MODELES FINANCIERS ET ANALYSES DE RISQUE DYNAMIQUES EN ASSURANCE

Calcul du SCR dans un modèle interne

Support de cours 2009-2010

Frédéric PLANCHET

Version 1.0

Mars 2010

SOMMAIRE

PREAMBULE

Le modèle standard de Solvabilité 2 propose des règles de calcul du SCR dans des logiques de scénarios en faisant subir aux hypothèses du calcul différents chocs sensés être associés à des événements observables avec une probabilité égale à 0,5 %.

Lorsque l'on choisit de se placer dans le cadre d'un modèle interne, le SCR doit être déterminé en référence directe au critère de contrôle de la probabilité de ruine à un an.

L'objet du présent document est de définir rigoureusement les équations que doit satisfaire le SCR en fonction des distributions respectives de l'actif et du passif.

1. Le calcul du SCR dans un modèle interne

Dans un premier temps on déduit d'un bilan simplifié l'équation de base que doit satisfaire le SCR. Puis, on cherche à expliciter les termes de cette équation dans un contexte d'assurance de personnes afin de déterminer les équations que doit satisfaire le SCR.

1.1. Analyse du bilan et expression générale

Le bilan simplifié de l'assureur se présente de la manière suivante à la date t :

BILAN en t

A_t	E_t
	L_t

où :

- ✓ A_t : la valeur de marché de l'actif en t ;
- ✓ L_t : la valeur de marché du passif en t.

Il évolue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t \times \left(1+R_{t+1}\right) - F_{t+1} + C_{t+1} \\ L_{t+1} &= BE\left(t+1\right) + RM\left(t+1\right) \\ E_{t+1} &= A_{t+1} - L_{t+1} \end{aligned}$$

où :

- ✓ R_{t+1} : le rendement (aléatoire) des actifs incluant les coupons entre t et $t+1$;
- ✓ F_{t+1} : les prestations et les frais versés (aléatoires) entre t et $t+1$;
- ✓ C_{t+1} : les cotisations perçues (aléatoires) entre t et $t+1$.

On peut toutefois observer que sauf exception les cotisations futures ne sont pas prises en compte dans le calcul, effectué dans une logique de *run-off*, et que donc on a en général $C_{t+1}=0$. Dans le dispositif Solvabilité 2, le critère de calcul du SCR est le contrôle de la probabilité de ruine à un an, ce qui conduit à devoir respecter la condition :

$$P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) \geq 99{,}5\%$$

A la date d'inventaire on s'intéresse à la fraction de l'actif en représentation des engagements, ce qui conduit à considérer :

BILAN en 0

A_0	SCR
	L_0

En pratique, à la date initiale, une partie des fonds propres de l'entité correspond au capital requis et l'autre partie reste disponible (Free Surplus) :

BILAN en 0

A_0^{FS}	FS_0
$A_0 - A_0^{FS}$	$SCR = E_0 - FS_0$
	L_0

Pour le calcul du SCR, on ne s'intéresse qu'à la partie basse du bilan, ce qui revient à se placer dans la situation où $FS_0 = 0$. Or on peut écrire en fonction des équations ci-dessus et en supposant pour simplifier que $C_1 = 0$:

$$A_1 - L_1 = A_0\left(1+R_1\right) - F_1 - L_1 = \left(SCR + L_0\right)\left(1+R_1\right) - F_1 - L_1 .$$

On en titre que $\dfrac{A_1 - L_1}{1+R_1} = \left(SCR + L_0\right) - \dfrac{F_1 + L_1}{1+R_1}$ ce qui conduit à observer que :

$$P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) = P\left(SCR \geq \frac{F_1 + L_1}{1+R_1} - L_0\right)$$

et donc la condition limite $P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) = 99{,}5\%$ impose que le SCR satisfasse l'égalité :

$$SCR = VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1+R_1}\right) - L_0.$$

Ainsi, conditionnellement à l'information relative à l'évolution de l'actif, on se ramène à calculer la loi de $Z = F_1 + L_1$. On peut observer qu'on compare les charges à un an actualisées au taux de rendement du portefeuille $\frac{F_1 + L_1}{1+R_1}$ à l'engagement initial $L_0 = E\left(\Lambda_0\right) + RM_0$. On peut noter que pour le calcul de la *VaR*, la règle de l'horizon d'un an conduit à remplacer Λ_0 par $\frac{F_1 + L_1}{1+R_1}$.

1.2. Simplification de la marge pour risque

L'expression ci-dessous doit être explicitée car le SCR intervient également dans le terme L_0 au travers de la marge pour risque. Comme $L_0 = BEL_0 + RM_0$ et que la marge pour risque est de la forme $RM_0 = \alpha \sum_t E\left(SCR_t\right) \times e^{-rt}$, en utilisant l'approximation $RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR$, avec D_0 la duration de l'engagement, soit $D_0 = \frac{\sum_{t \geq 0} t \times E\left(F_t\right) \times e^{-rt}}{\sum_{t \geq 0} E\left(F_t\right) \times e^{-rt}}$ on obtient que :

$$SCR = VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1+R_1}\right) - BEL_0 - \alpha \times D_0 \times SCR$$

et on en déduit finalement que :

$$SCR = \frac{1}{1 + \alpha \times D_0}\left(VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1+R_1}\right) - BEL_0\right).$$

Il reste à justifier l'approximation $RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR$; pour cela on fait l'hypothèse que le SCR à chaque date est proportionnel au *best estimate,* soit $SCR_t = k \times BEL_t$ ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} RM_0 &= \alpha \times k \times \sum_t E\left(BEL_t\right) \times e^{-rt} = \alpha \times k \times \sum_t E\left(\sum_{u \geq t} E_t\left(F_u\right) \times e^{-r(u-t)}\right) \times e^{-rt} \\ &= \alpha \times k \times \sum_t \left(\sum_{u \geq t} E\left(F_u\right) \times e^{-ru}\right) \end{aligned}$$

Comme $\sum_t \left(\sum_{u \geq t} E\left(F_u\right) \times e^{-ru}\right) = \sum_u uE\left(F_u\right) e^{-ru} = D_0 \times BEL$ on trouve que :

$$RM_0 = \alpha \times k \times D_0 \times BEL.$$

Mais comme par définition de *k* on a en $t = 0$ $k = \frac{SCR}{BEL}$ on obtient bien finalement :

$$RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR.$$

On dispose donc maintenant d'une expression générale :

$$SCR = \frac{1}{1+\alpha \times D_0}\left(VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1+L_1}{1+R_1}\right) - BEL_0 \right)$$

dans laquelle interviennent les variables aléatoires $Z = F_1 + L_1$ et R_1.

1.3. Calcul conditionnellement à l'environnement financier

Pour le calcul de la marge pour risque à la date 1, RM_1, on utilise le fait que $k = \frac{SCR_t}{BEL_t}$ est une constante indépendante de t et donc $RM_1 = \alpha \times D_1 \times SCR_1$, ce qui conduit finalement à $RM_1 = \alpha \times k \times D_1 \times BEL_1$ et donc à l'expression suivante de la provision à la date 1 (qui est donc une variable aléatoire) :

$$L_1 = BEL_1 \times (1 + \alpha \times k \times D_1).$$

Ainsi, conditionnellement à R_1, il convient de déterminer la loi de la variable aléatoire :

$$Z = F_1 + BEL_1 \times (1 + \alpha \times k \times D_1)$$

Dans le cas d'un contrat comme précédemment, on a $I_t = \left\{ i \in I \middle| T_{x_i} \geq t, \tau_i \geq t \right\}$ et on écrit :

$$\Lambda = \sum_{i \in I \setminus I_1} X_i + \sum_{i \in I_1} X_i = e^{-r} F_1 + \sum_{i \in I_1} X_i$$

<u>Remarque</u> : $\Lambda = \sum_{i \in I} X_i$ peut être approchée par une loi normale. On considère la sous-famille $I_1 \subset I$ des individus encore à risque en $t = 1$ et on pose $\Lambda_1 = \sum_{i \in I_1} X_i^+(1)$ où on a noté $X_i^+(1) = X_i | i \in I_1$. Conditionnellement à $I_1 \subset I$, cette variable est également approximativement gaussienne. Cela permet d'écrire :

$$E\left(e^{u\Lambda_1}\right) = E\left(E\left(e^{u\Lambda_1} | I_1\right)\right) = E\left(e^{uE(\Lambda_1|I_1) + \frac{u^2}{2}V(\Lambda_1|I_1)}\right)$$

et donc :

$$E\left(e^{u\Lambda_1}\right) = \sum_{I_1 \subset I} P(I_1) e^{uE(\Lambda_1|I_1) + \frac{u^2}{2}V(\Lambda_1|I_1)}$$

où $P(I_1)$ est la probabilité de réalisation de l'ensemble I_1 ce qui montre que Λ_1 n'est pas gaussienne et que sa loi est un mélange de lois normales décrit par l'équation ci-dessus.

La loi de $Z = F_1 + BEL_1 \times (1 + \alpha \times k \times D_1)$ n'est donc pas simple à déterminer ; par contre on peut raisonnablement, à la date 0, approximer $F_1 + E_1(\Lambda_1)$ par $e^r \Lambda = F_1 + \sum_{i \in I_1} e^r X_i$ qui est distribué selon une loi normale. On a $\Delta = F_1 + E_1(\Lambda_1) - e^r \Lambda = \sum_{i \in I_1} E_1\left(X_i^+(1)\right) - \sum_{i \in I_1} e^r X_i$, mais par définition de $X_i^+(1)$, $\sum_{i \in I_1} E_1\left(X_i^+(1)\right) - \sum_{i \in I_1} e^r X_i = \sum_{i \in I_1} \left(E_1\left(e^r X_i\right) - e^r X_i \right)$ et en d'autres termes Δ est l'écart entre une variable et son espérance conditionnelle et est donc de variance minimale. Cela légitime l'approximation (au sens de la norme L^2).

A ce stade on a donc prouvé qu'il était possible d'approcher la loi de $Z_1 = F_1 + BEL_1$ par la loi normale de $e^r \Lambda$. Mais on doit considérer $Z = F_1 + BEL_1 \times (1 + \alpha \times k \times D_1)$, qui n'a plus de raison d'être gaussienne, n'ayant pas de lien simple avec $e^r \Lambda$. Cependant le terme correctif $1 + \alpha \times k \times D_1$ qui est en toute rigueur une variable aléatoire (vu de $t = 0$) peut être approché par la constante $c = 1 + \alpha \times k \times (D_0 - 1)$; cette constante est par ailleurs petite et on majore donc légèrement Z en considérant $Z_c = c \times (F_1 + BEL_1)$ dont la loi est finalement approximativement égale à celle de $\Lambda_c = c \times e^r \times \Lambda$.

Alors comme $BEL_0 = E(\Lambda)$:

$$VaR_{99,5\%}(\Lambda_c) = c \times e^r \times \left(BEL_0 + u_{99,5\%} \times \sigma(\Lambda) \right)$$

et alors, conditionnellement à R_1 :

$$SCR | R_1 = \frac{1}{1 + \alpha \times D_0} \left(c \times e^r \times \frac{BEL_0 + u_{99,5\%} \times \sigma(\Lambda)}{1 + R_1} - BEL_0 \right)$$

Dans le cas particulier où il n'y a pas de risque financier, alors $e^r = 1 + R_1$ et donc :

$$SCR = \frac{(c-1) \times BEL_0 + u_{99,5\%} \times \sigma(\Lambda)}{1 + \alpha \times D_0}.$$

1.4. Cas général

Dans le cas général on doit calculer $SCR = VaR_{99,5\%}\left(SCR | R_1 \right)$, ce qui équivaut à calculer le quantile à 99,5 % de la variable aléatoire $\frac{1}{1 + R_1}$ (ou encore e^{-r_1} dans une logique d'actualisation continue).

Plus précisément on doit calculer $\pi(x) = P\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1} \le x \right) \approx P\left(c \times e^{r - r_1} \times \Lambda \le x \right)$ ce qui conduit à l'expression :

$$\pi(x) = P\left(\Lambda \le \frac{x}{c} e^{r_1 - r}\right) = E_{r_1} \phi\left(\frac{\frac{x}{c} e^{r_1 - r} - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)}\right)$$

et finalement :

$$\pi(x) = \int \phi\left(\frac{\frac{x}{c} e^{u - r} - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)}\right) f_{r_1}(u)\, du .$$

Si $\mathbf{ln}(r_1)$ est gaussienne de paramètres (μ_1, σ_1^2) alors

$$\pi(x) = \int \phi\left(\frac{\frac{x}{c} e^{u - r} - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)}\right) \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \mathbf{exp}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) du$$

Il reste ensuite à inverser cette expression.

$$r + \mathbf{ln}\left[\frac{c}{x}\left(E(\Lambda) + v\sigma(\Lambda)\right)\right] = u \ ; \ \frac{\sigma(\Lambda)}{E(\Lambda) + v\sigma(\Lambda)} dv = du$$

2. Application à un portefeuille de mixtes

On considère un portefeuille composé d'un ensemble d'assurés $i \in I$ bénéficiant d'un contrat garantissant :

- le paiement d'un capital K_i^D en cas de décès avant le terme τ_i du contrat ;

- le versement d'un capital K_i^T en cas de vie au terme du contrat.

On note T la variable aléatoire générique sous-jacente pour la description de la survie et $T_t = T - x | T > x$ la durée de survie résiduelle au-delà de l'âge *x*.

La prestation actualisée à la date initiale peut alors s'écrire :

$$X = K^D \times e^{-rT_x} \times 1_{\{T_x < \tau\}} + K^T \times e^{-r\tau} \times 1_{\{T_x \ge \tau\}}$$

La somme des prestations actualisées à la date 0 est $\Lambda = \sum_{i \in I} X_i$. On sait que pour un portefeuille assez grand, Λ est approximativement distribuée selon une loi normale, donc les caractéristiques ne dépendent que des deux premiers moments de la loi de *X*.

On a facilement, conditionnellement à l'environnement financier :

$$\mathbf{E}\left(X\right)=K^{D}\times\int_{0}^{\tau}e^{-rt}f_{T_x}\left(t\right)dt+K^{T}\times e^{-r\tau}\times S_{x}\left(\tau\right)$$

$$\mathbf{E}\left(X^{2}\right)=\left(K^{D}\right)^{2}\times\int_{0}^{\tau}e^{-2rt}f_{T_x}\left(t\right)dt+\left(K^{T}\right)^{2}\times e^{-2r\tau}\times S_{x}\left(\tau\right)$$

et donc on peut déterminer l'espérance et la variance de *X* simplement. Si le taux sans risque n'est pas constant on a

$$X=K^{D}\times D\left(T_{x}\right)\times 1_{\{T_x<\tau\}}+K^{T}\times D\left(\tau\right)\times 1_{\{T_x\geq\tau\}}$$

où $D\left(t\right)=\mathbf{exp}\left(-\int_{0}^{t}r\left(u\right)du\right)$.

Plus généralement, *X* peut être calculé à une date *t* future où il représente alors les prestations à régler postérieurement à la date *t* et devient alors :

$$X^{+}\left(t\right)=K^{D}\times D\left(t,t+T_{x+t}\right)\times 1_{\{T_{x+t}<\tau-t\}}+K^{T}\times D\left(t,\tau\right)\times 1_{\{T_{x+t}\geq\tau-t\}}$$

avec $D\left(t,T\right)=\mathbf{exp}\left(-\int_{t}^{T}r\left(u\right)du\right)$. Le montant de la provision *best estimate* à la date *t* est alors, en notant $\Lambda_{t}=\sum_{i\in I_t}X_{i}^{+}\left(t\right)$, l'ensemble I_t étant constitué des individus encore vivant en t et dont le terme du contrat est postérieur à *t*, soit $I_{t}=\left\{i\in I\left|T_{x_i}\geq t,\tau_{i}\geq t\right.\right\}$:

$$E_{t}\left(\Lambda_{t}\right)=E_{t}\left(\sum_{i\in I_t}X_{i}^{+}\left(t\right)\right).$$

Par ailleurs $E_{t}\left(X^{+}\left(t\right)\right)=-K^{D}\times\int_{0}^{\tau-t}D\left(t,t+u\right)\times dS_{t,T_{x+t}}\left(u\right)+K^{T}\times D\left(t,\tau\right)\times S_{t,T_{x+t}}\left(\tau-t\right)$; $S_{t,T_{x+t}}$ est la loi de T_{x+t} conditionnelle à $T_{x}\geq t$. On a :

$$S_{t,T_{x+t}}\left(u\right)=P\left(T_{x+t}>u\left|T_{x}>t\right.\right)=\frac{P\left(T_{x}>t+u\right)}{P\left(T_{x}>t\right)}=\frac{S_{T_x}\left(t+u\right)}{S_{T_x}\left(t\right)}.$$

On peut remarquer que comme $E_{t}\left(\Lambda_{t}\right)=\sum_{i\in I_t}E_{t}\left(X_{i}^{+}\left(t\right)\right)$ est la somme de variables aléatoires indépendantes et uniformément bornées, sa loi est approximativement gaussienne. Pour obtenir la provision technique, il reste à ajouter à la provision *best estimate* la marge pour risque.

Bibliographie

PLANCHET F., THÉROND P.E., JACQUEMIN J. [2005] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques*, Paris : Economica.

SAPORTA G., *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip, 1990.