Modèles financiers en assurance: AGRÉGATION DES RISQUES ET ACCELERATEURS DE CONVERGENCE DES NESTED STOCHASTICS

11 Mai 2016

Oberlain NTEUKAM T.
Actuaire Expert ERM
Oberlain.nteukam.teuguia@hsbc.fr

HSBC Assurances

HSBC

Sommaire

- 1.0 Bilan économique
- 1.1 Calcul du SCR
- 1.2 Des exigences réglementaires au pilotage du risque
- 1.3 Les défis opérationnels
- 1.4 conclusions

Une meilleure connaissance du risque du portefeuille implique de pouvoir anticiper l'évolution du bilan économique en fonction des facteurs de risques identifiés.

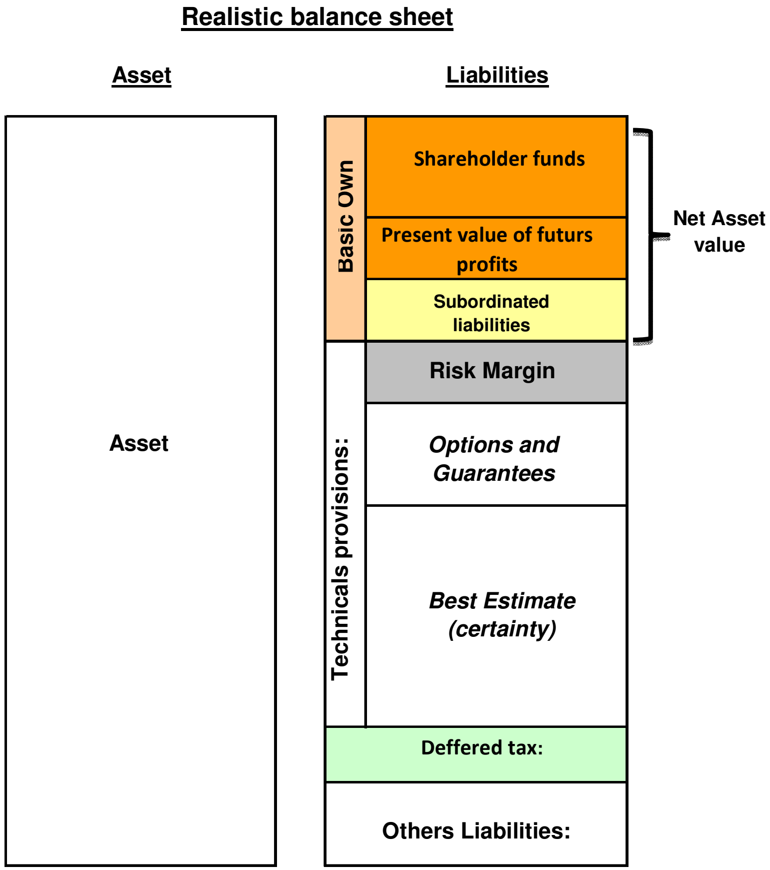
Par exemple, pour une composante C (Net asset value, Best estimate…) du bilan économique ci-contre, la valeur à l'instant t s'écrit:

$$C(F_t) = E_{Q_t}\left[\sum_{u=t+1}^{T} f_u(C) \times DF(t,u) \middle| F_t\right]$$

Où :

- F_t représente le vecteur des facteurs de risque (Courbe de taux, Indice action, Taux de rachats…) à l'instant t,
- Q_t est la mesure de risque neutre à l'instant t,
- $f_u(C)$ est le flux à l'instant $u \geq t$ associé à la composante C,
- $DF(t,u)$ est le facteur d'actualisation du flux de la période $u \geq t$.

Le bilan économique est impacté par plusieurs facteurs de risques (taux d'intérêt, Action, Immobilier, Mortalité,…). L'analyse des impacts conjoints de ces risques sur le bilan économique nécessite **« d'agréger les risques ».**

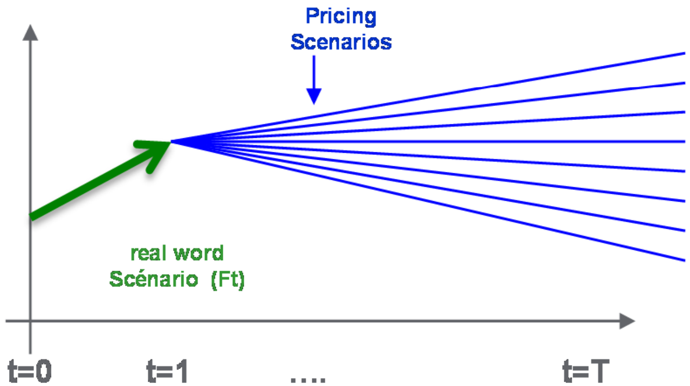


En pratique : il n'existe en général pas de formule analytique pour cette espérance conditionnelle :

- Du fait du caractère path-dependent des flux $f_u(C)$,
- Des inter-actions entre le passif et l'actif,
- Du fait de l'existence des options aux passifs liées aux caractéristiques des contrats (Taux Minimum Garanti, Participation aux Bénéfices, option de rachat…).

$C(F_t)$ peut-être estimée par Monte Carlo par

$$C(F_t) \approx C_K(F_t) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{u=t+1}^{T} f_u^k(C) \times DF^k(t,u) \middle| F_t\right]$$

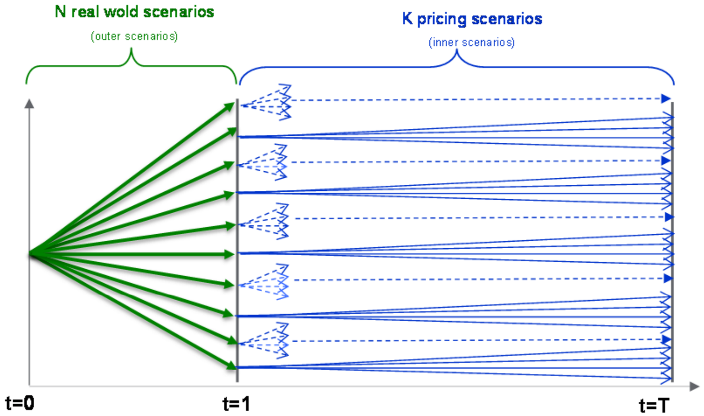


Le plus souvent cette méthode est utilisée pour la valorisation du bilan en t=0 :

- La valeur économique des actifs est observée sur le marché,
- Le passif est évalué par *monte-carlo* en utilisant les principes de valorisation définie par l'EIOPA, les normes IFRS ou les règles Internes.

Lorsque $t \geq 1$, F_t et $C(F_t)$ deviennent aléatoires. Pour déterminer la distribution de $C(F_t)$, on peut utiliser l'approche dite **« Nested Scenarios » :**

Lorsqu'on utilise la méthode *Monte Carlo* pour estimer un grand nombre N de $C(F_t)$, $\{C(F_t^n), n = 1...N\}$ on parle de **« Nested Scenarios ».**



On considère un portefeuille d'assurance de personnes constitué de 1 000 000 d'individus.

Si le modèle de projection de cash-flow nécessite un dixième de seconde pour chaque individu, alors une projection de l'ensemble du portefeuille nécessite environ 1,16 jour(s).

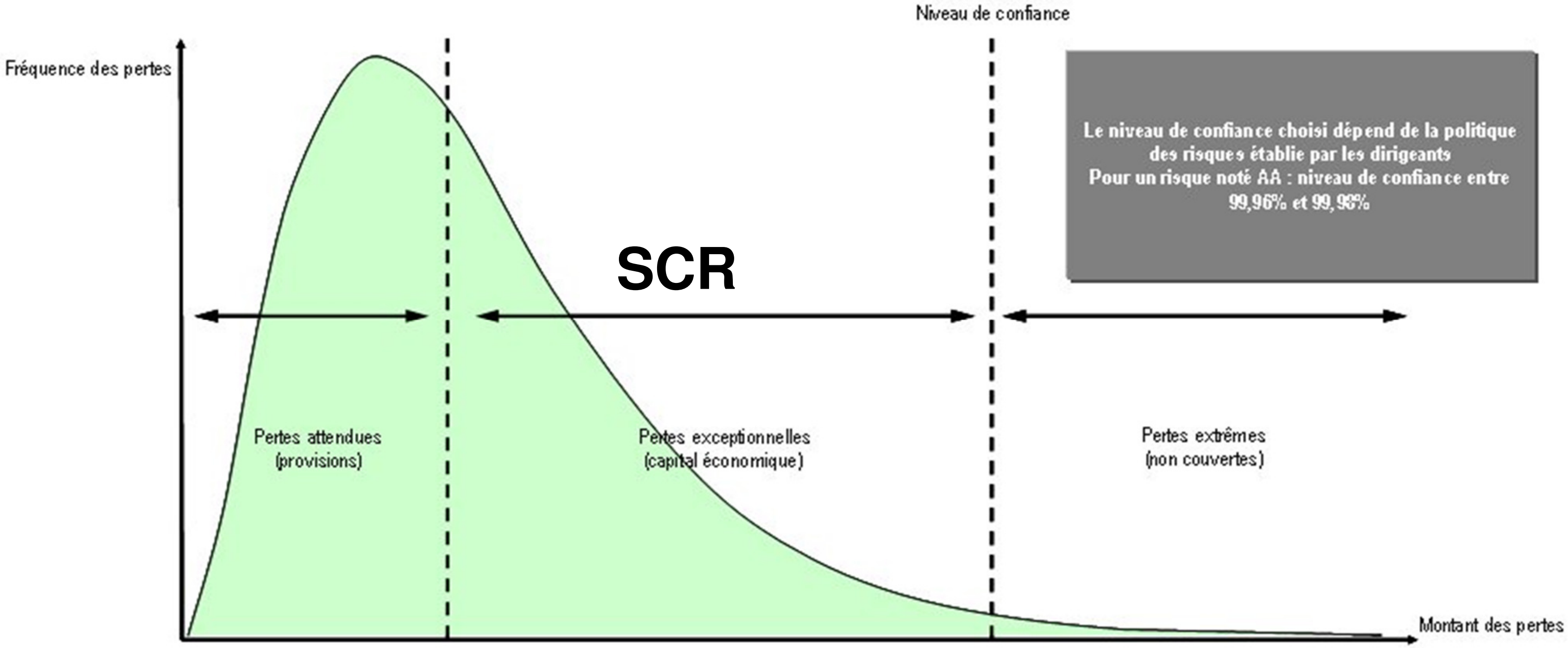
Une simulation *monte carlo* de 5 000 scenarios est extrêmement chronophage : **5 587 jours, soit 16 ans de temps de calcul…**

Dans la pratique, plusieurs approches permettent de contourner ces difficultés :

- l'agrégation des passifs,
- l'utilisation des *« computer cluster »*,
- l'utilisation des *« quasi monte carlo »*,
- les techniques d'accélération de la convergence des Nested Scénarios.

Calcul du SCR

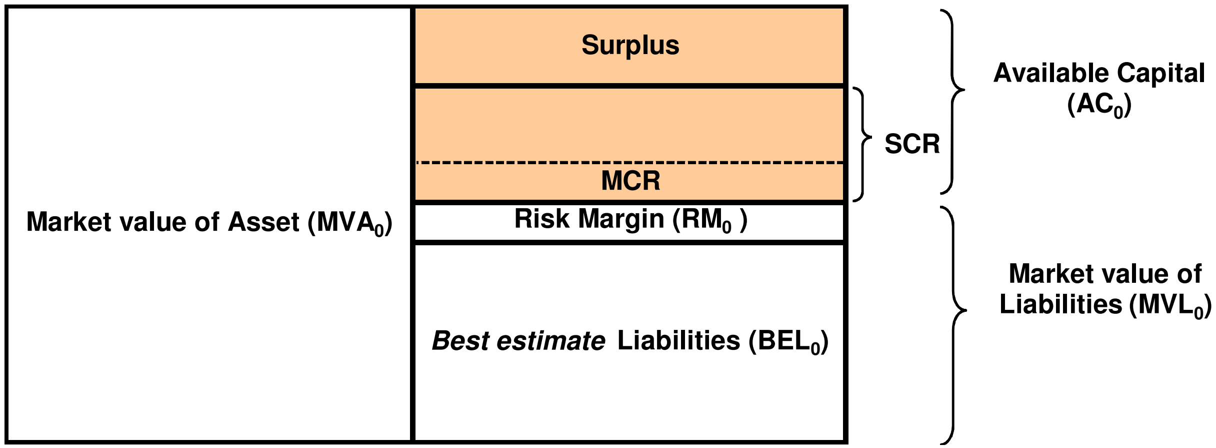
➢Le SCR représente le montant de capital nécessaire à faire face à une ruine dans 1 an avec une probabilité de 99,5%.



Calcul du SCR

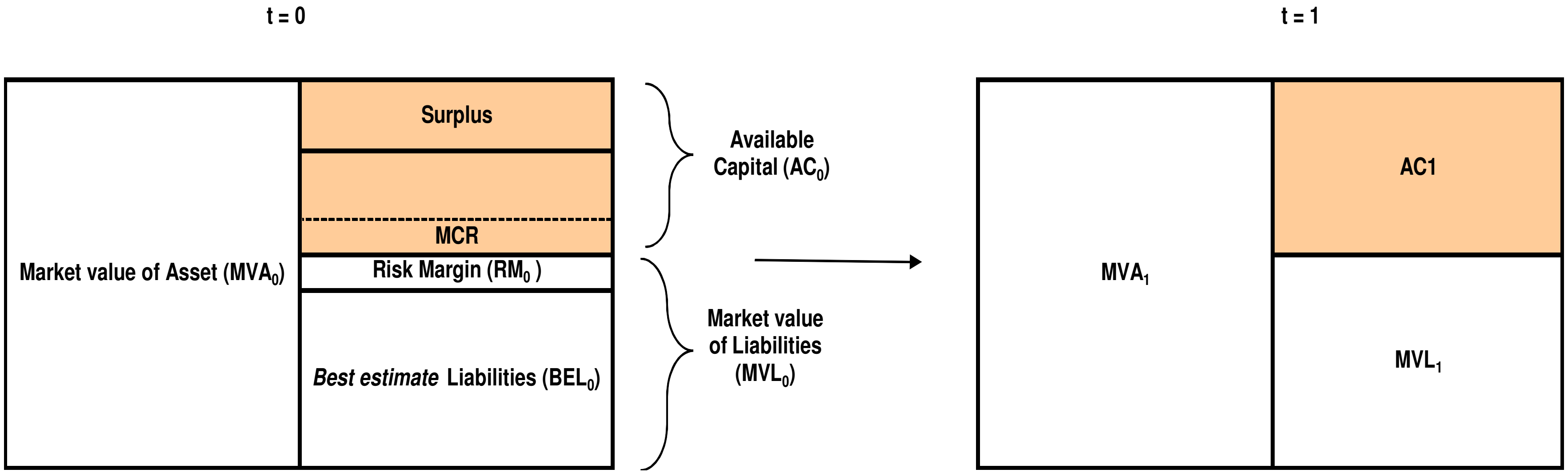
- Le SCR représente le montant de capital nécessaire à faire face à une ruine dans 1 an avec une probabilité de 99,5%.

- Formellement, le bilan économique en date de calcul se présente sous la forme suivante:



Calcul du SCR

- Le calcul du SCR nécessite de projeter le bilan économique sur une année:



- Concrètement, on cherche le montant du SCR tel que : $\text{Proba}(AC_1 \geq 0) = 99{,}5\%$

Calcul du SCR

- Formellement: $AC_1 = MVA_1 - MVL_1$
  et $MVA_1 = MVA_0 \times (1 + r_1) - F_1 + C_1$

- Avec :
  - ✓ r_1 le rendement financier constaté sur le stock MVA_0 sur l'année 1:

$$r_1 = \frac{MVA_0^1 + \text{Produits Financiers}}{MVA_0} - 1 \text{; où } MVA_0^1 \text{ la valeur de marché du stock initial en fin de l'année 1}$$

  - ✓ F_1 les flux sortants (désinvestissement, flux de prestations, etc.) sur l'année 1
  - ✓ C_1 les flux entrants (Investissement, flux de cotisations, etc.) sur l'année 1

$$\Rightarrow AC_1 = MVA_0 \times (1 + r_1) - F_1 + C_1 - BEL_1$$
$$= (MVL_0 + SCR + Surplus) \times (1 + r_1) - F_1 + C_1 - MVL_1$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{1 + r_1} = MVL_0 + SCR + Surplus + \frac{C_1 - F_1 - MVL_1}{1 + r_1}$$

Calcul du SCR

- si on s'intéresse seulement à la partie du bilan en représentation des engagements, on peux supposer, sans nuire à la généralité, lors du calcul du SCR que Surplus=0:

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{1+r_1} = MVL_0 + SCR + \frac{C_1 - F_1 - MVL_1}{1+r_1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proba}(AC_1 \geq 0) &= \mathrm{Proba}\left(SCR \geq \frac{F_1 + MVL_1 - C_1}{1+r_1} - MVL_0 \right) \\
&= \mathrm{Proba}\left(SCR \geq \frac{MVL_1 + F_1 - C_1 - (1+r_1)\times MVA_0}{1+r_1} + MVA_0 - MVL_0 \right) \\
&= \mathrm{Proba}\left(SCR \geq -\frac{NAV_1}{1+r_1} + NAV_0 \right)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

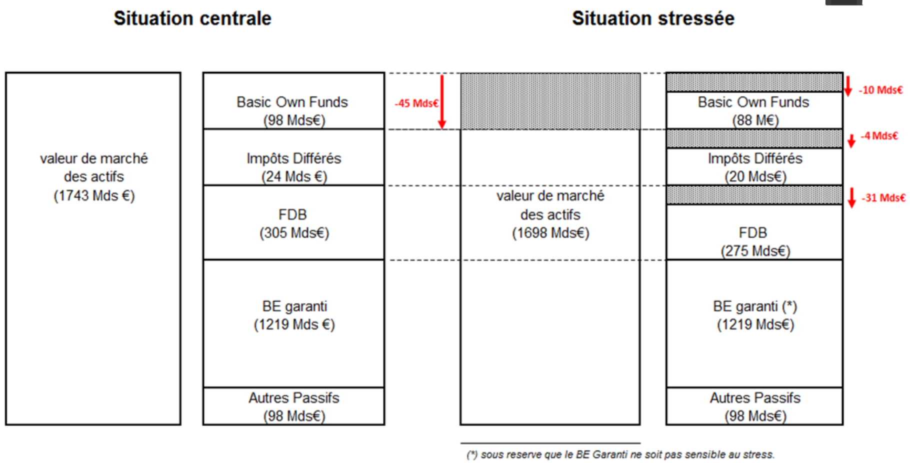
$$\mathrm{Proba}(AC_1 \geq 0) = 99{,}5\% \Leftrightarrow SCR = AC_0 - \mathrm{Var}_{99{,}5\%}\left(\frac{AC_1}{1+r_1} \right)$$

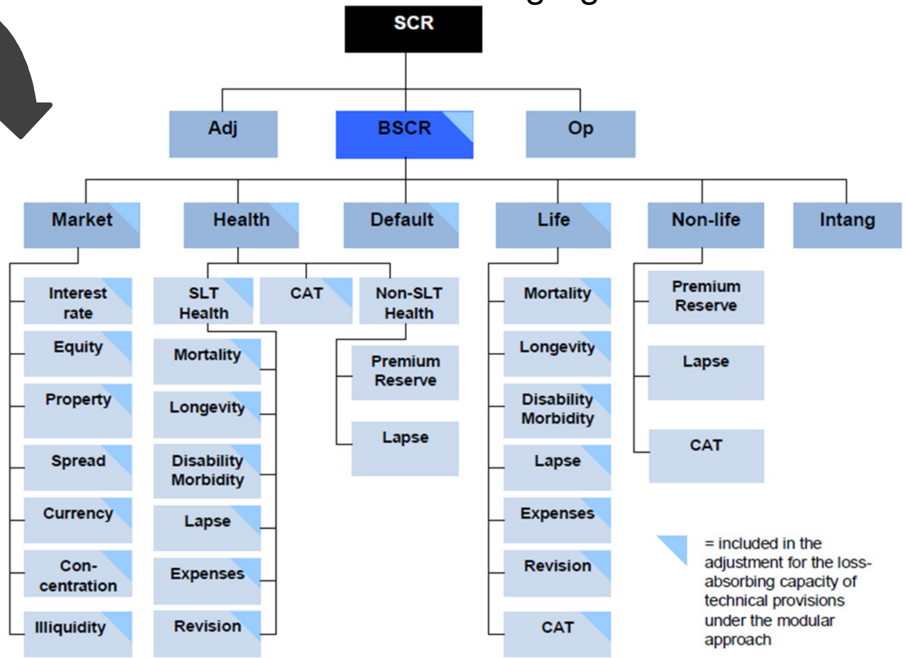
Calcul du SCR

Deux approches peuvent être envisager lors du calcul du SCR:

➢ **La formule standard** : Le calcul du SCR est effectué au travers des stress du bilan en t=0. On obtient ainsi la valeur du SCR en deux étapes:

1. Calcul de la variation de l'actif net (AC, NAV) pour chacun des stress spécifiés par le régulateur (Stress de taux, action, mortalité, rachats, ….);
2. Agrégation des valeur de variation du capital en fonction des matrices d'agrégation des risques.

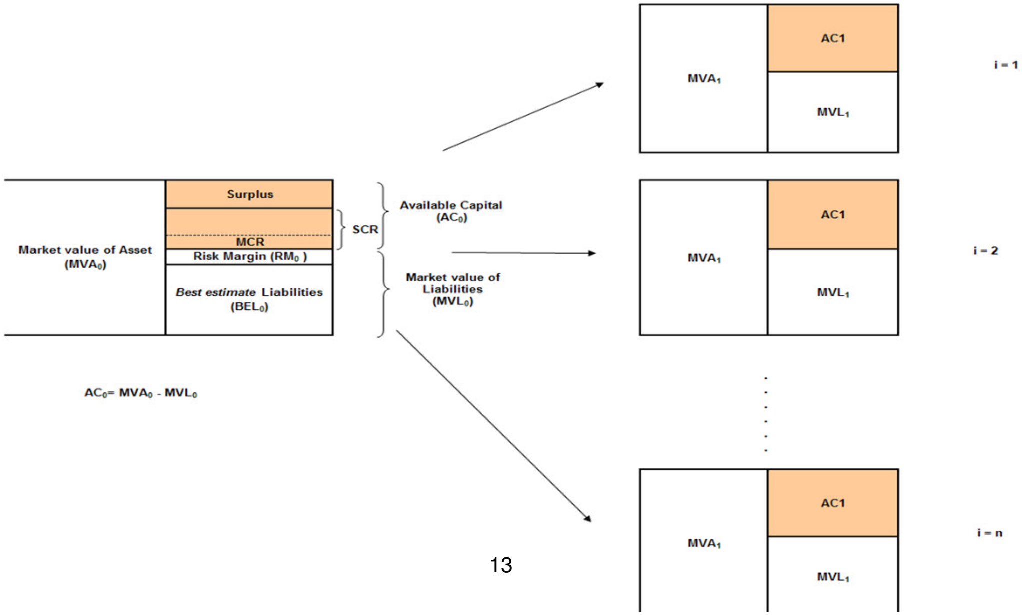




Calcul du SCR

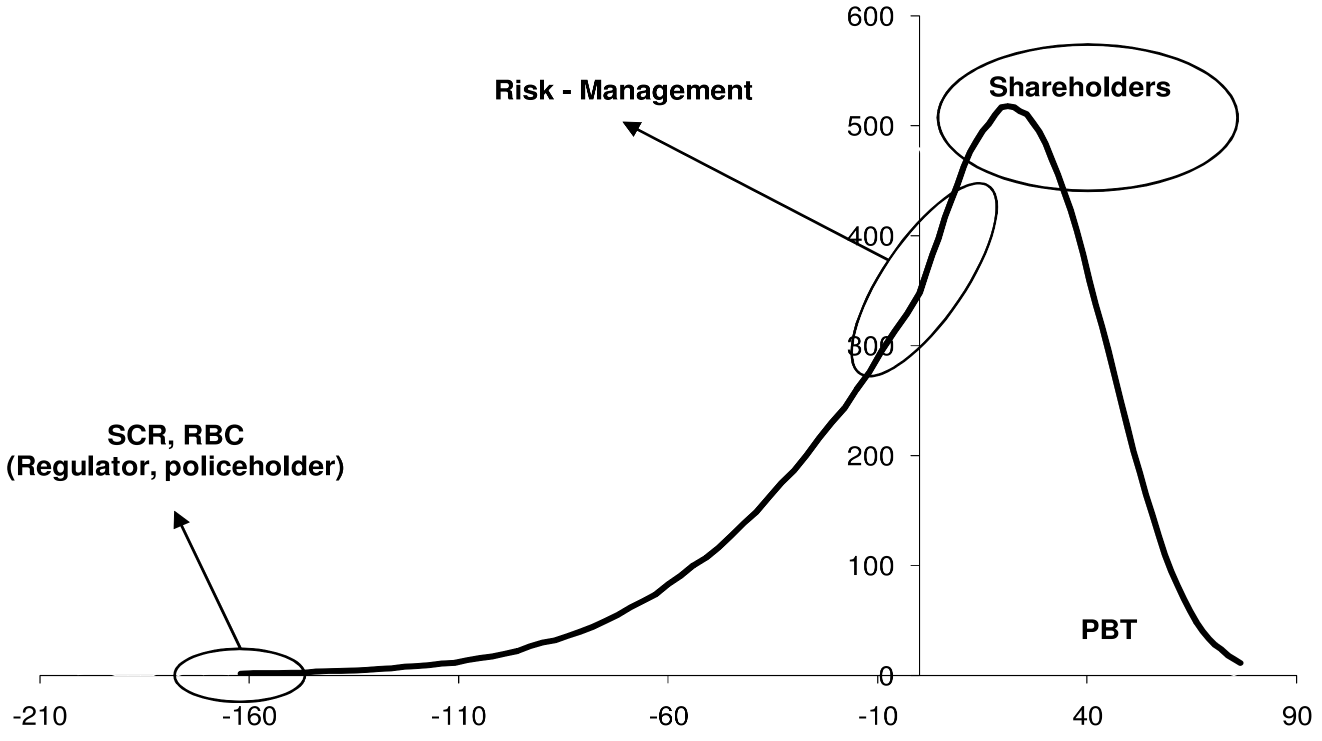
➢ **Les modèles internes (partiels)**: Le calcul du SCR est effectué au travers :

1. **Un choix des paramètres de calibration spécifiques** : dans ce contexte la technique de calcul est similaire à la formule standard, seules la calibration changes: nouvelles matrices d'agrégation, chocs différents de ceux de la formule standard…
2. **Modèle interne (partiel) :** en l'occurrence le calcul du SCR nécessite de projeter le bilan sur une année, et pour chaque scénario, il faut déterminer le couple : $\left(r_1^i, NAV_1^i\right)_{1 \le i \le n}$ permettant d'obtenir la distribution du rendement financier et de la NAV dans un an.



En réalité la détermination du SCR s'inscrit dans une logique globale de gestion des risques.

➢On s' intéresse à la variation de l'actif net sur un an: $PBT^{Eco} = AC_0 - \frac{AC_1}{1+r_1}$



En réalité la détermination du SCR s’inscrit dans une logique globale de gestion des risques.

➢La distribution de la variation du capital permet d’associer les besoins réglementaires, à ceux du risk-management et aux problématiques de rémunération des fonds propres.

➢Ainsi, la détermination de la distribution de la variation de l’actif net permet de répondre à la triple problématiques:

1. Actionnaires : Rentabilité des fonds propres;
2. Risk-management : détermination des limites de déclenchement des actions de managements:
3. Régulateur : calcul du SCR, MCR, RBC,…

➢Elle contribue donc à répondre aux problématique ORSA et Risk Appetite

➢**Les avantages de la mise en œuvre d’un modèle Actif/Passif sont donc nombreux.**

❖ La problématique des temps de calcul

➢ **<u>at t=0</u>**, we have : $AC_0 = PVFP_0 + VMFP_0$

$$\text{with}: \begin{cases} PVFP_0 \text{ is the present value of future profits post - taxation at } t = 0; \\ VMFP_0 \text{ is the statutory shareholders equity at } t = 0. \end{cases}$$

Value of $VMFP_0$ does not require simulations. It can be calculated from statutory balance sheet figures and the market value of asset.

No closed form solution for $PVFP_0$

$$PVFP_0 = E^Q\left[\sum_{t=1}^{T} DF(0,t)X_t\right] \quad \text{with} \begin{cases} X_t : \text{profit of the year } t; \\ DF(0,t) : \text{discount factor between year 0 and year } t. \end{cases}$$

we use *monte carlo* simulation for valuation:

$$\overline{PVFP_0} = \frac{1}{K_0}\sum_{k=1}^{K_0}\sum_{t=1}^{T} DF^k(0,t)X_t^k$$

❖ La problématique des temps de calcul

- **<u>at t=1</u>**, we need to determine the real world distribution of available capital:

$$AC_1 = PVFP_1 + VMFP_1 + X_1$$

✓ $PVFP_1 = E^Q\left[\sum_{t=2}^{T} DF(1,t)X_t \Big/ RF_1\right]$

RF_1 is the risk factor at year 1 (it so called *state process* and it resume all possible movement of market on at year 1).

✓ $X_1 = PF_1 / RF_1$: conditionnal profit of the year 1;

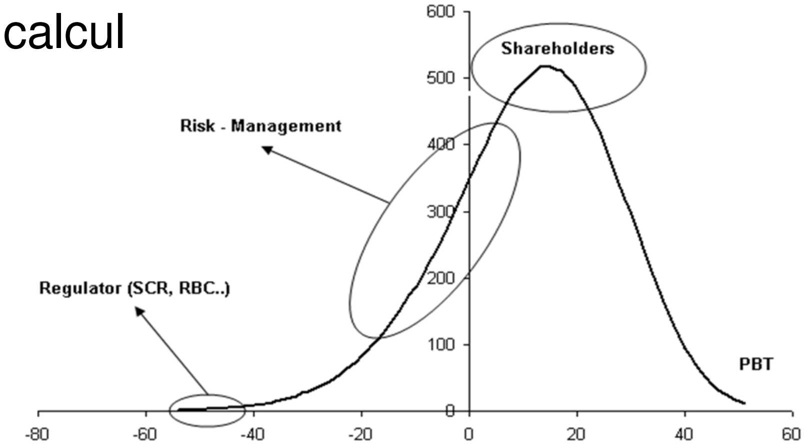
For N simulation of state process RF_1, we calculate : $\left(\overline{PVFP}_1^i\right)_{1\le i\le N}$

Where : $\overline{PVFP}_1^i = \frac{1}{K_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{t=2}^{T} DF^{(i,k)}(1,t)\times X_t^{(i,k)}$

❖ La problématique des temps de calcul

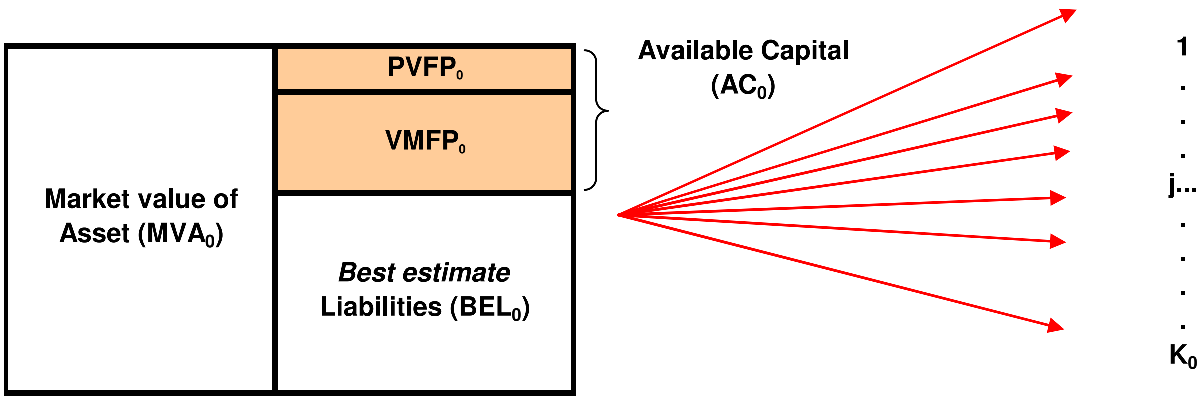
- For example, to build distribution of economic PBT at time t =1:

$$PBT^{Eco} = AC_0 - \frac{AC_1}{1+r_1}$$



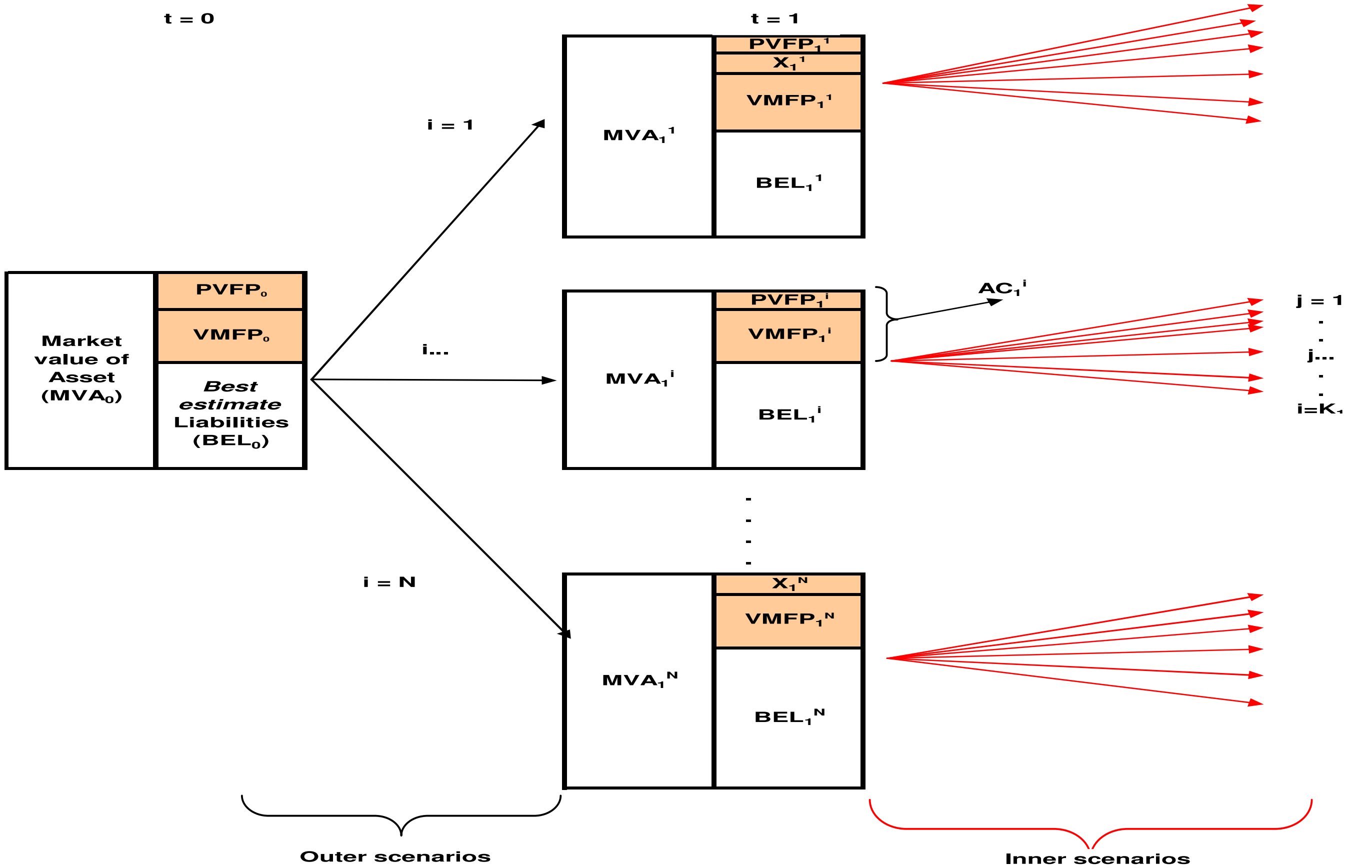
We make:

a) Valuation at t = 0 : **Simulate K_0 paths risk-neutral probability**



❖ La problématique des temps de calcul

b) Valuation at t = 1 : Simulate N first-year paths under real world and K_1 paths under risk-neutral probability: N x K_1 paths



1. Motivations
1. 3. Les défis opérationnels

❖ La problématique des temps de calcul

Finally, we :

- ✓ simulate K_0 paths risk-neutral probability for valuation at t=0;
- ✓ Simulate N first-year paths under real probability;
- ✓ Simulate K_1 paths under risk-neutral probability Valuation at t = 1

➡ **K_0 + N x K_1 paths : Main computational issue**

➢ For example, if we need 15 minutes to complete 1000 risk neutral scenarios = 10 days for nested stochastic run (1000 X 1000)

❖ Qualité des résultats de l'estimation

- Within our asset-liability model, we have three sources of error:
  - ✓ first, we estimate the available Capital at t = 0 with the help of (only) K_0 sample paths;
  - ✓ second, we only use N real-world scenarios to estimate the distribution function;
  - ✓ and, third, the available Capital at t = 1 is estimated with the help of (only) K_1 sample paths in every scenario.
- For example, to measure quality of estimation of RBC, we can estimate the mean-square error (MSE) by:

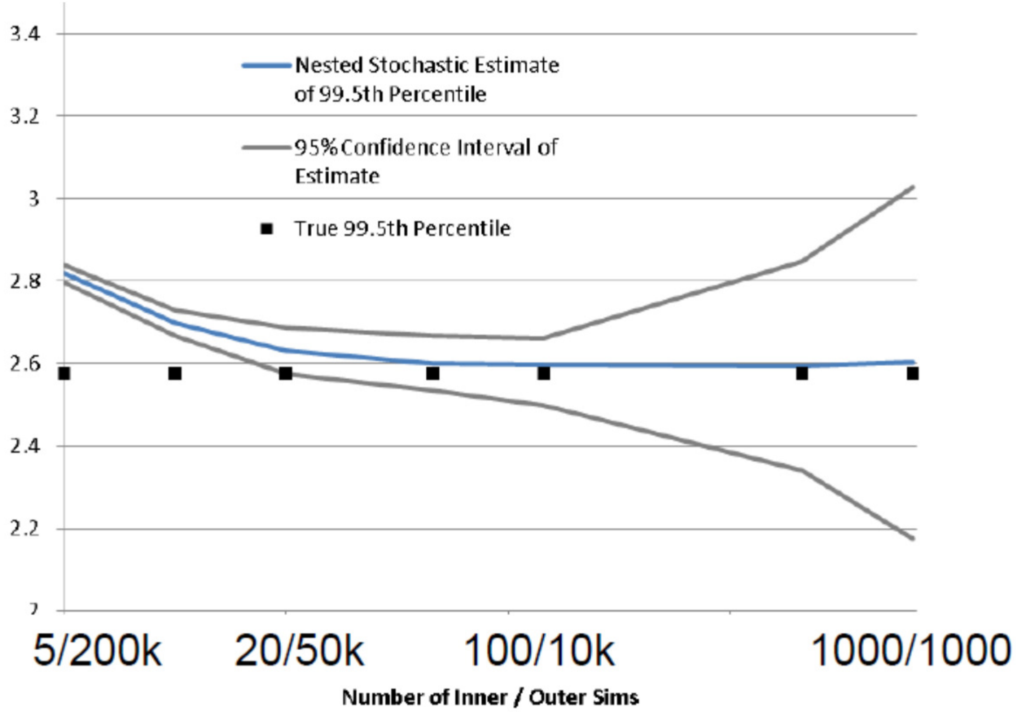
$$\mathrm{MSE} = \mathrm{E}\left[\left(\overline{RBC} - RBC\right)^2\right]$$

- To optimize our estimate, we would like to choose K_0, K_1 and N such that the MSE is as small as possible.
- BAUER D. and al [2009] shows that: $$\mathrm{MSE} = \frac{\sigma_0^2}{K_0} + \frac{\theta_\alpha^2}{K_1^2 \times f(RBC)} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(N+2)\times f^2(RBC)}$$

For nested stochastic VaR capital estimate, outer scenarios are much more important than inner scenarios.

❖ Qualité des résultats de l'estimation

➢ **Other example:** Estimate the 99.5th standardized percentile of the value of an equity option**:**



If outer scenarios are much more important than inner scenarios, bias is evident where inner scenarios are too few

1. Motivations
1. 4. Conclusions

- La mise en œuvre d’un modèle actif / passif pour la gestion du risque d’un contrat d’assurance vie requiert un volume de calculs très important.

- Concrètement, si la simulation du passif nécessite 2 à 3 minutes, une estimation robuste utilisant 10000 simulations de l’actif exige entre 14 et 21 jours en termes de temps de calcul.

- En effet, pour chaque scénario d’évolution de l’actif, l’ensemble du passif doit être simulé, du fait des interactions fortes entre l’actif et le passif au travers des rachats et participations aux bénéfices.

- En outre, l’erreur d’estimation du SCR dépend directement du nombre de simulations retenues.

- Que dit le QIS5?

  - La possibilité d'utiliser des techniques des techniques agrégation pour le passif est explicitement envisagée (TP.1.70.C).

  - Le calcul du best estimate peut se faire à l'aide des simulations (approche recommandée), des formules analytiques, une approche déterministe ou des techniques hybrides.

  - Concernant la technique des simulations, on trouve une première piste concernant la sélection des trajectoires à la section TP.1.68 à la page 35:

«Rather than considering all possible future scenarios, (re)insurance undertakings can choose a suitably large number of scenarios which are representative of all possible future ones. This approach is referred to as a "simulation technique" »

  - La problématique des temps de calcul est bien abordée dans le QIS5 (TP.1.70), qui ne ferme pas la porte au développement des nouvelles techniques. Ces dernières devant toutefois être documentées et auditables.

- Diverses approches ont été développées pour contourner la difficulté pratique de mise en œuvre des approches SdS :

  1. Least Square Monte Carlo,
  2. Curve fitting;
  3. Extreme location method;
  4. Aggregation of scenarios;
  5. Replicating portfolios.

- 2.0. Introduction
- 2.1. Least Square Monte Carlo
- 2.2. Curve fitting;
- 2.3. Extreme location method;
- 2.4. Aggregation of scenarios;
- 2.5. Replicating portfolios.

•Agrégation du passif : Principe

- L'agrégation d'un portefeuille est faite en construisant les classes de risques homogènes qu'il convient de croiser avec les caractéristiques du contrat d'assurance (niveau des cotisations, niveau des prestations…).

- **Les techniques d'agrégation du passif sont admises sous Solvabilité II sous réserve qu'elles n'introduisent pas de biais significatifs dans le profil de risque du portefeuille.**

- **Les étapes de la construction d'un « model Point » :**
  1. Identification des risques;
  2. Détermination des variables sous-jacents aux risques;
  3. Caractéristiques de l'assurance;
  4. Agrégation: croisement des facteurs de risque et des paramètres de l'assurance.

- **Exemple: Capital décès.**
  1. Identification du risque : risque de mortalité;
  2. Facteurs sous-jacents aux risques: âge (génération), sexe, secteur d'activité, …
  3. Caractéristiques de l'assurance: capital garanti en cas de décès;
  4. Agrégation selon l'âge, le sexe et le niveau de la garantie.

• Agrégation du passif : cas de la clusterisation

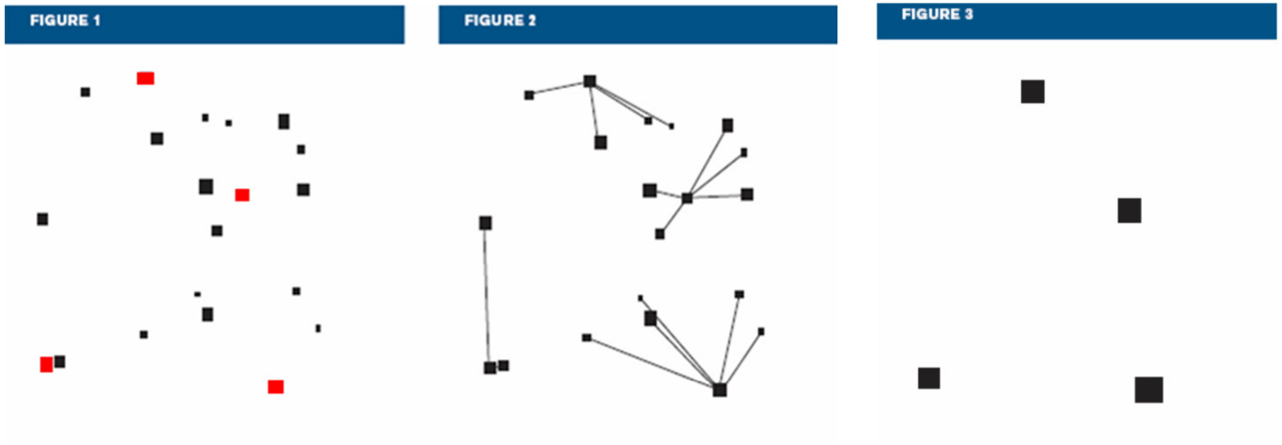
Les techniques de clusterisation vont plus loin dans l'agrégation des passifs. Elles sont basées sur la norme euclidienne qui mesure la distance entre deux individus comme :

$$d(Id_1;Id_2)=\sum_i \left(Var_1^i - Var_2^i\right)^2$$

Où les Var^i sont les facteurs de risque (normalisés) du portefeuille.

Pour un nombre N de model point cible fixé, les techniques de clusterisation consistent à déterminer les N barycentres du passif désagrégé.

FREEDMAN et REYNOLDS [2008] présentent l'application de cette technique sur un portefeuille d'assurance :



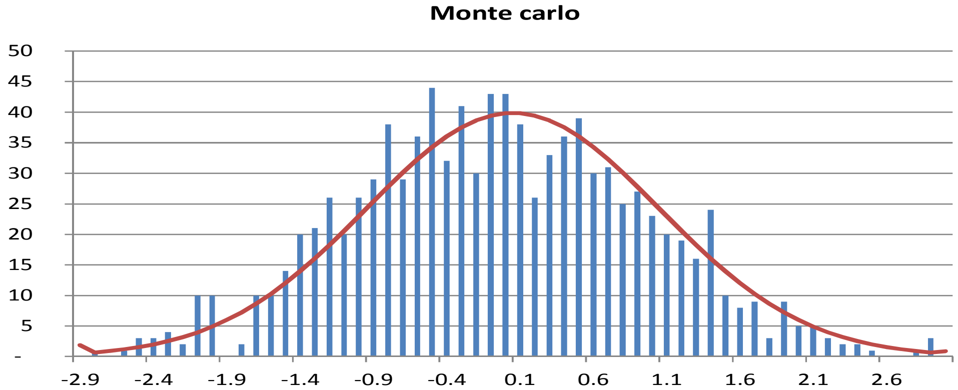
Seriatim data liabilities — Assign Policies to clusters — Gross up Central points

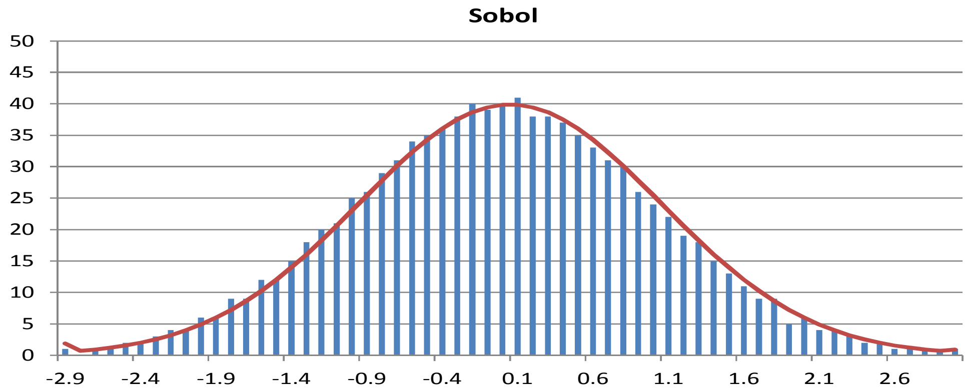
FREEDMAN et REYNOLDS [2008] montre que cette méthode de clustering conduit à réduire la taille du passif tout en conservant une précision extrêmement élevée.

• Principe : Choix des critères d’agrégation

- ❑ Selon les contrats, les critères d’agrégation peuvent varier :
- ❑ **Contrat en Euros** : Âge (génération) et Sexe pour le risque de décès, ancienneté (risque de rachat), TMG…
- ❑ **Garantie Décès** : Âge, Sexe, Niveau des prestations en cas de décès, niveau des cotisations;
- ❑ **Rente viagère** : Âge (génération), Sexe, taux technique, taux de réversion…
- ❑ …

Les graphiques suivants présentent la qualité de fitting d'une distribution normale centrée réduite par 1000 simulations *monte carlo* et quasi *monte carlo* (Sobol) :





On note une meilleure qualité de fitting pour la technique du *quasi monte carlo* pour un nombre de simulations identiques à celle du *monte carlo*.

• Description

L’idée centrale de la méthode de *least square monte carlo* (LSMC) est de reproduire le comportement du passif par une fonction prenant en input tous les facteurs de risque ciblés (variables économiques et/ou non économiques).

La fonction de comportement (ou de pricing) exacte du passif n’est pas connue, elle est approximée en s’inspirant de la méthode du développement limité. Cette technique consiste à déterminer une approximation de la fonction de comportement par une combinaison linéaire des fonctions de base appliquées aux facteurs de risque ciblés :

$$C(F_t) \cong \sum_{i=1}^{M} \overline{\alpha}_i \times L_i(F_t)$$

- $M \in \aleph^*$ est le nombre de régresseurs,
- $F_t = (F_t^1, F_t^2, \cdots, F_t^k)$ représentent le vecteur des facteurs de risque à l’instant t,
- $k \in \aleph^*$, le nombre total de facteurs de risque ciblés,
- $L(\ ) = (L_1(\cdot), L_2(\cdot), \cdots L_M(\cdot))$ représente une série de fonctions (appelée par la suite base de régression).

La justification théorique de cette approximation vient des propriétés des espérances conditionnelles dans un espace de Hilbert. En effet, $C(F_t) = E_{Q_t}\left[\sum_{u=t+1}^{T} f_u(C) \times DF(t,u) \middle| F_t\right]$ est un élément d’un espace de Hilbert L_2, $C(F_t)$ peut s’exprimer comme une combinaison linéaire d’un ensemble dénombrable des fonctions orthonormales mesurables sur L_2 :

$$C(F_t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \times L_i(F_t) = L(F_t) \times \alpha^t$$

2. Accélérer la convergence des Nested Scénarios

2.1. Least Square Monte Carlo

- **Description**

Soit $M \in \aleph^*$, un entier naturel strictement positif, on peut écrire :

$$\begin{aligned} C(F_t) &= \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \times L_i(F_t) + \sum_{i=M+1}^{\infty} \alpha_i \times L_i(F_t) \\ &= C_M(F_t) + \varepsilon(M) \end{aligned}$$

Avec :

- $C_M(F_t) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \times L_i(F_t) = L^M(F_t) * \alpha_M{}^t$,
- $\varepsilon(M) = \sum_{i=M+1}^{\infty} \alpha_i \times L_i(F_t)$,
- $L^M(\cdot) = (L_1(\cdot), L_2(\cdot), \cdots, L_M(\cdot))$,
- $\alpha_M = (\alpha_i)_{i \in \{1,\cdots,M\}}, \alpha_i \in R$

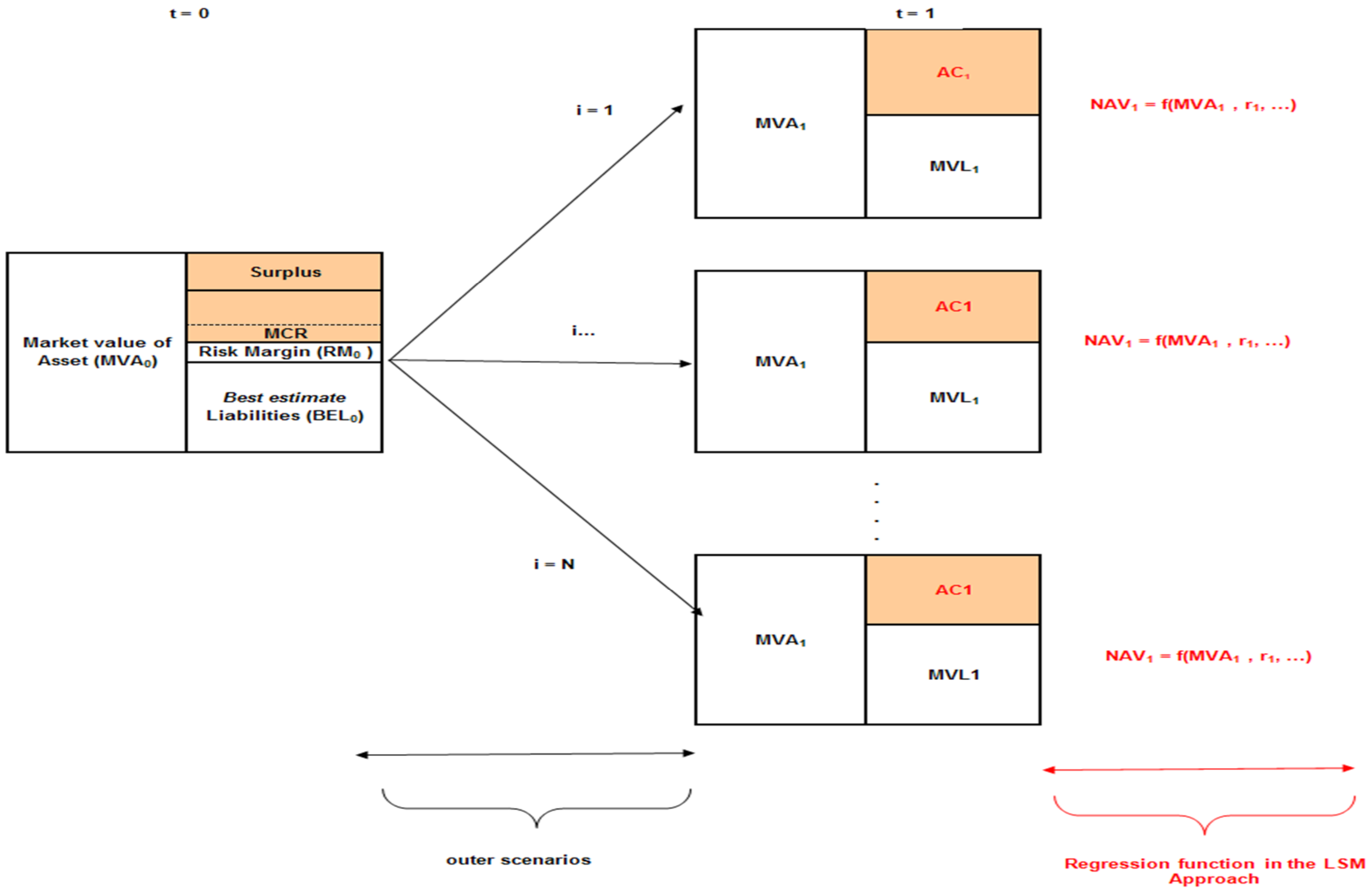
On a $\varepsilon(M) \to 0$ quand $M \to +\infty$, on retient l'approximation $C_M(F_t) \cong C(F_t)$.

A ce stade, les coefficients α_M sont estimés en deux étapes :

1. On génère, par la méthode de ***Monte Carlo***, N réalisations des variables aléatoires $\{(\overline{C}(F_t^n), F_t^n), n = 1 \ldots N\}$,
2. on calcul $\overline{\alpha}_M^N$ par une ***régression linéaire*** des $\overline{C}(F_t^n)$ sur les $L^M(F_t^n)$

$$\overline{\alpha}_M^N := \underset{\alpha_M}{\arg Min} \sum_{n=1}^{N} \left(\overline{C}(F_t^n) - L^M(F_t^n) \times \alpha_M^t\right)^2$$

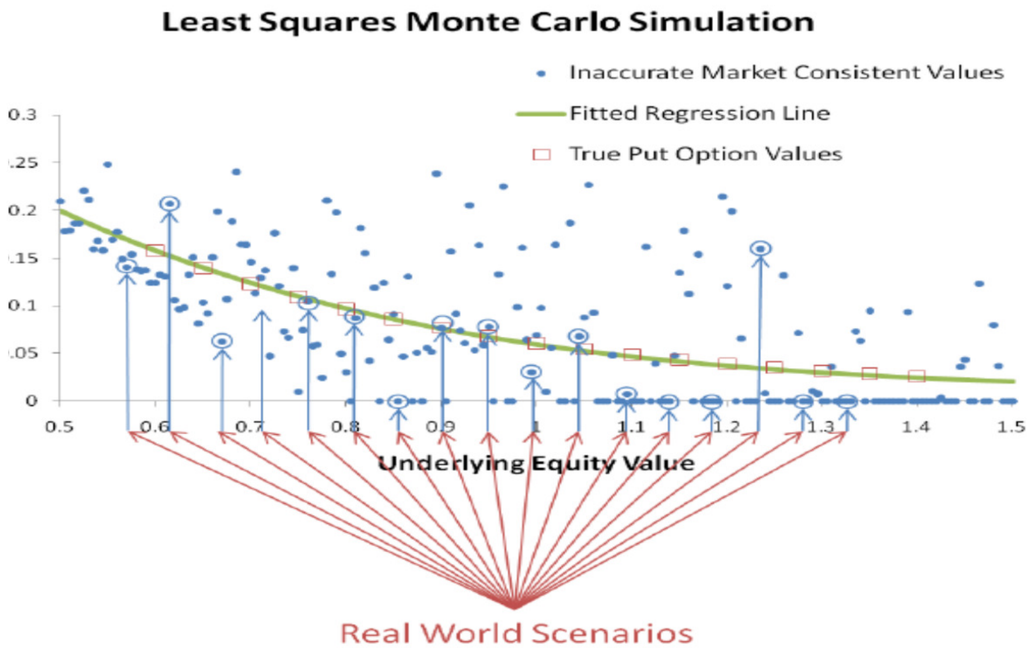
• **Presentation**



- **Presentation**

We find a continuous multi-dimensional liability function like: $\mathrm{PVFP}_1 = f^{LS}\left(\mathrm{RF}_1^1, \ldots, \mathrm{RF}_1^i, \ldots, \mathrm{RF}_M^i\right)$

Real world risk factor



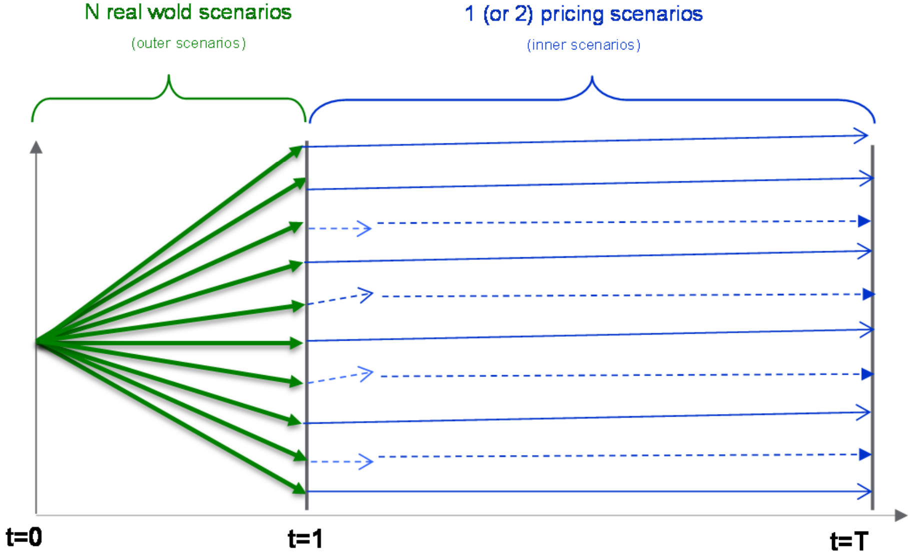
Where :

- ✓ f^{LS} is a multi-dimensional polynomial function;
- ✓ RF_i are the real world risk factor;
- ✓ M is number of risk factor use to simulation.

• **Application**

La calibration de la fonction LSMC consiste à déterminer les coefficients : $\left(\overline{\alpha}_i\right)_{1\le i\le M}$ pour une base de régression $\left(L_1(\cdot), L_2(\cdot), \cdots L_M(\cdot)\right)$ fixée. Le contour opérationnel s'articule autour de plusieurs étapes :

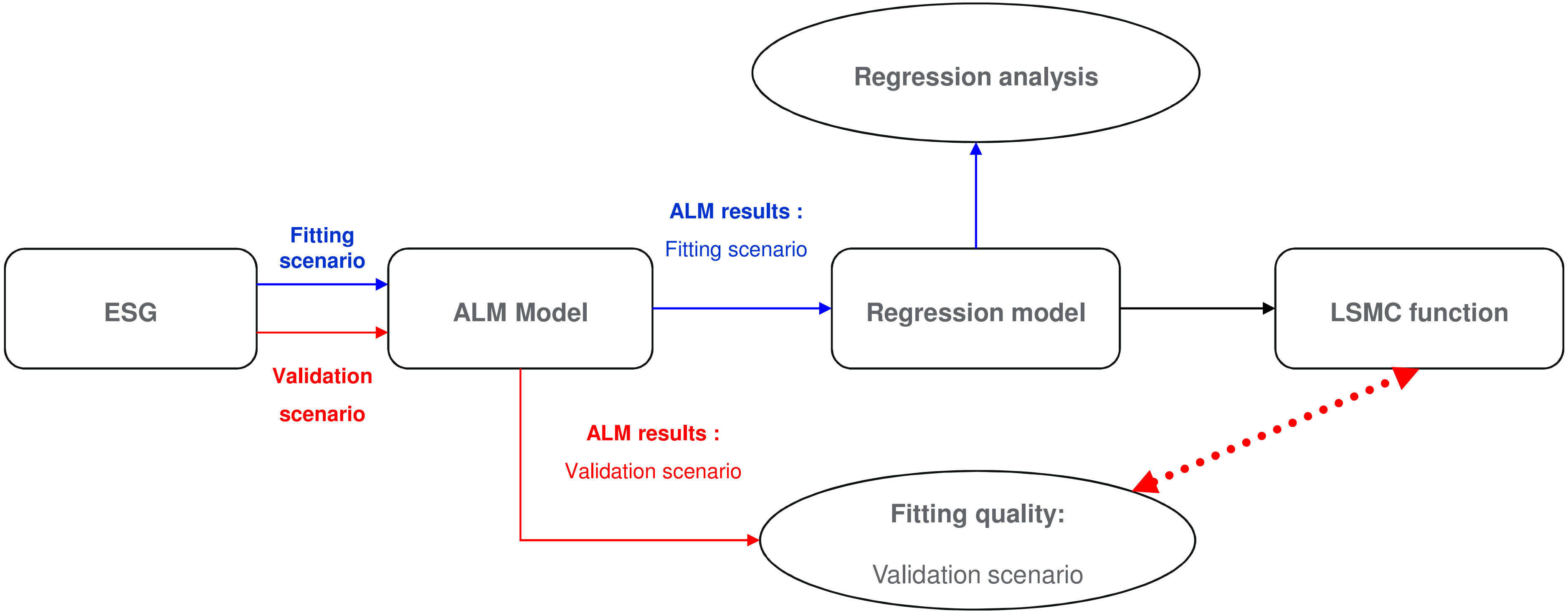
- **Étape 1** : Simuler un nombre N de ''*outer scenarios*'' : **scénarios de fitting**,
- **Étape 2** : Simuler un ''*inner scenarios*'' pour chaque ''*outer scenarios*'' (en pratique, pour une convergence plus rapide des LSMC, on simule 2 scénarios antithétiques).



- **Étape 3** : Évaluer à l'aide du modèle ALM, pour chaque ''*inner scenarios*'' chaque poste de bilan par une somme des cash flows actualisés,
- **Étape 4** : Choisir la base de régression et effectuer une régression linéaire au sens des moindres carrés entre les résultats et la série des facteurs de risque retenus,
- **Étape 5** : Tester la validité de la fonction sur des **scénarios de validation**.

- **Application**

Schématiquement, on a l'architecture suivante :



- **Enjeux**

La mise en œuvre pratique de la technique de LSMC en assurance Vie soulève de nombreuses quest

❑ **Identification des facteurs de risques caractéristiques** F_t **:**

Les facteurs de risque qui impactent le bilan économique d'une compagnie d'assurances sont nombı

- Facteurs de risque économiques : risque de taux, risque Action, risque Immobilier, ri
- Facteurs de risque non économiques : risque de rachats, risque de décès, risque de dé

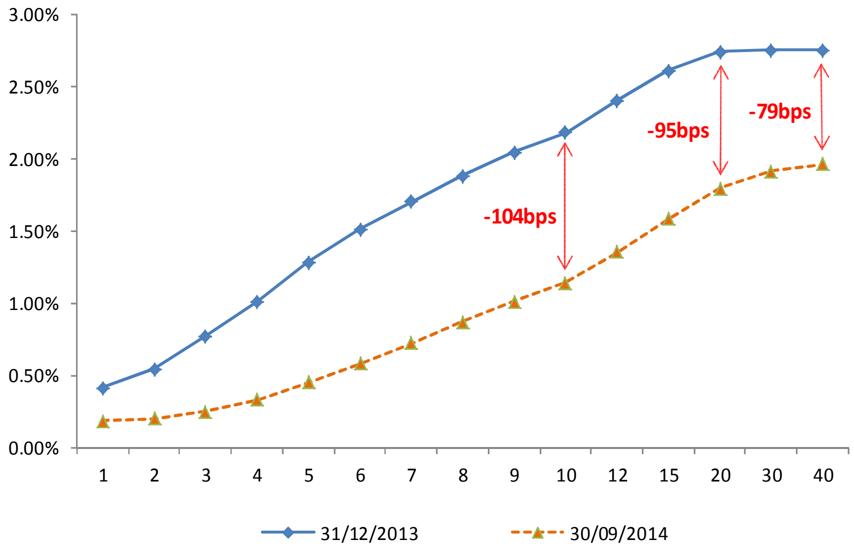
Toutefois, on peut se contenter de cibler un nombre limité de facteurs de risque.

• **Enjeux**

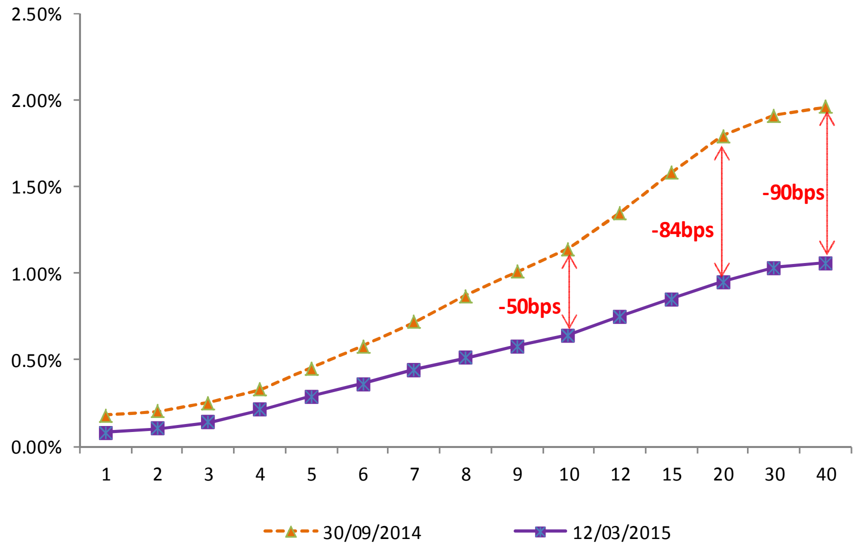
La mise en œuvre pratique de la technique de LSMC en assurance Vie soulève de nombreuses quest

❑ **Identification des facteurs de risques caractéristiques** F_t **:**

Focus sur le risque de taux d'intérêt :



Variation de la courbe de taux entre décembre 2013 et septembre 2014



Variation de la courbe de taux entre Septembre 2014 et Mars 2015

<u>=> Les facteurs de risques de taux doivent tenir de la déformation de la courbe de taux : pentification / Aplatissement, courbure…</u>

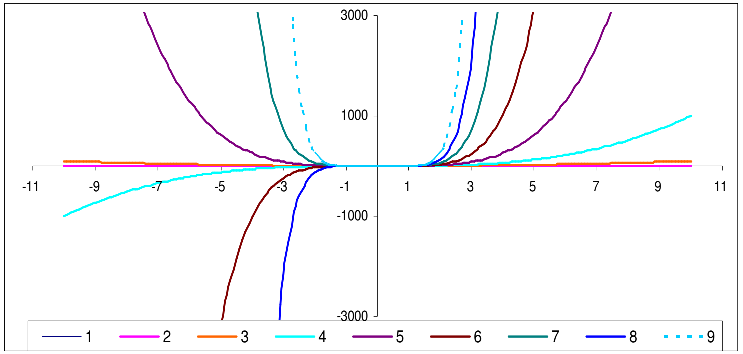
Exemple : choisir les facteurs de risque de taux comme les 2 premières composantes résultantes d'une analyse en composantes principales (ACP) de la structure par terme de la courbe de taux.

• **Enjeux**

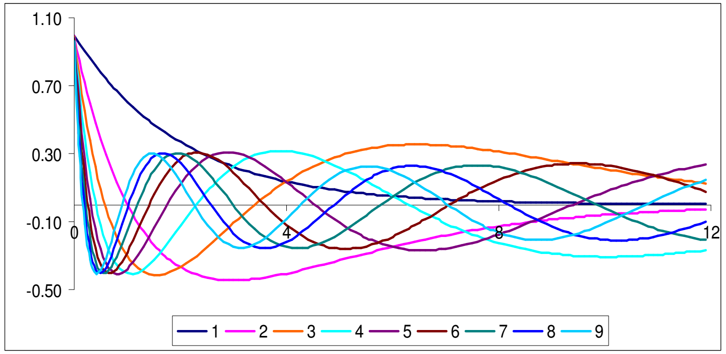
❑ Quelle base de régression $L_i(F_t)$ retenir ?

Puissance, Tchebychev, Hermite, Laguerre, Legendre, … en effet le choix de la base de régression peut avoir des incidences non négligeables sur les queues de distribution.

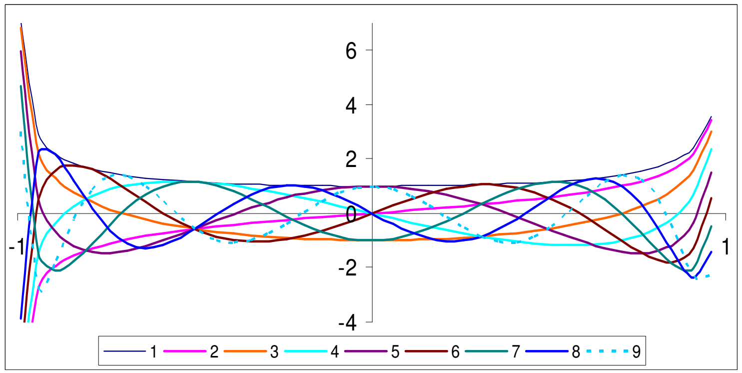
Polynôme Ordinaire



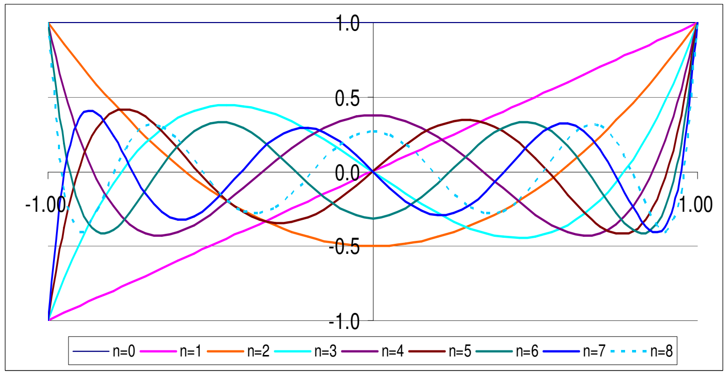
Fonction Laguerre



Fonction TCHEBYCHEV



Fonction de LEGENDRE

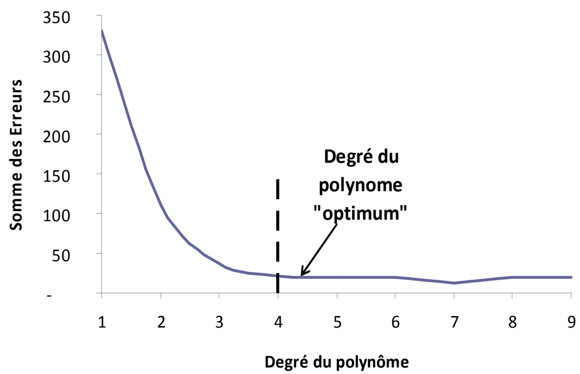


• Enjeux

❑ **Comment choisir la dimension M optimale conduisant à la meilleure approximation de $C(F_t)$?**

En effet, sur le plan opérationnel la calibration de la fonction de LSMC peut se révéler impossible à implémenter lorsque le nombre de régresseurs est très grand.

Nombres maximal de régresseurs								
Risk factors / Degrés de la fonction	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	5	9	14	20	27	35	44
3	3	9	19	34	55	83	119	164
4	4	14	34	69	125	209	329	494
5	5	20	55	125	251	461	791	1286
6	6	27	83	209	461	923	1715	3002
7	7	35	119	329	791	1715	3431	6434
8	8	44	164	494	1286	3002	6434	12869
9	9	54	219	714	2001	5004	11439	24309



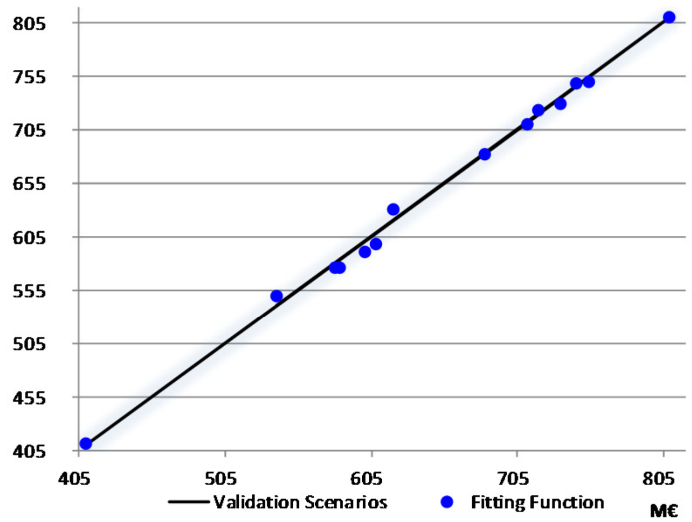
❑ **Quelles méthodes pour déterminer les coefficients $\overline{\alpha}^K$ optimaux?**

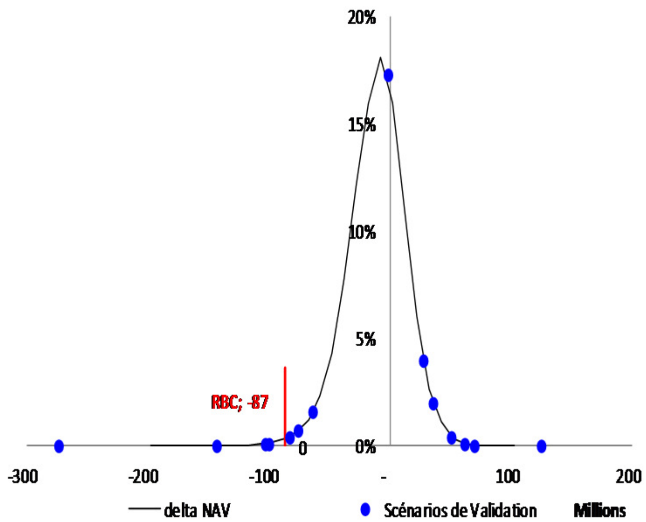
Cette question touche à deux problématiques :

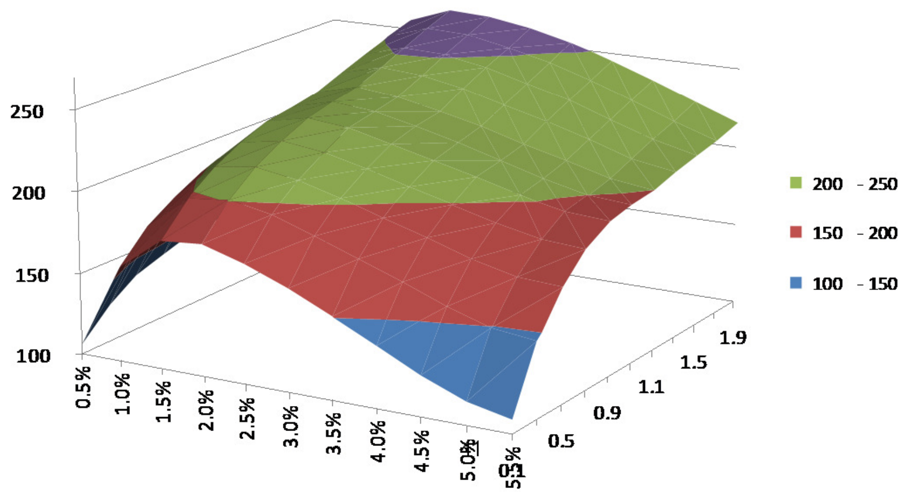
- <u>Définition des données de calibration :</u>
  - quel nombre de scénarios de calibration N permet une meilleure approximation de $C(F_t)$?
  - génération des données de fitting: *"Monte Carlo"* vs "*quasi-Monte Carlo*", afin d'accélérer la convergence du LSMC,
- <u>Optimisation de la fonction de régression</u> : Backward, Forward, Stepwise, ...

- **Application**

Schématiquement, on a l'architecture suivante :

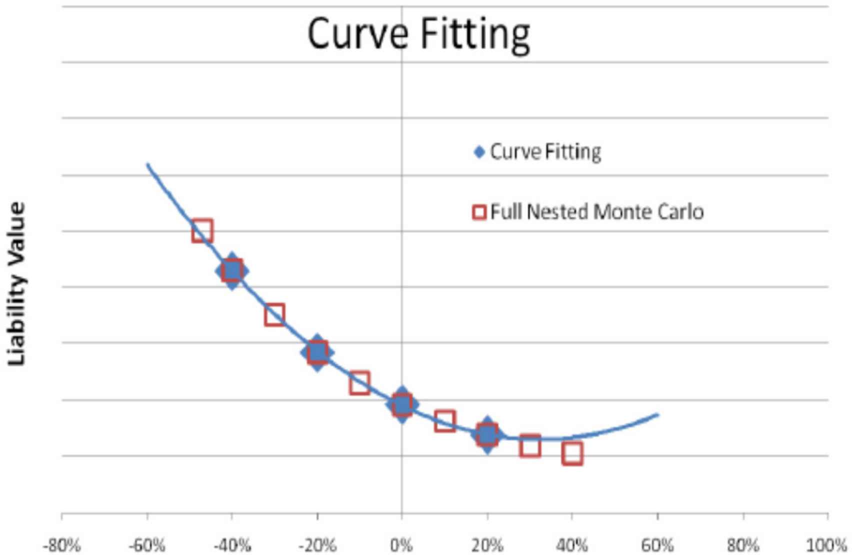






- We note that if outer scenarios are much more important than inner scenarios, bias is evident where inner scenarios are too few;
- We complete Least Square Monte Carlo approach by analyzing comportment of liability function when we increase number of inner scenario;
- we simulate **200x1000** outer/inner scenarios and we also find a continuous multi-dimensional liability function like
- We find a continuous multi-dimensional liability function like **:**

$$AC_1 = f^{CF}\left(RF_1^1, \ldots RF_i^1, \ldots\right)$$



Passage des « *Nested Scenarios* » à l'approche « *Curve fitting* »

« Nested Scenarios »:

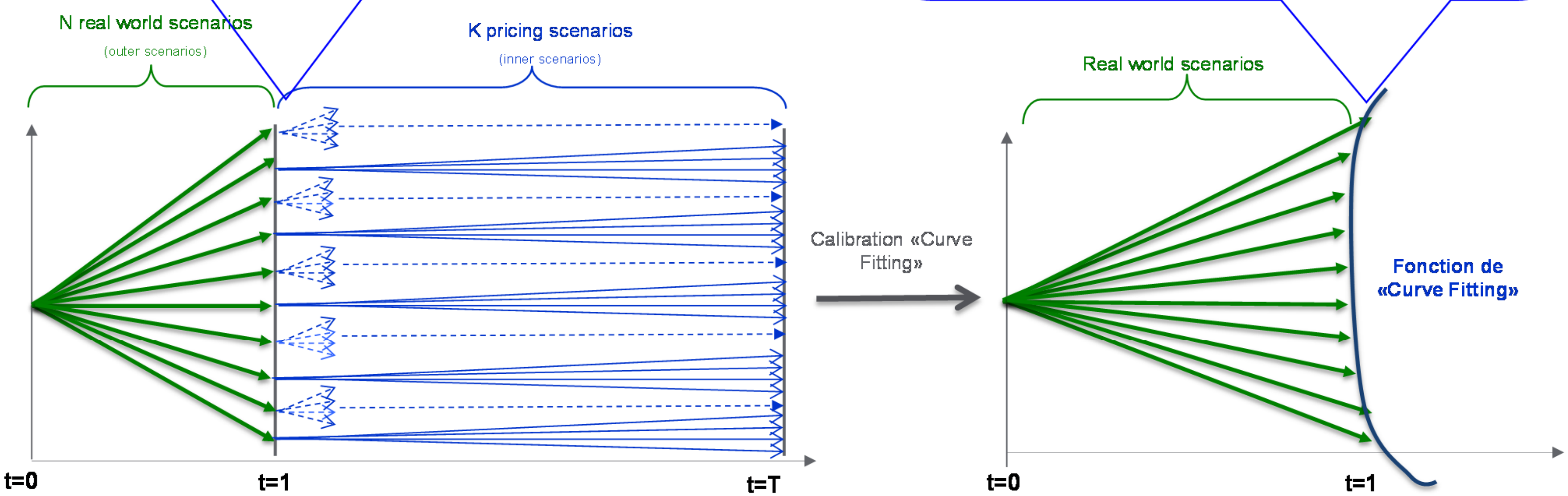
❑**Avantages:**
- Première estimation de la distribution empirique du bilan économique,
- Résultats précis pour les situations «real world» analysées.

❑**Inconvénients :**
- Traitements coûteux (K x N Simulations) :
  1. temps de calcul : ex 1 mois pour 1000 x 1000,
  2. espace de stockage : 250 Go pour 1000 x 1000
- Robustesse des queues de distributions : 5 scénarios déterminent la VAR 99.5% pour 1000 x 1000 scénarios
- Pas d'information sur les point situés entre les simulations primaires.

Curve Fitting:

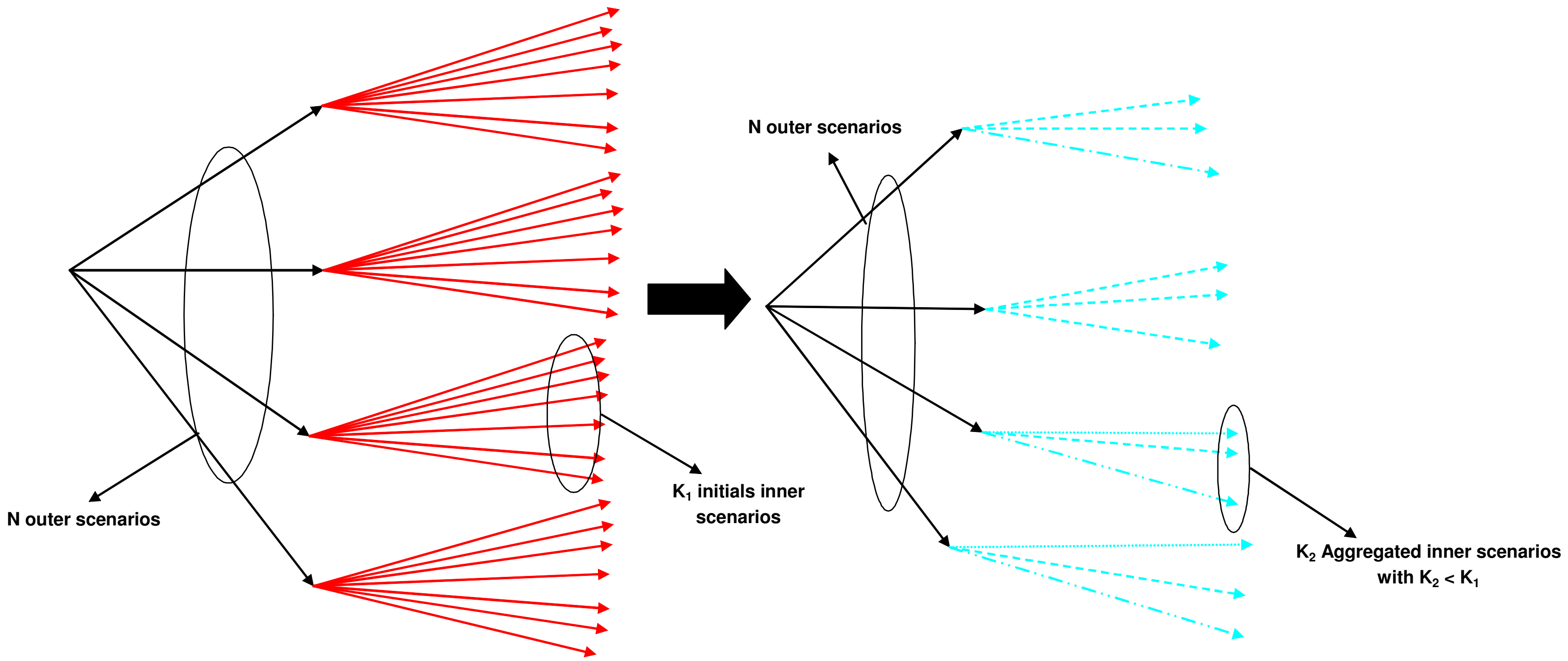
❑**Avantages:**
- Rapidité d'exécution une fois que la fonction de Curve Fitting est calibrée,
- Les impacts individuels et croisés sont facilement estimés et analysés,
- Définition explicite de scénarios caractérisant les Quantiles => Meilleure estimation du capital économique.

❑**Inconvénients :**
- Lourdeur de la mise à jour de la fonction de Curve Fitting:
  1. Lourd en temps de calcul,
  2. Consommatrice en espace de stockage,
- Difficultés d'extrapolation (car scénarios utilisés trop 'compacts') : phénomène de Runge.



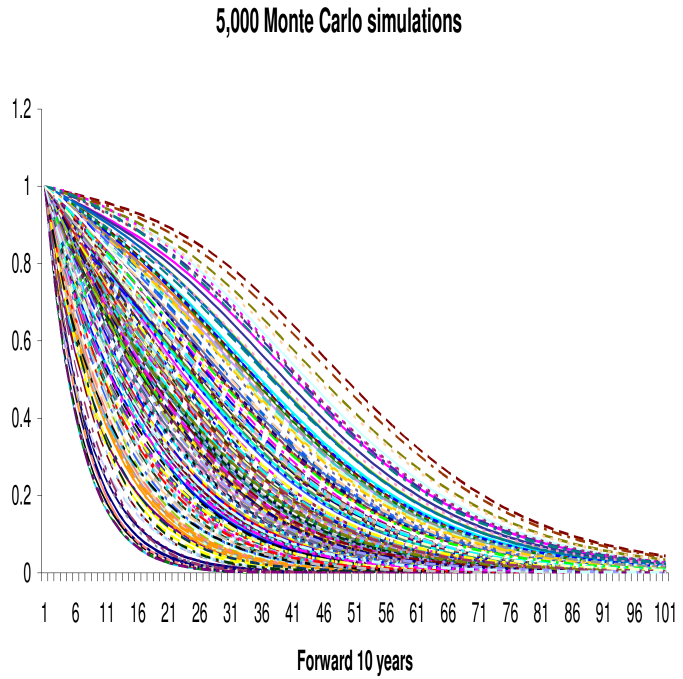
For nested stochastic VaR capital estimate, outer scenarios are much more important than inner scenarios

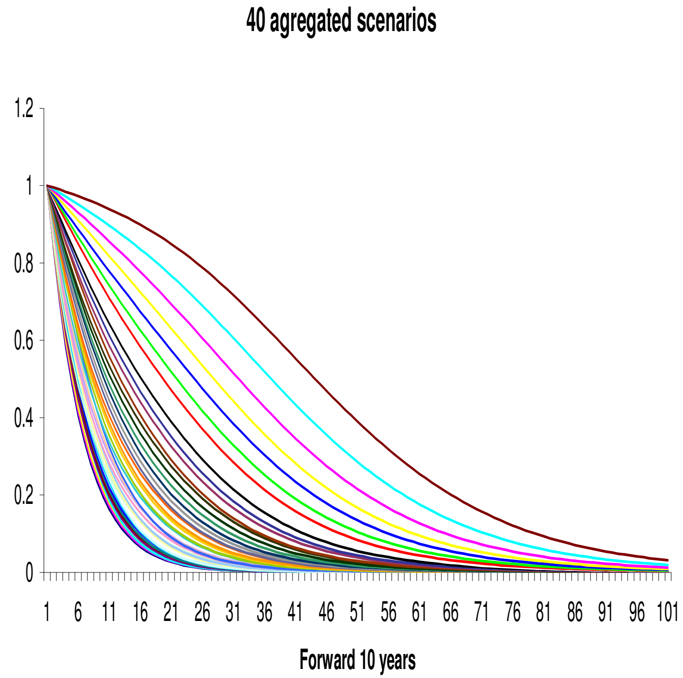
➡ **We can reduce the number K_1 of paths under risk-neutral probability, by aggregating «similar » simulations:**



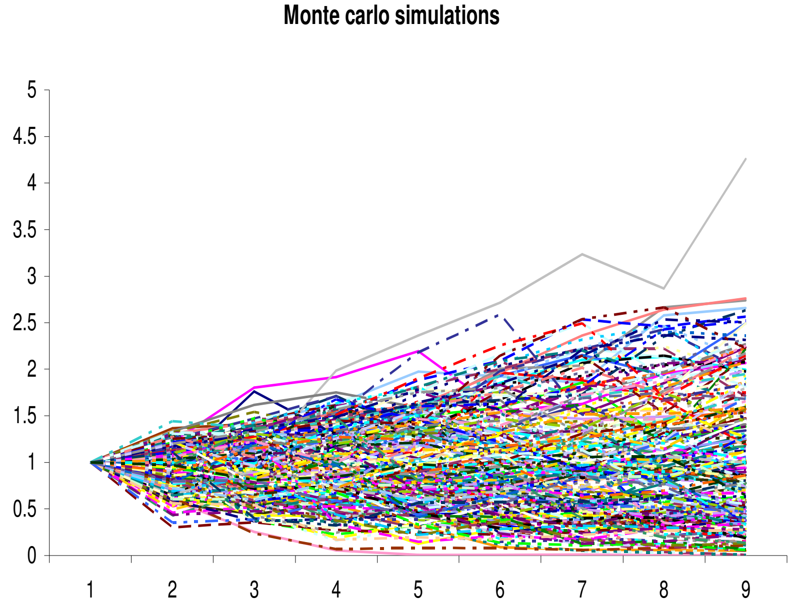
- To find criteria of aggregation, we can use results of Least Square Monte Carlo results and curve fitting.

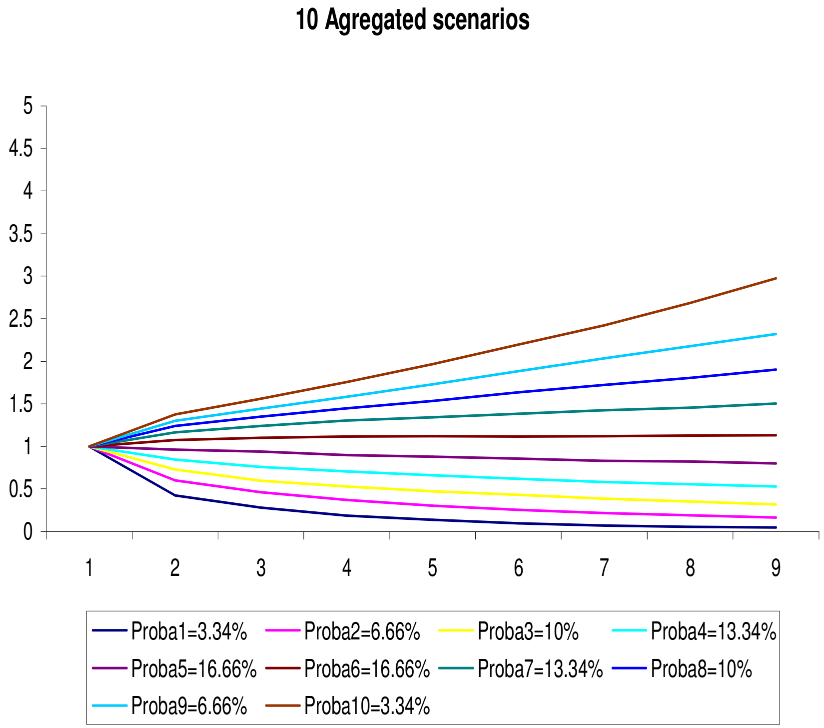
- <u>Example</u> forward 10 years



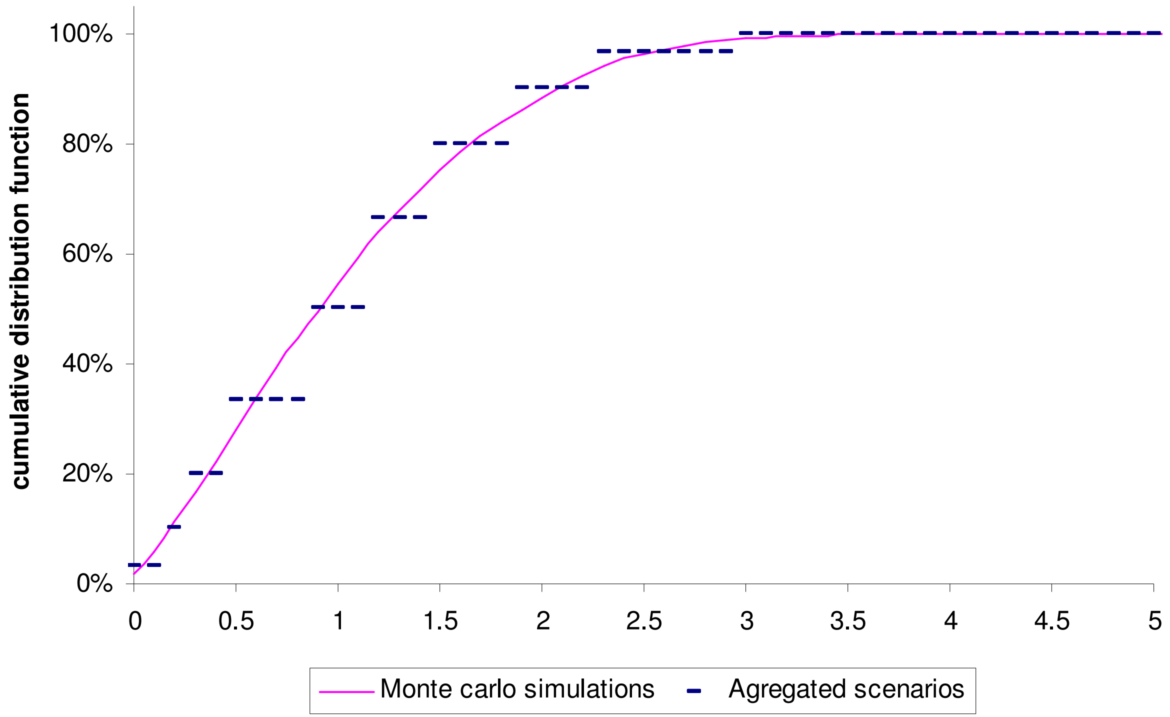


➢ <u>Example</u> Equity index



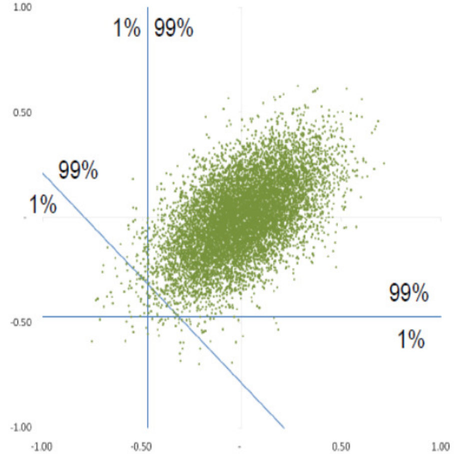


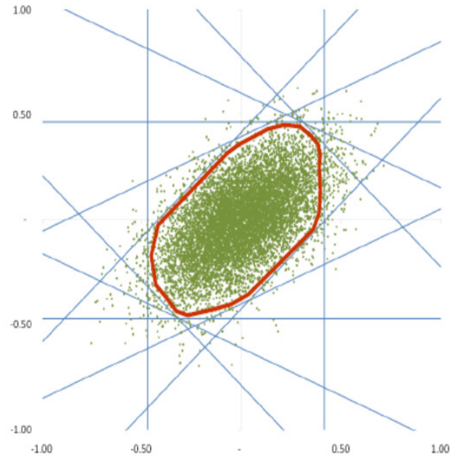
- Example Equity index (Approximate Cumulative distribution function)



➤ **Extreme location method:**

Les techniques d'optimisation inspirées de l'échantillonnage d'importance qui sont conçues a priori pour le calcul des quantiles du surplus actif / passif dans le cadre de la détermination du capital économique et pas forcément bien adaptées au calcul de la provision dans une logique best estimate.





NB:

- ✓ Use to find directly value of RBC (SCR);
- ✓ this technic does not give full distribution of MCEV / Net Assets, but it's useful to complete tail of distribution build by nested scenario sample.

2. Accélérer la convergence des Nested Scénarios
2.5 Replicating portfolios

- **<u>Replicating portfolios :</u>**

les techniques de réplication de portefeuille qui s'avèrent pour leur part mal adaptées au contexte des portefeuilles d'épargne français du fait de la complexité des clauses de participation aux bénéfices

- **<u>NB:</u>**
  - ✓ May have problems with convergence;
  - ✓ Difficult to automate process;
  - ✓ Do not include non-market risks

BIBLIOGRAPHIE

- PLANCHET F., NTEUKAM O., [2010] « Evaluation stochastique des contrats d'épargne : agrégation des trajectoires de l'actif & mesure de l'erreur liée à l'agrégation », Cahier de recherche de l'ISFA;
- BLACK F., SCHOLES M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities », Journal of political Economy, vol. 81, n° 3, 637–54;
- DEVINEAU L., LOISEL S. [2009] "Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II", Bulletin Français d'Actuariat, vol. 9, n°17;
- PLANCHET F., THEROND P.E., JACQUEMIN J. [2005] Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques, Paris : Economica;
- REVELEN J. [2009] "Replicating Portoflio et capital économique en assurance vie", Mémoire d'ingénieur, ISFA / Ecole Centrale de Lyon;
- SCHRAGER D. [2008] "Replicating Portfolios for Insurance Liabilities", Actuarial Sciences.
- BAUER D., BERGMANN D. and REUSS A. [2009] "SOLVENCY II and Nested Simulations – a Least-Squares Monte Carlo Approach", University of Ulm working paper