

MODÈLES FINANCIERS ET ANALYSES DE RISQUE DYNAMIQUES EN ASSURANCE



Année universitaire 2005-2006

Techniques de simulation : discrétisation d'équations différentielles stochastiques

Pierre-E. THEROND^α

1. Introduction	2
2. Discrétisation exacte.....	3
2.1. Définition	3
2.2. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	3
2.3. Mouvement brownien géométrique	4
3. Discrétisation approximative	5
3.1. Développement d'Itô-Taylor et critère de convergence forte	5
3.1.1. Lemme d'Itô	5
3.1.2. Développement d'Itô-Taylor	5
3.1.3. Critère de convergence forte	6
3.2. Schéma d'Euler	6
3.3. Schéma de Milstein	8
4. Méthodes pour les options exotiques	10
Bibliographie.....	11

^α ptherond@winter-associes.fr

1. Introduction

Les méthodes de Monte Carlo utilisées, en assurance, lors de la mise en œuvre de modèles du type DFA ou, en finance, lors de l'évaluation d'options font souvent usage de la discrétisation d'équations différentielles stochastiques. En effet la fréquence de variation du prix des actifs financiers a conduit les économistes à les modéliser par des processus continus. Toutefois la simulation effective de ces processus requiert la discrétisation du temps et donc la détermination de la loi du processus aux instants de discrétisation. Si pour certains processus tels que le mouvement brownien géométrique, il est possible de déterminer la loi du processus à n'importe quel instant (on parlera alors de discrétisation exacte), pour les autres, il va falloir les approcher par des processus discrets qui convergent vers les processus que l'on souhaite simuler (on parlera alors de discrétisation approximative).

Même si cette problématique n'est pas abordée ici, remarquons que la discrétisation temporelle est également nécessaire lors de l'estimation des paramètres des modèles ; cette dernière opération reposant évidemment sur des données discrètes. En particulier, Giet [2003] met en lumière l'incidence du choix de la discrétisation sur la qualité de l'estimation des paramètres.

L'objet de ce cours est de présenter les différents procédés de discrétisation usuellement employés ainsi que leur efficacité en terme de rapidité de convergence.

Prenons le cas d'un processus défini par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1)$$

Où B est un mouvement brownien standard.

Le calcul d'Itô permet de voir l'équation (1) comme une formulation symbolique de :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s . \quad (2)$$

Si le processus considéré ne dispose pas d'une discrétisation exacte, un développement d'Itô-Taylor de l'équation (2) nous permet de disposer d'une version discrétisée approximative (voir le paragraphe 3 ci-dessous). Cette approximation est d'autant plus précise que le développement intervient à un ordre élevé.

La fin de ce cours portera sur des méthodes spécifiques pour évaluer des options exotiques dont le prix dépend de la trajectoire du sous-jacent sur une période et plus seulement de sa valeur à une date fixée en 0.

Notations

Dans la suite de ce cours, on notera δ le pas de discrétisation, c'est à dire le temps qui s'écoule entre deux instants où l'on va simuler le processus. T désignera l'horizon de

projection. D'une manière générale, X sera le processus que l'on souhaite simuler et $(\tilde{X}_{k\delta})_{k \in [1; T/\delta]}$ le processus discret effectivement utilisé pour simuler des réalisations de X aux instants de discrétisations $k\delta$ où $k \in [1; T/\delta]$. Enfin ε désignera une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

2. Discrétisation exacte

La simulation d'un processus d'Itô pourra être effectuée directement (sans erreur de discrétisation) dès lors que celui-ci admet une discrétisation exacte. Nous allons voir ici ce qu'il faut entendre par le terme discrétisation exacte qui peut apparaître comme une oxymore et voir que dans le cas des modèles de Black et Scholes d'une part et de Vasicek d'autre part, la simulation des processus pourra passer par une discrétisation exacte.

2.1. Définition

Définition 1 : Un processus $(\tilde{X}_{k\delta})_{k \in [1; T/\delta]}$ est une **discrétisation exacte** du processus X si $\forall \delta > 0, \forall k \in [1; T/\delta] \tilde{X}_{k\delta} \stackrel{L}{\sim} X_{k\delta}$.

Propriété 1 : Un processus X admet une discrétisation exacte dès lors que l'on peut résoudre explicitement l'EDS qui lui est associée.

C'est notamment le cas du mouvement brownien géométrique retenu par Black et Scholes pour modéliser le cours d'une action ou encore celui du processus retenu par Vasicek pour modéliser le taux d'intérêt instantané.

2.2. Processus d'Ornstein-Ulhenbeck

Dans le cas du modèle de Vasicek, le taux instantané r est solution de l'EDS suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t. \quad (3)$$

L'équation (2) s'écrit dans ce cas :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s. \quad (4)$$

Démonstration : En effet un processus d'Ornstein-Ulhenbeck X est l'unique solution de :

$dX_t = -cX_t dt + \sigma dB_t$ avec $X_0 = x$. Si l'on pose $Y_t = X_t e^{ct}$, on a : $dY_t = e^{ct} dX_t + X_t d(e^{ct}) + d\langle X, e^c \rangle_t$. Or $d(e^{ct}) = ce^{ct} dt$ donc $\langle X, e^c \rangle_t = 0$. Ainsi

$dY_t = \sigma e^{ct} dB_t$ et donc $X_t = x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dB_s$. Enfin le résultat est obtenu par :

$r_t = X_t + b$ et $a = -c$. \square

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte :

$$r_{t+\delta} = r_t e^{-a\delta} + b(1 - e^{-a\delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}} \varepsilon. \quad (5)$$

Propriété 2 : Si $\sigma(x, t)$ est une fonction du temps, X admet une discrétisation exacte.

Démonstration : Soit $p \in \mathbf{N}$. Notons δ le pas de discrétisation. Cherchons à simuler la trajectoire d'un mouvement brownien B . Pour obtenir une réalisation de $B_{p\delta}$, il suffit de calculer $B_{p\delta}^\delta = \sqrt{\delta} \sum_{k=1}^p \varepsilon_k$ où les ε_k sont des v.a. mutuellement indépendantes de loi normale centrée réduite. La loi de l'approximation $B_{p\delta}^\delta$ est identique à celle de $B_{p\delta}$. Donc dès lors que $\sigma(x, t)$ est une fonction qui ne dépend que du temps, $\int_{p\delta}^{(p+1)\delta} \sigma(x, t) dB_t$ reste une variable aléatoire de loi normale centrée et de variance $\int_{p\delta}^{(p+1)\delta} \sigma^2(x, t) dt$. \square

2.3. Mouvement brownien géométrique

Intéressons nous à présent au cas du mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t. \quad (6)$$

Ce processus admet lui aussi une discrétisation exacte :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma (B_t - B_0) \right\}. \quad (7)$$

Où $B_t - B_0 = B_t$.

En choisissant un pas de discrétisation δ , on obtient le schéma récursif exact suivant :

$$S_{t+\delta} = S_t \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta + \sigma \sqrt{\delta} \varepsilon \right\}. \quad (8)$$

Remarque : Dans le cas du mouvement brownien géométrique, $\sigma(x, t) = \sigma x$ et n'est donc pas une fonction du temps. La propriété 2 n'est donc pas une condition nécessaire.

3. Discrétisation approximative

Lorsque la discrétisation exacte n'existe pas, il convient de se tourner vers des approximations discrètes du processus continu sous-jacent. Les schémas d'Euler et de Milstein sont les procédés de discrétisation les plus répandus. Tous deux sont des développements d'Itô-Taylor de l'équation (2) à des ordres différents.

3.1. Développement d'Itô-Taylor et critère de convergence forte

Ce paragraphe a pour objet de présenter les outils qui vont permettre d'obtenir les processus discrétisés et d'évaluer leur efficacité.

3.1.1. Lemme d'Itô

Définissons pour toute fonction g de classe $C^{2,1}$, les opérateurs \mathbf{L}_0 et \mathbf{L}_1 par

$$\begin{cases} \mathbf{L}_0 g(X_t, t) = g_t + g_x \mu + \frac{\sigma^2}{2} g_{yy} \\ \mathbf{L}_1 g(X_t, t) = \sigma g_x \end{cases} \quad (9)$$

Où les fonctions g , μ , σ et leurs dérivés sont évaluées en (X_t, t) .

L'opérateur \mathbf{L}_0 est également appelé Dynkin du processus X .

Rappelons à présent le lemme d'Itô qui, si X est un processus d'Itô, permet de différencier le processus $g(X)$ sous réserve que g soit suffisamment régulière.

Lemme d'Itô

Si X est un processus d'Itô qui vérifie (1), si g est de classe $C^{2,1}$ et si $Z(t) = g(X_t, t)$, on a :

$$dZ_t = \mathbf{L}_0 g(X_t, t) dt + \mathbf{L}_1 g(X_t, t) dB_t \quad (10)$$

ou de manière équivalente :

$$Z_t = g(X_t, t) = g(X_0, 0) + \int_0^t \mathbf{L}_0 g(X_s, s) ds + \int_0^t \mathbf{L}_1 g(X_s, s) dB_s . \quad (11)$$

3.1.2. Développement d'Itô-Taylor

Rappelons le principe du développement d'Itô-Taylor. Ce développement repose sur la combinaison du lemme d'Itô et de l'écriture sous forme intégrale d'un processus.

En effet, en considérant que

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s , \quad (12)$$

il vient

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\mu(X_s, s) dt + \sigma(X_s, s) dB_s). \quad (13)$$

Puis en utilisant à nouveau la méthode (14) pour les fonctions μ et σ , on obtient

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left\{ \mu(X_0, 0) + \int_0^s d\mu(X_s, s) \right\} dt + \int_0^t \left\{ \sigma(X_0, 0) + \int_0^s d\sigma(X_s, s) \right\} dB_s. \quad (14)$$

L'utilisation du lemme d'Itô aux fonctions μ et σ nous permet d'obtenir le développement d'Itô-Taylor à l'ordre 1 (cf. *infra* dans le schéma d'Euler). Les développements d'ordre supérieur seront obtenus par la même technique.

3.1.3. Critère de convergence forte

Dans la suite, nous ferons référence au critère de convergence forte pour classer les procédés de discrétisation. Une discrétisation approximative \tilde{X} converge fortement vers le processus continu X lorsque l'erreur commise sur la valeur finale (à la date T) de la trajectoire obtenue par le processus discrétisé est en moyenne négligeable.

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{E} \left[\left| \tilde{X}_T^\delta - X_T \right| \right] = 0. \quad (15)$$

La vitesse de convergence de l'équation (6) nous permet d'introduire un ordre entre les procédés de discrétisation. Ainsi le processus discrétisé \tilde{X} converge fortement¹ à l'ordre γ vers le processus X si :

$$\exists K > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall \delta \in]0, \delta_0] \quad \mathbf{E} \left[\left| \tilde{X}_T^\delta - X_T \right| \right] \leq K \delta^\gamma. \quad (16)$$

3.2. Schéma d'Euler

Le procédé de discrétisation d'Euler consiste en l'approximation du processus continu X par le processus discret \tilde{X} défini, avec les mêmes notations que précédemment, par :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}\varepsilon. \quad (17)$$

Ce procédé est obtenu, en négligeant le reste dans le développement d'Itô-Taylor au premier ordre de (2) :

$$X_t = X_0 + \mu(X_0, 0) \int_0^t ds + \sigma(X_0, 0) \int_0^t dB_s + R_1(0, t). \quad (18)$$

¹ On notera que ce critère ne fait pas référence à la convergence uniforme.

Où le reste $R_1(0,t)$ est donné par :

$$R_1(0,t) = \int_0^t \int_0^s \mathbf{L}_0 \mu(X(u),u) du ds + \int_0^t \int_0^s \mathbf{L}_1 \mu(X(u),u) dB_u ds + \int_0^t \int_0^s \mathbf{L}_0 \sigma(X(u),u) du dB_s + \int_0^t \int_0^s \mathbf{L}_1 \sigma(X(u),u) dB_u dB_s \quad (19)$$

Le schéma d'Euler revient donc à faire l'approximation naturelle suivante :

$$\int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dB_s \approx \mu(X_0, 0)t + \sigma(X_0, 0)(B_t - B_0). \quad (20)$$

Kloeden et Platen [1999] prouvent que sous certaines conditions de régularité², le schéma d'Euler présente un ordre de convergence forte de 0,5.

Par exemple dans le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR), le taux d'intérêt instantané est solution de l'EDS :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t. \quad (21)$$

Aussi le processus discret \tilde{r} déterminé par le schéma d'Euler peut s'écrire :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma \sqrt{\tilde{r}_t} \delta \varepsilon. \quad (22)$$

Le graphique suivant permet de comparer les évolutions moyennes de la diffusion définie par (3) selon que l'on se tourne vers la discrétisation exacte ou vers le schéma d'Euler.

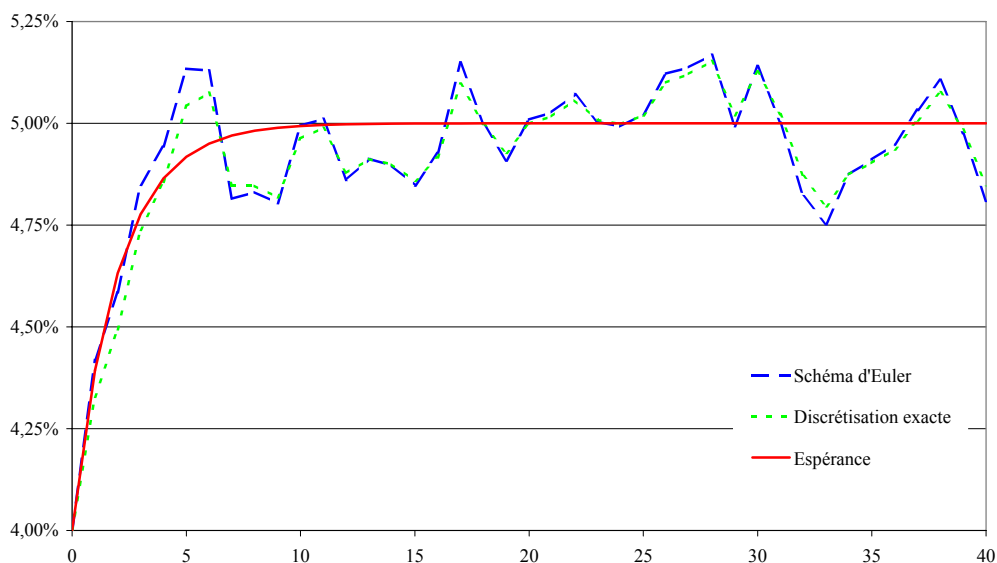


Fig. 1 : Evolution moyenne du taux modélisé par Vasicek selon le procédé de discrétisation retenu

² Il faut pour cela que μ et σ soient des fonctions C^4 avec des dérivés bornées jusqu'à l'ordre 4.

Les discrétisations exacte et selon le schéma d'Euler sont relativement proches graphiquement. L'écart est en particulier négligeable lorsque l'on s'intéresse aux évolutions moyennes d'un bon de capitalisation qui évolue selon les taux simulés pour effectuer le graphique précédent :

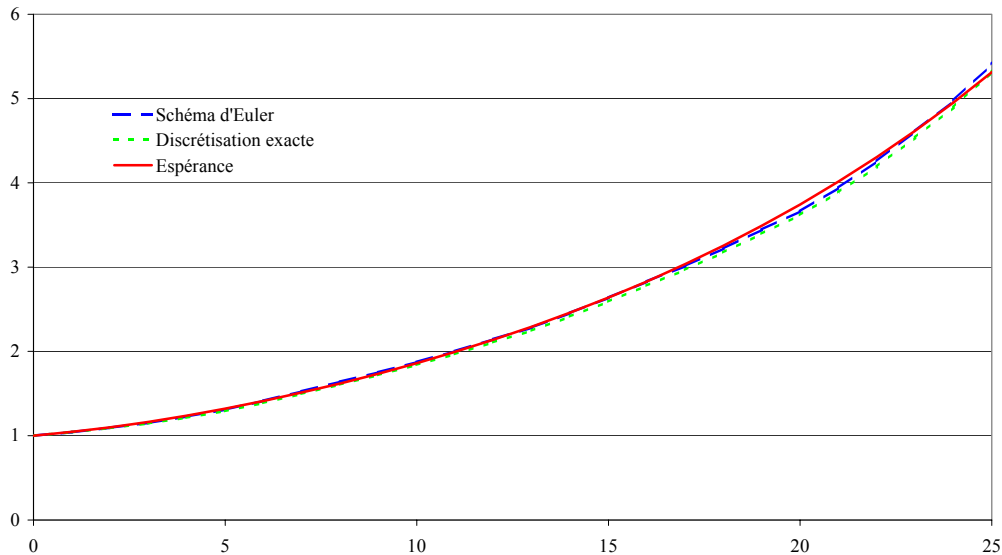


Fig. 2 : Evolution moyenne d'un bon de capitalisation dont le taux évolue selon le modèle de Vasicek selon le procédé de discrétisation retenu

3.3. Schéma de Milstein

Le schéma de Milstein est obtenu en allant plus avant dans le développement d'Itô-Taylor. Le processus discret \tilde{X} est alors défini par :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}\varepsilon + \frac{\sigma_x(\tilde{X}_t, t)\sigma(\tilde{X}_t, t)}{2}\delta(\varepsilon^2 - 1). \quad (23)$$

Où $\sigma_x(\tilde{X}_t, t)$ désigne la dérivée par rapport au premier argument de la fonction $\sigma(\cdot, \cdot)$ évaluée en (\tilde{X}_t, t) .

Ce schéma est obtenu à partir d'un des développements d'Itô-Taylor au deuxième ordre :

$$X_t = X_0 + \mu(X_0, 0) \int_0^t ds + \sigma(X_0, 0) \int_0^t dB_s + \mathbf{L}_1 \sigma(0, X_0) \int_0^t \int_0^s dB_u dB_s + R_2(0, t). \quad (24)$$

Où le reste R_2 , qui sera négligé pour obtenir le schéma de Milstein, est donné par :

$$\begin{aligned}
R_2(0,t) &= \int_0^t \int_0^s \mathbf{L}_0 \mu(X(u),u) dud s + \int_0^t \int_0^s \mathbf{L}_1 \mu(X(u),u) dB_u ds \\
&+ \int_0^t \int_0^s \mathbf{L}_0 \sigma(X(u),u) dud B_s \\
&+ \int_0^t \int_0^s \int_0^u \mathbf{L}_0 \mathbf{L}_1 \sigma(X(v),v) dv dB_u dB_s + \int_0^t \int_0^s \int_0^u \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1 \sigma(X(v),v) dB_v dB_u dB_s
\end{aligned} \tag{25}$$

Remarquons qu'il existe plusieurs développements d'Itô-Taylor à l'ordre 2 puisque plusieurs termes sont développés. En effet, dans le développement présenté ci-dessus, on a développé la 4^{ème} intégrale double du reste R_1 (cf. équation (19)), on aura pu choisir d'en développer d'autres et l'on aurait abouti à un autre développement du deuxième ordre. Toutefois la formulation présentée dans (24) a la bonne idée de nous faire aboutir à une expression (23) qui ne demande la simulation que d'une unique variable aléatoire ε (que l'on utilisera deux fois). Cette expression permet donc, sans simuler davantage de réalisations de variables aléatoires, d'être plus précis que le schéma d'Euler.

Ce procédé de discrétisation présente, en général, un ordre de convergence forte de 1. Néanmoins la vitesse de convergence est identique à celle du schéma d'Euler pour des fonctions régulières (les plus fréquentes en pratique) ce qui conduit à lui préférer alors le schéma d'Euler qui demande moins de temps de calcul (on simule moins de termes).

Par ailleurs, remarquons que si la volatilité $\sigma(\cdot)$ ne dépend que du temps, les procédés de discrétisation d'Euler et de Milstein conduiront à la même discrétisation, c'est le cas pour les modèles de Vasicek et de Hull et White. Alors on se tournera de préférence vers une discrétisation exacte. En revanche pour le modèle de CIR, il vient selon le schéma de Milstein :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t} \varepsilon \delta + \frac{\sigma^2}{4} \delta(\varepsilon^2 - 1). \tag{26}$$

Dans le cas du modèle CIR, ce schéma de discrétisation est intéressant dans la mesure où l'on obtient une meilleure approximation sans avoir à simuler davantage de réalisations de v.a.

En développant à des degrés supérieurs l'équation (2), il est possible d'obtenir des processus discrétisés d'ordre de convergence encore plus élevé. Toutefois ils nécessiteront des calculs plus nombreux et peuvent faire intervenir plus d'une variable aléatoire ce qui signifie des temps de simulation plus importants. De plus un résultat de Clark et Cameron (cf. Temam [2004]) prouve que, vis à vis de la norme L^2 , le schéma d'Euler est optimal dans la classe des schémas n'utilisant que les variables $B_{\delta k}$.

En outre, le schéma de Milstein peut poser des problèmes pratiques de mise en œuvre en dimension supérieure ou égale à 2.

4. Méthodes pour les options exotiques

Nous allons aborder ici l'évaluation d'options exotiques. Il s'agit la plupart du temps de « path-dependent » options. Leur évaluation par simulation n'est pas évidente puisque, selon le schéma classique, on n'observe les valeurs prises par le sous-jacent qu'aux instants de discrétisation alors que le payoff final de l'option dépend également de la valeur du sous-jacent entre deux instants de discrétisation.

Nous nous intéresserons ici aux méthodes de discrétisation adaptées aux options sur maximum. Ces méthodes sont reprises de Temam [2004] qui démontre les propriétés utilisées *infra* et présente également des stratégies pour évaluer par simulation des options asiatiques et des options à barrières.

Considérons donc une option dont le flux en T est du type $f(X_T, M_T)$ où X est la solution de l'EDS (1).

L'approche naïve consiste à estimer M_T par $\bar{M}_T = \max_{0 \leq k \leq n} \tilde{X}_{k\delta}$ où $n = \frac{T}{\delta}$. Mais alors (sous certaines conditions de régularité) l'erreur commise est en $n^{-1/2}$. Il est possible d'améliorer l'estimation grâce à l'utilisation de propriétés des ponts browniens.

Propriété 3 : Soit B un mouvement brownien. Le processus Z défini par $Z_t = B_t - \frac{t}{T} B_T$ est un processus gaussien indépendant de B_T . De plus, $\mathbf{E}[Z_t] = 0 \forall t \in [0, T]$ et $\mathbf{E}[Z_t Z_s] = \min\{s, t\} - \frac{st}{T} \forall (s, t) \in [0, T]^2$. Enfin le mouvement brownien conditionné par $B_T = y$ a la même loi que $Z_t^y = B_t - \frac{t}{T}(B_T - y)$.

Considérons \tilde{X} le schéma d'Euler de X et appliquons lui la propriété précédente.

Propriété 4 : Si σ ne s'annule pas pour tout $x \in \mathbf{R}$. Alors conditionnellement à $(\tilde{X}_{k\delta} = x_k, \tilde{X}_{(k+1)\delta} = x_{k+1})$, le processus $(\tilde{X}_t)_{t \in [k\delta, (k+1)\delta]}$ a la loi de $(x_k + \sigma(x_k)Z_{t-k\delta})$ où Z est le pont brownien défini par :

$$Z_{t-k\delta} = B_{t-k\delta} - \frac{t-k\delta}{(k+1)\delta - k\delta} \left(B_{(k+1)\delta - k\delta} - \frac{x_{k+1} - x_k}{\sigma(x_k)} \right) = B_{t-k\delta} - \frac{t-k\delta}{\delta} \left(B_\delta - \frac{x_{k+1} - x_k}{\sigma(x_k)} \right).$$

Il s'agit donc d'un processus gaussien d'espérance $x_k \frac{t_{k+1} - t}{\delta} + x_{k+1} \frac{t - t_k}{\delta}$ et de variance

$$\frac{(t_{k+1} - t)(t - t_k)}{\delta} \sigma^2(x_k).$$

Propriété 5 : Soit $Z_t^y = B_t - \frac{t}{T}(B_T - y)$ le pont brownien valant y lorsque $t = T$. $\forall a > y$,

$$\text{on a : } \Pr \left[\max_{t \in [0, \delta]} Z_t^y \leq a \right] = 1 - \exp \left\{ -\frac{2}{\delta} a(a - y) \right\}.$$

En combinant les deux dernières propriétés, on peut expliciter la fonction de répartition F_δ de la loi du maximum du schéma d'Euler.

$$\begin{aligned} F_\delta(a, x_k, x_{k+1}) &= \Pr \left[\max_{t \in [0, \delta]} \tilde{X}_{k\delta+t} \leq a \mid \tilde{X}_{k\delta} = x_k, \tilde{X}_{(k+1)\delta} = x_{k+1} \right] \\ &= 1 - \exp \left\{ -\frac{2(a - x_k)(a - x_{k+1})}{\delta \sigma^2(x_k)} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

Dès lors on peut simuler la loi de $\tilde{m}_k = \max_{t \in [0, \delta]} \tilde{X}_{k\delta+t}$ à partir de $F_\delta^{-1}(U_k, x_k, x_{k+1})$ où les U_k sont des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. M_T sera ensuite estimé par $\tilde{M}_k = \sup_{k \in [0, n]} \tilde{m}_k$.

Sous certaines conditions de régularité, ce schéma est d'ordre $1/n$.

Bibliographie

- GIET L. [2003] "Estimation par inférence indirecte des équations de diffusion : l'impact du choix du procédé de discrétisation". GREQAM, document de travail n°03A15.
- KLOEDEN P., PLATEN E. [1999] *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, 3^e édition. Springer-Verlag.
- LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2^e édition. Ellipses.
- PLANCHET F., THÉRON P. [2004] "Simulation de trajectoires de processus continus". *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP 2024 et *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 5 (à paraître).
- TEMAM E. [2004] "Méthodes de Monte Carlo pour la finance". Cours du DEA Statistiques et modèles aléatoires en économie et finance, Université Paris VII.