Convergence des scenarios et écarts de valorisation

Oberlain Nteukam Teuguia

Actuaire Expert ERM

Responsable ALM chez HSBC Assurances Vie

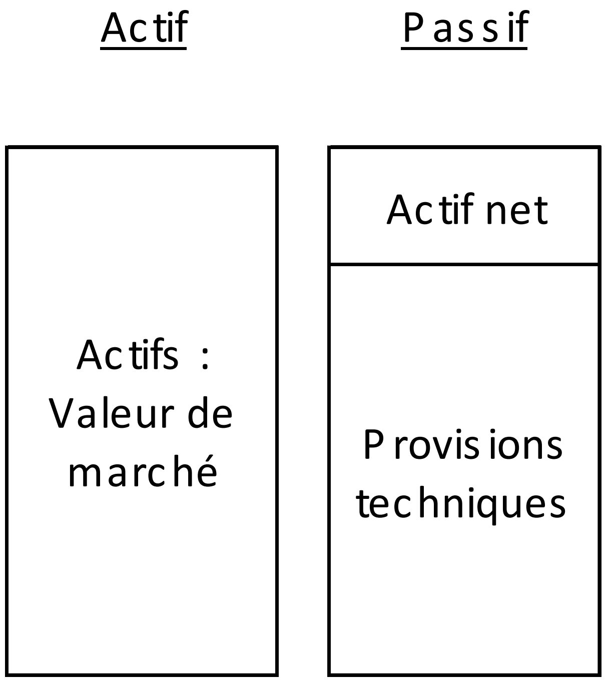
Agenda

- **Valorisation du bilan économique en assurances Vie**
- **Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation**
- **Traitement des écarts de valorisation sous solvabilité II**
- **Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo**
- **Limitation des taux explosifs**
- **Retraitement des scénarios**
- **Impact sur la diffusion des taux**
- **Résultats**

Valorisation du bilan économique en assurances Vie

Valorisation du bilan économique en assurances Vie

- **Le bilan économique d'une compagnie d'assurance est composé :**
  - **d'un actif** en valeur de marché : la valeur des actifs est en général observée sur un marché organisé,
  - **d'un passif** : la valeur économique des composantes du passif n'est pas directement observée.



=> recours à des techniques de valorisation financière.

Valorisation du bilan économique en assurances Vie

- Pour une composante C (*Net asset value, Best estimate*…) du bilan économique, la valeur à l'instant t s'écrit:

$$C(F_t) = E_{Q_t}\left[\sum_{u=t+1}^{T} f_u(C) \times DF(t,u) \middle| F_t \right]$$

Où :

- F_t représente le vecteur des facteurs de risque (Courbe de taux, Indice action, Taux de rachats…) à l'instant t,
- Q_t est la mesure de risque neutre à l'instant t,
- $f_u(C)$ est le flux à l'instant $u \geq t$ associé à la composante C,
- $DF(t,u)$ est le facteur d'actualisation du flux de la période $u \geq t$.

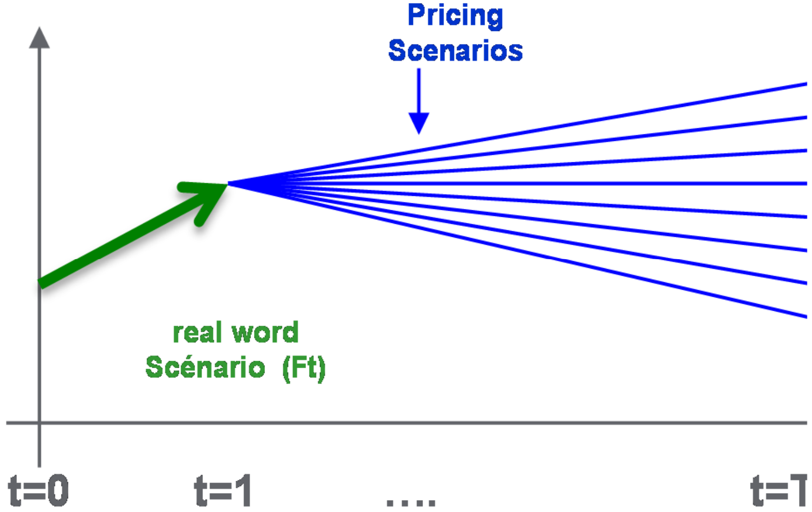
Valorisation du bilan économique en assurances Vie

Pour les contrats d'assurance vie, il n'existe en général pas de formule analytique pour ce espérance conditionnelle :

- Du fait du caractère path-dependent des flux $f_u(C)$,
- Des inter-actions entre le passif et l'actif,
- Du fait de l'existence des options aux passifs liées aux caractéristiques des contrats (Tau Minimum Garanti, Participation aux Bénéfices, option de rachat…).

$C(F_t)$ peut-être estimée par Monte Carlo par

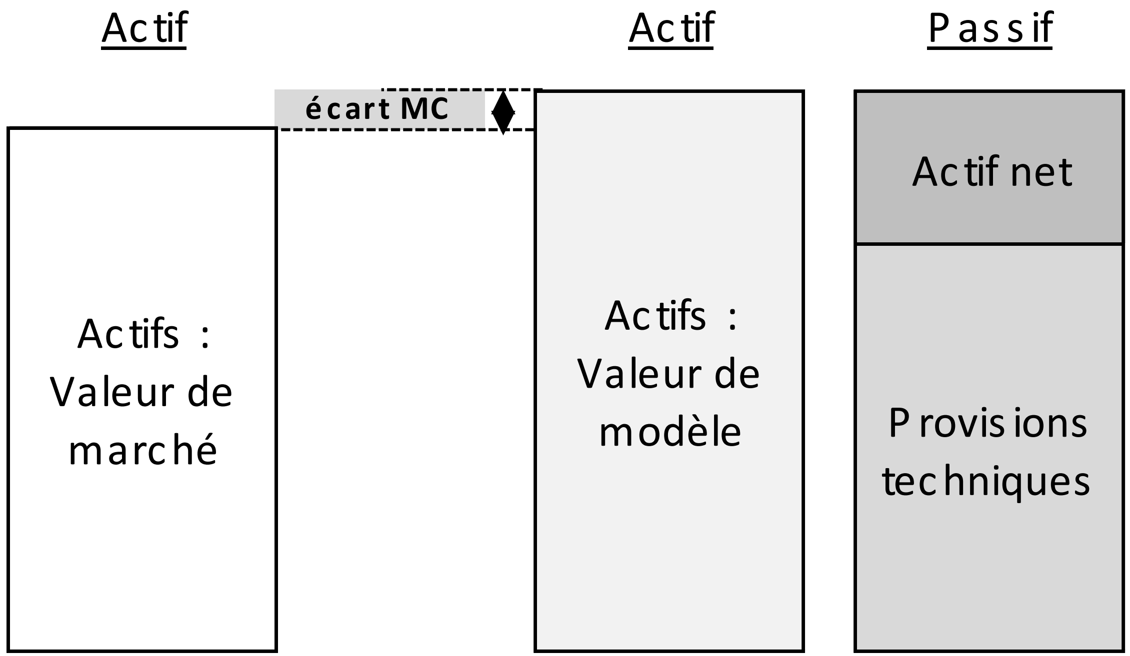
$$C(F_t) \approx C_K(F_t) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{u=t+1}^{T} f_u^k(C) \times DF^k(t,u) \middle| F_t\right]$$



Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation

Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation

- Le recours à la méthode de valorisation par monte-carlo peu conduire à des écarts de valorisation des actifs:



- L'écart de valorisation (parfois appelé « fuite » de modèle) est très souvent la combinaison:
  - des limites du modèle de projection : écart actif/passif, erreur de code, interpolation linéaire, nombre de décimales, arrondi...
  - des problèmes de convergence des scénarios : taux explosifs, non convergence des tests de martingale, risque d'échantillonnage…

Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation

- Les limites de modèle représentent en général une faible proportion des écarts de valorisation :

  - Le modèle de projection fait l'objet d'une gouvernance appropriée (validation en comité de modèle, tests de validation, tests unitaires…)

  - Le modèle de projection a fait l'objet de revue tant interne et qu'externe.

- La convergence des scénarios *monte carlo* constitue en général la principale source des écarts de valorisation. Elle est *:*
  - principalement liée au choix du nombre de scénarios et la qualité des aleas générés (risque d'échantillonnage, normalité des aleas, non convergence des tests de martingale...),

  - liée à la présence des taux explosifs,

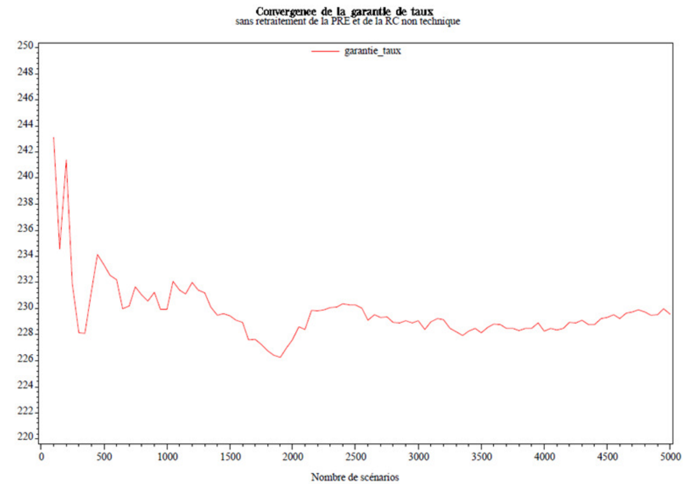
  - mais, aussi potentiellement liée au choix du modèle paramétrique : ex: choix d'un modèle log-normal pour la modélisation des taux négatifs.

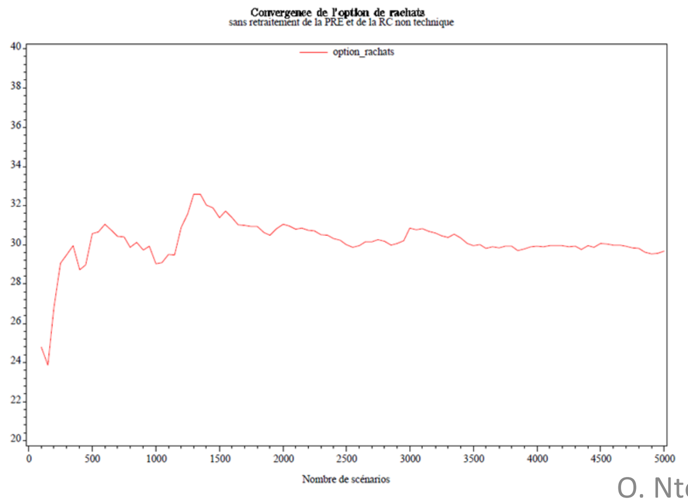
Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation

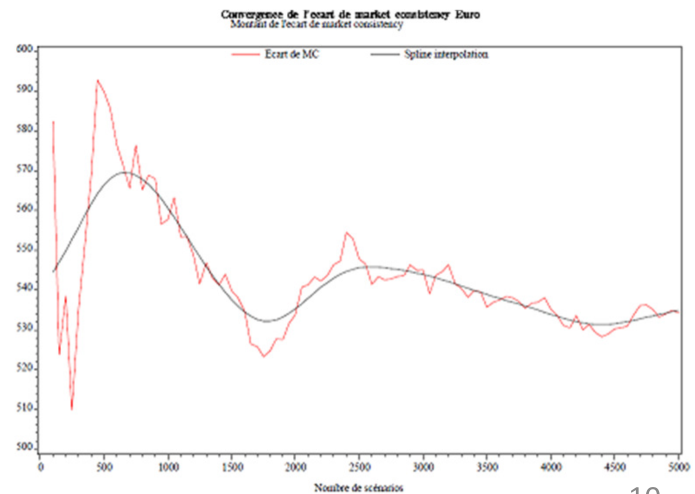
- **Choix du nombre de scenarios monte carlo :**

Le choix du nombre de scenarios monte carlo résulte d'un compromis entre la précision des résultats obtenus et les temps de calculs.

- **la précision des résultats obtenus** : elle est mesurée, d'une part, au travers de la convergence de la valeur temps des options et garanties et d'autre part, à la convergence de la valeur actuelle des flux du passif vers la valeur de marché des actifs (écart de market consistency).







Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation

- **Simulation des aléas**
  - Utilisation de variables antithétiques,
  - Utilisation des méthodes quasi monte carlo:
    - Suites de Sobol,
    - Suites de Halton,
    - …

Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation

- **Intervalle de confiance de l'estimation de la moyenne selon le nombre de scenarios:**

Rappels de statistiques :

Définition 1. *Un* n-échantillon *de X est un n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tel que les X_k ont la même loi que X et sont indépendantes.*
Une réalisation de l'échantillon *est alors un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de valeurs prises par l'échantillon.*

Théorème 6.

Lorsque σ^2 est inconnu un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de m est

$$\left[\overline{X}_n - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{S_n^2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{S_n^2}}}{\sqrt{n}}\right]$$

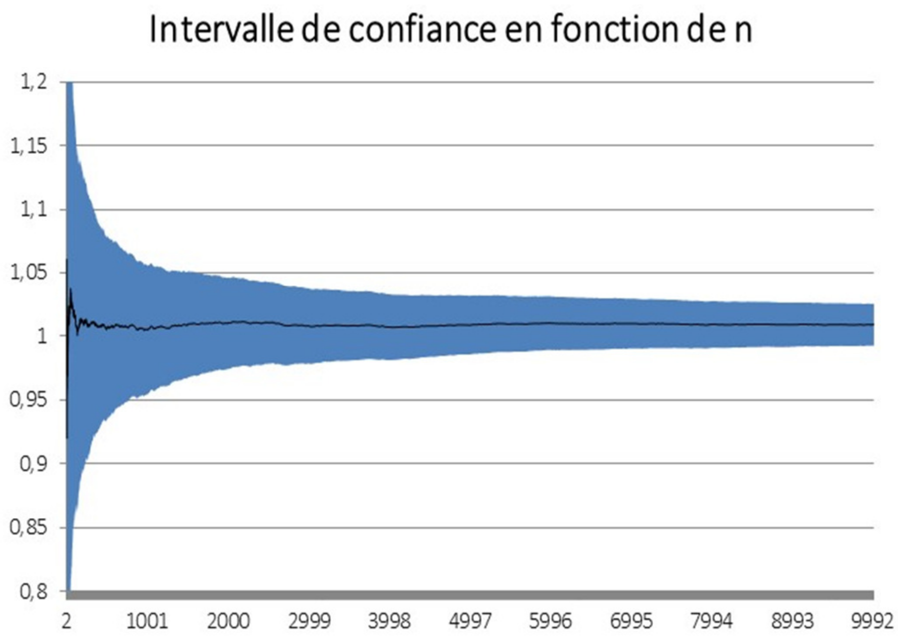
où $t_{n-1,1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

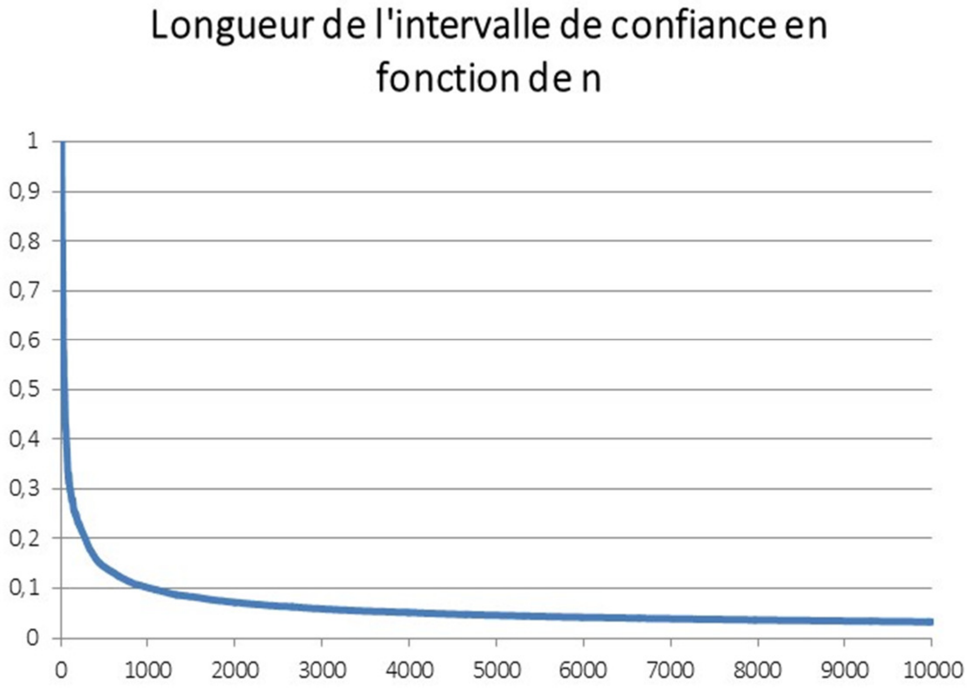
Avec $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\widehat{S_n^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2$

Valorisation *monte carlo* et écarts de valorisation

- **Intervalle de confiance de l'estimation de la moyenne selon le nombre de scenarios:**

<u>Illustration :</u>





Traitement des écarts de valorisation sous solvabilité II

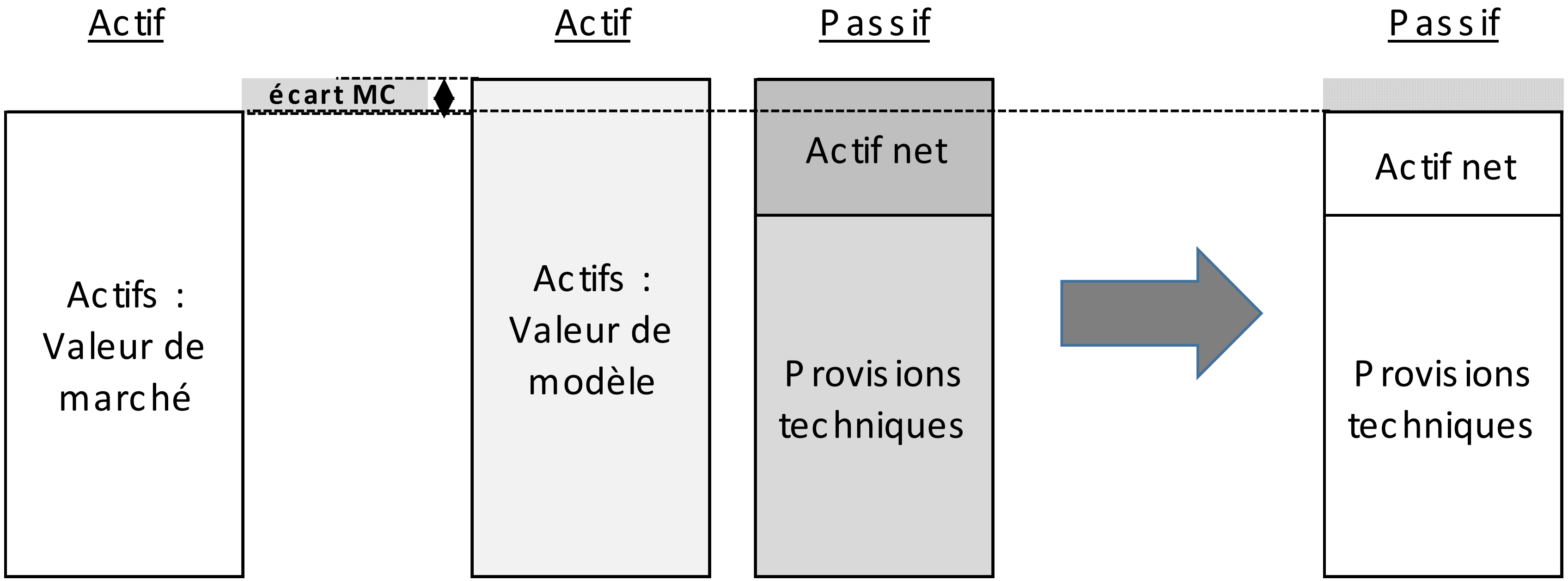
Traitement des écarts de valorisation sous solvabilité II

- **Principe de proportionnalité :**
  - Article 56 des actes délégués de solvabilité II,
  - Orientations 44 à 49 des notices techniques.

- A la lecture de ces articles, on comprend que:
  - La significativité des erreurs de valorisation doit s’analyser non seulement par rapport au montant de la meilleure estimation mais aussi de la valeur des fonds propres et du SCR.
  - Les entreprises d’assurance doivent s’efforcer à réduire les erreurs de valorisation à moins de montrer que les simplifications retenues conduisent à une estimation prudente de la meilleure estimation.

Traitement des écarts de valorisation sous solvabilité II

- **Traitement des erreurs de valorisation**
  - Réduire l'erreur de valorisation : limiter les taux explosifs, traitement des scénarios.
  - Ou adopter une approche prudente : le retraitement de l'erreur de valorisation conduit systématiquement à retenir la valeur la plus élevée de la meilleure estimation.

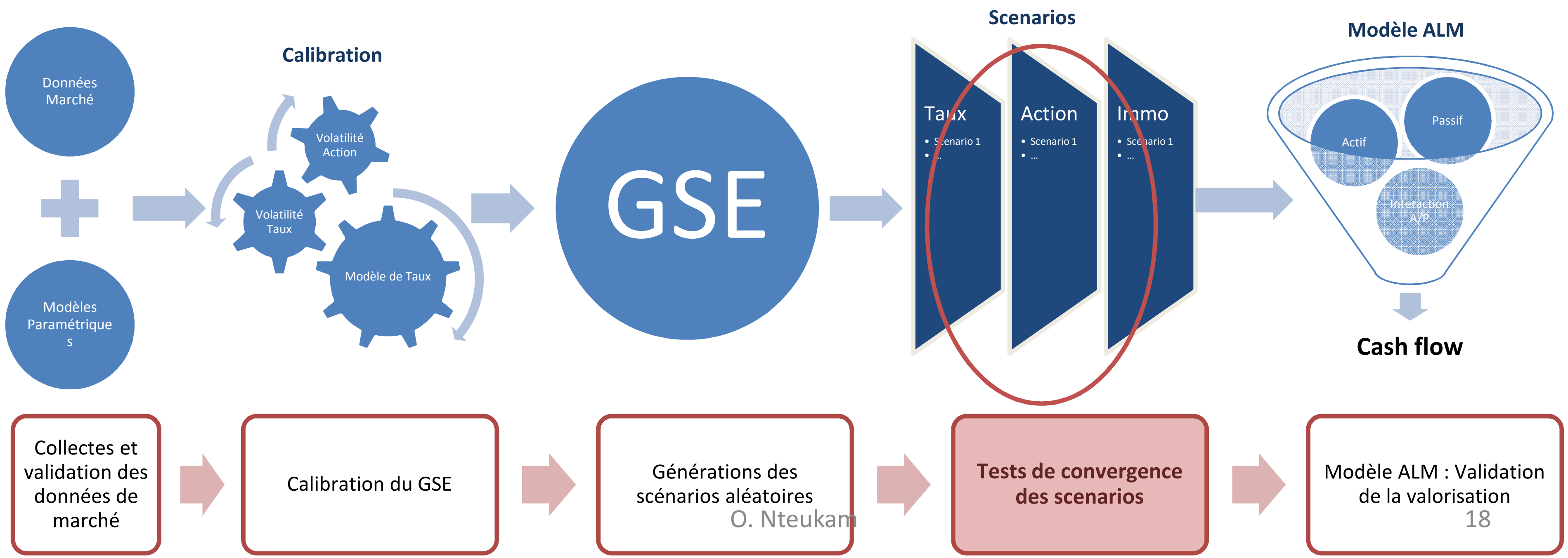


Ex: on considère un bilan de 10 Mds €, des FP de 0,4 Mds €. Si l'écart de valorisation est de 0,5% du bilan, soit 0,05Mds €, l'approche prudente revient à réduire les FP de 12,5%.

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Rappels :**
- Les tests de convergence des scenarios vérifient si les moyennes empiriques des grandeurs sont cohérentes avec les valeurs théoriques.
- Sous l'environnement risque neutre (« market consistent »), ces tests consistent à vérifier en outre qu'en moyenne, tous les actifs rapportent le taux sans risque.
- Ils se positionnent à la sortie d'un GSE, ils sont effectués sur les scénarios générés :



Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Notation :**
- N : le nombre de scénarios,
- $Df_i(0,t)$: le déflateur de l'année t par rapport à l'année 0 pour le scénario i,
- $F_i(0,t,T)$: le prix du forward à l'année t de maturité T, vu de l'année 0 pour le scénario i,
- $F(0,t) = F(0,0,t)$: le prix du zéro coupon de maturité t à l'année 0,
- $S_i^{action}(t)$: l'indice action à l'année t pour le scénario i,
- $S_i^{immo}(t)$: l'indice immobilier à l'année t pour le scénario i,

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Test de convergence des scénarios de Taux :**

- Test sur les Forward :
- pour tout t et T : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i(0,t)F_i(0,t,T)] = F(0,t+T)$

- Test sur les Déflateurs :
- pour tout t : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Df_i(0,t) = F(0,t)$

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Test de convergence des scenarios Action :**

- <u>Sur les rendements des actions</u>
- pour tout t : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Df_i(0,t)S_i^{action}(t) = S^{action}(0)$

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Tests sur les volatilités de taux:**

- Afin de tester la convergence en volatilité, les prix de swaptions payeuses $S_{pay}(t)$ et receveuses $S_{rec}(t)$ sont recalculés sur les scénarios.
- L'inversion du prix moyen par la formule de Black permet d'en déduire une volatilité implicite et de la comparer avec la volatilité induite des paramètres du modèle.

- La formule de Black pour une swaption (de notionnel 1) :
- $S_{pay,black}(s_0, s_K, T, \sigma) = \sum_{t=1}^{T} F(0,t)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]_+$
- $S_{rec,black}(s_0, s_K, T, \sigma) = \sum_{t=1}^{T} F(0,t)[-s_0 N(-d_1) + s_K N(-d_2)]_+$
- Avec et $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[\ln\left(\frac{s_0}{s_K}\right) + \frac{\sigma^2 t}{2}\right]$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Tests sur les volatilités de taux:**
- La valeur *monte carlo* des swaptions sont obtenues à l'aide des formules suivantes :
- $S_{pay}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Df_i(0,t)\left[\left(1 - F_i(t,T)\right) - f_i(0,t,T).\sum_{j=1}^{T} F_i(t,j)\right]_+$
- $S_{rec}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Df_i(0,t)\left[f_i(0,t,T).\sum_{j=1}^{T} F_i(t,j) - \left(1 - F_i(t,T)\right)\right]_+$
- Où $f(0,t,T)$ est le taux forward à l'année t de maturité T vu de l'année 0.
- On détermine $\sigma_{pay}(t)$ tel que $S_{pay,black}\left(s_0, s_K, T, \sigma_{pay}(t)\right) = S_{pay}(t)$ (Idem pour la receveuse)

- **Premier test** : pour tout t et les maturités T, on compare les volatilités des swaptions payeuses et receveuses à la monnaie :
- Ainsi, on teste que $\sigma_{pay}(t) = \sigma_{rec}(t)$

- **Second test** : pour tout t et toutes maturités T :
- On teste que $\sigma_{pay}(t)$ et $\sigma_{rec}(t)$ sont égaux aux données de marché (*) (les $\sigma_0(t)$)
- Le test compare : $\sigma_0(t) = \frac{\sigma_{pay}(t)+\sigma_{rec}(t)}{2}$

(*) en général, on compare avec les volatilité de modèle, la comparaison avec les volatilités de marchés ayant déjà été effectuée lors de l'étape de calibration du GSE.

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Tests sur les volatilités actions:**
- Les volatilités actions sont calculées par inversion de la formule de Black & Scholes.
- Cela consiste à déterminer les volatilités telles que les prix des calls et des puts calculés à partir des scénarios simulés C_{MC} et P_{MC} soient égaux à ceux obtenus par la formule de Black-Scholes C_{BS} et P_{BS}.

- Rappels des formules de Black-Scholes :
- $C_{BS}(S_0, K, T, \sigma) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$
- $P_{BS}(S_0, K, T, \sigma) = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2)$

- Avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right).T\right]$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Tests sur les volatilités actions:**

- Les prix des options obtenus à partir des scénarios :
- $C_{MC}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Df_i(t, t+1).\,(S_i(t+1) - S_i(t))_+$
- $P_{MC}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Df_i(t, t+1).\,(S_i(t) - S_i(t+1))_+$

- **Premier test :** pour tout t, comparaison entre les volatilités implicites des calls et des puts à la monnaie de maturité 1 an:
- $\sigma_C(t) = \sigma_P(t)$

- où $\sigma_C(t)$ est la volatilité déduite de $C_{MC}(t)$ et $\sigma_P(t)$ celle déduite de $P_{MC}(t)$.

Rappels sur la convergence des scenarios Monte carlo

- **Tests sur les volatilités actions:**

- **Second test** : pour tout t, comparaison entre :
- la matrice de volatilité de marché (ou du modèle),
- les volatilités calculées sur des options sur l'indice action simulé,
  - pour différentes dates d'expiration,
  - pour différents strikes.

- En notant $\sigma_0(t)$ la volatilité du modèle, le test compare :

- $$\begin{cases} \sigma_P(t) = \sigma_0(t) & si\ K < S_t \\ \frac{\sigma_P(t)+\sigma_C(t)}{2} = \sigma_0(t) & si\ K = S_t \\ \sigma_C(t) = \sigma_0(t) & si\ K > S_t \end{cases}$$

- Il est à noter que les volatilités sont calculées par inversion des prix d'option à partir du modèle de Black-Scholes alors que les GSE utilisent en général des modèles à volatilité stochastique (intégrant parfois des sauts).

Limitation des taux explosifs

Limitation des taux explosifs

- **« Freeze les scenarios »**
- La technique « *freeze* » est une technique de traitement des scénarios *monte carlo* qui permet de réduire les taux explosifs et d'améliorer la convergence des scénarios.
- Elle consiste à annuler les volatilités futures lorsque le taux forward 1 an dépasse un seuil fixé. Par conséquent, les taux des années de projection suivantes sont égaux aux taux forward déduits de la courbe de taux de l'année précédent le « *freeze »*.
- La convergence des taux est ainsi améliorée dans la mesure où elle se résume à démontrer la convergence sur les années précèdentes le « *freeze* ».

Limitation des taux explosifs

- **« Freeze les scenarios »**
- L'algorithme sous-jacent à la technique « *freeze* » est décrite de façon suivante :

Etape 1

- Simulation des scenarios à l'aide du GSE
- Aucune contrainte n'est appliquée à ce stade.

Etape 2

- Calcul des taux forward 1 an pour chaque scenario i pour chaque année de projection t et à chaque maturité T
- $forward_{i,n}(T) = \frac{ZC_{i,n}(T-1)}{ZC_{i,n}(T)}$

Etape 3

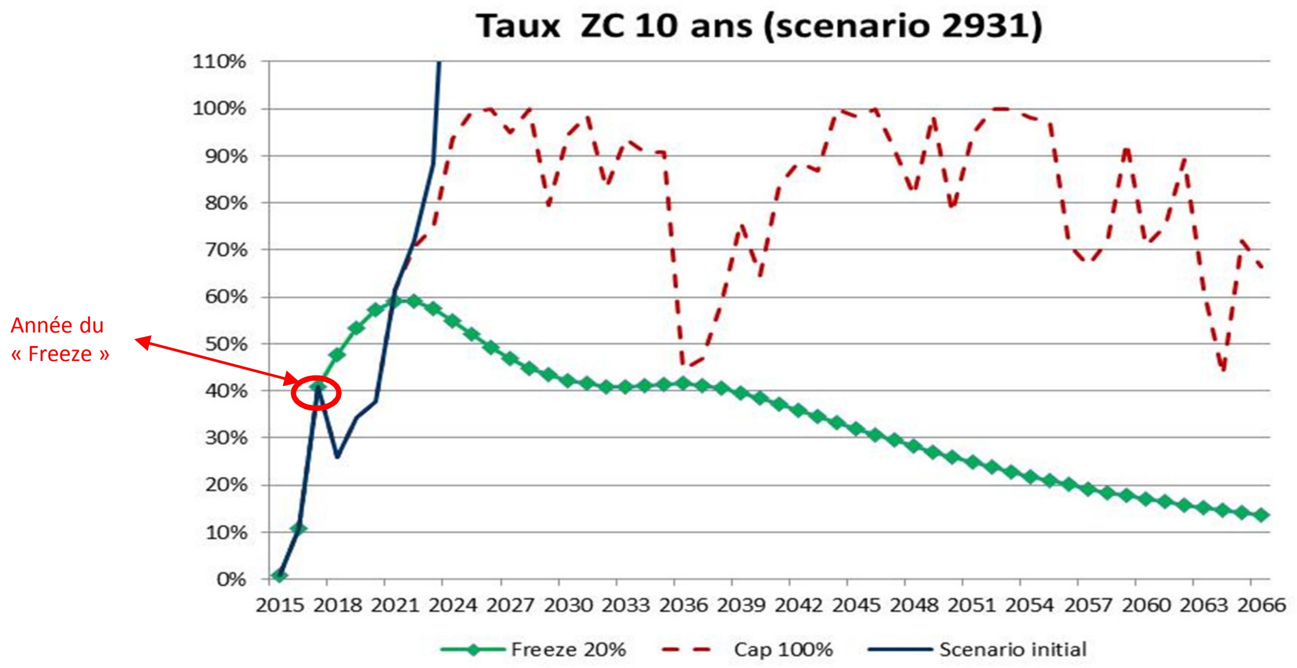
- Pour chaque scénario, repérer la première année n_0 telle qu'il existe un taux forward 1 an qui dépasse le seuil de freeze fixé.
- Si tous les taux forward 1 an du scénario sont inférieurs au seuil alors $n_0 = \infty$

Etape 4

- Pour chaque scénario et pour chaque année de projection n :
- Si $n \leq n_0$, alors il n'y a pas de changement,
- Si $n > n_0$, alors les prix de zéro coupons simulés sont remplacés par ceux correspondant aux taux forward calculés à partir de la courbe de taux à n_0 : $ZC_{i,n}(T) = \frac{ZC_{i,n_0}(T+n-n_0)}{ZC_{i,n_0}(n-n_0)}$

Limitation des taux explosifs

- **« Freeze les scenarios »**
- Le résultat de la mise en œuvre de cette technique pour un scénario extrême est repris dans le graphique suivant :



- Le *freeze* du scénario intervient en année 2018. Dès lors, la convergence du scénario se résume à vérifier la martingalité en 2018 (dans la mesure où compter de 2019, la courbe de taux projetée correspond au taux forward de la courbe de taux de l'année 2018).

Retraitement des scénarios

Retraitement des scénarios

- **Principe :**
- Cette technique part de l'hypothèse selon laquelle la valeur de marché des actifs en représentation des engagements règlementés est connue et la méthode *monte carlo* devrait permettre de retrouver cette valeur.

  - Cette technique consiste à corriger les scénarios afin d'améliorer les propriétés de martingalité des scénarios générés :
  - Les erreurs sur la valorisation des actifs peuvent être réduites à zéro.
  - Les volatilités implicites retrouvent les bonnes propriétés. Faibles impacts sur le niveau global des volatilités

Retraitement des scénarios

- **Description**
- Le GSE permet de générer des scénarios risque neutre à t $= 0$, c'est-à-dire que les paramètres sont calibrés de sorte à obtenir :
- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i(0,t)F_i(t,T)] = F(0,t+T)$
- Afin de réduire les écarts de convergence, on peut ajuster les scenarios générés à l'aide des coefficients :
- $C(t,T) = \frac{F(0,t+T)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i(0,t)F_i(t,T)]}$
- Le nouveau jeu de scénarios obtenus vérifie :
- $Df^{new}(0,t)F^{new}(t,T) = C(t,T) \times Df(0,t)F(t,T)$
- Avec $Df^{new}(0,t) = \prod_{i=0}^{t-1} F^{new}(i,1)$

Retraitement des scénarios

- **Description**
- Le nouveau jeu de scénario vérifie la relation de récurrence sur t ci-dessous où les $F^{new}(0,T) = F(0,T)$ sont connus :
- $$\begin{cases} Df^{new}(0,t) = \prod_{i=0}^{t-1} F^{new}(i,1) \\ F^{new}(t,T) = C(t,T) \times \frac{Df(0,t)F(t,T)}{Df^{new}(0,t)} \end{cases}$$

- Après simplification, pour tout t, le jeu de scénario ajusté peut être calculé avec :

- $$\begin{cases} DF^{new}(0,0) = 1 \\ F^{new}(0,T) = F(0,T) \\ DF^{new}(0,t) = C(t-1,1).DF(0,t-1)F(t-1,1) = C(t-1,1).DF(0,t) \\ F^{new}(0,t,T) = \frac{C(t,T).DF(0,t)F(t,T)}{C(t-1,1)DF(0,t-1)F(t-1,1)} = \frac{C(t,T).DF(0,t)F(t,T)}{DF^{new}(0,t)} \end{cases}$$

Retraitement des scénarios

- **Description**
- Cette correction des scenarios du GSE permet d'assurer la propriété de martingale des scénarios :
- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i^{new}(0,t)F_i^{new}(t,T)] =$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Df(0,t)\frac{F(0,t+T)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i(0,t)F_i(t,T)]}\times F(t,T)\right]$$

$$= F(0,t+T)\times\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{Df(0,t)F(t,T)}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[Df_j(0,t)F_j(t,T)\right]}\right]$$

$$= F(0,t+T)\times\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i(0,t)F_i(t,T)]}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i(0,t)F_i(t,T)]}$$

$$= F(0,t+T)$$

Retraitement des scénarios

- **Description**
- Afin d'assurer que la déviation induite par cet ajustement ne déforme pas fondamentalement les scenarios issus du GSE, on peut limiter l'impact de l'ajustement à <u>**s bps**</u> (ex : 10bps).

- Ainsi, on peux rajouter la contrainte : $(1+s)^{-t} \leq C(t,T) \leq (1+s)^{t}$

Retraitement des scénarios

- **Comportement de C(0,t,T)**
- $C(t,T) = \frac{F(0,t+T)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} DF_i(0,t)F_i(t,T)}$
- Avec n le nombre de scénarios.

- Les $DF_i(0,t)F_i(t,T)$ sont i.i.d.(*) de moyenne $F(0,t+T)$ et admettent un moment d'ordre 2 s'ils sont supposés provenir d'un modèle lognormal (ou modèle normal).

- Les modèles de taux d'intérêt sont en général des modèles continus (Lognormal ou normal)

(*) En effet, $DF_i(0,t)F_i(t,T) = f(W_t^i)$ où f est une fonction mesurable déterministe et $\left(W_t^i\right)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Les $\left(W_t^i\right)_{t\geq 0}$ sont i.i.d. donc les $DF_i(0,t)F_i(t,T)$ le sont aussi

Retraitement des scénarios

- **Comportement de C(0,t,T)**

- Sans perte de généralités, les notations suivantes sont considérées :
- $C = C(t,T)$

$$\mu = F(0, t + T)$$
$$X_i = DF_i(t,T)F_i(t,T)$$
$$\sigma = ecart\_type(X_1)$$
$$v = \frac{\mu}{\sigma}$$
$$u = \frac{1}{v\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\mu\sqrt{n}}$$

- D'après la loi forte des grands nombres, C tend presque sûrement vers 1.

Retraitement des scénarios

- **Comportement de C(0,t,T)**
- D'après le théorème centrale limite, C tend en loi vers 1/N où N suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Sa fonction de répartition F_C est :
- $$F_C(x) = \begin{cases} \Phi\left(-\frac{1}{u}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) \; si \; x \leq 0 \\ \Phi\left(-\frac{1}{u}\right) + 1 - \Phi\left(-\frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) \; si \; x > 0 \end{cases}$$
- Avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Retraitement des scénarios

- **Comportement de C(0,t,T)**
- F_C est de classe C^{∞}et ne dépend que de u donc ne dépend que du rapport entre la moyenne et la variance de X et le nombre de scénario. Elle peut aussi s'écrire en fonction de $\Phi_{1,u}$:
- $F_C(x) = \begin{cases} \Phi_{1,u}(0) - \Phi_{1,u}\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x \leq 0 \\ \Phi_{1,u}(0) + 1 - \Phi_{1,u}\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x > 0 \end{cases}$
- La densité correspondante f_C est :
- $f_C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}ux^2} \exp(-\frac{1}{2u^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2)$
- Ainsi C n'admet pas d'espérance.

Retraitement des scénarios

- **Comportement de C(0,t,T)**

- Toutefois, les quantiles de C peuvent être calculés en inversant sa fonction de répartition

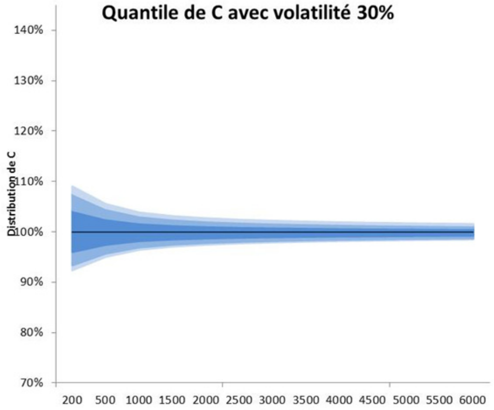
- $F_C^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1+u\Phi^{-1}(\Phi\left(-\frac{1}{u}\right)-y)} \; si \; y \leq \Phi\left(-\frac{1}{u}\right) \\ \frac{1}{1+u\Phi^{-1}(\Phi\left(-\frac{1}{u}\right)-y+1)} \; si \; y > \Phi\left(-\frac{1}{u}\right) \end{cases}$

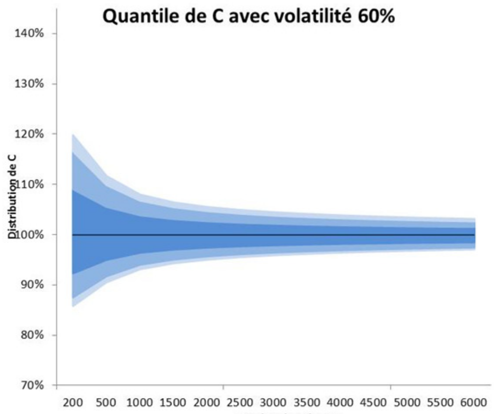
- F_C^{-1} s'exprime aussi en fonction de $\Phi_{1,u}$:

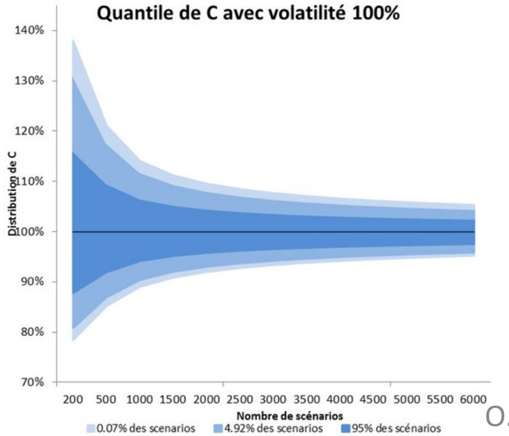
- $F_C^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{{\Phi_{1,u}}^{-1}(\Phi_{1,u}(0)-y)} \; si \; y \leq \Phi_{1,u}(0) \\ \frac{1}{{\Phi_{1,u}}^{-1}(\Phi_{1,u}(0)-y+1)} \; si \; y > \Phi_{1,u}(0) \end{cases}$

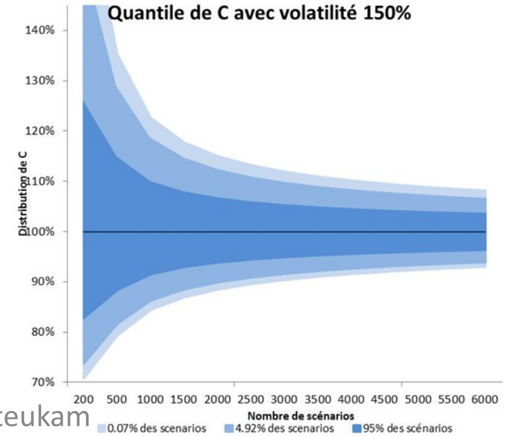
Retraitement des scénarios

- **Comportement de C(0,t,T)**
- Les graphiques suivants montrent l'évolution de la distribution du coefficient C selon le nombre de scénarios et le niveau de volatilité :









Retraitement des scénarios

- **Comportement de C(0,t,T)**
- Pour une volatilité très forte à 100%, avec 5000 scénarios, le tableau de quantile de C est le suivant :

Quantiles	0.005%	0.010%	0.040%	0.080%	2.500%	50.000%	97.500%	99.920%	99.960%	99.990%	99.995%
Valeur de C	94.8%	95.0%	95.5%	95.7%	97.3%	100.0%	102.9%	104.7%	105.0%	105.6%	105.8%

- La médiane est égale à 1, ce qui signifie qu'il y a autant de chance que le prix du zéro-coupon soit transformé à la hausse ou à la baisse.
- Dans 95% des cas, le prix du zéro-coupon est ajusté de moins de 3% en relatif, et dans 99.92% des cas, le prix du zéro-coupon est ajusté de moins de 10% en relatif.

- **Pour 5000 scenarios et même si la volatilité est élevée, on conclut ainsi que la technique du retraitement des scénarios impacte très faiblement la distribution initiale des scénarios issus du GSE.**

Retraitement des scénarios

- **Correction pour action et immobilier**
- Pour l'indice total return (Action ou Immobilier), la propriété de martingale suivante doit être vérifiée :

- $\mathbb{E}[Df^{new}(0,t)S_{tot}(t)] = S_{tot}(0)$

- Il suffit de poser : $S_{tot}^{new}(t) = S_{tot}(t).\frac{S_{tot}(0)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Df_i^{new}(0,t)S_{tot,i}(t)]}$
- Ainsi :

- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Df_i^{new}(0,t)S_{tot,i}^{new}(t)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Df_i^{new}(0,t)S_{tot,i}(t).\frac{S_{tot}(0)}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[Df_j^{new}(0,t)S_{tot,j}(t)\right]}\right]$

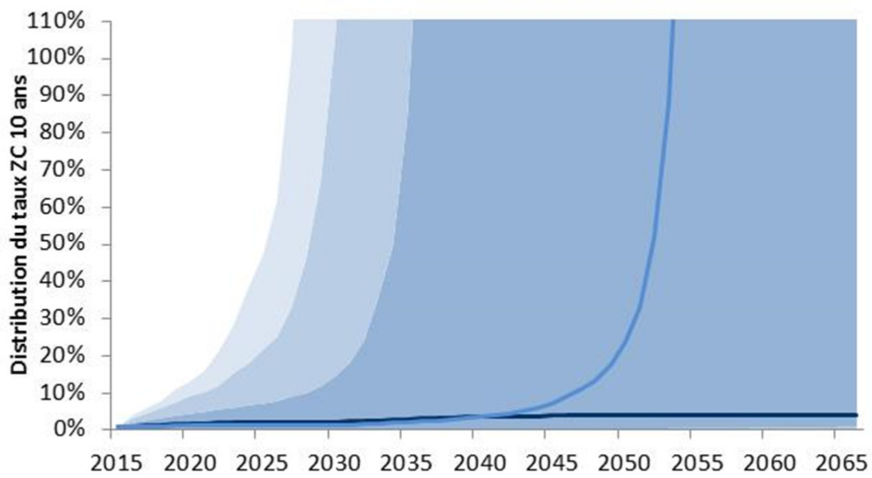
$$= S_{tot}(0).\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[.\frac{Df_i^{new}(0,t)S_{tot,i}(t)}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[Df_j^{new}(0,t)S_{tot,j}(t)\right]}\right]$$

$$= S_{tot}(0)$$

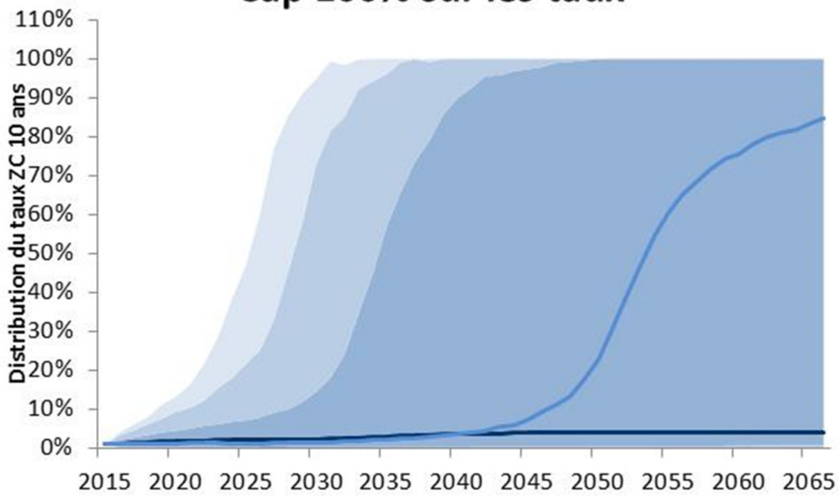
Impact sur la diffusion des taux

Impact sur la diffusion des taux

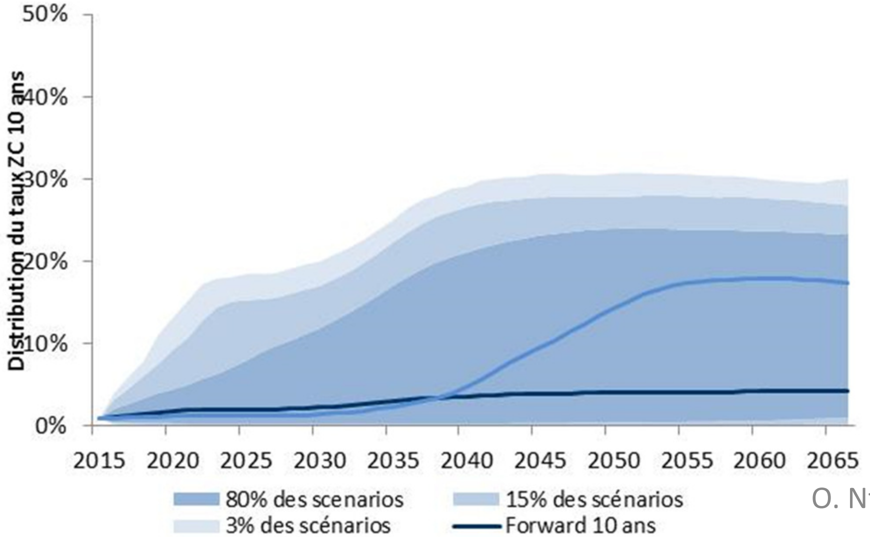
Sans contrainte sur les taux



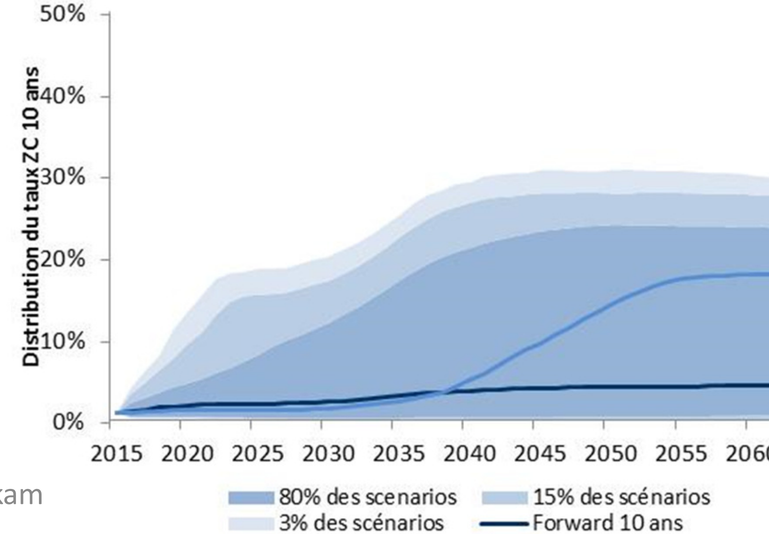
Cap 100% sur les taux



Freeze 20% sur les taux



Freeze 20% retraité sur les taux



Impact sur la diffusion des taux

- Nous utilisons un modèle LMM à deux facteurs calibré sur les données de marché au 30/09/2015 (taux EIOPA, volatilité des swaptions à la monnaie,…). La diffusion des taux sans contraintes montre que :
  - Les taux swaps 10 ans peuvent dépasser 3000%,
  - en 2045 plus de la moitié des scénarios contiennent un taux 10 ans supérieur à 10%,
  - en 2050 plus de la moitié des scénarios conduisent à un taux 10 ans supérieur à 50%
- L'application d'un niveau maximum des taux (cap à 100%) permet de limiter ces taux explosifs comme illustrer dans le graphique en haut à droite.
- La technique du « freeze » à 20% se focalise sur les taux explosifs, pour en limiter les effets :
  - On constate une diffusion plus aplatie. Le taux 10 ans dépasse 20% en 2020.
  - La valeur maximale du taux 10 ans est de 60% (seulement 30% sur le graphique, car ce dernier ne couvre que 98% des scénarios générés).
  - L'utilisation du freeze limite la présence des taux explosifs sans toutefois en fixer une limite absolue.
- La diffusion du taux 10 ans après le retraitement des scénarios générés avec le « freeze » à 20% :
  - montre une diffusion des taux qui bouge peu.

Résultats de la valorisation

Résultats de la valorisation

- **Comparatif des différentes techniques**

	2015Q3	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Test 7	Test 8
Taux Max (Cap sur les taux)	100%	100%	20%	20%	-	-	-	-
Freeze des scénarios	-	-	-	-	20%	20%	10%	10%
Retraitement des scenarios	NON	OUI	NON	OUI	NON	OUI	NON	OUI
Taux 10 ans								
Minimum	0.00%	-0.23%	0.00%	-0.19%	0.00%	-0.12%	0.00%	-0.06%
Maximum	100.00%	100.07%	20.00%	20.37%	59.09%	59.14%	20.35%	20.31%
Impacts des retraitements sur le taux 10 ans (en bp)								
Ecart min	-	- 46	-	- 24	-	- 18	-	- 8
Ecart max	-	7	-	37	-	7	-	6
Ecart moyen	-	- 9	-	9	-	- 3	-	- 1
Indice de déformation de la volatilité								
- Action	100.0%	99.6%	100.0%	99.6%	100.0%	99.5%	100.0%	99.6%
- Taux	100.0%	99.2%	96.6%	92.9%	98.4%	97.4%	94.3%	93.6%
Ecart de MC (en % du BE)	0.67%	0.44%	1.01%	-0.08%	0.29%	0.09%	0.17%	0.05%

Résultats de la valorisation

- **Discussion**
- **Quel niveau de « Freeze » retenir ?**
  - Sur base de l'historique des taux forward 1 an?
  - Les anticipations de la croissance économique de la France (Europe)? : un taux de croissance nominal à 10%? Pour quel niveau d'inflation? Pour quel niveau du taux de croissance réelle.
  - Sensibilité de l'écart de valorisation vs sensibilité de la valeur de l'optionnalité ?
- **Quelle limite au retraitement des scenarios ?**
  - Acceptation des taux négatifs lorsque le modèle de départ est log-normale,
  - Questionnement de la qualité des scénarios de départ.