GENERATEURS DE SCENARIOS ECONOMIQUES POUR VALORISER LES PASSIFS DE L'EPARGNE EN €

VERSION 1.0

31 MARS 2021
ISFA, LYON

Cette présentation s'appuie essentiellement sur trois articles :

- ARMEL K., PLANCHET F. [2020] « Utilisation de modèles de taux de type CIR pour évaluer la valeur économique des contrats d'épargne en € », LSAF, Document de travail.
- ARMEL K., PLANCHET F. [2019] « Comment définir la qualité d'un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le best-estimate des contrats d'épargne ? », Bankers, Markets and Investors.
- ARMEL K., PLANCHET F. [2018] « Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ? », Assurances et gestion des risques, Vol. 85 (1-2).

Kamal ARMEL
kamal.armel@armelconsulting.fr

Sommaire

Les contrats d’épargne en €

Principes généraux

- Capital investi par l’assuré.
- Revalorisation annuelle au moins d’un taux garanti.
- En cas de rachat ou de décès : paiement de l'investissement total capitalisé.
- L'assureur transfère l'investissement sur le marché financier.

Faible risque

- Gestion des placements à la discrétion de l'assureur.
- Nature des actifs : obligations, actions et immobilier.
- Protection partielle de l'épargne du souscripteur en cas de défaillance de l'assureur : jusqu'à 70 K€ garantis par le FGAP.

Taux de capitalisation

- Taux garanti : taux de revalorisation contractuelle minimal du capital investi.
- Participation aux bénéfices (PB) : le solde technique et financier après paiement des intérêts techniques.
- La PB non distribuée est provisionnée (PPB) pour une durée allant jusqu'à 8 ans.

Epargne acquise

- A chaque date, l'épargne acquise par l’assuré correspond à l'investissement capitalisé avec les taux garantis et la PB distribuée.
- La PPB est acquise par tous les assurés.
- Mais la distribution de la PPB est à la discrétion de l'assureur.

Les options et les garanties

Options et garanties proposées à l’assuré

- L’option de taux technique ou de PB garantis peut être assimilée à une option vanille européenne.
- L’option de rachat peut être assimilée à une option de vente américaine.
- L’option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés, peut être assimilée à une *swaption*.
- Options biométriques : sont les options dépendant du risque de mortalité (ou longévité) comme la proposition par l’assureur d’une rente différée.

Facteurs impactant le résultat de l’assureur

1 Risques biométriques

- Mortalité
- Longévité

2 Comportements des assurés

- Rachat dynamique : rachat dépendant des taux de revalorisation.
- Rachat structurel : tous les rachats non-dynamiques

3 La politique de l'assureur

- Politique d'investissement
- Anticipations des comportements des assurés.
- Dépenses, etc.

4 Risques économiques et financiers

- Rendement de l'actif.
- Taux d'intérêt.
- Inflation, emploi, etc.

Principes d'évaluation du passif dans le cadre de Solvabilité 2

- La valorisation « économique » correspond au *best-estimate* (flux futurs actualisés) et est complétée, le cas échéant, d'une marge de risque compensant l'immobilisation du capital de solvabilité requis des risques *non-couvrables* (se traduisant par un coût du capital des risques non-financiers ou des imperfections de couverture pour les risques financiers).

- Définition du *best-estimate*, art. 77 directive Solvency 2 : « *moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendues des flux de trésorerie futur), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinent* ».

- Le *best-estimate* des contrats en € calculé à un instant *t* s'écrit (Laurent et al. [2016]) :

$$BE(t) = E\left(\sum_{i=t}^{+\infty} F_i . \exp(-i . r_i)\right)$$

  - r_i est le taux sans risque à terme à l'échéance i.
  - Le flux F_i est la somme des paiements versés aux assurés et des frais diminués des primes et des chargements :

$$F_i = Paiements_i^{bruts} - Primes_i + Frais_i - Chargements_i$$

Expression du *best-estimate* en fonction des facteurs de risques

Investissement initial

Souscription et frais

- α_t : est un facteur qui prend en compte :
  - La probabilité de sortie durant l'année t à cause de décès ou de rachats ;
  - La probabilité d'être sous-contrat à l'instant t ;
  - Taux de frais ou de chargements.
- α_t est un facteur stochastique puisqu'il dépend du rendement distribué.

$$\mathbf{BE(0)} = \mathbf{PM(0)}.\, E\left(\sum_{t=1}^{T} \alpha_t . \psi(t)\right) \quad \Big| \quad \psi(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{t} c_i - t . r_t\right\}$$

$$\psi(t) = exp(Rdt\_Total\_Distrib_t) * DiscountFactor_t$$

La politique de l'assureur

- Politique d'investissement et environnement éco
- Pilotage de la performance comptable :
  - Taux supérieur au taux garanti
  - Gestion d'une richesse latente
  - Réaction à la concurrence

Scenarios économiques

- Performance de l'actif.
- Facteurs d'actualisation et donc taux d'intérêt sans risque...

L'allocation des actifs des assureurs Français

- Le tableau suivant présente la répartition de l'actif des assureurs en valeur de marché à fin 2016 (source FFA [2017]).

Encours des placements des sociétés d'assurances à fin 2016	*En Md€*	*Allocation*
Actions d'entreprises	401	17%
Obligations d'entreprises	907	39%
Obligations émises ou garanties par l'État	773	33%
Actifs immobiliers	97	4%
Actifs monétaires	123	5%
Autres	49	2%
Total	*2 350*	*100%*
Dont sociétés vie et mixte	2 114	90%
Dont sociétés dommages	236	10%

- Un générateur de scénarios économiques permettant de valoriser des obligations, des actions, des investissements en immobilier et des titres monétaires couvre **98 % de l'actif** des entreprises d'assurance et permet de diffuser les taux sans risque.

GSE pour l'évaluation du *best-estimate*

- **Un générateur de scénarios économiques (GSE)** est un modèle mathématique reproduisant l'environnement économique. Il est utilisé pour produire des simulations du comportement joint des valeurs du marché financier et des variables économiques sur un horizon d'intérêt.

- **Les GSE répondent essentiellement à deux objectifs** :
  - Valorisation en risque neutre et *market-consistent* pour l'évaluation des produits dérivés financiers et des contrats d'assurance avec des options intégrées.
  - Gestion des risques : calcul des risques d'investissement, calcul ALM, évaluation de quantiles, etc.

- **Le GSE destiné à la valorisation du *best-estimate* doit respecter certaines contraintes réglementaires** :
  - La structure par termes des taux d'intérêt sans risque est donnée par l'EOPA sur une base mensuelle.
  - Le GSE doit être cohérent avec le marché (*market-consistent*) : il doit satisfaire certains tests garantissant que les résultats fournis par le GSE sont cohérents avec les données du marché financier (voir l'article 76 de la directive).
  - Le processus de calibrage utilise des données provenant des marchés financiers profonds, liquides et transparents.
  - L'assureur doit justifier que les données sélectionnées sont pertinentes compte tenu des caractéristiques des obligations d'assurance.
  - Le générateur de nombres aléatoires est valide et non manipulé.

Les 3 étapes du processus de construction d’un GSE

- **L’environnement de modélisation** : il s’agit de choisir les variables économiques à modéliser. Classiquement, la mesure retenue est une probabilité risque neutre.

- **Les modèles** : il s’agit de construire les modèles mathématiques des variables d’intérêt. Cela consiste à choisir les modèles qui vont représenter la dynamique individuelle de ces variables et le choix du modèle qui représente la structure de dépendance.

- **Les paramètres et le calibrage** : il s’agit de choisir les produits financiers dérivés pour le calibrage, les données, les méthodes d’estimation statistique des paramètres des modèles et des méthodes de validation.

1- Environnement de modélisation	**2- Modèles mathématiques**	**3- Paramètres**
Variables économiques	Modèles stochastiques univariés	Instruments financiers pour le calibrage
Mesure risque neutre	Structure de dépendance (copules)	Données (date, périodicité…)
Mesure monde réel		Mesure/Méthode d’optimisation
		Méthodes de validation

GSE pour l'évaluation du *best-estimate* : un processus conventionnel (1/3)

- Les scénarios économiques doivent être cohérents avec le marché financier (*Market-Consistent*).

- L'objectif est de produire une juste valeur du passif compatible avec des prix et des risques observables et mesurables.

- Une approche *Mark-to-Market* n'est pas adaptée pour évaluer le *best-estimate* en juste valeur : les options et garanties des polices d'assurance ne sont pas négociées sur un marché liquide et profond.

- Le *best-estimate* est calculée dans un cadre *Mark-to-Model*.

Le calibrage et la validation du générateur de scénarios économiques (GSE), utilisés pour évaluer le *best-estimate*, en comparant les simulations aux données observées dans le cadre d'une approche statistique, ne peuvent être considéré.

GSE pour l'évaluation du *best-estimate* : un processus conventionnel (2/3)

- En l'absence d'observations de marché du *best-estimate* (BE), le GSE est calibré sur des produits financiers dérivés (*caps*, *floors*, *swaption* ...).
- La qualité du GSE est appréciée par sa capacité à reproduire les prix de ces produits financiers.
- L'hypothèse sous-jacente à cette pratique est l'équivalence entre ces options financières et le BE.
- Cette hypothèse ne peut cependant pas être vérifiée, car la meilleure estimation n'est pas observable.

Approche de calibrage standard

- Le GSE devraient être choisis et calibrés pour représenter au mieux les prix des instruments financiers retenus dans le processus de modélisation.
- Dans ce cadre, calibrer un GSE pour calculer le *best-estimate* revient à :
    - Choisir une mesure de distance noté d ;
    - Construire le vecteur des observations λ^{obs} ;
    - Construire le vecteur des prix théoriques λ^{th} ;
    - Calibrer le modèle en choisissant θ tel que : $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(\lambda^{obs}, \lambda^{th}(\theta)\right)\right)$.

Approche de calibrage Conventionnelle

- En épargne, l'application du processus standard se heurte à une limite majeure : le *best-estimate* est un prix qui n'est pas observé.
- La convention consiste à calibrer le GSE sur les prix de produits financiers dérivés échangés sur le marché jouant le rôle de substitut au *best-estimate*.
- Les paramètres du GSE sont déduits ensuite par l'optimisation suivante :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(prod\_fi^{obs}, prod\_fi^{th}(\theta)\right)\right)$$

GSE pour l'évaluation du *best-estimate* : un processus conventionnel (3/3)
Une convention dominante en 4 étapes

- **Modèle et instruments financiers dérivés** : choix du modèle de taux et choix des produits dérivés pour son calibrage : *caps*, *floors*, *swaptions*…

- **Prix d'exercice et volatilités implicites** : choix d'un prix d'exercice et extraction des volatilités de marché. Ces volatilités correspondent aux volatilités implicites des produits dérivés choisis à l'étape 1. Elles sont cohérentes avec la courbe de taux sans risque du marché.

- **Valorisation des produits dérivés** <u>en utilisant la courbe publiée par l'EIOPA</u> : utilisation du modèle de Black (si les volatilités sont implicites à un modèle log-normal) ou du modèle de Bachelier (si les volatilités sont implicites à un modèle normal) pour évaluer les prix des instruments dérivés en utilisant la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA. Ce sont ces prix qui vont jouer le rôle de « prix de marché » pour calibrer le modèle de taux retenu.

- **Calibrage du modèle de taux retenu** en minimisant une distance entre : (1) les prix estimés à partir des volatilités de marché et (2) les prix théoriques du modèle de taux.

Modèles de taux
Popularité des modèles auprès des assureurs

Modèle (catégorie)	Popularité Assureur taille moyenne	Popularité Assureur grande taille	Caractéristiques
CIR++ (1)	-	-	▪ une dynamique de taux court ▪ extension du modèle CIR permettant un décalage vers les taux négatif
CIR2++ (1)	-	+	▪ deux dynamiques CIR++ pour le taux court ▪ extension du modèle CIR permettant un décalage vers les taux négatif
Hull et White (Vasicek généralisé) (2)	++	+	▪ Une dynamique de taux court appartenant à la famille HJM ▪ Volatilité déterministe
Black Karasinski à deux facteurs (2)	-	-	▪ Extension du modèle de Black et Karasinski avec ajout d'un facteur de choc stochastique
G2++ (2)	NC	NC	▪ Une dynamique de taux court fondée sur 2 processus gaussiens

Modèle (catégorie)	Popularité Assureur taille moyenne	Popularité Assureur grande taille	Caractéristiques
LMM (3)	+	+	▪ Dynamique de taux forward s'appuyant sur une dynamique log-normale ▪ Volatilité déterministe
DD LMM (3)	+++	++	▪ Adaptation du modèle LMM pour modéliser des taux négatif, supérieur à un paramètre de décalage (*displaced factor*)
LMM+ (3)	++	+++	▪ Adaptation du modèle DD LMM avec une volatilité stochastique

Sommaire

Modèle de Black standard

La dynamique du modèle

- La dynamique du modèle de Black s'écrit : $dS_{\alpha,\beta}(\mathrm{t}) = S_{\alpha,\beta}(t).\,\sigma_{\alpha,\beta}\, dW_t^{\alpha,\beta}$.

- Le sous-jacent, dont la volatilité est $\sigma_{\alpha,\beta}$, est noté $S_{\alpha,\beta}$ et $W_t^{\alpha,\beta}$ est un mouvement brownien. Les paramètres (α, β) représentent respectivement la date d'exercice et la maturité du sous-jacent.

Prix du Cap

- La valorisation des caps et floors par le modèle de Black suppose que **le taux forward** suit la dynamique de Black présentée ci-dessus.

- Notons $T = \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$ l'ensemble des dates de paiement des caps/floors et T_α le temps d'initialisation. Soit $\tau = \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta\}$ tel que τ_i représente la différence entre T_{i-1} et T_i. Le prix à l'instant $t = 0$ du cap de prix d'exercice K et de valeur nominale N est donné par :

$$Cap^{Black}(t = 0, T, \tau, N, K, \sigma_{\alpha,\beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i)\tau_i Bl(K, F(0, T_{i-1}, T_i), v_i, 1)$$

- $P(0, T_i)$ est le prix d'une obligation zéro-coupon observé en $t = 0$ pour l'échéance T_i ;
- $F(0, T_{i-1}, T_i)$ est le taux forward observé en $t = 0$ pour la période entre T_{i-1} et T_i ;
- $Bl(K, F, v, \omega) = F\omega\Phi(\omega d_1(K, F, v)) - K\omega\Phi(\omega d_2(K, F, v)$
- Φ la fonction de distribution gaussienne standard ;
- $d_1(K, F, v) = \frac{ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{v^2}{2}}{v}$; $d_2(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{v2}{2}}{v}$;
- $v_i = \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_{i-1}}$;

Modèle de Black standard

Prix d'une Swaption

- La valorisation des *swaptions* par le modèle de Black suppose que **le taux *swap forward*** suit la dynamique de Black présentée ci-dessus.
- Notons $S_{\alpha,\beta}(t)$ le taux *swap forward* couvrant la période entre T_α et T_β :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P(t,T_j)}$$

- Le prix d'une *swaption* européenne payeuse de ténor $T_\alpha - T_\beta$, de nominal N et de prix d'exercice K est donné par :

$$PS^{Black}(0,T,\tau,N,K,\sigma_{\alpha,\beta}) = N.Bl\left(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}, 1\right) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0,T_i)\tau_i$$

- $T = \{T_0, \dots, T_M\}$ un ensemble discret de dates ;
- $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ un ensemble tel que τ_i représente la différence entre T_{i-1} et T_i ;
- $P(0,T_i)$ est le prix d'une obligation zéro-coupon observé en $t = 0$ pour l'échéance T_i ;
- $Bl(K,F,v,\omega) = F\omega\Phi(\omega d_1(K,F,v)) - K\omega\Phi(\omega d_2(K,F,v))$;

- Φ la fonction de répartition gaussienne standard ;
- $d_1(K,F,v) = \frac{ln\left(\frac{F}{K}\right)+\frac{v^2}{2}}{v}$;
- $d_2(K,F,v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right)-\frac{v2}{2}}{v}$;
- $\sigma_{\alpha,\beta}$ est la volatilité (généralement extraite des cours du marché).

Le modèle de Black et les taux négatifs

- Afin de rendre le modèle de Black cohérent avec des taux négatifs, un facteur de décalage des taux est introduit. Ce facteur est appelé « *shift* » ou « *displacement factor* ». On parle alors du modèle de Black décalé ou du *displaced* Black model. La dynamique du modèle s'écrit :

$$dS_{\alpha,\beta} = (S_{\alpha,\beta} + a).\sigma_{\alpha,\beta}^{(a)}.dW_t^{\alpha,\beta}$$

- Le modèle de Black décalé ne prend en compte que les taux négatifs supérieurs à $-a$. En pratique, ce facteur est choisi a priori et la valeur du facteur de décalage :
  - devrait être suffisante pour éviter que les grandeurs $S_{\alpha,\beta} + a$ et $K + a$ ne passent en dessous de zéro ;
  - mais ne devrait pas être extrêmement élevé car dans ce cas le taux forward peut avoir des valeurs négatives significatives.

- En définissant $\bar{S}_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta} + a$ et $\bar{K} = K + a$ la formulation du modèle Black décalé est équivalente à celle du modèle de Black. Par conséquent, les formules de valorisation des caps, floors et swaptions présentées dans les sections précédentes sont valables pour le modèle de Black décalé en remplaçant $S_{\alpha,\beta}$ par $\bar{S}_{\alpha,\beta}$, K par $\bar{K}$ et $\sigma_{\alpha,\beta}$ par $\sigma_{\alpha,\beta}^{(a)}$.

Sommaire

Modèle *Libor Market Model* Décalé

- Un modèle de taux de marché décrit directement la dynamique des taux négociables.

- Le taux *forward* noté $F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k)$ suit la dynamique donnée par (sous la mesure de probabilité Q^k associée au numéraire $P\,(\bullet, T_k)$) :

$$dF_k(t) = \sigma_k^{(h)}(t)(F_k(t) + h)dZ_k(t)\,;\, t \leq T_{k-1};\, dZ_i(t)dZ_j(t) = \rho_{i,j}dt$$

- La forme discrétisée du taux *forward* s'écrit sous Q :

$$F_k(T_{i+1}) = (F_k(T_i) + h)\,exp\left(\sigma_k(T_i)\left(\sum_{j=i+1}^{k} \rho_{j,k} \frac{\tau_j\sigma_j(T_i)\big(F_j(T_i) + h\big)}{1 + \tau_j F_j(T_i)} - \frac{1}{2}\sigma_k(T_i)\right)\tau_i + \sigma_k(T_i)\sqrt{\tau_i}\varepsilon_{k,i}\right) - h$$

- Le modèle LMM est cohérent sous certaines conditions avec le modèle de Black décalé et on peut utiliser les formules fermées de Black pour valoriser les *swaptions*.

Modèle de volatilité

- La valorisation d'obligations ou d'options nécessite la spécification de la forme de la volatilité instantanée et des corrélations.

- Plusieurs modélisations de la volatilité instantanée des taux *forward* sont proposées dans la littérature (Rebonato [2004]). Deux situations peuvent être distinguées :
  - Les modèles à volatilité constante par morceau impliquant que pendant de courts intervalles de temps, la volatilité d'un taux *forward* est constante ;
  - Les modèles proposant l'utilisation d'une forme paramétrique impliquant que la volatilité est une fonction du temps, de la maturité et d'un ensemble de paramètres.

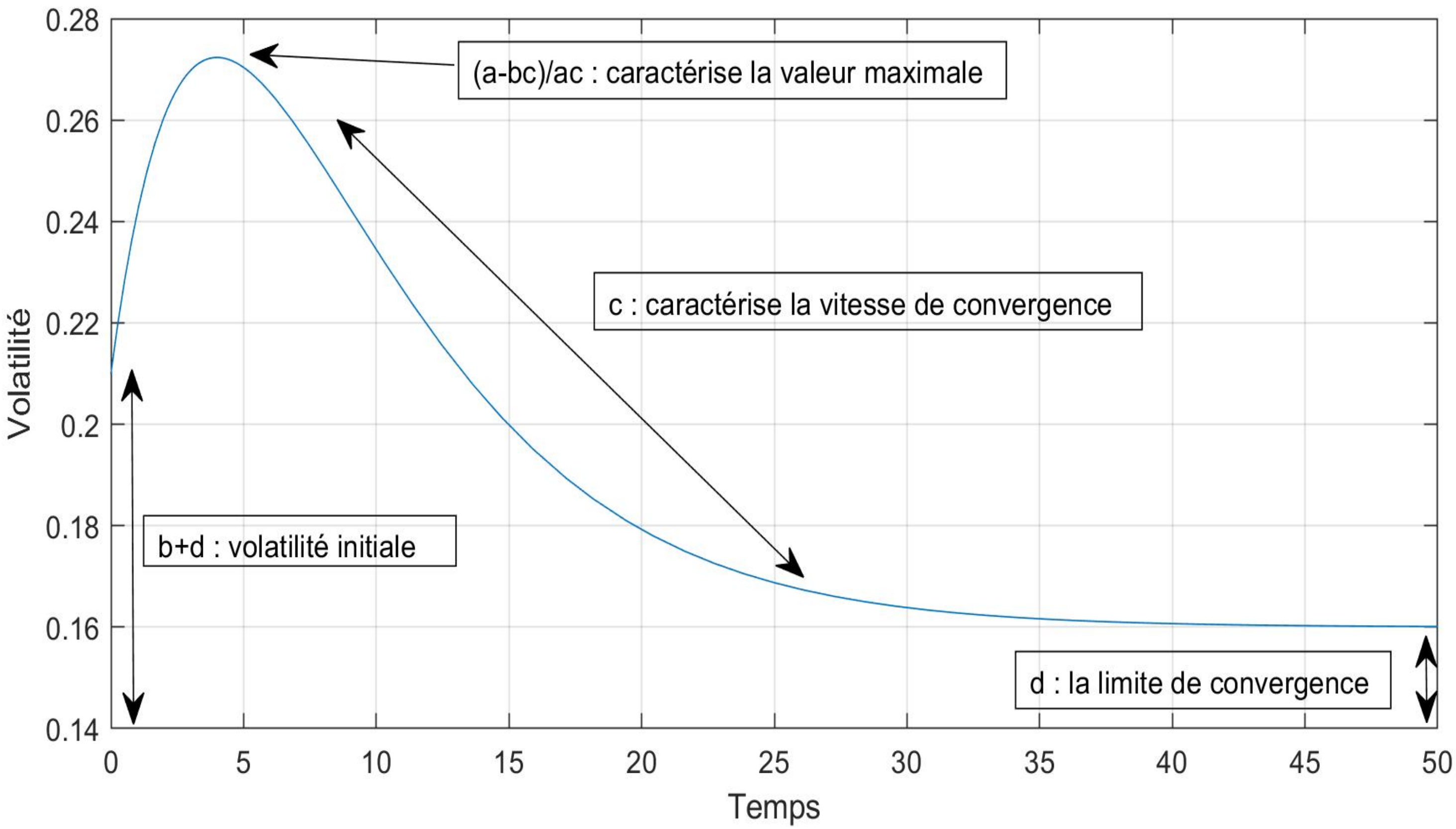
- Le modèle déterministe classique est présenté dans Rebonato [2004] :

$$\sigma_i(t) = (a(T_{i-1} - t) + b)e^{-c(T_{i-1}-t)} + d$$

- Cette forme intègre un terme linéaire avec une décroissance exponentielle permettant la formation d'une bosse.

- Cela implique également que la volatilité converge asymptotiquement vers d quand la maturité T_i tend positivement vers l'infini.

- Interprétation des paramètres de la fonction de volatilité de Rebonato : $f(t) = (at+b)e^{-ct} + d$ où a=b=5 %, c=20 % et d=16 %.



Modèle de corrélation

- Pour le modèle de corrélations, la forme paramétrique classiquement retenue est présentée dans Rebonato [2004] :

$$\rho_{ij}(t) = \exp\left(-\beta \left| T_i - T_j \right|\right)$$

- Cette forme paramétrique de la corrélation implique que plus les taux à terme sont éloignés, moins ils sont corrélés. De plus, pour tout β positif, la matrice de corrélation générée est une matrice de corrélation admissible : c'est-à-dire une matrice réelle, symétrique avec des valeurs propres positives.

- Cependant, cette forme est caractérisée par l'absence d'une dépendance temporelle : deux taux *forward*, séparés par la même distance temporelle $T_i - T_j$, auront la même corrélation, quelle que soit la date d'expiration T_i.

- Le modèle de corrélation retenu peut être généralisé par la forme (Rebonato [2004]) :

$$\rho_{ij}(t) = \exp\left(-\beta \left| g(T_i - t) - g(T_j - t) \right|\right)$$

Le calibrage du modèle LMM décalé consiste à calibrer le modèle de volatilité et le modèle de corrélation, soit le vecteur : ϴ=(a,b,c,d,β) de l'ensemble des paramètres du modèle.

Calibrage du modèle LMM sur des swaptions européennes

- Notons $S^{i,n}(t)$ le taux *swap forward* couvrant la période entre T_i et T_n.

- Le marché valorise les *swaptions* avec la formule de Black, ce qui suppose implicitement que le sous-jacent, le taux *swap forward*, est lognormal. Or cette hypothèse est incohérente avec celle supposant que le taux *forward* est log-normal.

- En effet, la relation entre le taux *swap forward* $S^{i,n}(t)$, et les obligations zéro-coupon s'écrit :

$$S^{i,n}(t) = \frac{P(t,T_i) - P(t,T_n)}{\sum_{j=i+1}^{n} \tau_j P\left(t,T_j\right)}$$

- Soit $\bar{S}^{i,n}(t)$ le taux swap forward décalé :

$$\bar{S}^{i,n}(t) = S^{i,n}(t) + h = \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{w_j(t)}\left(F_j(t) + h\right)$$

- où : $w_i(t) = \frac{\tau_i P(t,T_i)}{\sum_{j=i+1}^{n} \tau_j P(t,T_j)}$ et par définition : $F_k(t) P(t,T_k) = \frac{[P(t,T_{k-1}) - P(t,T_k)]}{\tau_k}$

- Les taux *swap forward* peuvent être interprétés comme des moyennes pondérées des taux *forward*. Cependant, les poids « w » dépendent des « F ». Sur la base d'études empiriques montrant que la variabilité des « w » est faible par rapport à la variabilité des « F », Brigo et Mercurio [2007] et Rebonato [1999], proposent d'approcher les « w » par leurs valeurs initiales (déterministes) $w(0)$.

Calibrage du modèle LMM sur des swaptions européennes

- Le taux *swap forward* décalé suit une dynamique log-normale. Sous une mesure de probabilité adaptée, le taux *swap forward* décalé s'écrit donc :

$$d\bar{S}^{i,n}(t) = \sigma_h^{i,n}(t)\bar{S}^{i,n}(t)dW_t^{i,n}$$

- Soit $\left(v_{i,n}^{(h)}\right)^2$ la variance moyenne du taux *swap forward* décalé sur l'intervalle $[0, T_i]$ multipliée par la longueur de l'intervalle. On a : $\left(v_{i,n}^{(h)}\right)^2 = \int_0^{T_i} \sigma_h^{i,n}(t)^2 dt$.

- Le prix de la *swaption* payeuse coïncide avec celui donné par la formule de Black appliqué au modèle de Black décalé dont le paramètre de variance (multiplié par T_i) est :

$$\left(v_{m,n}^{(h)}\right)^2 = \sum_{i,j=m+1}^{n} \frac{w_i(0)w_j(0)(F_i(0)+h)\big(F_j(0)+h\big)\rho_{i,j}}{(S^{m,n}(0)+h)^2} \int_0^{T_m} \sigma_i^{(h)}(t)\sigma_j^{(h)}(t)dt$$

- Minimiser une distance entre le prix du marché (donné par le modèle de Black décalé) et le prix calculé par le modèle LMM décalé, revient donc à minimiser la distance entre les volatilités des *swaptions* du marché (calculées donc par le modèle de Black décalé) et les volatilités théoriques décalées calculées par la formule de Rebonato ci-dessus. Le paramètre Θ, résultat de cette optimisation, dépend de la valeur du facteur de décalage.

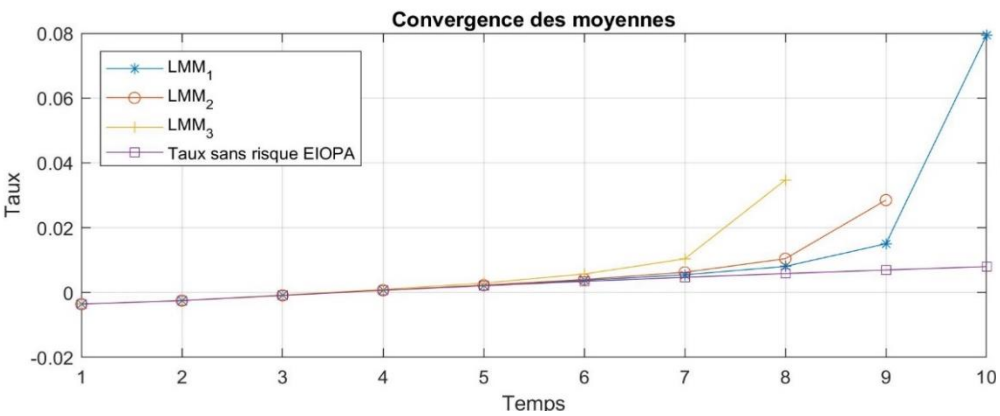
$$\widehat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(\left(\sigma_{m,n}^{black-shift}\right)_{m,n}, \left(v_{m,n}^{(shift)}(\Theta)\right)_{m,n} \right) \right)$$

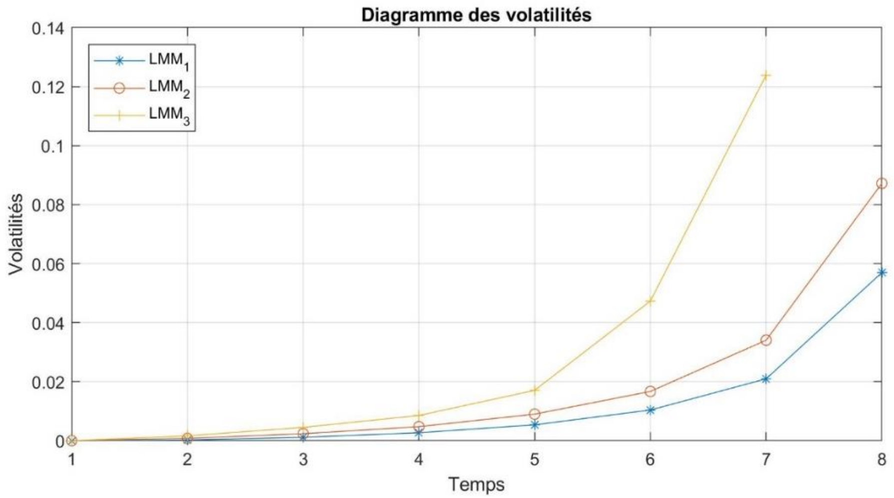
Résultats du calibrage (1/2)

- Calibrage sur swaptions ATM : volatilités log-normales implicites aux prix de marché de *swaptions* sur le taux Euribor 3 mois.

Facteur de décalage	*a*	*b*	*c*	*d*	*Beta*	Erreur totale au carré relative
0,00%	18,85%	0,19%	7,45%	0,01%	0,10%	1,19%

- Le calibrage *Market-Consistent* diverge (sur les données observées au 02/01/2018 et la courbe EIOPA du 31/12/2017 : les courbes moyenne/vol LMM sont tronquées à partir des instants de divergence.

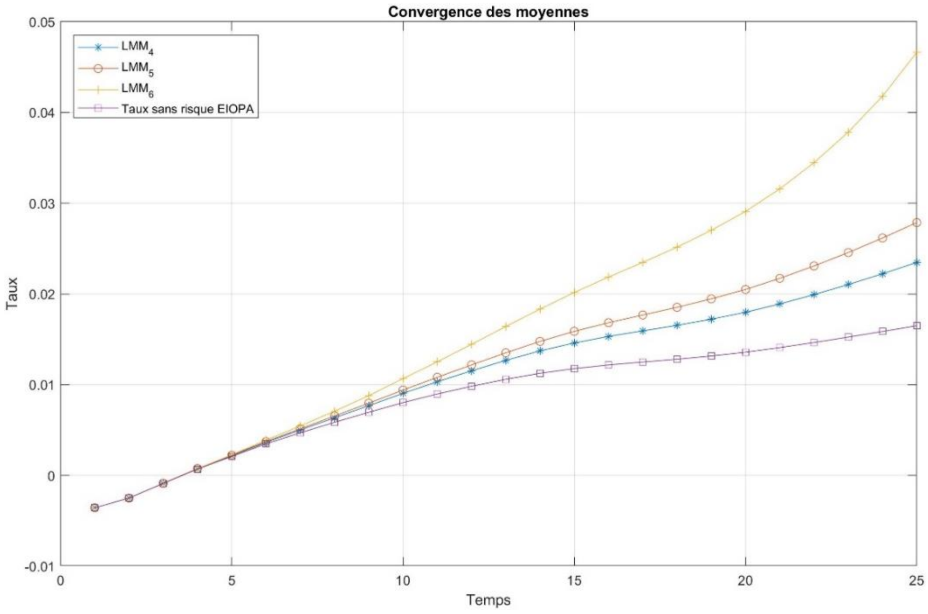


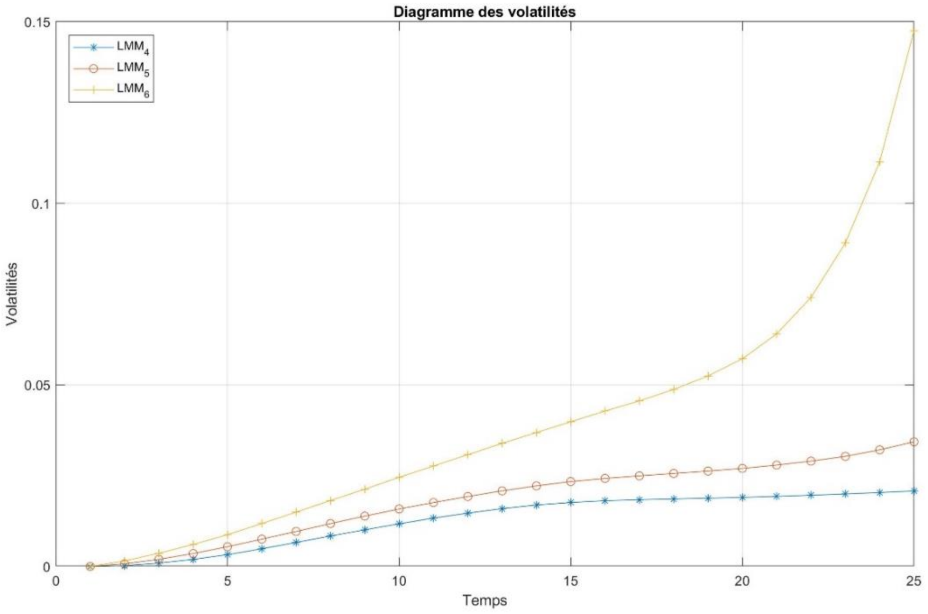


Résultats du calibrage : focus sur le modèle LMM (2/2)

- Modèle LMM ajusté (non *Market-Consistent*) : ajustement de la vitesse de convergence et de la limite asymptotique de la volatilité de Rebonato → LMM ajusté non divergent.

a	*b*	*c*	*d*	*Beta*
18,85%	0,19%	**20,00%**	**1,00%**	0,10%





Un mot sur la divergence des modèles log-normaux : LMM

- Les taux forward $F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k)$ est log-normal. Il s'écrit donc comme : $\ln(F_k(t)) \sim N(\mu_t, \sigma_t)$
- Notons par ailleurs que (pour x positif) : $\ln(x) < x$ et donc $\mathrm{E}\left(\ln(x)^{2v+1}\right) < E\left(x^{2v+1}\right)$
- Le moment d'ordre v de $\ln(F_k(t))$, Gerhold [2011] :

If X is any log-normal random variable, so that $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ for some real μ and positive σ, then

$$\sup\{v : \mathbf{E}[\mathrm{e}^{v \log^2 X}] < \infty\} = \frac{1}{2\sigma^2}. \tag{1}$$

This follows from

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{v \log^2 X}] = \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2 v}} \exp\left(\frac{\mu^2 v}{1-2\sigma^2 v}\right), \qquad v < \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Theorem 1. *In the log-normal LIBOR market model, we have for all $t > 0$ and all $1 \le n \le M$*

$$\sup\{v : \mathbf{E}^M[\mathrm{e}^{v \log^2 F_n(t)}] < \infty\} = \sup\{v : \mathbf{E}^M[\mathrm{e}^{v \log^2 F_n^{\mathrm{fd}}(t)}] < \infty\}$$
$$= \frac{1}{2\int_0^t \sigma_n(s)^2 \mathrm{d}s}.$$

Corollary 2. *Under the assumptions of Theorem 1, the supremum of all real v that satisfy the condition*

$$\mathbf{P}[F_n(t) > x] + \mathbf{P}[F_n(t) < \tfrac{1}{x}] = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-v \log^2 x}), \qquad x \to \infty,$$

is given by

$$v^* = \frac{1}{2\int_0^t \sigma_n(s)^2 \mathrm{d}s}.$$

Un mot sur la divergence des modèles log-normaux : cas des taux courts instantanés

- Bank account definition : $B(T) = exp\left(\int_0^T r_t dt\right)$. Brogo & Mercurio [2007] :

Explosion of the bank account for lognormal short-rate models. Assume we are at time 0 and we put one unit of currency in the bank account, for a small time Δt. We know that the expected value of our position at time Δt will be

$$E_0 B(\Delta t) = E_0 \left\{ e^{\int_0^{\Delta t} r(s) ds} \right\} \approx \dots$$

Now if Δt is small, we can approximate the integral as follows:

$$\approx E_0 \left\{ e^{\Delta t \; [r(0)+r(\Delta t)]/2} \right\} .$$

Given that the short rate $r(\Delta t)$ is lognormally distributed, we face an expectation of the type

$$E_0 \{\exp(\exp(Y))\}$$

where Y is normally distributed. It is easy to see that such an expectation is infinite, so that we conclude

$$E_0 \{B(\Delta t)\} = E_0 \left\{ e^{\int_0^{\Delta t} r(s) ds} \right\} = \infty .$$

This means that in an arbitrarily small time we can make infinite money on average starting from one unit of currency. This drawback is common to all models where r is lognormally distributed.

Quelques limites de la convention de calibrage du modèle LMM

- **Le prix du produit dérivé** : le modèle est calibré sur des produits financiers (caps, floors, swaption…). Se pose alors la question de la cohérence de la structure optionnelle du *best-estimate* et du produit financier choisi pour le calibrage.

- **Le prix d'exercice (*strike*)** : les prix des produits dérivés dépendent des prix d'exercice. Afin de proposer un calibrage des modèles cohérent avec la structure optionnelle du best-estimate, ces modèles devraient être calibrés sur des prix d'exercices cohérents avec les seuils d'exercice des options et des garanties du contrat d'épargne en euro.

- **La courbe des taux sans risque est communiquée par l'EIOPA** : il s'agit d'une courbe de taux non observable sur le marché financier.

- **Le facteur de décalage** est un facteur introduit pour permettre aux modèles log-normaux de prendre en compte des taux négatifs. Ce facteur de décalage dépend de la courbe de taux sans risque utilisée dans le modèle, en particulier, de la valeur minimale de cette courbe.

- **Les volatilités implicites** dépendent du prix des instruments financiers, du prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque et du facteur de décalage :
  - Le paramétrage du modèle de Black par la courbe de taux sans risque EIOPA implique l'introduction d'un facteur de décalage. Afin de garder une certaine cohérence du modèle, ce facteur devrait être identique à celui utilisé pour extraire les volatilités implicites des cours de marché ;
  - La cohérence entre la courbe de taux sans risque EIOPA et la volatilité implicite aux prix de marché n'est pas systématique. Les volatilités dépendent en effet de la courbe de taux sans risque utilisée pour les évaluer ;
  - Les volatilités implicites dépendent du prix d'exercice des instruments financiers utilisés dans le processus de calibrage. La cohérence entre les volatilités implicites et les options et garanties du passif n'est pas systématique.

Sommaire

Modèle Hull & White

- Le modèle Hull & White généralise le modèle de Vasicek [1977] et introduit une moyenne à long terme fonction du temps permettant au modèle de reproduire la courbe des taux d'intérêt par terme anticipée par le marché.

- Hull & White [1990] supposent que le taux d'intérêt instantané sous la probabilité risque neutre suit la dynamique suivante :

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t)$$

- Le modèle de Hull & White offre la possibilité de valoriser les ZC, les caps et les swaptions par des formules fermées :

  - *Caps* : $Cap(t,T,N,X) \; = \; N\sum_{i=1}^{n}\left(P(t,t_{i-1})\Phi\left(-h_i + \sigma_p^i\right) - (1 + X\tau_i)P(t,t_i)\Phi(-h_i)\right)$
  - *Swaptions* : $\mathbf{PS}(t,T,\mathcal{T},N,X) = N\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{ZBP}(t,T,t_i,X_i)$

- ZBP désigne le prix d'une option d'achat sur une obligation :

$$\mathbf{ZBP}(t,T,S,X) = XP(t,T)\Phi(-h+\sigma_p) - P(t,S)\Phi(-h)$$

Modèle Gaussien à deux facteurs (G2++)

- Le processus de taux court instantané est donné par la somme de deux facteurs gaussiens corrélés plus une fonction déterministe. Cette fonction permet la reproduction de la structure par termes des taux d'intérêt sans risque.

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t)$$
$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \; et \; x(0) = 0$$
$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \; et \; y(0) = 0$$

- W_1 et W_2 sont deux mouvements browniens : $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ et $-1 \leq \rho \leq 1$.

- Le modèle G2++ offre la possibilité de valoriser les ZC et les *caps* par des formules fermées :

$$Cap(t,T,\tau,N,X) = \sum_{i=1}^{n}\left(-N(1 + X\tau_i)P(t,T_i)\Phi\left(\frac{ln\frac{P(t,T_{i-1})}{(1+X\tau_i)P(t,T_i)}}{\Sigma(t,T_{i-1},T_i)} - \frac{1}{2}\Sigma(t,T_{i-1},T_i)\right) + P(t,T_{i-1})N\Phi\left(\frac{ln\frac{P(t,T_{i-1})}{(1+X\tau_i)P(t,T_i)}}{\Sigma(t,T_{i-1},T_i)} + \frac{1}{2}\Sigma(t,T_{i-1},T_i)\right)\right)$$

- Et la possibilité de valoriser des *swaptions* par une formule semi-fermée dont l'évaluation numérique reste simple :

$$ES(t=0,T,\mathfrak{I},N,X,\omega) = N\omega P(0,T)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\left[\Phi\big(-\omega h_1(x)\big) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)e^{\kappa_i(x)}\Phi\big(-\omega h_2(x)\big)\right]dx$$

Calibrage des modèles HW et G2++ dans un environnement de taux négatifs

- Le calibrage des modèles de Hull & White et G2++ sur des *caps*, des *floors* ou des *swaptions* valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites peut se présenter comme suit :
  - Etape 1 : extraire les volatilités implicites de Black cohérentes avec la valeur du facteur de décalage choisi en amont ;
  - Etape 2 : valorisation du produit dérivé par le modèle de Black décalé par la formule de Black en utilisant la courbe sans risque EIOPA. Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués ;
  - Etape 3 : calibrer les modèles Hull & White et G2++ en minimisant la distance entre les prix de Black et les prix de ces modèles. Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des *caps* ou *Swaptions* retenus pour le calibrage :

$$\widehat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left(\left(Prix_i^{black} \right)_i , \left(Prix_i^{model}(\theta) \right)_i \right) \right)$$

- Les paramètres des modèles Hull & White et G2++ calibrés ainsi sont cohérents avec les volatilités observées et la courbe de taux sans risques EIOPA dans un environnement de taux négatifs.

Résultats du calibrage

Hull & White

- $dr(t) = [\vartheta(t) - a.r(t)]dt + \sigma.dW(t)$

Indice	Décalage du modèle Black	a	σ	Erreur totale au carré relative
HW 1 (Caps)	0,40%	0,97%	0,53%	2,71%
HW 2 (Caps)	1,00%	1,00%	0,80%	2,98%
HW 3 (Caps)	2,00%	1,04%	1,25%	2,92%
HW 4 (Swaption)	0,40%	0,07%	1,27%	7,32%
HW 5 (Swaption)	1,00%	0,10%	1,62%	8,48%
HW 6 (Swaption)	2,00%	0,01%	2,20%	10,43%

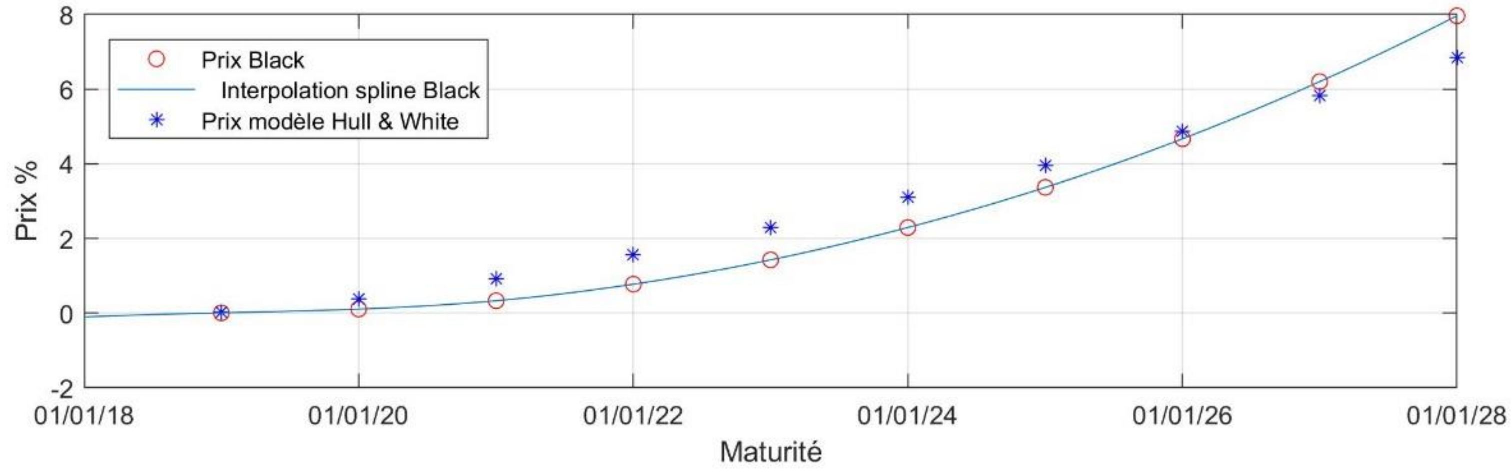
G2++

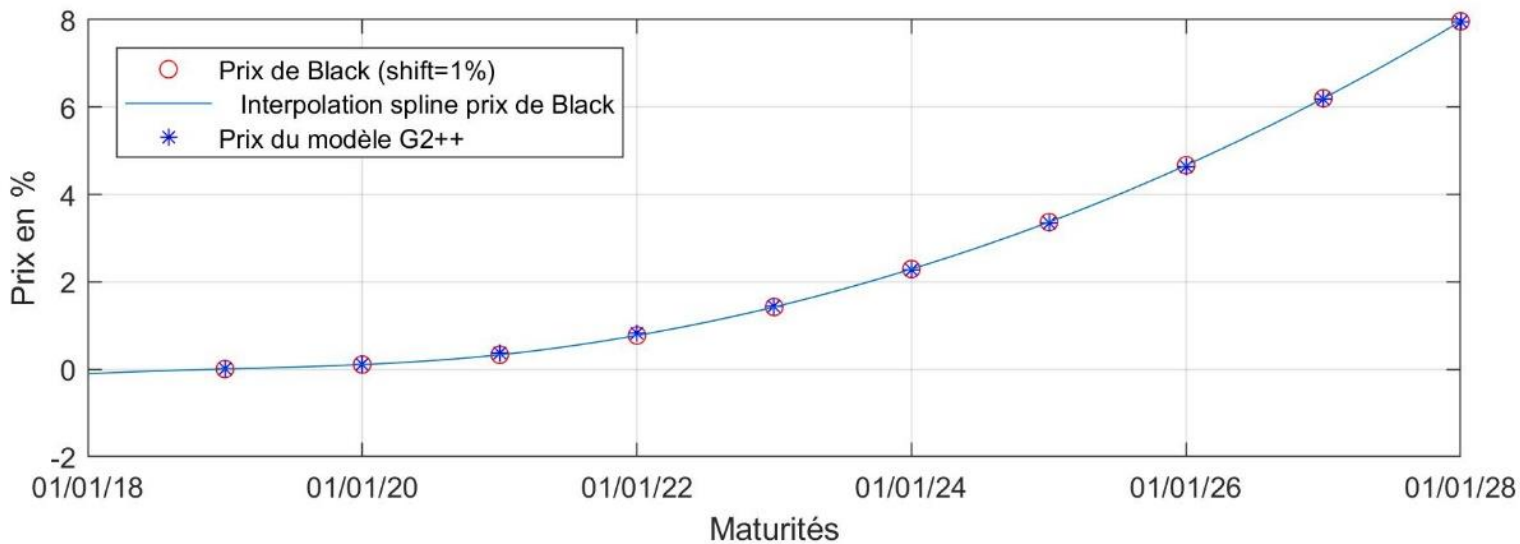
- $r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t)$
- $dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), x(0) = 0$
- $dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), y(0) = 0$
- $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ et $-1 \leq \rho \leq 1$

Indice	Décalage du modèle Black	a	b	σ	η	ρ	Erreur totale au carré relative
G2 1 (Caps)	0,40%	1,48%	0,50%	26,02%	25,64%	-99,99%	0,009%
G2 2 (Caps)	1,00%	5,14%	0,03%	7,50%	7,07%	-100,00%	0,005%
G2 3 (Caps)	2,00%	8,39%	4,36%	17,46%	16,76%	-99,99%	0,012%
G2 4 (Swaption)	0,40%	11,47%	9,04%	24,20%	23,22%	-99,99%	0,17%
G2 5 (Swaption)	1,00%	11,49%	8,90%	26,50%	25,67%	-99,80%	0,21%
G2 6 (Swaption)	2,00%	11,71%	8,38%	25,59%	24,97%	-99,97%	0,29%

Analyse de sensibilités du BE aux choix de modèles de taux

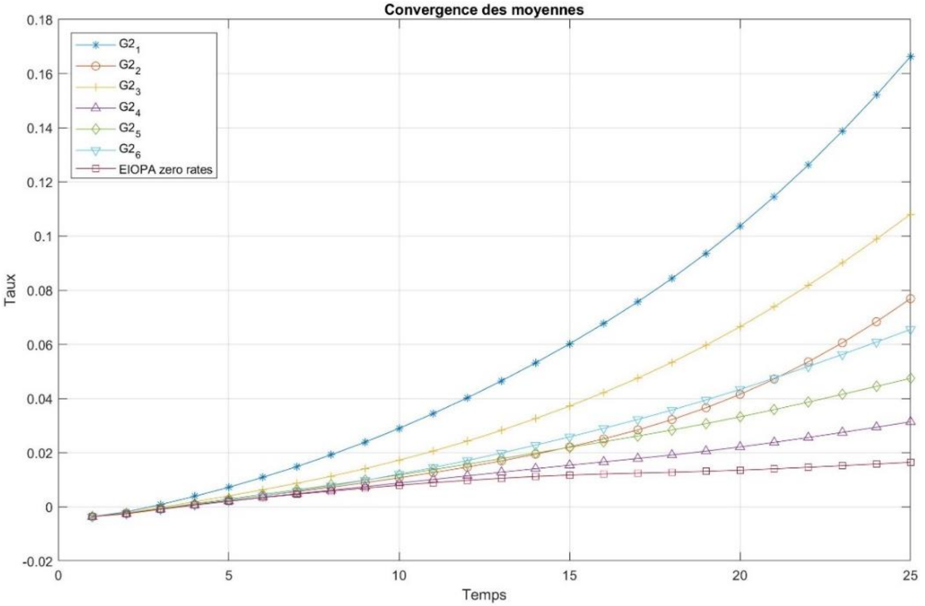
Résultats du calibrage : capacité à reproduire les prix des caps (shift=1%)

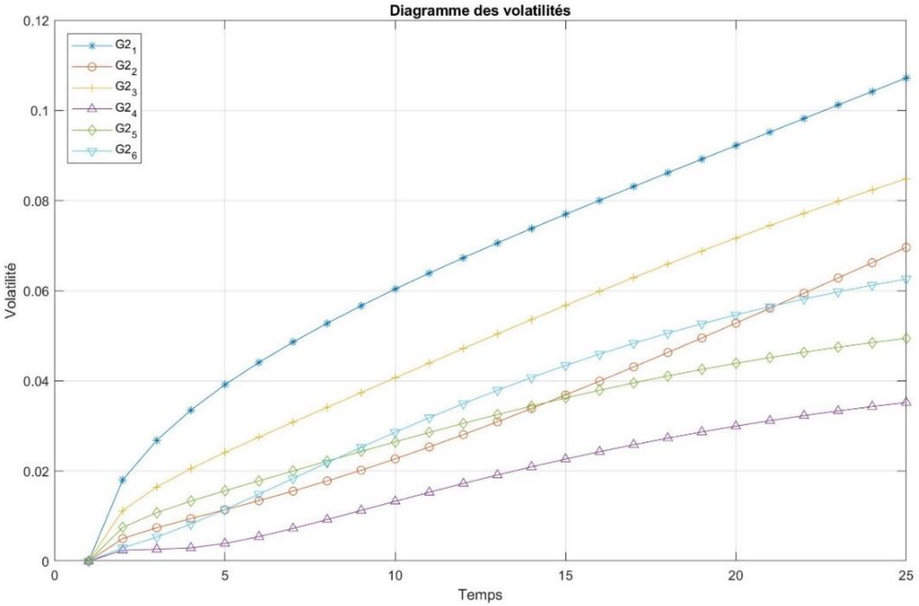




Analyse de sensibilités du BE aux choix de modèles de taux

Résultats du calibrage : moyenne et volatilité du modèle G2++





Sommaire

Modèle CIR de base

- La dynamique du modèle de Cox, Ingersoll et Ross [1985] sous la mesure risque-neutre s'écrit :

$$dr(t) = k\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

- où : $r(0) = r_0$ et r_0, k, θ, σ sont des constantes positives.

- Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller suivante :

$$2k\theta > \sigma^2$$

- Comme précisé dans la section 3.1.2 de l'annexe technique, le processus de taux court $r(t)$ conditionnellement à $r(s)$ suit la loi $\chi^2\big(v, \lambda_{t,s}\big)/c_{t-s}$: $r(t)|r(s) = \chi^2\big(v, \lambda_{t,s}\big)/c_{t-s}$

- où :
  - $\chi^2\big(v, \lambda_{t,s}\big)$ est une loi du Khi-deux non-centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est $\lambda_{t,s}$;
  - $c_{t-s} = \frac{4k}{\sigma^2\big(1-exp(-k(t-s))\big)}$;
  - $v = 4k\theta/\sigma^2$;
  - $\lambda_{t,s} = c_{t-s} r_s exp(-k(t-s))$.

- Bien qu'ils soient intéressants d'un point de vue analytique, le modèle CIR ne reproduit pas la structure par termes des taux d'intérêt observée sur le marché, et ce, quel que soit le choix des paramètres. Pour ce faire :
  - Rendre les paramètres dépendants du temps (extension de type Hull & White) ;
  - Introduire additivement une fonction déterministe de recalage sur la courbe initiale → CIR++ et CIR2++.

Modèle CIR++

- Le modèle CIR++ décrit le processus du taux court instantané r à partir d'une fonction déterministe notée φ et d'un processus **CIR** noté **x** : $r\ (t) = x(t) + \varphi(t)$ et $dx(t) = k\big(\theta - x(t)\big)dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t)\ ;\ x(0) = x_0$
- Le modèle CIR++ offre la possibilité de valoriser les ZC, les *caps* et les *swaptions* par des formules fermées :
- ZC : $P(t,T) = \bar{A}'\ (t,T)e^{-B(t,T)x(t)}$
- Option d'achat et de vente européenne sur ZC :

$$ZBC(t = 0, T, \tau, K)$$

$$= P(0,\tau)F_{\chi^2}\left(2\hat{r}[\rho + \psi + B(T,\tau)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 x_0 exp\{hT\}}{\rho + \psi + B(T,\tau)}\right) - KP(0,T)F_{\chi^2}\left(2\hat{r}[\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 x_0 exp\{hT\}}{\rho + \psi}\right)$$

$$ZBP(t = 0, T, \tau, K) = ZBC(t = 0, T, \tau, K) - P(0,\tau) + KP(0,T)$$

- Le prix à l'instant $t = 0\ < t_0$ du *cap* de prix d'exercice X, de valeur nominale N et défini sur l'ensemble $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ est donné par : $Cap(t = 0, \zeta, N, X) = N\sum_{i=1}^{n}(1\ +\ X\tau_i) \times ZBP\left(0, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1+X\tau_i}\right)$
- Le prix de la *swaption* payeuse à l'instant $t < T$ sur l'ensemble $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ est donné par :

$$PS(t = 0, T, \zeta, N, X) = N\sum_{i=1}^{n} c_i \times ZBP(0, T, t_i, X_i)$$

- La simulation des taux d'intérêt revient à simuler des lois de khi-deux non centrées.

Modèle CIR2++

- Le modèle CIR2++ décrit le processus du taux court instantané r à partir d'une fonction déterministe notée φ et de deux processus **CIR** indépendants notés $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{y}$: $r\ (t) = x(t) + \mathrm{y}(\mathrm{t}) + \varphi(t)$ et :

$$dx(t) = k\big(\theta - x(t)\big)dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t)\ ;\ x(0) = x_0$$

$$d\mathrm{y}(t) = k\big(\theta - \mathrm{y}(t)\big)dt + \sigma\sqrt{\mathrm{y}(t)}dW(t)\ ;\mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0$$

- Le modèle CIR2++ offre la possibilité de valoriser les ZC par des formules fermées.

- Le modèle CIR2++ à deux facteurs décalé ne permet pas la valorisation des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Nous disposons néanmoins d'une formule semi-fermée permettant de valoriser les *caps* et les *floors* numériquement.

- Dans les applications numériques : valorisation des *caps* et les *swapions* par des méthodes de Monte-Carlo classiques. Cela consiste à simuler les taux d'intérêt, évaluer les *pay-offs* et calculer l'espérance de ces pay-offs actualisés pour disposer des prix.

- La simulation des taux d'intérêt revient à simuler des lois de khi-deux non centrées.

Calibrage des modèles CIR++ et CIR2++ dans un environnement de taux négatifs

- Le calibrage des modèles CIR++ et CIR2++ sur des *caps*, des *floors* ou des *swaptions* valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites peut se présenter comme suit :

  - Etape 1 : extraire les volatilités implicites de Black cohérentes avec la valeur du facteur de décalage choisi en amont ;

  - Etape 2 : valorisation du produit dérivé par le modèle de Black décalé par la formule de Black en utilisant la courbe sans risque EIOPA. Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués ;

  - Etape 3 : calibrer les modèles CIR++ et CIR2++ en minimisant la distance entre les prix de Black et les prix de ces modèles. Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des *caps* ou *Swaptions* retenus pour le calibrage :

$$\widehat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(\left(Prix_i^{black}\right)_i, \left(Prix_i^{model}(\theta)\right)_i\right)\right)$$

- Les paramètres des modèles CIR++ et CIR2++ calibrés ainsi sont cohérents avec les volatilités observées et la courbe de taux sans risques EIOPA dans un environnement de taux négatifs.

Résultats du calibrage : focus sur les modèles de taux

CIR++

Résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Caps

Paramètres	CIR1F(1,1)	CIR1F(1,2)	CIR1F(1,3)	CIR1F(2,1)	CIR1F(2,2)	CIR1F(2,3)	CIR1F(3,1)	CIR1F(3,2)	CIR1F(3,3)
k	1,95%	2,91%	3,89%	2,20%	3,12%	4,09%	2,62%	3,45%	4,37%
ϴ	99,39%	99,22%	99,16%	98,77%	99,98%	99,24%	99,05%	99,34%	99,24%
σ	2,57%	2,10%	1,81%	3,68%	3,06%	2,68%	5,45%	4,69%	4,14%
Erreur totale au carré relative	**1,05%**	**1,19%**	**1,35%**	**1,00%**	**1,15%**	**1,34%**	**0,88%**	**1,03%**	**1,21%**

Résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Swaptions

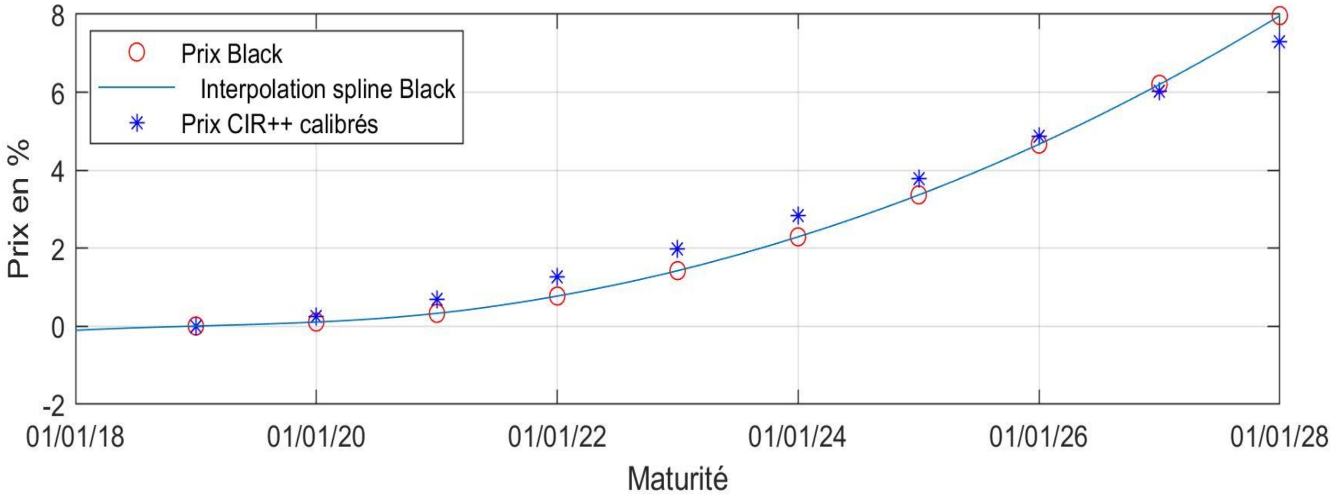
Paramètres	CIR1F(4,1)	CIR1F(4,2)	CIR1F(4,3)	CIR1F(5,1)	CIR1F(5,2)	CIR1F(5,3)	CIR1F(6,1)	CIR1F(6,2)	CIR1F(6,3)
k	2,63%	2,99%	3,45%	3,52%	3,85%	4,31%	4,95%	5,19%	5,50%
ϴ	99,95%	99,99%	100,00%	99,97%	99,99%	100,00%	99,90%	99,96%	99,98%
σ	5,76%	5,31%	4,87%	7,05%	6,65%	6,20%	9,53%	9,16%	8,70%
Erreur totale au carré relative	**2,92%**	**3,19%**	**3,60%**	**3,45%**	**3,73%**	**4,15%**	**4,89%**	**5,16%**	**5,60%**

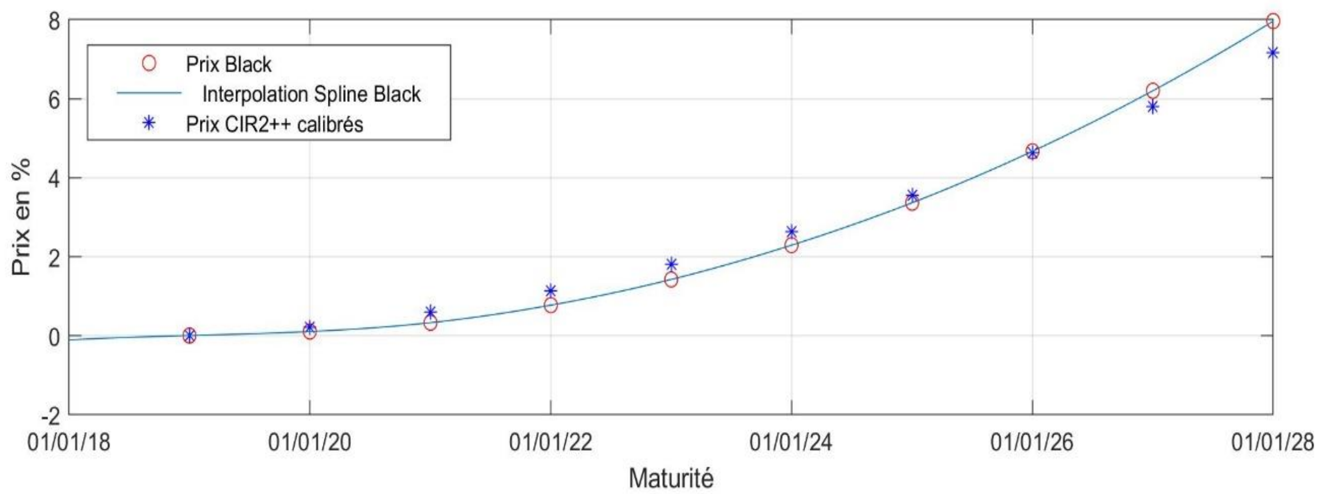
CIR2++

Résultats du calibrage du modèle CIR2++ sur des caps et des Swaptions

Paramètres	*Caps*			*Swaptions*		
	CIR2F_1	CIR2F_2	CIR2F_3	CIR2F_4	CIR2F_5	CIR2F_6
k1	2,39%	2,38%	2,41%	3,00%	3,55%	2,93%
ϴ1	101,05%	98,49%	100,00%	100,39%	92,51%	97,08%
σ1	1,58%	1,62%	3,20%	3,99%	4,89%	7,72%
k2	2,41%	2,65%	2,41%	3,00%	3,51%	2,96%
ϴ2	101,05%	97,14%	100,00%	100,63%	98,29%	101,20%
σ2	1,58%	2,49%	3,20%	4,00%	5,01%	6,68%
Erreur totale au carré relative	**0,83%**	**0,94%**	**0,76%**	**3,25%**	**3,71%**	**5,47%**

Résultats du calibrage : capacité à reproduire les prix des caps (shift=1%)





Sommaire

Analyse de sensibilités du BE aux choix de modèles de taux

Choix de modélisation

1 Environnement de modélisation

Mesure	Risque neutre		
Variables économiques	Taux d'intérêt sans risque	Action	Immobilier

2 Modèles mathématiques

Modèles univariés	CIR++ / CIR2++ ; Hull & White / G2++ ; LMM	Black-Scholes	Black-Scholes
Structure de dépendance	Matrice de corrélation extraite de données historiques		

3 Paramètres

Instruments	Caps & Swaptions sur Euribor ; Swaptions sur Euribor	Calls sur CAC40	Données historiques
Données : périodicité & profondeur	Données annuelles sur 10 ans Données observées le 02 Jan 2018	3 ans	12 ans
Méthode d'optimisation	Distance Euclidienne (distance L2)	Distance Euclidienne (distance L2)	Volatilité historique

Impact du choix de modèles de taux sur le best-estimate

Paramètres

- Utilisation du package R SimBEL en intégrant les tables de scénarios économiques et utilisation de données réelles modifiées d'un assureur ;
- La provision mathématique est de 70 M€ ;
- Total actif : 100 M€ ;
- Horizon de projection : 20 ans.

Résultats

Best-estimate par les modèles de taux MC

Montants en M€	*Cap*			*Swaption*		
	CIR1F(1,2)	*CIR1F(2,2)*	*CIR1F(3,2)*	*CIR1F(4,2)*	*CIR1F(5,2)*	*CIR1F(6,2)*
Best-estimate net de frais	82,62	82,66	83,03	83,58	83,94	84,67
Frais	7,92	7,89	7,85	7,89	7,83	7,70
Best-estimate	90,54	90,55	90,89	91,47	91,78	92,37

Montants en M€	*Caps*			*Swaptions*		
	CIR2F_1	*CIR2F_2*	*CIR2F_3*	*CIR2F_4*	*CIR2F_5*	*CIR2F_6*
Best-estimate net de frais	82,63	82,99	82,85	83,12	84,44	84,32
Frais	7,93	7,94	7,89	7,82	7,86	7,74
Best-estimate	90,56	90,94	90,74	90,94	92,30	92,05

Montants en M€	*HW 1*	*HW 2*	*HW 3*	*HW 4*	*HW 5*	*HW 6*
Best-estimate net de frais	82,92	82,92	82,64	82,89	82,63	82,45
Frais	7,95	7,94	7,85	7,86	7,76	7,60
Best-estimate	90,88	90,86	90,49	90,75	90,39	90,05

Montants en M€	G2 1	G2 2	G2 3	G2 4	G2 5	G2 6
Best-estimate net de frais	80,58	83,18	81,42	82,75	82,84	83,60
Frais	6,90	7,79	7,40	7,88	7,77	7,76
Best-estimate	87,48	90,97	88,82	90,63	90,61	91,36

Best-estimate par le modèle LMM ajusté non-MC

Montants en M€	*LMM 1*	*LMM 2*	*LMM 3*
Best-estimate net de frais	82,87	82,62	82,78
Frais	7,94	7,92	7,94
Best-estimate	90,81	90,54	90,72

Synthèse

Comparaison des impacts sur le BE

Best-estimate en M€	*Ecart-type*	*Min*	*Max*	*Ecart (Max-Min)/Moyennne*
Modèles CIR++ et modèle CIR2++	0,77%	90,54	92,37	2,00%
Modèles market-consistant : CIR++, CIR2++, HW & G2++	1,13%	87,48	92,37	5,38%
Tous les modèles yc LMM ajusté	1,06%	87,48	92,37	5,38%

- Le choix du modèle de diffusion de la structure par termes des taux d'intérêt est un élément central de la construction d'un GSE "risque neutre" pour le calcul de la valeur économique d'un contrat d'assurance.
- L’impact sur la valeur du *best-estimate* reste assez contenu mais comparable aux fonds propres.

Sommaire

Quel choix de modèles de Taux ?
La capacité à reproduire les prix de marché des caps et swaptions

- Modèles normaux :
  - La qualité de reproduction des prix par le modèle de Hull et White est moins bonne quand il s'agit de reproduire toute la nappe de volatilité ;
  - Le modèle G2++ reproduit très bien les volatilités de marché.
- Modèles log-normaux, LMM décalé :
  - Le modèle LMM décalé reproduit très bien les volatilités de marché.
- Modèles de type CIR :
  - La qualité de reproduction des prix par le modèle CIR++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White mais moins bonne que celle du modèle G2++. Cela s'explique essentiellement par le nombre de paramètres des modèles.
  - La qualité de reproduction des prix de *caps* et de *swaptions* par le modèle CIR2++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White et du modèle CIR++ mais reste moins bonne que celle du modèle G2++.
  - Le modèle G2++ permet d'avoir une forme en bosse de la volatilité (*volatility hump*) du taux *forward* instantané et reproduit mieux les prix de marché. Cette propriété est souhaitable quand le marché présente de fortes volatilités.

Quel choix de modèles de Taux ?
La simplicité du calibrage et de la diffusion

- Modèles normaux :
  - Les modèles normaux Hull et White et G2++ permettent de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées : on peut disposer d'une meilleure précision du calibrage et d'une meilleure optimisation des ressources informatiques.
  - La diffusion des modèles normaux Hull et White et G2++ est relativement simple car les taux d'intérêt peuvent être discrétisés exactement et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.
- Modèles log-normaux, LMM décalé :
  - Le modèle LMM décalé propose également des formules fermées pour la valorisation des dérivées, ce qui simplifie en partie le processus de calibrage. Ces formules peuvent découler d'approximations ou de la discrétisation d'Euler du modèle.
  - Cohérence avec la formule de Black pour le prix des *swaptions*.
  - Peut présenter des taux explosifs.
  - Diffusion par des méthodes d'Euler peu adaptée aux projections de long terme en assurance vie.
- Modèles de type CIR :
  - Le modèle CIR++ permet de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. La complexité du processus de calibrage est comparable à celle des modèles normaux et intègre en plus une contrainte sur les paramètres (contrainte de Feller).
  - Le modèle CIR++ peut être diffusé par des formules exactes et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.
  - Le modèle CIR2++ ne permet pas de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Le processus de calibrage utilise nécessairement des méthodes de valorisation alternatives comme les méthodes de Monte-Carlo ou de génération d'arbres ce qui le rend complexe.
  - Le modèle CIR2++ peut être diffusé par des formules exactes et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.

En synthèse

Comparaison des impacts sur le BE

Best-estimate en M€	*Ecart-type*	*Min*	*Max*	*Ecart (Max-Min)/Moyennne*
Modèles CIR++ et modèle CIR2++	0,77%	90,54	92,37	2,00%
Modèles market-consistant : CIR++, CIR2++, HW & G2++	1,13%	87,48	92,37	5,38%
Tous les modèles yc LMM ajusté	1,06%	87,48	92,37	5,38%

- Le choix du modèle de diffusion de la structure par termes des taux d'intérêt est un élément central de la construction d'un GSE "risque neutre" pour le calcul de la valeur économique d'un contrat d'assurance.
- L’impact sur la valeur du *best-estimate* reste assez contenu mais comparable aux fonds propres.
- Une attention particulière doit être accordée au modèle LMM : ce modèle, calibré sur les données observées au 02/01/2018, ne peut être retenu pour l’évaluation du *best-estimate* du fait de sa divergence.
- On peut retenir en synthèse de ces travaux que les modèles G2++ et CIR2+ constituent des solutions performantes pour les calculs de valeurs best estimate, avec un degré de complexité bien supérieur pour le CIR2+ sans gain majeur en termes de capacité à représenter les prix de marché.
- Si on devrait établir un classement, on aurait donc en premier le G2++ (simplicité d'utilisation), ensuite le CIR2+ et le LMM+ décalé disqualifié du fait des problèmes de convergence et du caractère arbitraire du décalage qu'il est nécessaire d'introduire pour prendre en compte les taux négatifs.

Références

- ACPR Banque de France. [2015] « NOTICE Solvabilité II, Provisions techniques (y compris mesures « branches longues ») », *Publication et textes de référence.*
- ACPR. [2013] « Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II ».
- Ahlip R. et Rutkowski M. [2008] « Forward start options under stochastic volatility and stochastic interest rates », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* - March 2009.
- Armel K., Planchet F., [2021a] « The economic evaluation of life insurance liabilities: pitfalls, best practices and recommendations for relevant implementation » Institut Louis Bachelier, Opinions & Débats n20, janvier 2021.
- Armel K., Planchet F., [2021b] « Les modèles de taux de type CIR pour une utilisation pertinente en assurance », LSAF, Document de travail.
- Armel K., Planchet F. [2020a] « Use of CIR-Type Interest Rate Models to Assess the Economic Value of Participating Savings Contracts », LSAF, Document de travail.
- Armel et Planchet [2020b] « Assessing the economic value of life insurance contracts with stochastic deflators », LSAF, Document de travail.
- Armel K., Planchet F. [2019a] « How to Define the Quality of an Economic Scenario Genarator to Assess the Best Estimate of a French Savings Contract in € ? », Bankers Markets Investors, n°157, June 2019.
- Armel K., Planchet F. [2019b] « Valeur économique d'un contrat d'assurance-vie : quels scénarios économiques ? », Risques, n°117.
- Armel K., Planchet F. [2018] « Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ? », Assurances et gestion des risques, Vol. 85 (1-2).
- Armel K., Planchet F., Kamega A. [2011] « Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ? », Bulletin Français d'Actuariat, vol. 11, n°22.
- Bernales A., Guidolin M. [2014] « Can we forecast the implied volatility surface dynamics of equity options? Predictability and economic value tests ». *Journal of Banking & Finance* 46 (2014) 326–342.
- Bonnin F., Juillard M., Planchet F. [2014] « Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA », *European Actuarial Journal*, Vol. 4, Issue 1, Page 181-196. http://dx.doi.org/10.1007/s13385-014-0086-z.
- Brigo D., Mercurio F. [2007] « Interest Rate Models - Theory and Practice ». 2nd Edition. *Springer*.
- Briys E., de Varenne F. [1994] « Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 19, 53-72.
- FFA (Fédération Française de l'Assurance) [2017] « Bilan de l'année 2016 et perspectives de l'année 2017 », conférence de presse.
- Hull J., White A. [1990] « Pricing interest rate derivative securities », *Review of Financial Studies* 3, 573–92.
- Kjaer M. [2004] « On the Pricing of Cliquet Options with Global Floor and Cap », Thesis for the Degree of Licentiate of Engineering, Department of Mathematics *Chalmers University of Technology and Goteborg University*.
- Laïdi Y., Planchet F. [2015] « Calibrating LMN Model to Compute Best Estimates in Life Insurance », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 15, n°29.
- Laurent J.P., Norberg R., Planchet F. (editors) [2016] « *Modelling in life insurance – a management perspective* », EAA Series, Springer.
- Planchet F., Kamega A., Thérond P.E. [2009] « Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation », Paris : *Economica*.
- Planchet F. [2015] « Valorisation des assurances-vie : comment mesurer la volatilité ? », Risques, n°104.
- Prudent C. [1996] « La clause de rachat anticipé évaluée comme une option », Séminaire « *utilisation des Méthode de la Théorie Financière Moderne en Assurance* », *FFSA*, Paris 10-11 juin 1996.