

Évaluation de contrats d'épargne en euros

*Modèles financiers et analyses de risque
dynamiques en assurance
16 décembre 2010*

Frédéric PLANCHET



Introduction

Les problématiques d'évaluation de contrats d'assurance sont devenues monnaie courante :

- ❑ gestion des risques, mise en place de couvertures,
- ❑ calcul de provisions techniques (Solvabilité 2, IFRS Contrats d'assurance phase 2),
- ❑ d'exigence de capitaux (Solvabilité 2),
- ❑ valorisation de compagnies (*Embedded Value*, cession de sociétés).



Introduction

Depuis Briys et de Varenne (1994), la littérature académique s'intéresse à ce problème et s'appuie notamment sur l'analogie entre garanties d'assurance vie et dérivés financiers pour chercher à évaluer ces contrats.

L'application directe des théories de la finance de marché se heurte à de nombreux écueils :

- ❑ interdépendance de risques financiers et non-financiers,
- ❑ comportements observés différents de ceux « d'investisseurs rationnels »
- ❑ latitude de réduction du risque par la gestion des actifs importante.



Introduction

Dans cette présentation on met en évidence les éléments suivants :

- ❑ Impact des décisions de gestion sur la PB,
- ❑ Partage du risque global entre risque financier et risque non financier,
- ❑ Evaluation *market consistent* du contrat.

On utilise l'exemple d'un contrat d'épargne avec prime unique et clause de PB.



Sommaire

- 1. Contexte d'évaluation**
2. Lecture optionnelle d'un contrat
3. Retour sur les modèles financiers
4. Hypothèses comportementales
5. Illustration



1. Contexte d'évaluation

1. La réglementation française

Dans le contexte français, la comptabilisation de l'engagement résultant de ce type de contrat se traduit en :

- ☐ Provision mathématique (PM) ;
- ☐ Provision pour participation aux excédents (PPE) ;
- ☐ Provision pour dépassement de taux garanti ;
- ☐ Provision pour aléa financiers (PAF) ;
- ☐ Provision globale de gestion (PGG).



1. Contexte d'évaluation

2. Les nouveaux référentiels

Normes IFRS, Solvabilité 2, *Embedded Value* requièrent une évaluation économique du risque supporté par l'assureur.

Quel que soit le contexte, la problématique est la même : associer à un risque, qui parfois se dénoue à long terme, une valeur aujourd'hui.

En pratique, compte tenu de l'absence de marché de transfert de tels portefeuilles, la valorisation se traduit par une expression du type :

$$\text{Valeur économique} = \text{Espérance} + \text{Marge pour risque}$$



1. Contexte d'évaluation

	MCEV	Solvabilité 2	IFRS phase 2
Objectifs	Valorisation économique (transactions) Information financière	Contrôle prudentiel	Information financière
Information fournie	Valeur de la compagnie Rentabilité des affaires en portefeuille (et des affaires nouvelles)	Provisions techniques Exigence de fonds propres	Provisions techniques, Capitaux propres (variation des éléments d'actifs et de passifs)
Niveau d'application	Social puis consolidé	Social puis consolidé	Consolidé
Valorisation des engagements d'assurance	Espérance complétée de la valeur de l'ensemble des options et des garanties financières	Espérance + marge pour risque	<i>Current Exit Value</i> : montant qui serait exigé en contrepartie du transfert de l'engagement sur un marché (espérance + marge pour risque + marge pour service)
Valorisation des risques	Risques valorisés à travers les cash-flows futurs et les options & garanties	marge pour risque explicite (CoC ou VaR) au niveau du portefeuille + capital de solvabilité (SCR) qui doit contrôler le risque global de la compagnie	marge pour risque, au niveau du portefeuille, qui correspond à une prime de risque normalement disponible sur les marchés
Actualisation	Taux sans risque	Taux sans risque	Taux sans risque



Sommaire

1. Contexte d'évaluation
- 2. Lecture optionnelle d'un contrat**
3. Retour sur les modèles financiers
4. Hypothèses comportementales
5. Illustration



2. Lecture optionnelle d'un contrat

Considérons un contrat d'assurance vie de type « épargne en euros ». La réglementation impose pour ce type de contrats :

- ☐ une clause de participation aux bénéfices techniques et financiers ;
- ☐ une possibilité de rachat avant le terme moyennant une pénalité limitée.

Par ailleurs, les dispositions contractuelles ou la communication de l'assureur peuvent prévoir :

- ☐ un taux minimum garanti ou un taux annuel garanti ;
- ☐ la possibilité d'effectuer des versements libres ou programmés ;
- ☐ la tacite reconduction au-delà du terme.



2. Lecture optionnelle d'un contrat

La plupart de ces garanties peuvent s'interpréter comme des options financières.

Exemple : Évolution de l'épargne acquise sur une année (TMG + PB)

$$PM_{t+1} = PM_t \times \left(1 + tmg + \beta \times [\rho_t - tmg]^+ \right)$$

avec :

- ❑ ρ_t = taux de rendement des placements,
- ❑ tmg = taux minimum garanti,
- ❑ β = taux de participation aux bénéfices.



2. Lecture optionnelle d'un contrat

Du point de vue de l'assuré, on a la correspondance :

Garantie du contrat	Dérivé financier correspondant
Clause de participation bénéficiaire	Option d'achat européenne
Clause de remboursement anticipé	Option de vente américaine
Garantie de taux sur des versements futurs	Swaptions



Sommaire

1. Contexte d'évaluation
2. Lecture optionnelle d'un contrat
- 3. Retour sur les modèles financiers**
4. Hypothèses comportementales
5. Illustration



3. Retour sur les modèles financiers

1. Spécificités de l'assurance

Si les hypothèses de marché complet et parfait ne sont pas réunies, les garanties d'assurance offrent d'autres spécificités :

- ☐ latitude de gestion du rendement financier (rendement comptable \neq rendement économique de l'actif) ;
- ☐ latitude dans la revalorisation de l'épargne : PB discrétionnaire ;
- ☐ comportements des assurés différent de celui des investisseurs sur un marché organisé : versements libres, rachats, prorogations, conversion en rente, etc.



3. Retour sur les modèles financiers

1. Spécificités de l'assurance

Dans une certaine mesure (cf. § I.1.14-17 des spécifications QIS 3 par exemple), le risque sous-jacent du contrat peut être découpé :

- ☐ en risque répliquable,
- ☐ en risque non-répliquable.

La partie répliquable du risque peut être évaluée en référence au prix de la couverture (approche risque-neutre ou déflateurs par exemple).

La partie non-répliquable devra s'exprimer sous la forme :

« Best Estimate + Risk Margin »



3. Retour sur les modèles financiers

1. Spécificités de l'assurance

Dans le cas non-réplicable, le niveau de la marge pour risque pourra dépendre du contexte d'évaluation :

- ☐ Coût d'immobilisation des fonds propres en Solvabilité 2 ;
- ☐ Coût du capital ou attente des actionnaires en *Embedded Value* ;
- ☐ Prime de risque pour le transfert du portefeuille en IFRS phase 2 (sachant que les modalités de calcul de cette prime ne sont pas précisées par la norme).



3. Retour sur les modèles financiers

2. Probabilité risque-neutre

Le calcul de l'espérance du flux au terme actualisé au taux sans risque sous la probabilité risque neutre fournit le montant à investir dans le portefeuille de couverture.

Lorsque l'actif financier est modélisé par un processus de diffusion sous P , son expression sous Q est très simple :

$$dS(t) = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dB(t) \quad \longrightarrow \quad d\tilde{S}(t) = rdt + \sigma(t, \tilde{S}(t))d\tilde{B}(t)$$

« Passer sous Q » revient donc à mettre le taux sans risque comme dérive.



Sommaire

1. Contexte d'évaluation
2. Lecture optionnelle d'un contrat
3. Retour sur les modèles financiers
- 4. Hypothèses comportementales**
5. Illustration



4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Portefeuille de contrats d'épargne :

- ☐ durée fixe = 8 ans ;
- ☐ TMG annuel = 2,5 % ;
- ☐ participation aux bénéfices financiers = 90 % ;

Hypothèses :

- ☐ Pas de PB (discrétionnaire) au-delà de l'engagement contractuel ;
- ☐ Pas de rachat avant le terme, ni de décès.

Objectif : donner une valeur à ce portefeuille de contrats.



4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Si l'on note PM_k , la valeur de l'épargne à la date anniversaire k , le processus de revalorisation, à chaque date anniversaire est le suivant :

$$PM_{k+1} = \left(1 + \mathbf{max}\{2,5\%; 90\% \times \rho_{k+1}\}\right) PM_k$$

où ρ_k est le rendement financier sur la k -ème période.



4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

L'assureur a investi en 0 la prime dans un actif financier composé :

- ❑ pour 30 % d'actions de volatilité 20 % ;
- ❑ pour 70 % au taux sans risque qui sert un rendement de 4 %.

On suppose que le taux sans risque est constant sur les 8 ans.

(S_k, B_k) est le vecteur composé du prix du titre risqué et de l'investissement sans risque à la date k .



4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Le modèle retenu est le suivant :

$$\ln\left(\frac{B_{k+1}}{B_k}\right) = r$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dB_t$$

(sous la probabilité risque neutre)



4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Étudions 2 stratégies de gestion du portefeuille financier :

- ❑ l'assureur ne touche plus à ses actifs jusqu'au terme du contrat :

$$\rho(k) = \frac{\theta S_k + (1 - \theta) B_k}{\theta S_{k-1} + (1 - \theta) B_{k-1}} - 1$$

- ❑ chaque début d'année, le portefeuille est recomposé pour conserver la répartition initiale (30/70 – critère CPPI) :

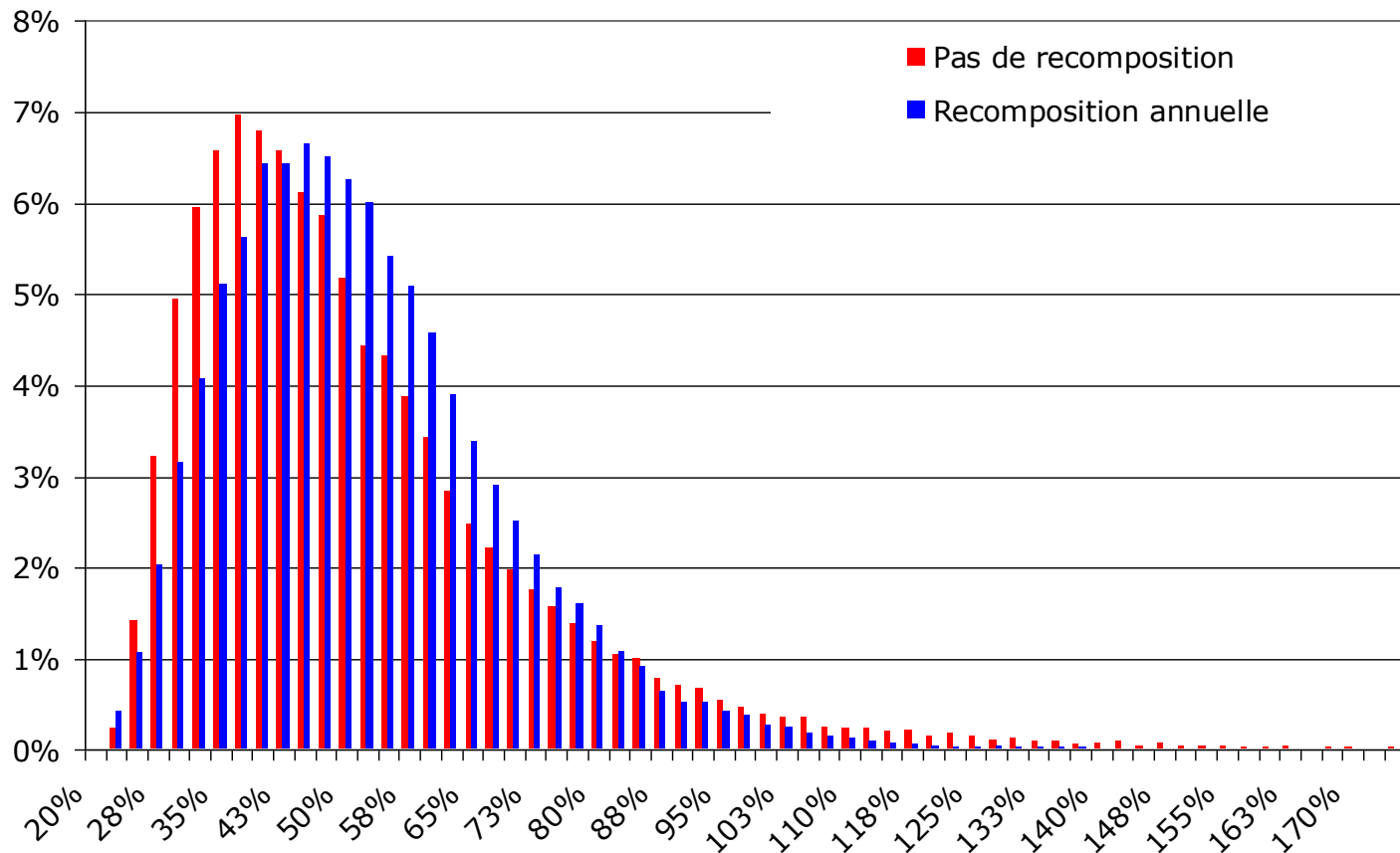
$$\rho(k) = \theta \frac{S_k}{S_{k-1}} + (1 - \theta) \frac{B_k}{B_{k-1}} - 1$$

Dans l'univers risque-neutre, les deux processus de rendement ont, sur une période, une même espérance égale au sans-risque.

4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Distribution empirique de la revalorisation de l'épargne au terme





4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Quelques remarques :

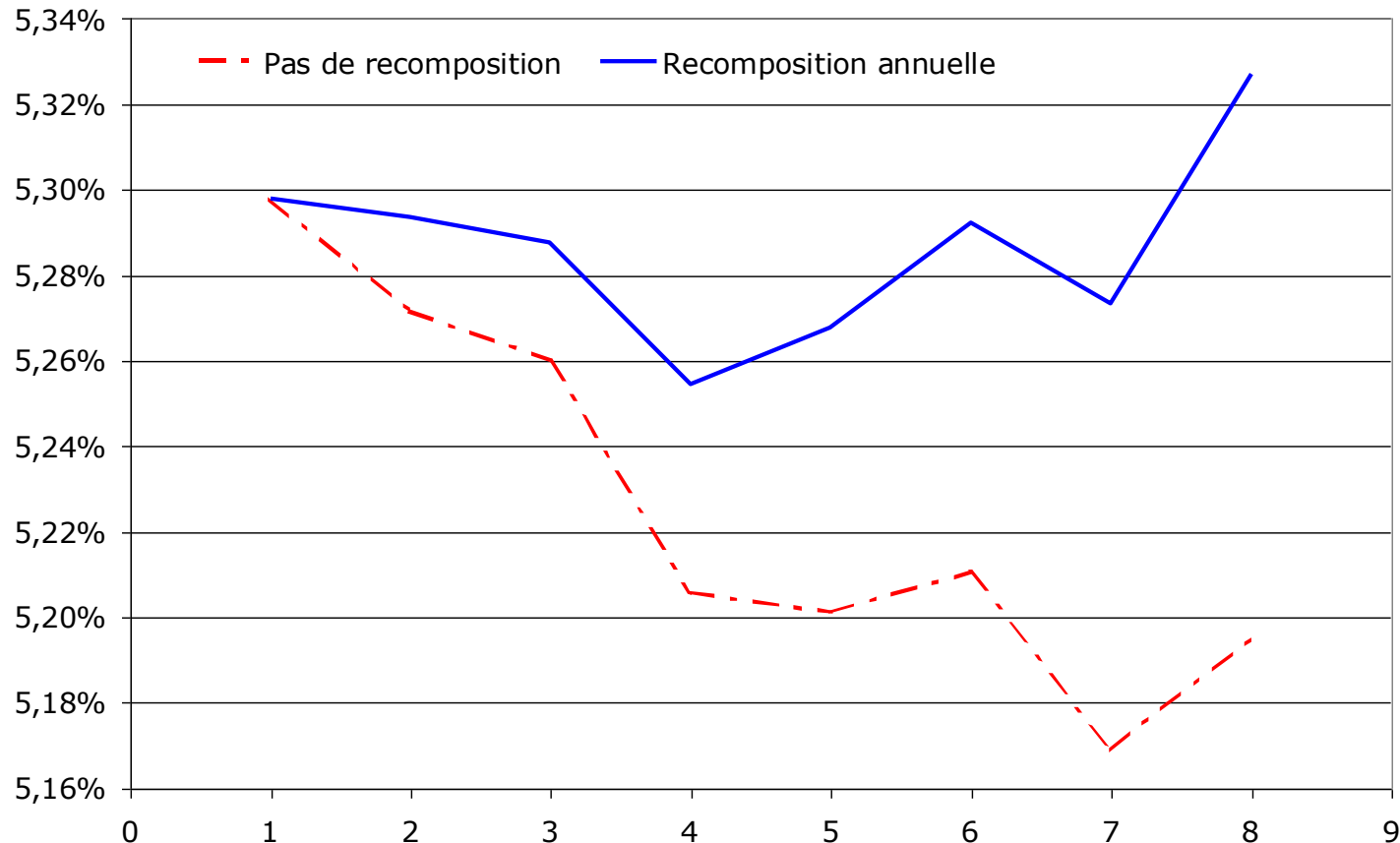
- ❑ La politique de recomposition annuelle conduit à une distribution plus resserrée autour de la moyenne.
- ❑ Dans les deux cas, l'espérance de revalorisation au terme est de l'ordre de 51 % (gain de 10 % sur 8 ans par rapport à un investissement sans risque).
- ❑ Les profils de rendement sont très différents (cf. graphiques suivants).



4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Évolution du taux de revalorisation moyen

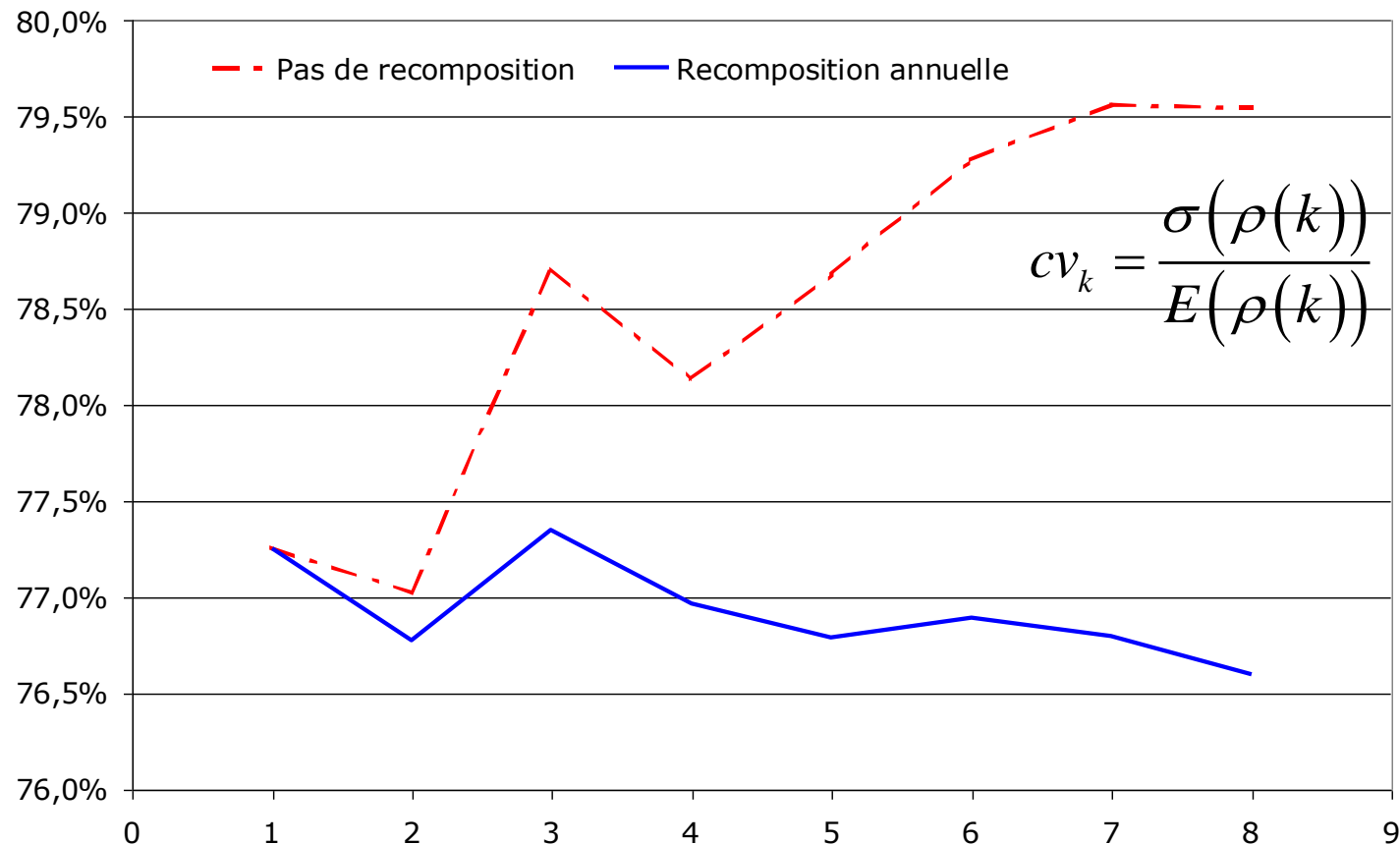




4. Hypothèses comportementales

Exemple : gestion du portefeuille financier

Évolution du coefficient de variation du taux de revalorisation





Sommaire

1. Contexte d'évaluation
2. Lecture optionnelle d'un contrat
3. Retour sur les modèles financiers
4. Hypothèses comportementales
- 5. Illustration**



5. Illustration

1. Le contrat

- ☐ Contrat d'épargne en euros.
- ☐ Prime unique, pas de possibilité de versements libres.
- ☐ TMG sur 8 ans fixé à la souscription.
- ☐ Participation aux bénéfices réglementaire (90 % des bénéfices techniques et 85 % des bénéfices financiers).
- ☐ Revalorisation annuelle en fin d'exercice.
- ☐ Durée fixe égale à 8 ans. Prorogation par tacite reconduction avec TMG à 60 % du TME.



5. Illustration

1. Le contrat

- ❑ Deux types de frais :
 - prélèvements sur encours chaque fin d'année ;
 - frais sur versements lors du paiement de la prime.
- ❑ Versements de l'épargne aux ayant-droits en cas de décès avant terme.
- ❑ Possibilités de rachats totaux ou de retraits moyennant une pénalité dégressive avec le nombre de semestres restant à courir.



5. Illustration

2. Le portefeuille

- ❑ Production nouvelle 2006 : 160 assurés.
- ❑ Âge moyen = 55 ans.
- ❑ Épargne moyenne accumulée = 14 k€.
- ❑ Somme de l'épargne acquise (PM Solvabilité 1) : 2 243 k€
- ❑ Terme résiduel moyen = 7,5 ans.



5. Illustration

3. L'analyse des risques

Trois risques principaux :

- ☐ Risque financier : garantie de taux, impact sur le rachat.
- ☐ Risque de mortalité.
- ☐ Risque de rachat : lien avec le rendement servi / attendu.



5. Illustration

4. Les modèles retenus

Variables de base :

- ☐ Rendement financier du marché (assureurs) : mouvement brownien arithmétique ;
- ☐ Rendement financier de l'assureur : mouvement brownien arithmétique corrélé avec le rendement du marché ;
- ☐ Mortalité : modélisation des fluctuations d'échantillonnage sur la TH00-02.



5. Illustration

4. Les modèles retenus

Modèles de gestion :

- ☐ Rachat : loi centrale fonction de l'ancienneté du contrat déformée en fonction de l'écart de revalorisation avec le marché.
- ☐ Participation aux bénéfices : pas de PPE, attribution de la PB au cours de l'exercice de constitution de l'excédent.



5. Illustration

4. Les modèles retenus

Le calcul consiste à simuler des réalisations des flux de prestations futures. L'actualisation au taux sans risque de ces flux fournit une réalisation de la valeur en 0 des prestations futures.

On simule une trajectoire d'actif. Cette trajectoire conduit à une loi de rachat, qui permet de simuler une trajectoire du passif. Tout se ramène à calculer la date de service de la prestation (rachat, décès ou terme), T_j et le montant de cette prestation, F_j .

$$\Lambda = \sum_{j \in J} \frac{F_j}{(1+r)^{T_j}} \quad \longrightarrow \quad V = E^{P^A \otimes Q^F} (\Lambda)$$



5. Illustration

4. Les modèles retenus

Pour des raisons de temps de simplification des calculs, on décide parfois de remplacer le faisceau de trajectoires du processus d'actif par un ensemble simplifié construit de la manière suivante :

- on fixe une partition de $[0, +\infty[$, $\{[s_{j-1}, s_j[, 1 \leq j \leq p\}$
- on pose $\xi_j(t) = \mathbf{E}(S(t) | S(T) \in [s_{j-1}, s_j[)$
- on définit un nouveau processus $\xi(t)$ en sélectionnant l'une des p trajectoires $\xi_j(t)$ chacune ayant la probabilité :

$$\pi_j = \mathbf{Pr}(S(T) \in [s_{j-1}, s_j[)$$

En d'autres termes on effectue des regroupements de trajectoires en fonction de la valeur au terme du processus d'origine.



5. Illustration

4. Les modèles retenus

Le flux de prestation est déterminé à partir de :

$$PM_{k+1} = \left(1 + \mathbf{max} \left\{ r_g ; 90\% \times \rho_{k+1} \right\} \right) PM_k$$

cette formule étant appliquée entre la date de calcul et la date de sortie simulée.

La date de sortie simulée tient compte du rachat, du décès et du terme du contrat.

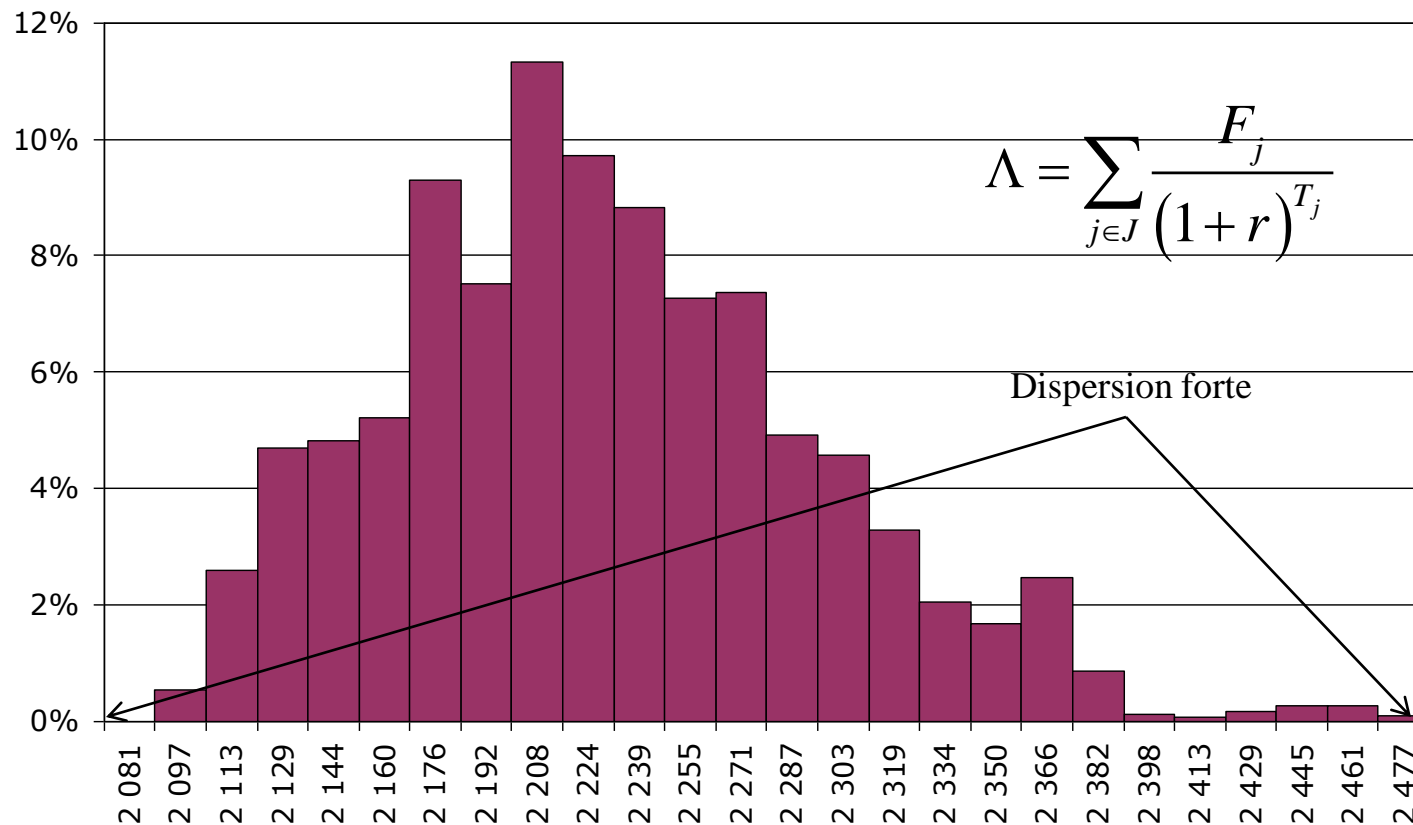


5. Illustration

5. Les résultats

$$E(\Lambda) = 2215$$

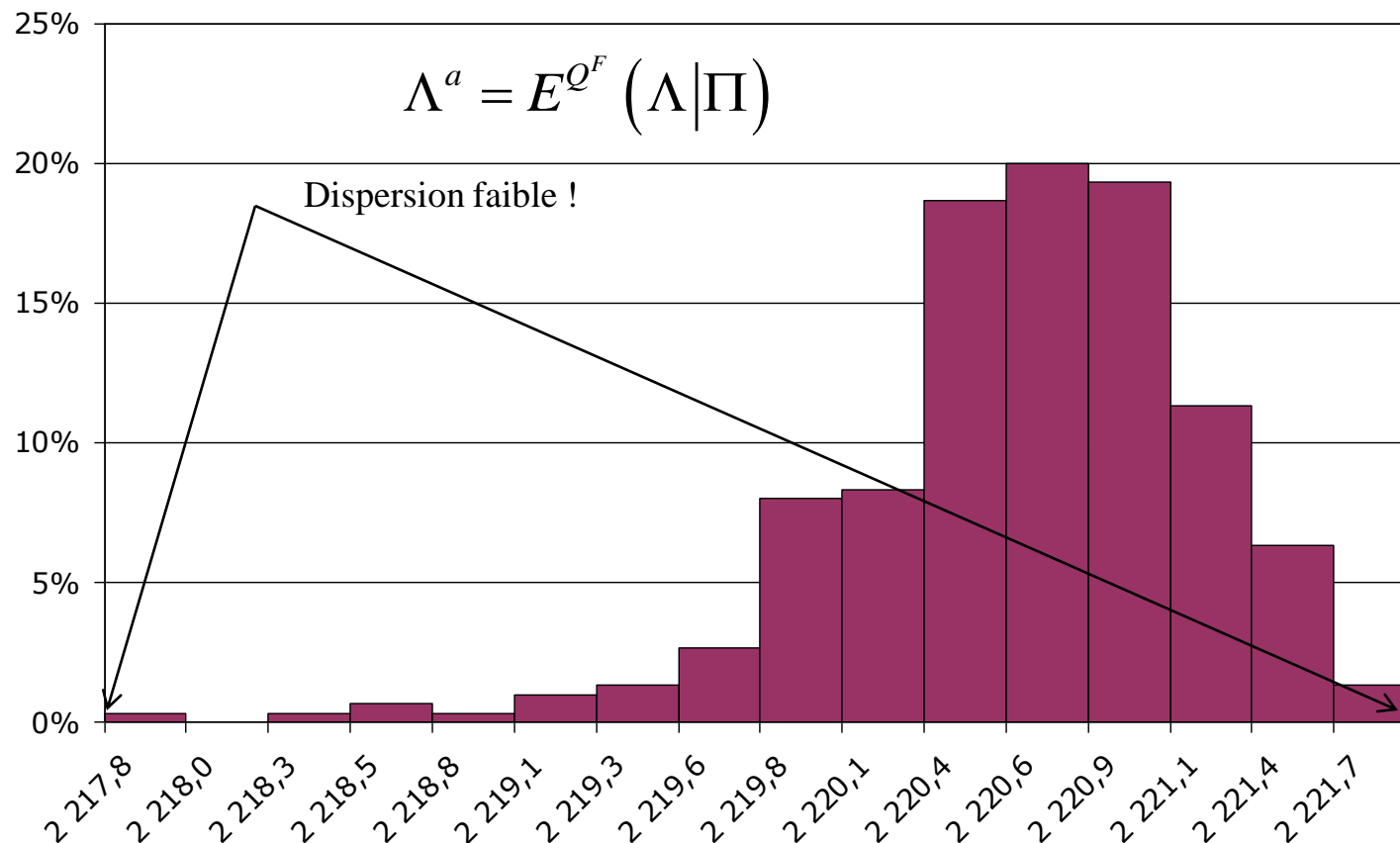
Distribution de la valeur actuelle des prestations futures



5. Illustration

5. Les résultats

Distribution de la valeur actuelle des prestations futures (non-financier)





5. Illustration

5. Les résultats

La mesure de la répartition du risque entre risque financier et risque d'assurance s'effectue à l'aide de l'équation de décomposition de la variance :

$$\mathbf{V}[\Lambda] = \mathbf{E}[\mathbf{V}(\Lambda|\Pi)] + \mathbf{V}[\mathbf{E}(\Lambda|\Pi)]$$

La part de variance expliquée par le risque d'assurance est alors :

$$\omega = \frac{\mathbf{V}[\mathbf{E}(\Lambda|\Pi)]}{\mathbf{V}[\Lambda]}$$

NB : le rachat structurel est ici intégré au risque d'assurance.



5. Illustration

5. Les résultats

Par décomposition de variance, on obtient que le risque financier (rendement + déformation du rachat) représente 99 % du risque global, conformément à ce que l'on pouvait déduire des graphes précédents.

Dans un contexte IFRS ou MCEV, la marge pour risque pour :

- ☐ la partie mutualisable du risque de mortalité,
- ☐ la partie centrale du risque de rachat,

est donc très faible (cf. le graphe précédent) et doit donc logiquement conduire à une marge pour risque faible.



5. Illustration

6. Contexte IFRS : coût des options et garanties

En norme IFRS si on souhaite isoler la valeur des « options et garanties » ; dans l'exemple présent, cela revient à dérouler le même calcul que ci-dessus en supprimant la PB, le rachat et le taux garanti.

La seule garantie qui subsiste est donc la garantie sur le niveau de l'épargne acquise.

Par différence avec l'évaluation précédente on obtient le coût des options et garanties.

$$C = E(\Lambda) - E(\Lambda_0) = 2215 - 1734 = 481$$

NB : quid du rachat structurel ? Il faut faire un choix.



5. Illustration

6. Contexte IFRS : coût des options et garanties

Le débat essentiel porte sur l'affectation de la PB :

- la part discrétionnaire a vocation à être assimilée à des fonds propres ;
- le reste doit aller dans la provision.

Dans l'exemple étudié ici l'ensemble de la participation aux bénéfices est dans la provision.



5. Illustration

7. Marge pour risque

Le calcul de la marge pour risque s'appuie sur la formule suivante (QIS 4, TS.II.C.26) :

$$CoCM = CoC \times (0,5 + Dur) \times SCR_{lob}^{tf}(0)$$

avec le SCR initial qui est déterminé en agrégeant les SCR élémentaires via (TS.XI.A.6) :

$$SCR^{life} = \sqrt{\sum \sigma_{ij} SCR_i SCR_j}$$

Dans l'exemple présent on retiendra les SCR élémentaires pour les risques de mortalité, longévité et rachat. Les frais ne sont pas modélisés.



5. Illustration

7. Marge pour risque

Le calcul des SCR élémentaires est le suivant :

- Mortalité : majoration de 10 % des taux de décès, et recalcul de la valeur du contrat avec cette nouvelle hypothèse ;
- longévité : minoration de 25 % des taux de décès, et recalcul de la valeur du contrat avec cette nouvelle hypothèse ;
- rachat : calcul avec des taux de rachat majorés ou minorés de 50 % et d'un choc global de 30 % de rachat, et ensuite :

$$SCR_{lapse} = Lapse_{down} + \mathbf{max}\left(Lapse_{up}, Lapse_{mass}\right)$$



5. Illustration

7. Marge pour risque

Les résultats obtenus sont les suivants :

$$E(\Lambda_{mort}) = 2\,214 \quad \longrightarrow \quad SCR_{mort} = 0$$

$$E(\Lambda_{long}) = 2\,215 \quad \longrightarrow \quad SCR_{long} = 0$$

$$Lapse_{down} = 10 \quad Lapse_{up} = 0 \quad Lapse_{mass} = 32,4$$

$$SCR_{lapse} = Lapse_{down} + \max(Lapse_{up}, Lapse_{mass}) = 42,4$$

$$CoCM = 6\% \times (0,5 + 5,5) \times 42,4 = 15,3$$

La marge pour risque est donc très faible (NB : écart-type=70).



5. Illustration

8. Solvabilité 1

Les résultats ci-dessus sont applicables directement en IFRS, Solvabilité 2 et MCEV.

En Solvabilité 1, la logique est sensiblement différente :

- la provision mathématique est égale au montant de l'épargne acquise ;
- on calcule une provision de taux si le taux garanti dépasse le maximum autorisé (75 % TME) du moment où la garantie a été accordée ;
- on calcule éventuellement une PAF.



5. Illustration

8. Solvabilité 1 (PAF)

Lorsqu'à l'inventaire, le taux de rendement réel d'une société d'assurance vie diminué de 20 % est inférieur au montant des intérêts techniques et de la PB contractuellement garantie, la société doit constituer une provision pour aléas financiers (PAF, A.331-2). Le montant de cette provision est la différence (si elle est positive) entre :

- les provisions mathématiques recalculées avec le taux de rendement réel des actifs diminués d'un cinquième ;
- les provisions mathématiques à l'inventaire.



5. Illustration

9. Synthèse

On peut résumer les résultats précédents de la manière suivante :

- on a calculé une valeur des prestations « market consistent » :

$$E(\Lambda) = 2215$$

- cette valeur fournit en IFRS et en S2 le montant de la provision en « current exit value » en ajoutant la marge pour risque :

$$PM = 2215 + 15 = 2230$$

$$PM(S1) = 2243$$

- en IFRS, on décompose ce montant :

$$C = E(\Lambda) - E(\Lambda_0) = 2215 - 1734 = 481$$



5. Illustration

9. Synthèse

Pour déterminer le capital assurant le contrôle de la ruine à 0,5 % dans un modèle interne on doit utiliser le modèle sous la probabilité historique. En effet, pour contrôler la ruine globale il faut trouver SCR tel que :

$$\mathbf{Pr}(\Lambda > PM + SCR) = 1 - \alpha \quad \alpha = 99,5\%$$

ce qui conduit à :

$$SCR = m - PM + \sigma \times \Phi^{-1}(\alpha) = m - PM + \sigma \times 2,57$$

Ici avec un rendement de 7 %, $m = 2526$ et $\sigma = 95$ et donc :

$$SCR = 2526 - 2230 + 2,57 \times 95 = 540$$

Question : ce montant est-il pertinent ? Pourquoi ?



Conclusion

- ❑ L'analogie entre les garanties des contrats d'assurance vie en euros et les dérivés financiers est limitée : gestion des variables sous-jacentes, comportements « non-rationnels ».
- ❑ Du fait de la complexité des mécanismes en jeu, l'évaluation passe par des modélisations complexes et des méthodes de simulation.
- ❑ Décisions de gestion : hypothèses très sensibles qui doivent être justifiées et être « réalistes » dans des situations non-standard (issues des scénarios aléatoires).
- ❑ Les principes de valorisation des différents référentiels peuvent conduire à des situations invraisemblables sur lesquelles une attention particulière doit être portée.



Références bibliographiques

- Ballotta L. (2005) « A Lévy process-based farmework for the fair valuation of participating life insurance contracts », *Insurance: Mathematics and Economics* 37 (2), 173-96.
- Black F., Scholes M. (1973) « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy* 81 (3), 637-54.
- Brennan M.J., Schwartz E.S. (1976) « The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee », *Journal of Financial Economics* 3, 195-213.
- Briys E., de Varenne F. (1994) « Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 19, 53-72.
- Frantz C., Chenut X., Walhin J.F. (2003) « Pricing and capital allocation for uni-linked life insurance contracts with minimum death guarantee », *Proceedings of the 13th AFIR Colloquium*, Masstricht.
- Hull J.C. (1999) *Options, futures and other derivatives*, 4th edition, Prentice-Hall.
- Planchet F., Thérond P.E. (2005) « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », *Proceedings of the 15th AFIR Colloquium*, Zürich.
- Planchet F., Thérond P.E. (2007) *Mesure et gestion des risques d'assurance*, Paris : Economica.
- Thérond P.E. (2007) *Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiels et d'information financière*, thèse de doctorat, Université Lyon 1, ISFA.