

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{]t;\infty[}(T_x)$$

[ressources-actuarielles.net](http://ressources-actuarielles.net)



# Solvabilité et valeurs extrêmes

## Enjeux en termes de modélisation

Version 2.7

Décembre 2023

**Frédéric PLANCHET**  
frederic@planchet.net

Le SCR dans un modèle interne c'est :

- ✓ le quantile à 99,5 % ;
- ✓ d'une distribution non directement observable (montant du capital nécessaire pour équilibrer le bilan en fin d'exercice).

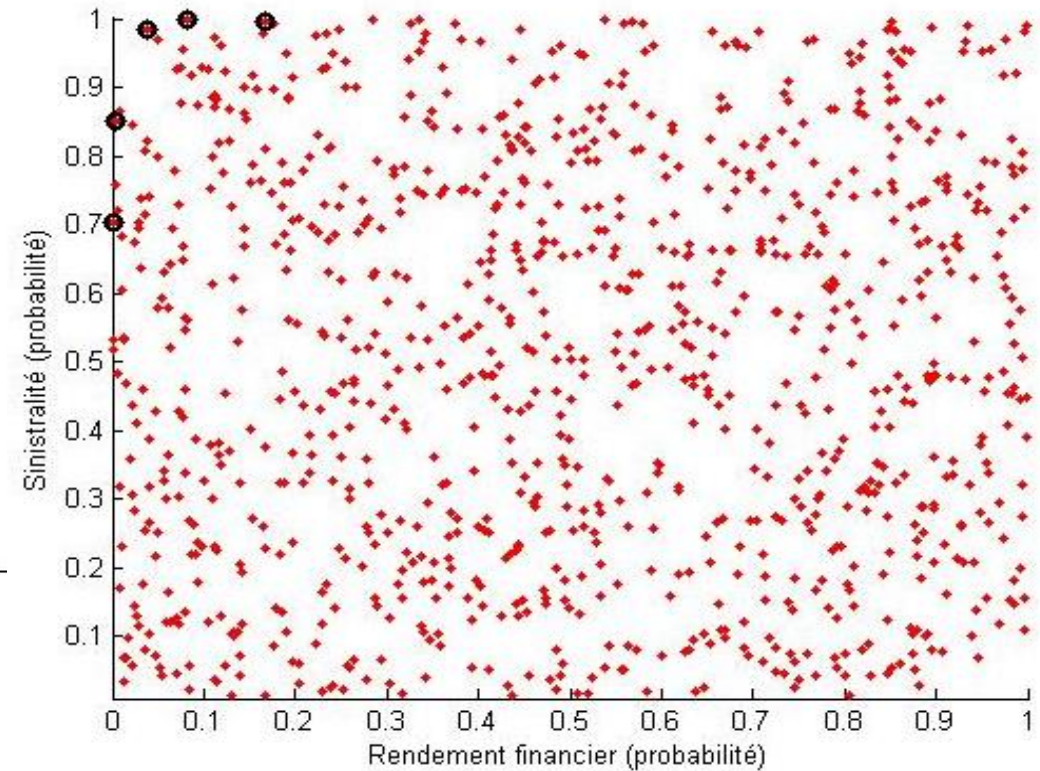
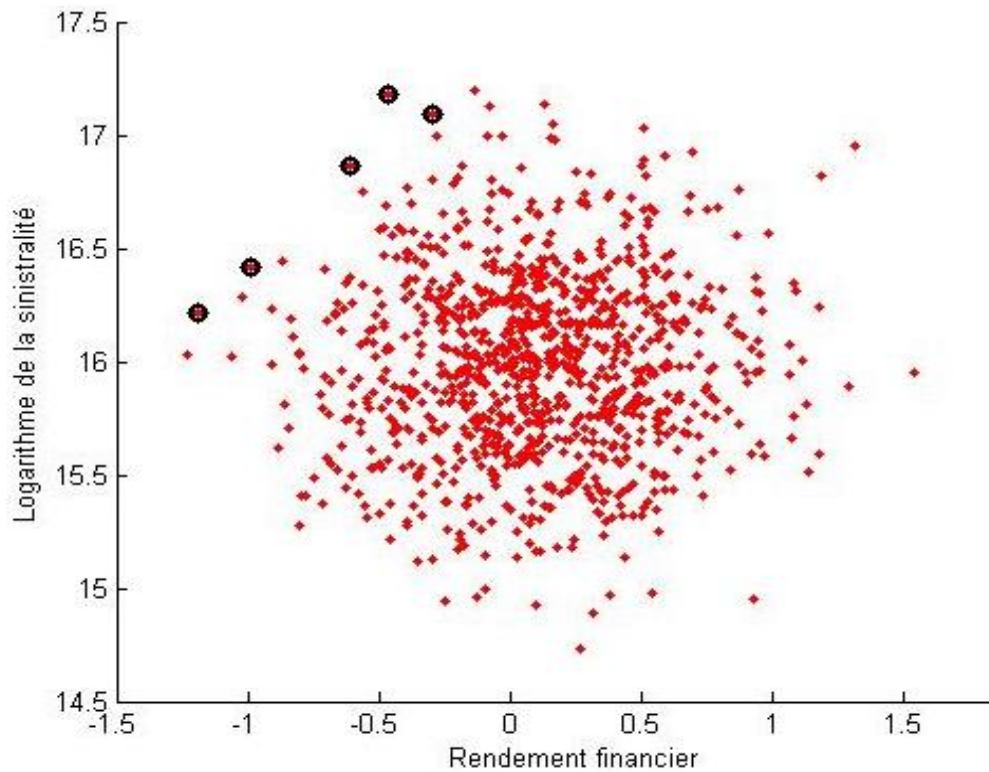
Recours à un modèle interne, *ie* à la modélisation :

- ✓ de l'actif ;
- ✓ du passif ;
- ✓ des interactions actif / passif.

Il est donc nécessaire de modéliser la loi du « surplus ».

# Contexte

La modélisation des événements « rares » est déterminante pour la détermination du SCR :



# Un exemple simple

Supposons qu'au bout d'une année, la société doit détenir un actif assez important pour venir en contrepartie d'un passif qui vaudra, de manière certaine, 100.

L'actif est suppose fournir un rendement aléatoire dans le cadre d'un modèle de Merton (voir [ce support](#) pour une présentation de ce modèle).

L'assureur dispose en 0 de ce même montant en provisions, il s'agit donc de déterminer le montant du capital cible  $\gamma$  tel que :

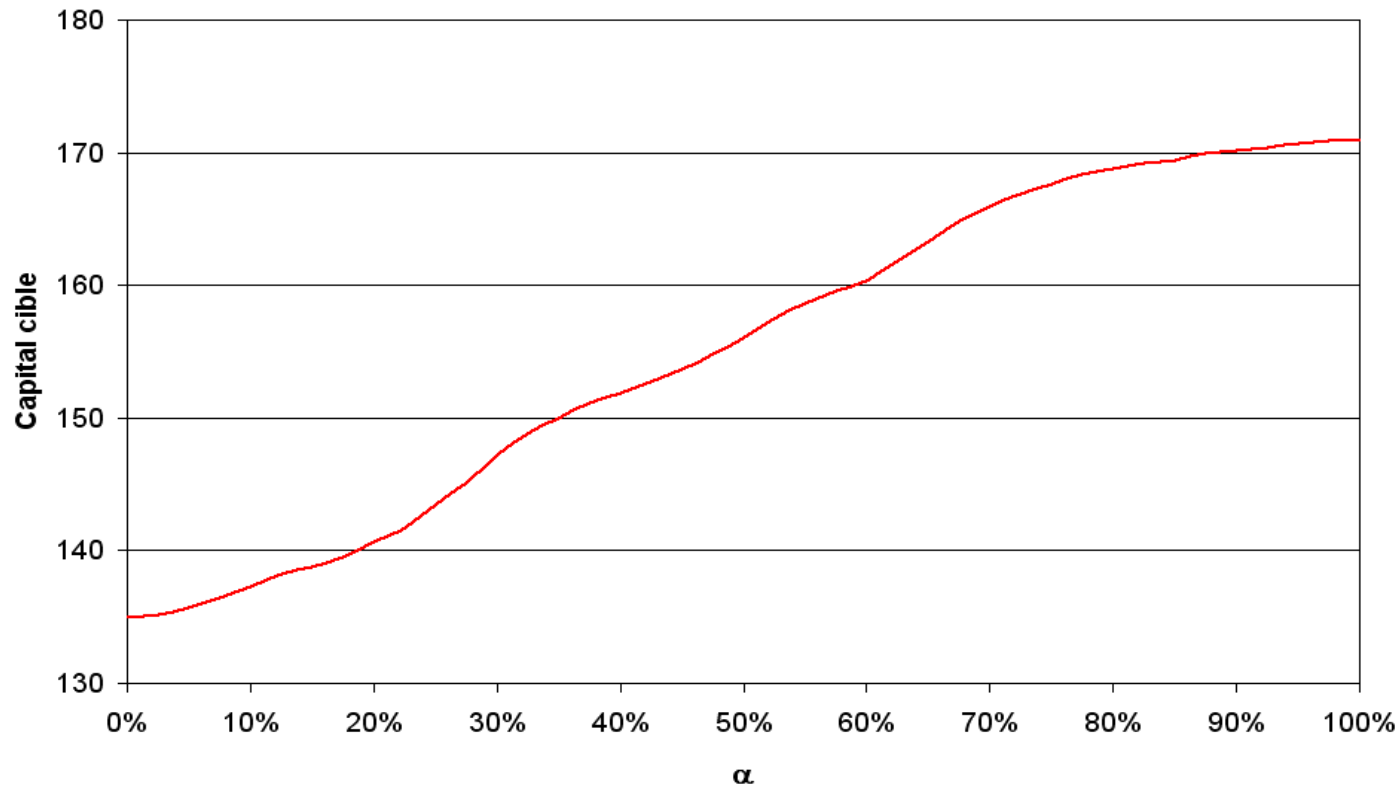
$$P \left[ (100 + \gamma) \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma B_1 + \sum_{k=1}^{N_1} U_k \right\} \leq 100 \right] \leq 0,01$$

# Un exemple simple

$$\mu = \ln(1,08)$$

$$\lambda = 1,5$$

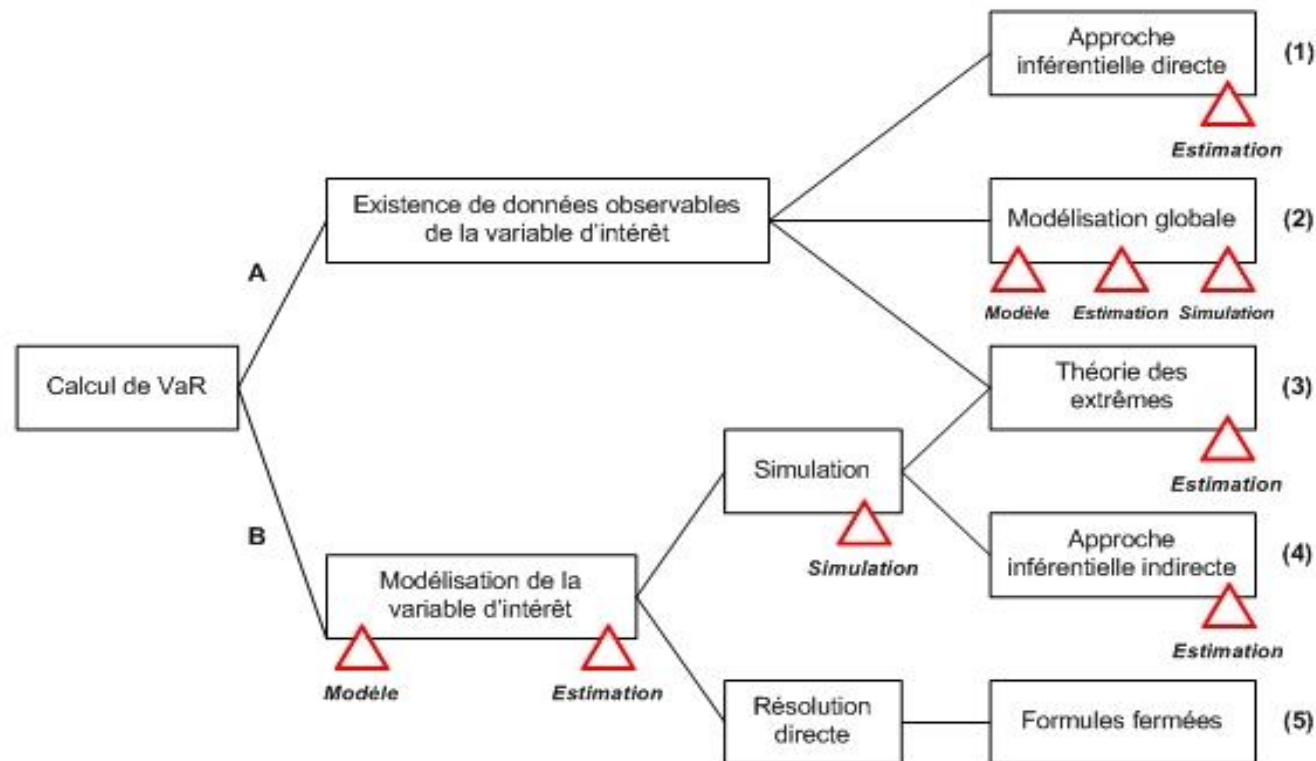
$$\sigma^2 + \lambda \sigma_u^2 = 0,16$$



$$\alpha = \frac{\sigma_U \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda \sigma_U^2}}$$

# Risques associés au modèle interne

Les sources d'erreur potentielles doivent être contrôlées car un modèle actif / passif est complexe :



Le modèle doit être aussi « robuste » que possible.

# Notion de robustesse

La robustesse est la propriété d'un estimateur de rester convergent même si le modèle est mal spécifié.

Exemple : estimation de l'espérance dans un modèle log-normal

On a :  $\mu = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$  ce qui conduit à proposer  $\hat{\mu} = \exp\left(\hat{m} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)$

avec  $\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$        $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(X_i) - \hat{m})^2$

# Notion de robustesse

Si la distribution sous-jacente est en fait exponentielle de paramètre 1, alors  $\hat{\mu}$  converge vers

$$\mathbf{exp}\left(m^* + \frac{\sigma^{*2}}{2}\right) = \mathbf{exp}\left(-0,577 + \frac{\pi^2}{12}\right) \approx 1,28$$

alors que la vraie valeur de l'espérance est 1, car la distribution de  $\ln(X_i)$  est une loi de Gumbel :

$$P(\ln(X_i) > x) = P(X_i > e^x) = \mathbf{exp}(-e^x)$$

L'espérance empirique est robuste.



# Approche paramétrique

On fait l'hypothèse que la loi du phénomène sous-jacent appartient à une famille paramétrique (normale, log-normale, Pareto, Benktander, etc.).

L'estimation d'un quantile d'ordre quelconque peut alors être envisagée de la manière suivante :

- ✓ estimation des paramètres (par maximum de vraisemblance ou autre méthode) ;
- ✓ inversion de la fonction de répartition ;
- ✓ Estimation de la VaR par  $V\hat{a}R(p) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(p)$  ;
- ✓ recherche d'un intervalle de confiance.

## Exemple : loi log-normale

De l'expression :

$$P \left[ \frac{\ln(X) - m}{\sigma} \geq \frac{VaR_p(X) - m}{\sigma} \right] = 1 - p$$

On déduit une expression explicite de la fonction quantile :

$$VaR_p(X) = F^{-1}(p) = \mathbf{exp} \left( m + \sigma \phi^{-1}(p) \right)$$

Puis un estimateur naturel de la  $VaR$  :

$$\hat{VaR}_p(X) = \mathbf{exp} \left( \hat{m} + \hat{\sigma} \phi^{-1}(p) \right)$$

## Exemple : loi log-normale

La sensibilité de l'estimation aux paramètres peut être approchée par :

$$\frac{1}{VaR_p(X)} \frac{\partial}{\partial m} VaR_p(X) = 1 \quad \frac{1}{VaR_p(X)} \frac{\partial}{\partial \sigma} VaR_p(X) = \phi^{-1}(p)$$

On en déduit qu'une erreur de mesure de 1% sur l'espérance conduit à une erreur de mesure de 1% sur la valeur à risque ; mais parallèlement une erreur de mesure de 1% sur la volatilité induit une erreur de  $\phi^{-1}(p)$  sur la valeur à risque. Au seuil  $p=99,5\%$ , on a

$$\phi^{-1}(99,5\%) = 2,58$$

et donc une erreur de 1% sur la volatilité conduit à une erreur 2,6 fois plus grande sur la VaR.

Le biais est ici déterminé avec Jensen :

$$E\left(\hat{VaR}_p(X)\right) \geq \mathbf{exp}\left(E(\hat{m}) + E(\hat{\sigma})\phi^{-1}(p)\right) \approx VaR_p(X)$$

# Un modèle de mélange

Que se passe-t-il si le modèle sous-jacent est en fait :

$$S_X(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \leq m \\ \left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha} S_0(m) & x > m \end{cases}$$

C'est à dire un modèle « presque » log-normal avec une queue Pareto :

$$P(X > x | X > m) = \frac{P(X > x)}{P(X > m)} = \frac{S_X(x)}{S_X(m)} = \left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha}$$

Fonction quantile :  $F^{-1}(p) = x_p = m \times \left(\frac{1-p}{S_0(m)}\right)^{-1/\alpha}$

# Un modèle de mélange

Avec un modèle de référence log-normal on est amené à comparer les SCR suivants:

$$x_p^{MEL} = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p_0)\right) \times \left(\frac{1-p}{1-p_0}\right)^{-1/\alpha} \quad x_p^{LN} = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p)\right)$$

On sera confronté à une situation de risque de modèle dans le cas où malgré une valeur du rapport entre les 2 quantiles sensiblement différente de 1, un échantillon issu du modèle mélangé serait difficilement discernable d'un échantillon log-normal.

# Un modèle de mélange

Estimation des paramètres par maximum de vraisemblance :

$$l(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma, m, \alpha) = cste - (k-1) \ln(\sigma) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\ln(x_{(i)}) - \mu}{\sigma} \right)^2$$

$$+ (n-k+1) \ln(\alpha) + \alpha (n-k+1) \ln(m) - \alpha \sum_{i=k}^n \ln(x_{(i)}) + (n-k+1) S_0(m)$$

avec  $k = \min \{i; x_{(i)} \geq m\}$

$$\max_{(\mu, \sigma, m, \alpha)} l(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma, m, \alpha) = \max_m \max_{(\mu, \sigma, \alpha)} l(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma, m, \alpha)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \ln x_{(i)}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (\ln x_{(i)} - \hat{\mu})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n-k+1}{\sum_{i=k}^n \ln \left( \frac{x_{(i)}}{m} \right)}$$

# Un modèle de mélange

On simule un 1 000-échantillon de la loi mélangée et on regarde comment l'ajuster.

- ✓ tirage d'une valeur  $u$  distribuée uniformément sur  $[0,1]$ ;
- ✓ si ,  $u > p_0$  tirage de  $x$  dans la loi de Pareto de paramètres  $(m, \alpha)$ ;
- ✓ sinon , tirage de  $x$  dans la loi :

$$S(x) = \frac{S_0(x) - S_0(m)}{1 - S_0(m)}$$

Ce dernier tirage peut être effectué avec une méthode de rejet : on effectue un tirage dans la loi log-normale, et on le rejette si la valeur obtenue est supérieure à  $m$ .

## Application

# Identification des extrêmes

On remarque que si on fixe une probabilité  $p$ , alors la probabilité que le quantile d'ordre  $p$  de la distribution log-normale soit dépassé dans la distribution mélangée est :

$$\pi(p) = 1 - \left( \frac{\exp(\mu + \sigma\phi^{-1}(p))}{m} \right)^{-\alpha} S_0(m)$$

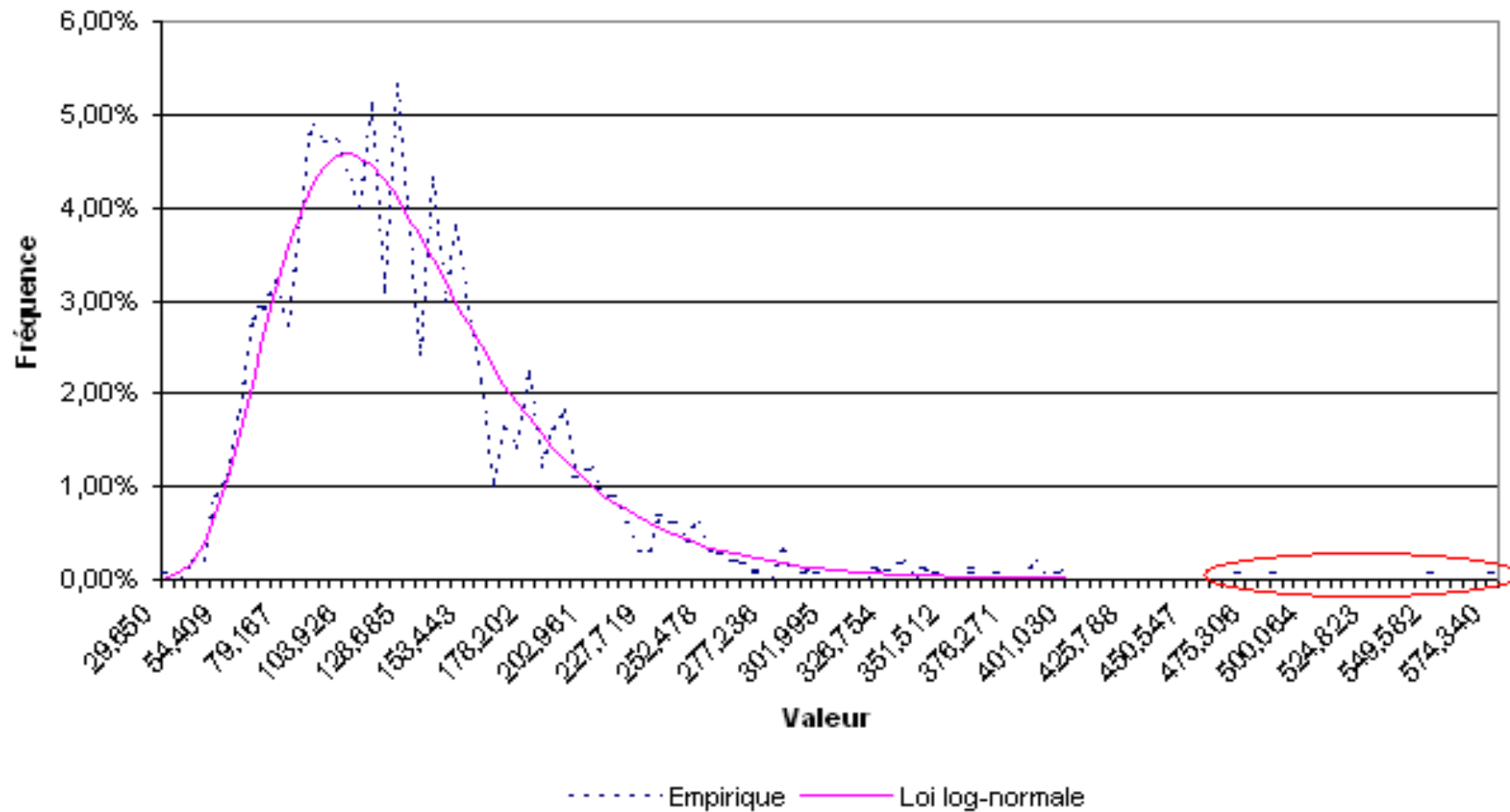
en conséquence, sur un échantillon log-normal de 1 000 valeurs, on trouvera en moyenne deux valeurs qui dépassent le quantile de niveau 99,8 % , alors que ce seront 5 valeurs qui dépasseront ce seuil si la distribution sous-jacente est la distribution mélangée. Comme le nombre de valeurs dépassant un seuil  $u$  est approximativement gaussien on dispose d'un moyen de tester la cohérence du nombre de « grandes valeurs » :

$$P(N_u \geq k) \approx 1 - \phi \left( \frac{k - nS(u)}{\sqrt{nS(u)(1 - S(u))}} \right)$$



# Identification des extrêmes

Illustration :



# Intervalles de confiance

On a donc estimé la  $VaR$  par  $V\hat{a}R(\alpha) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha)$  et on s'intéresse à la précision de l'estimateur ainsi obtenu.

On se place dans le cas particulier où le paramètre est estimé par l'estimateur du maximum de vraisemblance ; on déduit des propriétés générales de l'estimateur du maximum de vraisemblance que  $V\hat{a}R(\alpha)$  est alors l'estimateur du maximum de vraisemblance de la  $VaR$ . Il est donc asymptotiquement sans biais et gaussien. En obtenant une estimation de sa variance asymptotique on pourra donc construire un intervalle de confiance.

La loi de la statistique  $V\hat{a}R(\alpha)$  est toutefois difficile à déterminer, et on est conduit à se tourner vers des techniques de simulation, et tout particulièrement la méthode *bootstrap*.

# Intervalles de confiance

Le principe de la méthode consiste à remarquer que pour un échantillon de taille suffisante, la fonction de répartition de la loi sous-jacente peut être approchée par la fonction de répartition empirique. Évaluer des statistiques par simulation se ramène alors à générer des échantillons à l'aide de la distribution empirique. Hors un tirage dans la distribution empirique s'obtient simplement par un tirage avec remise des  $n$  valeurs dans l'échantillon initial. On obtient ainsi au plus  $n^n$  échantillons bootstrapés à partir desquels on va calculer les estimateurs empiriques des statistiques d'intérêt.

Dans le cas de l'estimation d'une  $VaR$ , l'échantillon initial est constitué par les  $n$  observations de  $X$  utilisées pour estimer les paramètres du modèle. La statistique d'intérêt est :

$$\hat{VaR}(\alpha) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha)$$

# Intervalles de confiance

On peut procéder de deux manières pour construire l'intervalle de confiance recherché :

- ✓ estimation de la variance bootstrapée de  $V\hat{a}R(\alpha)$ , que l'on utilise ensuite ensuite avec l'hypothèse de normalité asymptotique ;
- ✓ estimation directe d'un intervalle de confiance bootstrapé via la méthode BCa (*Bias corrected and accelerated*).

On rappelle ci-après le principe de la méthode BCa. On notera  $B$  la taille de l'échantillon bootstrap.

# Intervalles de confiance

La méthode consiste à déterminer les bornes de l'intervalle de confiance de sorte que :

$$P\left[b_1 \leq VaR_\alpha(X) \leq b_2\right] = 1 - a$$

en prenant pour  $b_i$  la valeur d'indice  $B \times \beta_i$  de l'échantillon des  $V\hat{a}R(\alpha)$  bootstrapé.

On a :

$$\beta_1 = \phi \left( z_0 + \frac{z_0 + u_{\frac{a}{2}}}{1 - \gamma \left( z_0 + u_{\frac{a}{2}} \right)} \right) \qquad \beta_2 = \phi \left( z_0 + \frac{z_0 + u_{1 - \frac{a}{2}}}{1 - \gamma \left( z_0 + u_{1 - \frac{a}{2}} \right)} \right)$$

# Intervalles de confiance

Les notations suivantes ont été utilisées :

- ✓  $u_c$  le quantile d'ordre  $c$  de la loi normale centrée réduite ;
- ✓  $z_0 = \phi^{-1}(k)$  avec  $k$  la proportion des échantillons bootstrapés pour lesquels la  $VaR$  obtenue est inférieure à  $V\hat{a}R(\alpha)$

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n (V\tilde{a}R(\alpha) - V\tilde{a}R_i(\alpha))^3}{6 \left[ \sum_{i=1}^n (V\tilde{a}R(\alpha) - V\tilde{a}R_i(\alpha))^2 \right]^{3/2}}$$

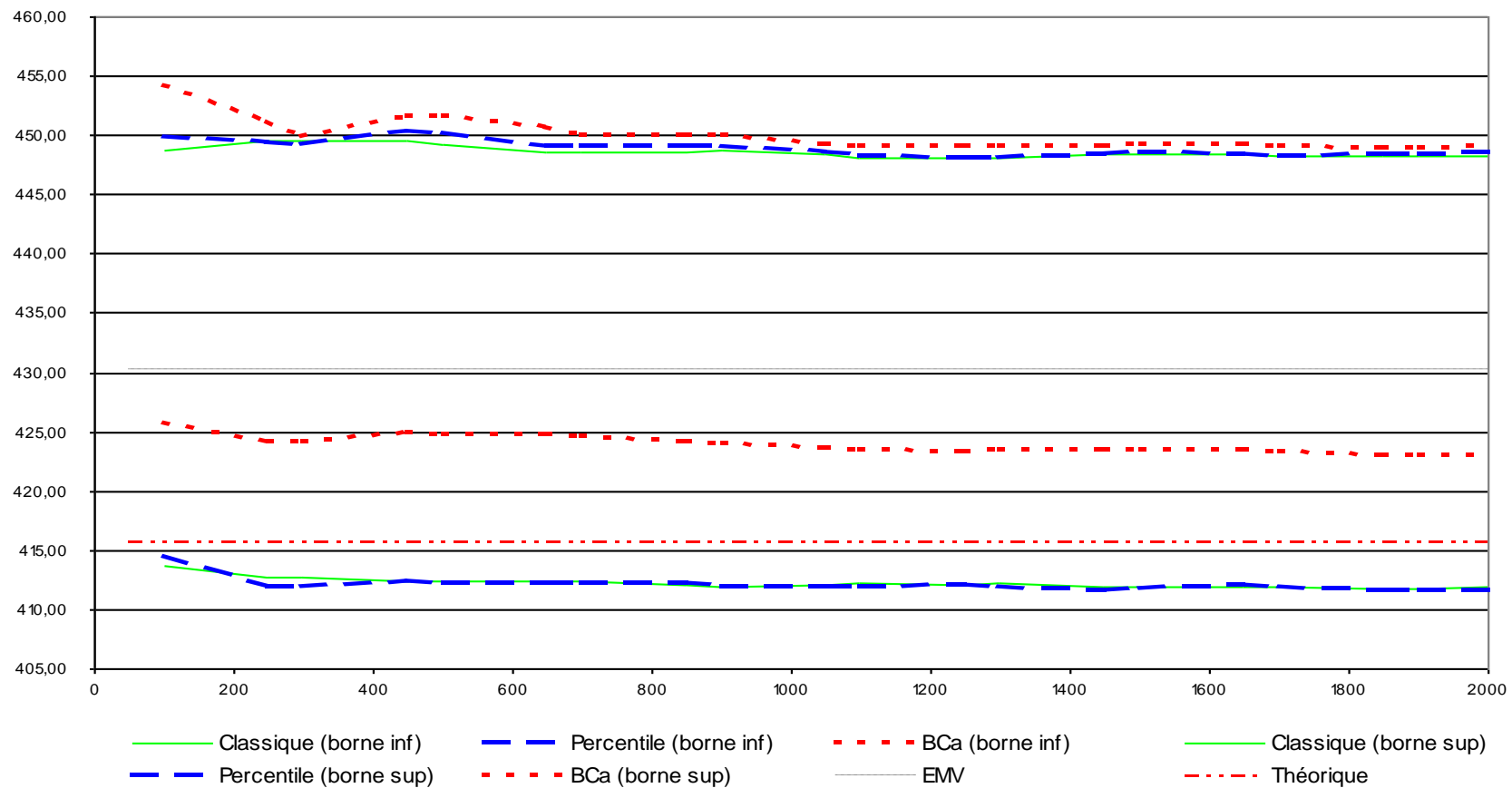
en désignant par  $V\tilde{a}R_{\alpha}^i(X)$  la  $VaR$  obtenue sur le  $i^{\text{ème}}$  échantillon « jackknife » (c'est à dire l'estimation de la  $VaR$  obtenue à partir de l'échantillon initial duquel on a retiré la  $i^{\text{ème}}$  valeur).

## Application

# Intervalles de confiance

Mais attention, les méthodes *bootstrap* sont mal adaptées à l'analyse d'un quantile élevé :

:



# Approche non paramétrique

On ne suppose plus ici d'hypothèse sur la forme *a priori* de la loi sous-jacente ; on dispose dans ce contexte de la fonction de répartition empirique :

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq u\}}$$

Une approche naturelle consiste à utiliser directement cette approximation de la vraie loi pour proposer des estimateurs, par exemple :

$$\hat{F}^{-1}(p) = ([pn] - pn + 1) X_{([pn])} + (pn - [pn]) X_{([pn]+1)}$$

Cependant, pour un quantile d'ordre élevé cette approche est inefficace car les données sont insuffisantes.



# Approche non paramétrique

En l'absence de données suffisantes il faut imaginer un moyen d'intégrer au modèle des contraintes structurantes. La théorie des valeurs extrêmes fournit ces contraintes.

Elle indique en effet que la forme de la queue de distribution est déterminée par une même forme paramétrique, quelle que soit la distribution d'origine.

On est donc ramené d'une certaine manière à un cadre paramétrique « classique », qui va permettre de calculer des  $VaR$  et des  $TVaR$  pour des quantiles d'ordre élevé.

# Théorie des valeurs extrêmes

On considère un échantillon d'une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

On voit que :

$$P\left(\lambda X_{(n)} - \ln(n) \leq x\right) = P\left(X_1 \leq \frac{x + \ln(n)}{\lambda}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\lambda X_{(n)} - \ln(n) \leq x\right) = \exp(-\exp(-x))$$

La loi limite du maximum est la loi de Gumbel.

# Théorie des valeurs extrêmes

Si on considère maintenant un échantillon d'une loi  $F$  dont le comportement à l'origine vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{\lambda x^\alpha} = 1$$

En remarquant que :

$$P\left(n^{1/\alpha} X_{(1)} > x\right) = \left[1 - F\left(\frac{x}{n^{1/\alpha}}\right)\right]^n$$

on trouve que

$$\ln\left(P\left(n^{1/\alpha} X_{(1)} > x\right)\right) = n \ln\left[1 - G\left(\frac{x}{n^{1/\alpha}}\right)\right] = n \left[-\lambda \left(\frac{x}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

On reconnaît la loi de Weibull :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n^{1/\alpha} X_{(1)} > x\right) = e^{-\lambda x^\alpha}$$

# Théorie des valeurs extrêmes

De manière générale on a le théorème de Gnedenko (1943) qui montre qu'il n'y a que 3 lois possibles pour les extrêmes ; il exprime que si pour une loi  $H$  non dégénérée et des constantes de normalisation :

$$\frac{X_{(n)} - \mu_n}{\sigma_n} \rightarrow_d H$$

alors  $H$  est l'une des 3 lois suivantes :

<i>Fréchet</i>	<i>Weibull</i>	<i>Gumbel</i>
$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$	$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$	$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), x \in R$

# Théorie des valeurs extrêmes

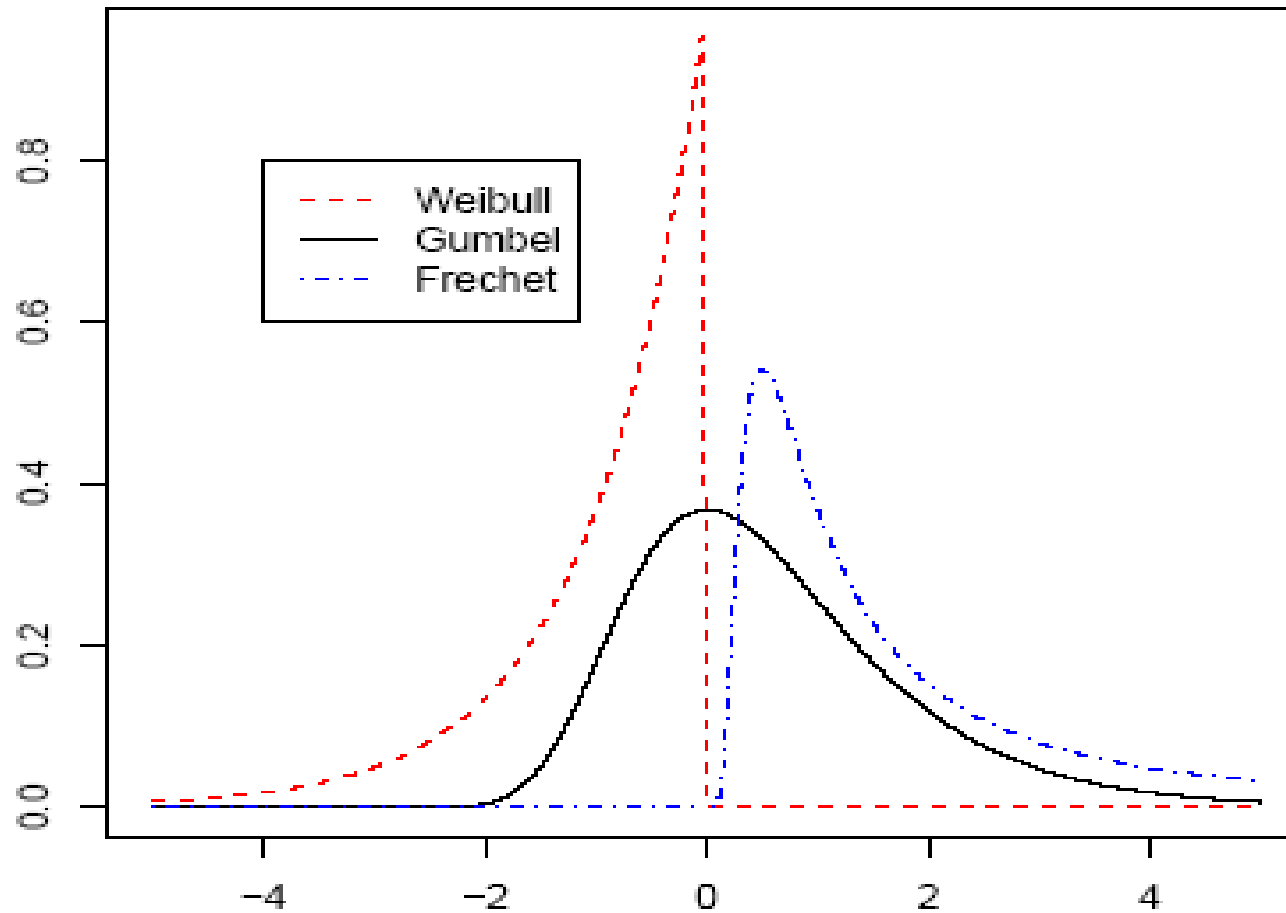
En pratique on introduit l'indice de queue tel que :

<i>Fréchet</i>	<i>Weibull</i>	<i>Gumbel</i>
$\xi = \alpha^{-1} > 0$ $\mu_n = 0$ $\sigma_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$	$\xi = -\alpha^{-1} < 0$ $\mu_n = \omega(F)$ $\sigma_n = \omega(F) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$	$\xi = 0$ $\mu_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ $\sigma_n = \frac{1}{S(\mu_n)} \int_{\mu_n}^{\infty} S(t) dt$

La loi de Gumbel est la loi des extrêmes pour les lois normales et log-normales, que la loi de Fréchet est associée aux distributions de Cauchy, Pareto et Student ; une loi uniforme a pour loi des extrêmes la loi de Weibull. Janssen et de Vries [1991] ont montré que dans le cas de données modélisées par un processus ARCH, la loi limite pour les extrêmes était la loi de Fréchet. Cette dernière loi apparaît donc comme étant *a priori* assez naturelle dans un contexte financier ou assurantiel.

# Théorie des valeurs extrêmes

Les distributions des extrêmes :



# Théorie des valeurs extrêmes

La représentation de Jenkinson-Von Mises :

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right\} & \text{si } 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0, \xi \neq 0, \\ \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

# Théorie des valeurs extrêmes

On se ramène en général *via* normalisation à une représentation ne faisant intervenir que l'indice de queue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(\mu_n + \sigma_n x) = H_\xi(x)$$

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \xi x\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\} & \text{si } 1 + \xi x > 0, \xi \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Estimation du paramètre de queue : paramétrique ou non paramétrique. Cette dernière utilise l'ensemble des données initiales, et non seulement les maxima ou les minima, pour estimer alors que la méthode paramétrique consiste à estimer les trois paramètres de la fonction  $H$  par le maximum de vraisemblance sur les séries des maxima et des minima.



# Types de valeurs extrêmes

En pratique, on souhaite déterminer, pour un échantillon donné, la forme de la queue de distribution, et, à tout le moins, avoir une idée du domaine d'attraction de la distribution. La méthode des graphiques quantile-quantile permet de fournir une indication de l'appartenance probable à un des domaines d'attraction possibles.

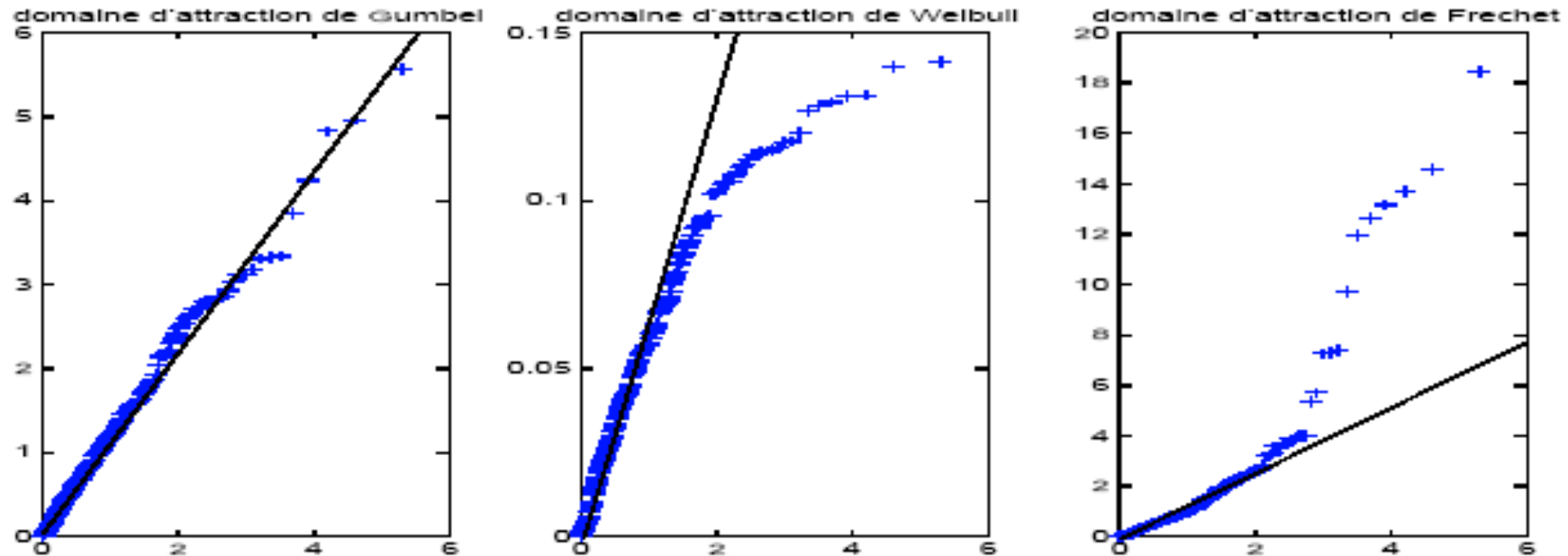
Son principe est de représenter graphiquement les quantiles de la distribution exponentielle

$$\left( -\ln\left(\frac{i}{k}\right) / 1 \leq i \leq k \right)$$

contre les « excès ordonnés » :

$$\left( X_{(n-k+i)} - X_{(n-k)} / 1 \leq i \leq k \right)$$

# Types de valeurs extrêmes



Si la loi dont sont issues les données est de type Gumbel alors les points du graphique sont approximativement alignés et on peut déterminer les paramètres d'échelle et de position de la loi par régression linéaire. Si en revanche les points du graphique ont tendance à se disperser vers le haut, les données sont vraisemblablement issues d'une loi de Fréchet, et inversement de Weibull si la dispersion est orientée vers le bas.

## Et maintenant ?

Si on est capable d'estimer l'indice de queue, on sera en mesure de proposer des estimateurs des quantiles d'ordre élevés (approche *VaR*).

Avec un peu de travail supplémentaire, on pourra en déduire des estimateurs de la *CTE* et de la *TVaR*.

Comment estimer l'indice de queue ? On va utiliser la statistique d'ordre

$$X_{k,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$$

En calibrant  $k$  pour avoir des « valeurs extrêmes » dans cet échantillon.

# Estimateur de Pickands

Il est défini par la statistique

$$\hat{\xi}_{k,n}^P = \frac{1}{\ln 2} \ln \left( \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}} \right)$$

Il présente l'intérêt d'être valable quelle que soit la distribution des extrêmes (Gumbel, Weibull ou Fréchet). La représentation graphique de cet estimateur en fonction du nombre  $k$  d'observations considérées montre un comportement en général très volatil au départ, ce qui nuit à la lisibilité du graphique. De plus, cet estimateur est très sensible à la taille de l'échantillon sélectionné, ce qui le rend peu robuste. Il est donc d'un maniement délicat.

$$\sqrt{k} \frac{\hat{\xi}_{k,n}^P - \xi}{\sigma(\xi)} \rightarrow N(0,1)$$

$$\sigma(\xi) = \frac{\xi \sqrt{2^{2\xi+1} + 1}}{2(2^\xi - 1) \ln(2)}$$

# Estimateur de Hill

Il est défini par la statistique

$$\hat{\xi}_{k,n}^H = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \ln \left( \frac{X_{j,n}}{X_{k,n}} \right)$$

Il n'est valable que pour le domaine de Fréchet ; il est EMV dans le modèle

$$S(x) = 1 - F(x) = Cx^{-1/\xi}$$

Dans le modèle plus général

$$S(x) = 1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x)$$

il présente un biais important, ce qui rend son utilisation difficile.

# Estimateur de Hill

L'estimateur de Hill est également asymptotiquement gaussien

$$\sqrt{k} \frac{\hat{\xi}_{k,n}^H - \xi}{\xi} \rightarrow N(0,1)$$

Même si l'estimateur de Hill est bien moins volatil que celui de Pickand (quand on le représente en fonction du nombre d'observations considérées), il manque de précision et sa phase de stabilisation, qui devrait correspondre à la valeur de l'indice de queue, est parfois difficile à identifier. Resnick et Starica [1997] ont mis au point une méthode très simple pour effectuer un « agrandissement » du démarrage du graphe de l'estimateur de Hill. Pour ce faire, l'idée est de changer d'échelle sur l'axe des abscisses pour passer en échelle logarithmique. Ainsi, la partie de courbe correspondant aux premières valeurs extrémales est agrandie et plus précise, par opposition à la partie de courbe correspondant aux valeurs qui ne font probablement pas partie de la queue de la distribution.

# Estimateur des moments

Il est défini par la statistique

$$\hat{\xi}_{k,n}^M = 1 + \hat{\xi}_{k,n}^{(1)} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\left( \hat{\xi}_{k,n}^{(1)} \right)^2}{\hat{\xi}_{k,n}^{(1)}} \right)^{-1}$$

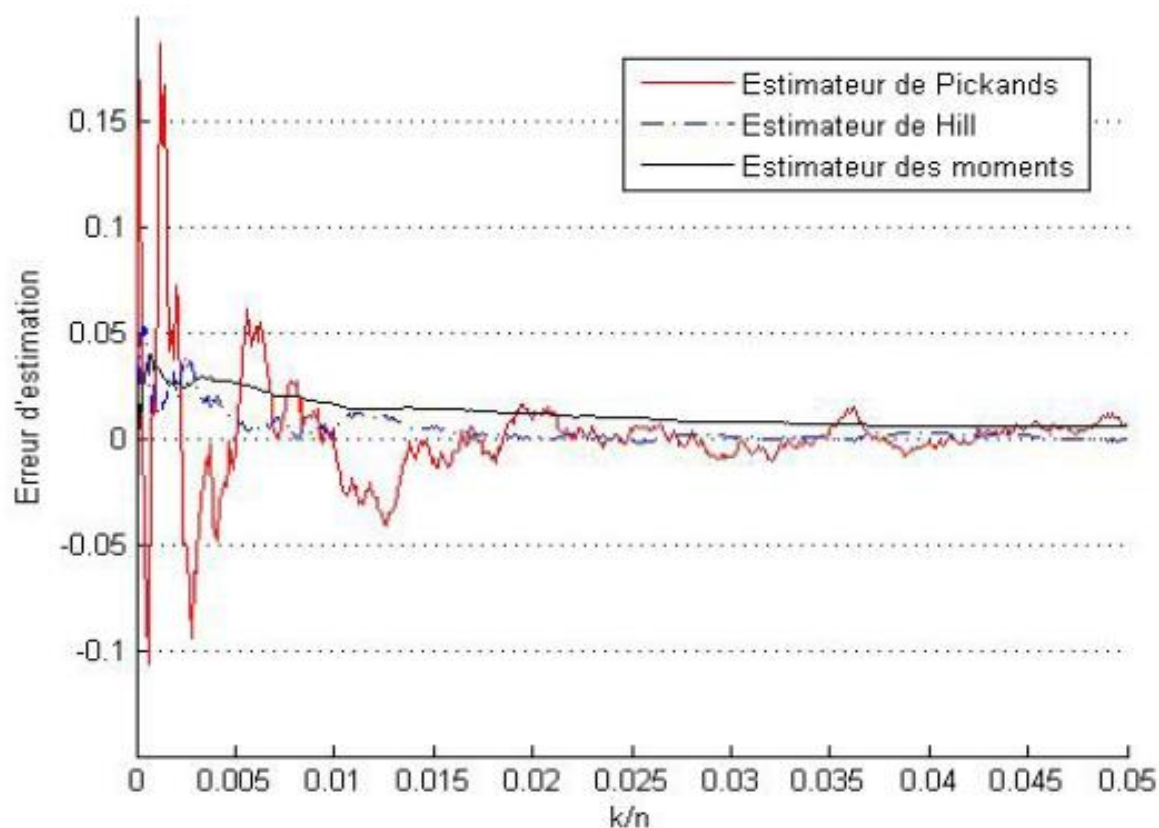
avec

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(i)} = \left( \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln \left( \frac{X_{j,n}}{X_{k-1,n}} \right) \right)^i$$

Utilisable uniquement pour le domaine de Fréchet il est asymptotiquement gaussien

$$\sqrt{k} \frac{\hat{\xi}_{k,n}^H - \xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \rightarrow N(0,1)$$

Le comportement en terme de précision des différents estimateurs présentés est illustré ci-après dans le cas d'une loi de Pareto ; on obtient l'allure typique suivante :





# Estimer un quantile d'ordre élevé

Dans le cas du domaine de Fréchet, on remarque que :

$$S(x) = 1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x)$$

On en déduit que

$$\frac{S(x)}{S(X_{(n-k)})} = \frac{L(x)}{L(X_{(n-k)})} \left( \frac{x}{X_{(n-k)}} \right)^{-1/\xi}$$

En considérant alors le rapport des fonctions à variation lente proche de 1 on trouve que :

$$S(x) = S(X_{(n-k)}) \left( \frac{x}{X_{(n-k)}} \right)^{-1/\xi}$$

# Estimer un quantile d'ordre élevé

Cela conduit à proposer comme estimateur de la fonction de répartition, pour

$$x > X_{(n-k)}$$

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n} \left( \frac{x}{X_{(n-k)}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_{k,n}^H}}$$

Par inversion on propose l'estimateur suivant de la *VaR* :

$$x_p = X_{(n-k)} \left( \frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\hat{\xi}_{k,n}^H}$$

On peut également utiliser l'estimateur suivant :

$$x_p = \begin{cases} X_{(n-k)} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] & \text{si } \hat{\xi} \neq 0 \\ X_{(n-k)} - \hat{\beta} \ln \left( \frac{n}{k} (1-p) \right) & \text{si } \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

Il trouve sa justification dans l'étude de la loi des « excès au delà d'un seuil », dont on peut montrer qu'il s'agit d'une loi universelle, la loi de Pareto généralisé.

# Approximation GDP

On part de la relation  $S(x) = S(u)S_u(x)$  pour écrire

$$F(x) = P(X \leq x) = (1 - P(X \leq u))F_u(x - u) + P(X \leq u)$$

On en déduit l'approximation de la fonction de répartition au-delà du seuil :

$$\hat{F}(x) = (1 - F_n(u))G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(x) + F_n(u)$$

et par inversion on tire :

$$x_p = u + G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}^{-1}\left(\frac{p - F_n(u)}{1 - F_n(u)}\right) = \begin{cases} u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{1 - p}{1 - F_n(u)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] & \text{si } \hat{\xi} \neq 0 \\ u - \hat{\beta} \ln\left(\frac{1 - p}{1 - F_n(u)}\right) & \text{si } \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

# Exemple : loi de Pareto

On considère

$$F(x) = 1 - \left( \frac{x_m}{x} \right)^\alpha$$

L'approximation GDP est ici exacte :

$$1 - F_u(x - u) = P(X > x | X > u) = \left( \frac{x}{u} \right)^{-\alpha} = \left( 1 + \frac{\xi}{\beta}(x - u) \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

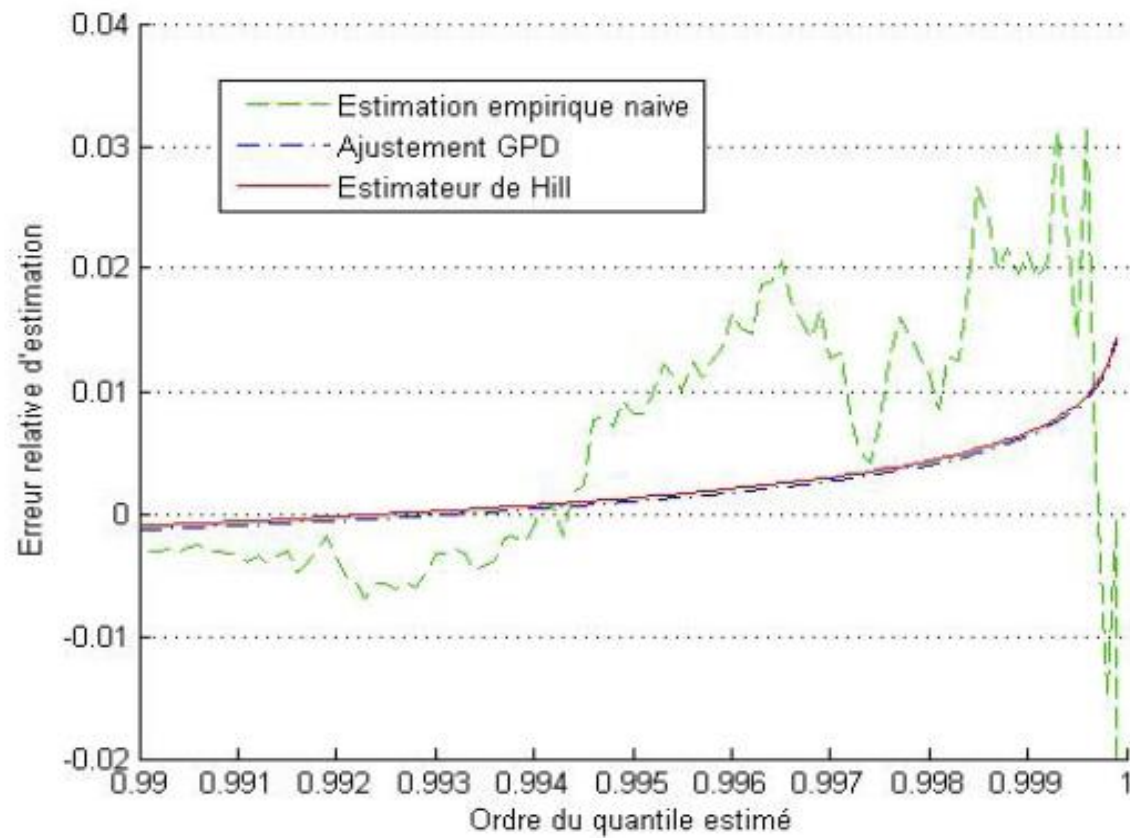
$$\xi = \frac{1}{\alpha} \quad \beta(u) = \xi u$$

On compare les 2 estimateurs proposés et l'approche « naïve » :

$$\hat{F}^{-1}(p) = ([pn] - pn + 1) X_{([pn])} + (pn - [pn]) X_{([pn]+1)}$$

# Exemple : loi de Pareto

Les différents estimateurs conduisent à :



Estimer un SCR est délicat, du fait du niveau « élevé » du quantile :

- ✓ nécessité d'une approche paramétrique (directe ou *via* la théorie des valeurs extrêmes) ;
- ✓ difficulté à proposer un estimateur robuste ;
- ✓ contraintes sur la représentation des extrêmes dans le modèle interne ;
- ✓ pas facile de proposer des intervalles de confiance ;
- ✓ autre point à examiner : dépendance non linéaire.

Remarque : définition de la ruine

AAI [2004] *A global framework for insurer solvency assessment*, <http://www.actuaires.org>.

Ballotta L. [2004] « Alternative framework for the fair valuation of participating life insurance contracts ». *Proceedings of the 14<sup>th</sup> AFIR Colloquium* 1, 337-67.

Boyle P., Windcliff H. [2004] « The 1/n pension investment puzzle », *North American Actuarial Journal* 8.

Commission européenne [2003] « Conception d'un futur système de contrôle prudentiel applicable dans l'Union européenne - Recommandation des services de la Commission ». Document de travail, MARKT/2509/03.

Commission européenne [2004] « Solvency II - Organisation of work, discussion on pillar I work areas and suggestions of further work on pillar II for CEIOPS », Document de travail, MARKT/2543/03.

Dacunha-Castelle D., Duflo M. [1982] *Probabilités et statistiques : problèmes à temps fixe*, Paris : Masson.

Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. [1997] *Modelling extremal events*, Berlin : Springer Verlag.

Gauthier C., Pistre N. [2000] « Événements extrêmes sur les spreads de crédit », Working Paper ENSAE.

Planchet F., Thérond P.E. [2004] « Allocation d'actifs d'un régime de rentes en cours de service ». *Proceedings of the 14<sup>th</sup> AFIR Colloquium* 1, 111-34.

Planchet F., Thérond P.E. [2005] « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », *Proceedings of the 15<sup>th</sup> AFIR Colloquium*.

Robert C. [1998] « Mouvements extrêmes des séries financières haute fréquence », *Finance* 19, 221-71.

Thérond P.E., Planchet F. [2007] « Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de Value-at-Risk », *Assurances et gestion des risques* 74 (4).533-63.

Zajdenweber D. [2000] *Économie des extrêmes*, Paris : Flammarion