifient la propriété

$$X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ indépendantes} \Rightarrow \delta(X_1, X_2) = 0 .$$

2.2. Coefficient de corrélation de Pearson

Le coefficient de corrélation de Pearson, également appelé coefficient de corrélation linéaire, est la première mesure de dépendance à avoir été utilisée. Il repose sur la propriété suivante :

$$\mathbf{Var}[X_1 + X_2] = \mathbf{Var}[X_1] + \mathbf{Var}[X_2] + \mathbf{Cov}[X_1, X_2].$$

La covariance mesure donc le surcroît de variabilité (éventuellement négatif) de la somme de deux variables aléatoires par rapport à la somme de la variabilité de chacune de ces variables aléatoires.

La covariance permet donc d'apprécier le sens de la covariation de deux variables aléatoires. Le coefficient de corrélation de Pearson en est une version normée sans dimension.

Définition 3 : *Soit deux variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *admettant des moments jusqu'à l'ordre 2. Le coefficient de corrélation de Pearson entre* X_1 *et* X_2 *que l'on notera* $r(X_1, X_2)$ *est défini par*

$$r(X_1, X_2) = \frac{\mathbf{Cov}[X_1, X_2]}{\sqrt{\mathbf{Var}[X_1]\mathbf{Var}[X_2]}}.$$

Plus le coefficient de corrélation de Pearson sera grand en valeur absolue, plus la dépendance entre les variables aléatoires sera forte.

Propriété 1 : *Quelles que soient les variables aléatoires X_1 et X_2 admettant des moments jusqu'à l'ordre 2, on a toujours* $-1 \leq r(X_1, X_2) \leq 1$.

Notons que considérant deux variables aléatoires X_1 et X_2 de fonction de répartition F_1 et F_2, il n'est pas toujours possible de trouver une distribution jointe telle que les bornes de l'inégalité soient atteintes.

Proposition 3 : $|r(X_1, X_2)| = 1 \Leftrightarrow X_2 =_{loi} a + bX_1$ *avec* $b \neq 0$. *De plus le signe de r est identique au signe de b.*

Proposition 4 : X_1 *et* X_2 *indépendantes* $\Rightarrow r(X_1, X_2) = 0$. *La réciproque est fausse.*

Démonstration : La démonstration de la première proposition est triviale. Pour la deuxième, considérons $X \sim \mathbf{N}(0;1)$. X est symétrique donc $\mathbf{E}\left[X^3\right] = 0$. Posons $Y = X^2$, $\mathbf{E}[XY] = 0$, donc $r(X, Y) = 0$ alors que X et Y ne sont pas indépendants. ❑

Proposition 5 : *Le coefficient de corrélation linéaire n'est pas une mesure de concordance.*

Démonstration : Il n'a pas les propriétés (P3) et (P4) de la définition d'une mesure de concordance présentée au paragraphe 2.1. Le lecteur pourra se référer à DENUIT et CHARPENTIER [2004] pour le détail de la démonstration. ❑

2.3. Coefficient de corrélation des rangs de Kendall

Le coefficient de corrélation des rangs de Kendall, ou τ de Kendall, utilise les concepts de concordance et de discordance définis comme suit.

Définition 4 : *Les couples* (X_1, X_2) *et* (Y_1, Y_2) *sont en concordance si*
$$(X_1 < Y_1 \text{ et } X_2 < Y_2) \text{ ou } (X_1 > Y_1 \text{ et } X_2 > Y_2).$$

Définition 5 : *Les couples* (X_1, X_2) *et* (Y_1, Y_2) *sont en discordance si*
$$(X_1 < Y_1 \text{ et } X_2 > Y_2) \text{ ou } (X_1 > Y_1 \text{ et } X_2 < Y_2).$$

Définition 6 : *Soit* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *un vecteur aléatoire dont les fonctions de répartition marginales sont continues. Le coefficient de corrélation des rangs de Kendall du vecteur* $\boldsymbol{X}$, *que l'on notera* $\tau(X_1, X_2)$ *est défini par*
$$\tau(X_1, X_2) = \mathbf{Pr}[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] - \mathbf{Pr}[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0],$$
où (Y_1, Y_2) est un couple indépendant de (X_1, X_2) et de même loi.

Le τ de Kendall compare ainsi la probabilité que deux couples indépendants mais de même loi soient en concordance et la probabilité qu'ils soient en discordance. Aussi un τ positif signifiera qu'en probabilité, les couples considérés sont plus souvent en concordance qu'en discordance.

Proposition 6 : *Pour tout couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *de fonctions de répartition marginales continues,* $\tau(X_1, X_2) = 4\,\mathbf{E}[F_{\boldsymbol{X}}(X_1, X_2)] - 1$.

Démonstration : Soit (Y_1, Y_2) est un couple indépendant de (X_1, X_2) et de même loi. Comme $\mathbf{Pr}[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] + \mathbf{Pr}[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0] = 1$, d'après la définition du τ de Kendall, on peut écrire $\tau(X_1, X_2) = 2\,\mathbf{Pr}[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] - 1$. Comme $\mathbf{Pr}[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] = \mathbf{Pr}[X_1 < Y_1, X_2 < Y_2] + \mathbf{Pr}[X_1 > Y_1, X_2 > Y_2]$, on peut écrire que $\mathbf{Pr}[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] = \mathbf{E}[F_X(Y_1, Y_2) + F_Y(X_1, X_2)]$. Par ailleurs, les couples $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ étant indépendants et distribués identiquement, on a $\mathbf{E}[F_X(Y_1, Y_2)] = \mathbf{E}[F_Y(X_1, X_2)]$, ce qui assure le résultat. ❑

Propriété 2 : *Quelles que soient les fonctions f et g toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, on a* $\tau(f(X_1), g(X_2)) = \tau(X_1, X_2)$.

Proposition 7 : X_1 *et* X_2 *indépendantes* $\Rightarrow \tau(X_1, X_2) = 0$.

Démonstration : Si X_1 *et* X_2 sont indépendantes, $F_X(x_1, x_2) = \mathbf{Pr}[X_1 \le x_1]\,\mathbf{Pr}[X_2 \le x_2]$ donc $\mathbf{E}[F_{\boldsymbol{X}}(X_1, X_2)] = 1/4$ ce qui assure le résultat grâce à l'écriture de la proposition n°6. ❑

Proposition 8 : *Le* τ *de Kendall est une mesure de concordance.*

2.4. Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, ou ρ de Spearman, fait également appel aux notions de concordance et de discordance en comparant le couple dont on veut mesurer la dépendance à une version indépendante de ce couple.

Définition 7 : *Considérons le couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *de fonctions de répartition marginales continues* F_1 *et* F_2, *le coefficient de corrélation des rangs de Spearman de ce couple, noté* $\rho(X_1, X_2)$ *est défini par*

$$\rho(X_1, X_2) = 3\left\{\mathbf{Pr}\left[\left(X_1 - X_1^{\perp}\right)\left(X_2 - X_2^{\perp}\right) > 0\right] - \mathbf{Pr}\left[\left(X_1 - X_1^{\perp}\right)\left(X_2 - X_2^{\perp}\right) < 0\right]\right\},$$

où le couple $\boldsymbol{X}^{\perp} = \left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ *a les mêmes marginales que* $\boldsymbol{X}$ *mais est indépendant.*

Proposition 9 : *Pour tout couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *de fonctions de répartition marginales continues,* $\rho(X_1, X_2) = r(F_1(X_1), F_2(X_2))$.

Le ρ de Spearman ne dépend donc pas des marginales F_1 et F_2, puisque $F_1(X_1)$ et $F_2(X_2)$ sont des variables aléatoires de loi $\mathbf{U}[0;1]$.

Propriété 3 : *Quelles que soient les fonctions f et g toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, on a* $\rho(f(X_1), g(X_2)) = \rho(X_1, X_2)$.

Proposition 10 : *Le* ρ *de Spearman est une mesure de concordance.*

2.5. Liens entre le τ de Kendall et le ρ de Spearman

Plusieurs relations lient les deux mesures de concordance. Le lecteur trouvera les démonstrations des deux premières dans DENUIT et CHARPENTIER [2004]. La troisième se déduit des deux premières. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on omettra de préciser à quel couple s'appliquent les mesures de dépendance.

Proposition 11 : *Pour tout couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *de fonctions de répartition marginales continues, on a* $-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1$.

Proposition 12 : *Pour tout couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *de fonctions de répartition marginales continues, on a* $-1 + 2\left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2 \leq \rho \leq 1 - 2\left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2$.

Proposition 13 : *Pour tout couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *de fonctions de répartition marginales continues, on a*

$$\frac{-1+3\tau}{2} \leq \rho \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2} \quad si \ \tau \geq 0,$$

et

$$\frac{-1+2\tau+\tau^2}{2} \leq \rho \leq \frac{1+3\tau}{2} \quad si \ \tau \leq 0.$$

3. Structures de dépendance

Si deux variables aléatoires n'ont qu'une manière d'être indépendantes, la dépendance peut quant à elle revêtir de nombreuses formes. Ce sont ces formes que tentent de capter les structures de dépendance. L'objet de ce paragraphe est de présenter trois types de structure de dépendance qui seront étudiées dans des espaces de Fréchet.

3.1. Espaces de Fréchet

Définition 8 : *La classe de Fréchet associée aux fonctions de répartition* F_1 *et* F_2, *notée* $\mathbf{F}(F_1, F_2)$, *est constituée de l'ensemble des distributions de probabilités des couples* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *dont les marginales sont respectivement* F_1 *et* F_2.

Les classes de Fréchet constituent un cadre idéal pour analyser la dépendance puisqu'elles ne regroupent que des lois de probabilité de couples qui ne diffèrent entre elles que par leur structure de dépendance et non par leurs marginales.

Définition 9 : *La fonction de répartition W définie par*

$$W(x_1, x_2) = \mathbf{min}\{F_1(x_1), F_2(x_2)\},$$

est appelée borne supérieure de Fréchet de la classe $\mathbf{F}(F_1, F_2)$.

Définition 10 : *La fonction de répartition M définie par*

$$M(x_1, x_2) = \mathbf{max}\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1{,}0\},$$

est appelée borne inférieure de Fréchet de la classe $\mathbf{F}(F_1, F_2)$.

Proposition 14 : *Pour tout* $F_X \in \mathbf{F}(F_1, F_2)$, $M(x) \leq F_X(x) \leq W(x)$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^2$.

Cette proposition traduit le fait que, pour tout couple $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$, la classe de Fréchet correspondante est bornée par les fonctions de répartition *W* et *M*.

Dans la suite, on parlera parfois de couple $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ appartenant à la classe de Fréchet $\mathbf{F}(F_1, F_2)$, il s'agit d'un abus de langage car une classe de Fréchet est composée de fonctions de répartitions et non de vecteurs aléatoires : c'est en fait la fonction de répartition F_x du couple $\boldsymbol{X}$ qui appartient à la classe de Fréchet.

3.2. Comparaison supermodulaire

La comparaison supermodulaire permet de comparer la force de la dépendance existant entre les composantes de couples de risques. Cette comparaison utilise les fonctions supermodulaires, également appelée fonctions superadditives.

3.2.1. Fonction supermodulaire

Définition 11 : *Une fonction* $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est dite supermodulaire lorsque pour tous* $\varepsilon > 0, \delta > 0, x \in \mathbf{R}^2$, *l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$g(x_1 + \varepsilon, x_2 + \delta) + g(x_1, x_2) \geq g(x_1 + \varepsilon, x_2) + g(x_1, x_2 + \delta).$$

En particulier lorsque *g* est dérivable par rapport à chacun de ces arguments en un point *x*, comme on a :

$$g(x_1 + \varepsilon, x_2 + \delta) - g(x_1, x_2 + \delta) \geq g(x_1 + \varepsilon, x_2) - g(x_1, x_2),$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2 + \delta) \geq \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2).$$

Puis lorsque $\delta \to 0$, on a enfin

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g(x_1, x_2) \geq 0.$$

Ce qui nous conduit naturellement à la caractérisation suivante pour les fonctions dérivables par rapport à chaque argument.

Proposition 15 : *Une fonction* $g \in C^{1,1}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ *est supermodulaire si, et seulement si,* $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^2$.

Cette caractérisation en amène une autre.

Proposition 16 : *Soit* $g \in C^{1,1}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ *une fonction supermodulaire. Pour toutes fonctions* f_1 *et* f_2 *toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, la fonction* $\Psi : x \mapsto g(f_1(x_1), f_2(x_2))$ *est également supermodulaire.*

3.2.2. Ordre supermodulaire

Définition 12 : *Le couple* $\boldsymbol{X}$ *est dit inférieur au sens supermodulaire au couple* $\boldsymbol{Y}$*, et l'on note* $\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y}$*, lorsque pour toute fonction supermodulaire g telle que* $\mathbf{E}[g(\boldsymbol{X})]$ *et* $\mathbf{E}[g(\boldsymbol{Y})]$ *existent, on a l'inégalité* $\mathbf{E}[g(\boldsymbol{X})] \leq \mathbf{E}[g(\boldsymbol{Y})]$.

Lorsque $\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y}$, on pourra dire que l'intensité de la dépendance qui lie les variables aléatoires X_1 et X_2 est moins forte que celle qui lie les risques Y_1 et Y_2.

Proposition 17 : *Pour tous couples* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *dont les fonctions de répartition appartiennent à* $\mathbf{F}(F_1, F_2)$*, quelles que soient les fonctions* f_1 *et* f_2 *croissantes, on a :*

$$\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow (f_1(X_1), f_2(X_2)) \prec_{sm} (f_1(Y_1), f_2(Y_2)).$$

La proposition suivante caractérise le fait que pour pouvoir être comparées les fonctions de répartition de deux couples doivent faire partie de la même classe de Fréchet.

Proposition 18 : $\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow X_i =_{loi} Y_i$ *pour* $i = 1,2 \Leftrightarrow F_{\boldsymbol{X}}, F_{\boldsymbol{Y}} \in \mathbf{F}(F_1, F_2)$.

Démonstration : Ce résultat se démontre à partir de la proposition n°17, en utilisant les fonctions supermodulaires $g_1 : z \mapsto \mathbf{1}_{\{z > x\}}$ et $g_2 : z \mapsto \mathbf{1}_{\{z \leq x\}}$. ❑

L'utilisation de ces mêmes fonctions g_1 et g_2 permet de démontrer la caractérisation suivante de l'ordre supermodulaire.

Proposition 19 : *Soient* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *deux couples dont les fonctions de répartition appartiennent à une même classe de Fréchet. On a* $\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow F_{\boldsymbol{X}}(x) \leq F_{\boldsymbol{Y}}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^2$.

Le résultat suivant traduit l'intuition selon laquelle la somme de deux risques est d'autant plus dangereuse que les risques sont dépendants.

Proposition 20 : *Pour toutes* $F_{\boldsymbol{X}}, F_{\boldsymbol{Y}} \in \mathbf{F}(F_1, F_2)$*, on a :* $\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow X_1 + X_2 \prec_{cx} Y_1 + Y_2$.

Démonstration : Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux couples tels que $F_{\boldsymbol{X}}, F_{\boldsymbol{Y}} \in \mathbf{F}(F_1, F_2)$. D'après la proposition n°19, on a :

$$\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \forall t \geq 0, \forall s \leq t, F_{\boldsymbol{X}}(s, t-s) \leq F_{\boldsymbol{Y}}(s, t-s).$$

En intégrant par rapport à s, il vient :

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t F_{\boldsymbol{X}}(s, t-s)ds \leq \int_0^t F_{\boldsymbol{Y}}(s, t-s)ds \Leftrightarrow \int_0^t \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_1 \leq s, X_2 \leq t-s\}}\right]ds \leq \int_0^t \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{Y_1 \leq s, Y_2 \leq t-s\}}\right]ds.$$

En remarquant que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{x_1 \leq s, x_2 \leq t-s\}} ds = (t - x_1 - x_2)^+$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient l'implication :

$$\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \forall t \geq 0, \mathbf{E}\left[(t - X_1 - X_2)^+\right] \leq \mathbf{E}\left[(t - Y_1 - Y_2)^+\right].$$

Par ailleurs, comme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[(X_1 + X_2 - t)^+\right] - \mathbf{E}\left[(t - X_1 - X_2)^+\right] &= t + \mathbf{E}[X_1 + X_2] \\
&= t + \mathbf{E}[Y_1 + Y_2] \\
&= \mathbf{E}\left[(Y_1 + Y_2 - t)^+\right] - \mathbf{E}\left[(t - Y_1 - Y_2)^+\right],
\end{aligned}$$

on a

$$\mathbf{E}\left[(X_1 + X_2 - t)^+\right] \leq \mathbf{E}\left[(Y_1 + Y_2 - t)^+\right] \Leftrightarrow \mathbf{E}\left[(t - X_1 - X_2)^+\right] \leq \mathbf{E}\left[(t - Y_1 - Y_2)^+\right],$$

et donc

$$\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow X_1 + X_2 \prec_{cx} Y_1 + Y_2. \ \square$$

Enfin la proposition suivante relie la comparaison supermodulaire avec les mesures de dépendance étudiées dans le paragraphe 2.

Proposition 21 : *Quels que soient les couples* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$, *on a* $\boldsymbol{X} \prec_{sm} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \begin{cases} r(\boldsymbol{X}) \leq r(\boldsymbol{Y}) \\ \tau(\boldsymbol{X}) \leq \tau(\boldsymbol{Y}) \\ \rho(\boldsymbol{X}) \leq \rho(\boldsymbol{Y}) \end{cases}.$

3.3. Comonotonie et antimonotonie

Les concepts de comonotonie et d'antimonotonie sont équivalents à celui de dépendance parfaite.

Définition 13 : *Le couple* $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ *est comonotone s'il existe des fonctions croissantes* g_1 *et* g_2 *telles que* $\boldsymbol{X}=_{loi}(g_1(Z),g_2(Z))$.

Définition 14 : *Le couple* $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ *est antimonotone s'il existe une fonction croissante* g_1 *et une fonction décroissante* g_2 *telles que* $\boldsymbol{X}=_{loi}(g_1(Z),g_2(Z))$.

Ces notions correspondent à la plus forte dépendance possible, ce qui se traduit, quand on se place dans l'espace de Fréchet correspondant, à l'équivalence avec les bornes de la classe de Fréchet.

Proposition 22 : *(1) Le couple* $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ *est comonotone si, et seulement si, il admet W comme fonction de répartition.*

(2) Le couple $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ *est antimonotone si, et seulement si, il admet M comme fonction de répartition.*

Rappelons (*cf.* notes de cours sur les mesures de risque) que la VaR de la somme de deux risques comonotones est égale à la somme des VaR de chacun de ces risques pour autant que les fonctions de répartitions marginales de ces deux variables aléatoires soient continues.

3.4. Dépendance positive par quadrant

Le concept de dépendance positive par quadrant repose sur la comparaison de la fonction de répartition d'un couple par rapport à celle d'un couple de mêmes marginales mais dont les composantes sont indépendantes.

Définition 15 : *Le couple* $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ *dont la fonction de répartition appartient à la classe* $\mathbf{F}(F_1,F_2)$ *est dépendant positivement par quadrant (DPQ) si pour tout* $x\in\mathbf{R}^2$*, on a :* $\overline{F}_X(x)\geq\overline{F}_1(x_1)\overline{F}_2(x_2)$.

Le nom de cette structure de dépendance provient du fait que la probabilité que le vecteur $\boldsymbol{X}$ soit dans le quart de quadrant supérieur droit au point (x_1,x_2) est supérieure à celle que le couple $\boldsymbol{X}^{\perp}$, version indépendante de $\boldsymbol{X}$, y soit. Remarquons qu'un couple indépendant répond à la définition de couple DPQ.

Les probabilités conditionnelles nous offrent une caractérisation de la dépendance positive par quadrant.

Propriété 4 : *Le couple* $\boldsymbol{X}$ *est DPQ* $\Leftrightarrow\mathbf{Pr}[X_2>x_2\,|\,X_1>x_1]\geq\mathbf{Pr}[X_2>x_2]$ *pour tout* $x\in\mathbf{R}^2$.

Proposition 23 : *Le couple* $\boldsymbol{X}$ *est DPQ* $\Leftrightarrow\boldsymbol{X}^{\perp}\prec_{sm}\boldsymbol{X}$.

De cette proposition et des propriétés de l'ordre supermodulaire découle une caractérisation intéressante des couples indépendants.

Proposition 24 : *Pour tout couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *dépendant positivement par quadrant, on a l'équivalence suivante :*

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ indépendants} \Leftrightarrow r(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow \tau(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow \rho(X_1, X_2) = 0 .$$

3.5. Croissance conditionnelle

Définition 16 : *Le couple* $\boldsymbol{X}$ *est dit conditionnellement croissant lorsque*

(1) *quels que soient* $x_1 \leq y_1$, $\mathbf{Pr}\left[X_2 > t \middle| X_1 = x_1\right] \leq \mathbf{Pr}\left[X_2 > t \middle| X_1 = y_1\right]$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$,

(2) *quels que soient* $x_2 \leq y_2$, $\mathbf{Pr}\left[X_1 > t \middle| X_2 = x_2\right] \leq \mathbf{Pr}\left[X_1 > t \middle| X_2 = y_2\right]$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Cette notion de croissance conditionnelle peut également s'exprimer à l'aide de l'ordre stochastique.

Propriété 5 : $\boldsymbol{X}$ *est conditionnellement croissant* $\Leftrightarrow \begin{cases} [X_1 \mid X_2 = x_2] \prec_{st} [X_1 \mid X_2 = y_2] \\ [X_2 \mid X_1 = x_1] \prec_{st} [X_2 \mid X_1 = y_1] \end{cases}$

pour tous $x_1 \leq y_1$ *et* $x_2 \leq y_2$.

Cette notion de dépendance est plus forte que celle de dépendance positive par quadrant.

Proposition 25 : $\boldsymbol{X}$ *est conditionnellement croissant* $\Rightarrow \boldsymbol{X}$ *est DPQ.*

Bibliographie

DENUIT M., CHARPENTIER A. [2004] *Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome 1 : principes fondamentaux de théorie du risque*. Economica.

PARTRAT CH., BESSON J.L. [2004] *Assurance non-vie. Modélisation, simulation*. Economica.

PLANCHET F. [2004] *Introduction à la théorie des copules*. Notes de cours, ISFA.

SAPORTA G. [1990] *Probabilités, analyse des données et statistiques*. Technip.

Exercices

Exercice 1 : Soit deux variables aléatoires X_1 et X_2 à valeurs sur $\mathbf{R}_+$. Soit r le coefficient de corrélation de Pearson. Montrez que $r(X_1, X_2) > -1$.

Exercice 2 : Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires de loi de Pareto $Par(a, b_i)$ de fonction de répartition $F_i(x) = 1 - \left(\dfrac{b_i}{x + b_i}\right)^a$ pour $x > 0,\ a > 0,\ b_i > 0$. Montrez que si ces variables aléatoires sont comonotones, leur somme est distribuée selon une loi de Pareto dont les paramètres devront être déterminés.

Exercice 3 : Considérons le couple $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ où $X_i = L_i + M$ pour $i = 1,2$. M représente un risque qui affecte simultanément X_1 et X_2. Supposons que X_1, X_2 et M soient indépendantes et distribuées selon des lois de Poisson de paramètres λ_1, λ_2 et μ.

(1) Déterminez les lois marginales du couple $\boldsymbol{X}$.
(2) Explicitez $\mathbf{Pr}[X_1 = n_1, X_2 = n_2]$en fonction de λ_1, λ_2 et μ.
(3) Explicitez $\mathbf{Pr}[X_1 = n_1 \mid X_2 = n_2]$.
(4) Explicitez $\mathbf{E}[X_1 \mid X_2 = n_2]$.

Exercice 4 : Montrez que le τ de Kendall et le ρ de Spearman sont des mesures de concordance.

Exercice 5 : Montrez que pour toute $F_X \in \mathbf{F}(F_1, F_2)$, on a $M(\mathbf{x}) \leq F_X(\mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x})$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$.