Modèles financiers en assurance:

Focus sur les techniques de couverture des garanties financières

Oberlain NTEUKAM T.
Actuaire consultant

Lyon, le 5 février 2010

SOMMAIRE

1. Introduction

La future norme IFRS « assurance », comme le projet « solvabilité 2 » imposent l'évaluation des provisions pour des risques réplicables dans une logique de couverture née de la finance de marché.

Cette logique s'applique essentiellement à la composante financière des risques portés par les assureurs et les conséquences suivantes :

- le calcul de la provision s'assimile à la détermination du prix d'une couverture ;
- une gestion efficiente du risque impose que la provision soit investie et gérée dans un portefeuille de couverture.

1. Introduction

Les contrats *garanties plancher* sur les UC et plus globalement les *variables Annuities* rentrent dans cette logique.

Les *garanties plancher* en cas de décès sont caractérisés par le fait que l'assuré se voit garantir un versement au moins égale au montant de capital initialement investi, en cas de décès.

Une *variable annuity* (VA) est un portefeuille de placements qui permet aux investisseurs de s'assurer le versement d'annuités garanties lors du décès et la possibilité de garantir un flux de revenus.

L'objectif de ces produits est de donner à l'investisseur l'accès à la performance du marché financier tout en s'assurant contre un mouvement défavorable de ce dernier.

1. Introduction

Les VA sont caractérisées par :

- le portefeuille d'actifs supports ;
- l'événement déclencheur de la garantie : le décès ou la vie ;
- la forme de la garantie: simple, revalorisée (roll-up), cliquet (ratchet)… ;
- Les modalités de sortie : rachat, rente,...

1. Introduction

Les exemples les plus courants de VA :

- GMDB (Guaranteed minimum death benefits) : garantie plancher ;
- GMAB (Guaranteed minimum accumulation benefits) : garantie de capital minimum au terme;
- GMWB (Guaranteed minimum withdrawal benefits) ou GLWB (Guaranteed Lifelong Withdrawal Benefits) : rachats partiels garantis pour une durée limitée ou à vie;
- GMIB (guaranteed minimum income benefits) : garantie de rente.

1. Introduction

Concrètement, si à la date *t* la valeur du portefeuille support est S_t en cas de décès (ou de Vie) d'un assuré et pour une garantie K_t, *le versement* est:

$$\mathbf{Max}\left(S_t, K_t\right) = S_t + \left[K_t - S_t\right]^+$$

- garantie simple: $K_t = K$
- garantie revalorisée: $K_t = Ke^{r \times t}$
- garantie cliquet: $K_t = \max_{0 \leq s \leq t} S_s$
- ...

1. Introduction

La couverture du risque associé à ces garanties est essentielle.

➢ **contexte réglementaire actuel**

Dans le régime actuel de solvabilité l'ACAM considère que ces engagements sont « hors UC » et relèvent donc de la marge de solvabilité de 4 % des PM.

1. Introduction

La couverture du risque associé à ces garanties est essentielle.

➢ **contexte futur**

« Solvabilité 2 » impose l'évaluation des provisions pour des risques réplicables dans une logique de couverture née de la finance de marché.

Cette logique s'applique essentiellement à la composante financière des risques portés par les assureurs et les conséquences suivantes :

- le calcul de la provision s'assimile à la détermination du prix d'une couverture ;
- une gestion efficiente du risque impose que la provision soit investie et gérée dans un portefeuille de couverture.

1. Introduction

➢**Maitrise du risque**

La couverture en delta neutre est mis en œuvre par Frantz et al. (2003). Certes, elle génère des coûts supplémentaires à l'assureur, mais permet de réduire la volatilité des coûts futurs.

➢**Robustesse de la couverture dans un environnement de crise:**

Une étude sur le marché US montre que les portefeuilles de couverture des assureurs de VA a permis de réduire de 93% les pertes engendrées par les fortes chutes constatées sur les marchés financiers entre septembre et octobre 2008. Ce qui correspond à une perte évitée de près de 40 milliards $.

1. Introduction

Il existe différentes stratégies de couverture :

- Les stratégies par les grecs (delta, rho, gamma...) ;
- Les stratégies par minimisation du risque du contrat ;
- Les stratégies de couverture à l’aide des options liquides de court terme.

SOMMAIRE

2. Evaluation de l'engagement

   2.1. Evaluation risque neutre

   2.2. Juste valeur de l'engagement

2. Évaluation de l'engagement

1.1. Évaluation risque neutre

- Introduit dans l'évaluation l'aversion au risque des agents ;
- Fournit une valeur « objective » du risque.

2. Évaluation de l'engagement

1.2. Juste valeur de l'engagement

Le calcul de l'engagement se fonde sur 2 observations:

- le flux financier en cas de décès (ou de vie) à t de l'assuré se met sous la forme:

$$\mathbf{Max}\left(S_t, K_t\right) = S_t + \left[K_t - S_t\right]^+$$

$\left[K_t - S_t\right]^+$ est le payoff à *t* de la garantie financière.

- La juste valeur de cette garantie est: $\mathbf{Pr}\left(x,t\right) E_Q\left[e^{-rt}\left[K_t - S_t\right]^+\right]$

$\mathbf{Pr}\left(x,t\right)$ *est la probabilité sous la mesure historique que l'assuré d'âge* x *décède t année(s) plus tard.*

2. Évaluation de l’engagement

1.2. « Juste » valeur de l’engagement

Pour un assuré d’âge *x* à la souscription et dont la maturité du contrat est τ

La « juste » valeur de l’engagement de l’assureur vis-à-vis de l’assuré x à l’instant 0 est :

$$\Pi_0 = \sum_{t \leq \tau} \mathbf{Pr}(x,t) \times E_Q\left[e^{-rt}\left[K_t - S_t\right]^+\right]$$

2. Évaluation de l'engagement

1.2. « Juste » valeur de l'engagement

On fait implicitement deux hypothèses:

- Indépendance entre la mesure historique et la mesure risque neutre;
- Parfaite mutualisation des décès.

Autre hypothèse importante:

Les versements se font en temps discret.

2. Évaluation de l'engagement

1.2. « Juste » valeur de l'engagement

$E_Q\left[e^{-rt}\left[K_t - S_t\right]^+\right]$ est la valeur d'une option de strike K_t et de maturité t.

La valeur de l'engagement s'écrit donc comme une combinaison linéaire d'options de maturité différente.

On peut donc étendre les stratégies usuelles de couverture des options à ces garanties (*stratégie de couverture locale*).

SOMMAIRE

3. Stratégies de couverture

   3.1. Les stratégies par les grecques

   3.2. Les stratégies par minimisation de la variance de l'erreur de couverture

   3.3. La stratégie semi-statique à l'aide des options de court terme.

   3.4. les stratégies de couverture sur le marché américain.

3. Stratégies de couverture

❑**Les risques financiers**:

✓Le risque action;
✓Le risque de taux;
✓Le risque volatilité;
✓Le risque de change;

❑**Les risques économiques:**

✓Le risque de mortalité;
✓Risque de longévité;
✓Les risques de rachats (GMWB, GLWB...).

❑**Le risque de liquidité, le risque opérationnel, le risque de défaut,...**

3. Stratégies de couverture

❑Le risque de base:

C’est le risque lié à la différence de sensibilité aux fluctuations de marché entre deux instruments financiers ou entre un instrument de couverture et l'élément couvert

Ce risque traduit le fait que l’instrument de couverture n’évolue pas exactement comme l'élément couvert.

3. Stratégies de couverture

- **la couverture ne peut être parfaite:**

du fait :

- du caractère discret des réallocations et des frais de transaction,
- de l'existence du risque idiosyncratique.

- **L'analyse d'une stratégie de couverture doit donc intégrer les imperfections du marché:**

  - les frais de transaction;
  - les écarts dus au caractère discret des réallocations.

3. Stratégies de couverture

3.1. Stratégies par les grecques

- Ces stratégies consistent à matcher les sensibilités du portefeuille de couverture à celles des engagements.

Exemple : Couverture en Delta par le sous-jacent et d'actif sans risque

Put de strike *K* et de maturité *T*, la composition du portefeuille de couverture :

$$\begin{cases} \alpha_t = \dfrac{\partial P\left(T-t, S_t, K\right)}{\partial S_t} \\ \beta_t = P\left(T-t, S_t, K\right) - \dfrac{\partial P\left(T-t, S_t, K\right)}{\partial S_t} S_t \end{cases}$$

3. Stratégies de couverture

3.1. Stratégies par les grecques

- Fréquente recomposition du portefeuille de couverture

Exemple : Delta neutre

✓ Coût de recomposition du portefeuille de couverture:

$$W_t = \left(\alpha_t - \alpha_{t-1}\right) S_t + \left(\beta_t - \beta_{t-1} e^{rh}\right)$$

✓ Coût de transaction

$$C_t = c\left|\alpha_t - \alpha_{t-1}\right| S_t + c\left|\beta_t - \beta_{t-1} e^{rh}\right|$$

3. Stratégies de couverture

3.1. Stratégies par les grecques

❑ Recomposition selon l'erreur de couverture

Exemple : Delta neutre

Le portefeuille de couverture est modifié si l'erreur de recomposition est supérieure en valeur absolue à un seuil :

$$W_t = \left(\alpha_t - \alpha_{t-1}\right) S_t + \left(\beta_t - \beta_{t-1} e^{rh}\right)$$

- ✓ Si $\left|W_t\right| > a$, alors on modifie le portefeuille de couverture;
- ✓ Si $\left|W_t\right| \leq a$, le portefeuille de couverture est inchangé.

3. Stratégies de couverture

3.1. Stratégies par les grecques

- Recomposition selon l'erreur de couverture

Cette stratégie réduit la fréquence de recomposition du portefeuille de couverture.

Elle est élaborée dans le but de réduire l'impact des frictions sur le coût net.

3. Stratégies de couverture

3.2. Stratégies de minimisation de la variance de l'erreur de couverture

On cherche le portefeuille de couverture qui minimise la variance de l'erreur résiduel de couverture.

D'autres mesures de risque sont envisageables.

L'avantage de la variance est qu'elle fournit une règle linéaire de couverture d'une option.

La combinaison de portefeuille de couverture des options est donc optimale.

3. Stratégies de couverture

3.2. Stratégies de minimisation de la variance de l'erreur de couverture

❑ Couverture statique

On construit un portefeuille statique, tel que la variance du coût terminal est minimale. *(Pas de rebalancement du portefeuille de couverture).*

Concrètement, on cherche à minimiser la variance de l'erreur de couverture à la maturité.

Exemple : Couverture statique par le sous-jacent et l'actif sans risque .

$$W_T = -\left[K - S_T\right]^+ + \beta + \alpha \times S_T$$

(α, β) est la composition du portefeuille de couverture statique.

3. Stratégies de couverture

3.2. Stratégies de minimisation de la variance de l'erreur de couverture

❑ Couverture statique

La composition optimale du portefeuille statique de couverture est solution du programme:

$$\begin{cases} \underset{(\alpha,\beta)}{\mathbf{Min}} \left\{ Var\left(W_T\right) \right\} \\ sc \quad E^Q\left(W_T\right) = 0 \end{cases}$$

WINTER & ASSOCIÉS

3. Stratégies de couverture

3.2. Stratégies de minimisation de la variance de l'erreur de couverture

- ❑ Couverture dynamique

Exemple : Couverture dynamique par le sous-jacent et l'actif sans risque .

Dans ce cas l'erreur de couverture s' écrit:

$$W_T = Cap + \int_0^T \alpha_s d\left(e^{-rs} S_s\right) - e^{-rT} H_T$$

Avec Cap le capital initiale nécessaire à la mise en place de la couverture.

3. Stratégies de couverture

3.2. Stratégies de minimisation de la variance de l'erreur de couverture

❑ Couverture dynamique

La composition optimale du portefeuille de couverture est solution du programme:

$$\left(\beta_t , \alpha_t\right)_{0 \le t \le T} = \begin{cases} \mathbf{arg}\left(Min E^Q \left(W_T\right)^2 \right) \\ sc \quad E^Q\left(W_T\right) = 0 \end{cases}$$

3. Stratégies de couverture

3.3. Stratégie semi-statique à l'aide des options de court terme

- Cette stratégie est fondée sur le théorème énoncé par Carr et Wu (2004) suivant lequel :

$$P(S,t;K,T)=\int_0^\infty w(k)P(S,t,k,u)dk$$

Avec

$$w(k)=\frac{\partial^2}{\partial k^2}P(k,u,K,T)$$

3. Stratégies de couverture

3.3. Stratégie semi-statique à l'aide des options de court terme

- Cette stratégie est pertinente dans le cas où il existe des options de court terme sur le marché

- En réalité le nombre d'options sur le marché est fini.

- On approxime l'intégrale précédente en pondérant une quantité finie d'options de court terme à l'aide de la quadrature de Gauss-Hermite.

3. Stratégies de couverture

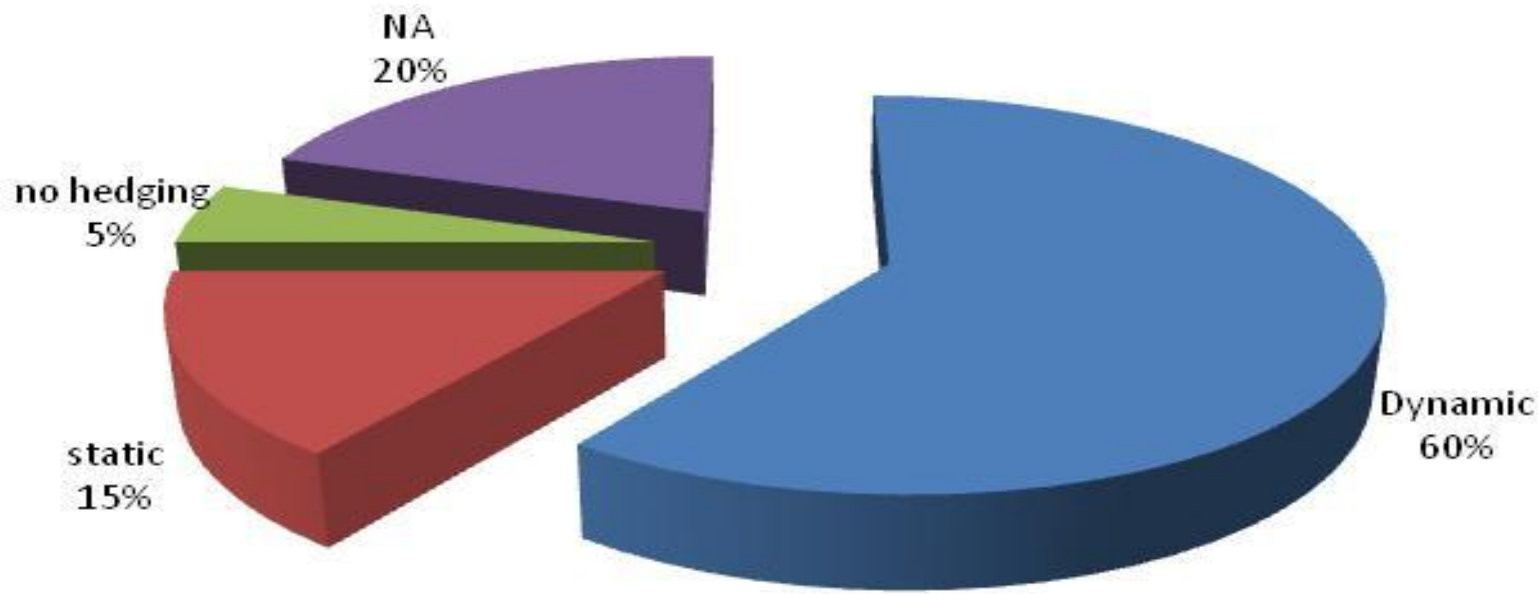
3.4 . les stratégies de couverture sur le marché américain

- Les stratégies les plus courantes sont :
  - Couverture delta/rho : couverture contre les mouvements du sous-jacent et des taux;
  - Couverture Delta/vega/rho : couverture contre les mouvements du sous-jacent, des taux et de la volatilité implicite.

3. Stratégies de couverture

3.4. les stratégies de couverture sur le marché américain

- Typologie des stratégies de couverture des garanties GMWB



SOMMAIRE

4. Implémentation

   4.1. Modélisation du risque

   4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de Black-Scholes

   4.3. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle à sauts de Merton

   4.4. autres exemples

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque de mortalité

La mortalité est généralement modélisé à l'aide d'une table de mortalité notée $(L_x)_{0 \le x \le X_{end}}$.
La probabilité qu'un individu d'âge x décède à t s'écrit:

$$\mathbf{Pr}(x,t) = q_{x+t} \times {}_t p_x$$

Avec:

$$\begin{cases} q_{x+t} = \dfrac{L_{x+t} - L_{x+t+1}}{L_{x+t}}, & \text{La probabilité de survie à t d'un individu d'âge x} \\ {}_t p_x = \dfrac{L_{x+t+1}}{L_{x+t}}, & \text{probabilité qu'un assuré d'âge x decede à t} \end{cases}$$

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque action

✓**Le modèle de Black & Scholes.**

Les principales hypothèses:

- Le marché est complet;
- Les rendements ont des trajectoires continues et sont distribués selon une loi normale;
- Le taux sans risque est constant et connu;
- La volatilité des rendements est constante dans le temps;

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque action

✓**Le modèle de Black & Scholes.**

•expression du sous-jacent dans l’environnement risque neutre:

$$S_t = S_0 \mathbf{exp}\left(\left(r - \sigma^2/2\right)t + \sigma W_t\right)$$

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque action

✓**Le modèle de Black & Scholes: avantages.**

•simplicité des expressions;

•robustesse des résultats: on peut toujours majorer le vrai prix de l'option par un choix judicieux de la volatilité implicite.

WINTER & ASSOCIÉS

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque action

✓**Le modèle de Black & Scholes : inconvénients.**

•queue de distribution flat;

•l'hypothèse de complétude du marché est empiriquement éprouvée: existence du risque idiosyncratique;

• l'observation des trajectoires des rendements fait ressortir des sauts;

•empiriquement, la loi des rendements n'est pas symétrique.

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque action

✓**Le modèle à sauts de Merton.**

•Intègre les sauts au modèle de Black & Scholes

•La prise en compte de la discontinuité des trajectoires observée sur les marchés est assurée;

•Permet d'approcher le smile de volatilité implicite;

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque action

✓**Le modèle à sauts de Merton.**

•L'expression du sous-jacent dans l'environnement risque neutre:

$$S_t = S_0 \mathbf{exp}\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t} Log\left(1 + L_i\right)\right\}$$

•Toutefois, le modèle ne reprend le caractère dissymétrique des rendements observé sur les marchés.

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

❑ Le risque action

✓**Les modèles à sauts (KOU...);**

✓**Les modèles à volatilité locale;**

✓**Les modèles à volatilité stochastiques;**

✓**...**

4. Implémentation

4.1. Modélisation du risque

- ❑ Le risque de taux

✓**Vacisek;**
✓**Hull-white;**
✓**CIR;**
✓**HJM;**
✓**...**

- ❑ Autre risque:
  - Le risque de change;
  - Le risque opérationnel;
  - Le risque de défaut;
  - ...

4. Implémentation

4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

❑ Les paramètres

Number of simulation	10,000
Maturity of insurance portfolio	15 years
Volatility of underlying asset	25 %
Drift of underlying asset	8.5%
Risk-free interest rate	5%
Guarantee	100
Initial value of underlying asset	100
Frequency of observation portfolio	Monthly
Costs of transaction	1%
Number of short-term options using in Carr hedging	2
Maturity of short-term options using in Carr hedging	1 year
Insurance portfolio	1,000 insured aged 45
Interval of re-hedging in corrected delta hedging	[-1,1]

4. Implémentation

4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

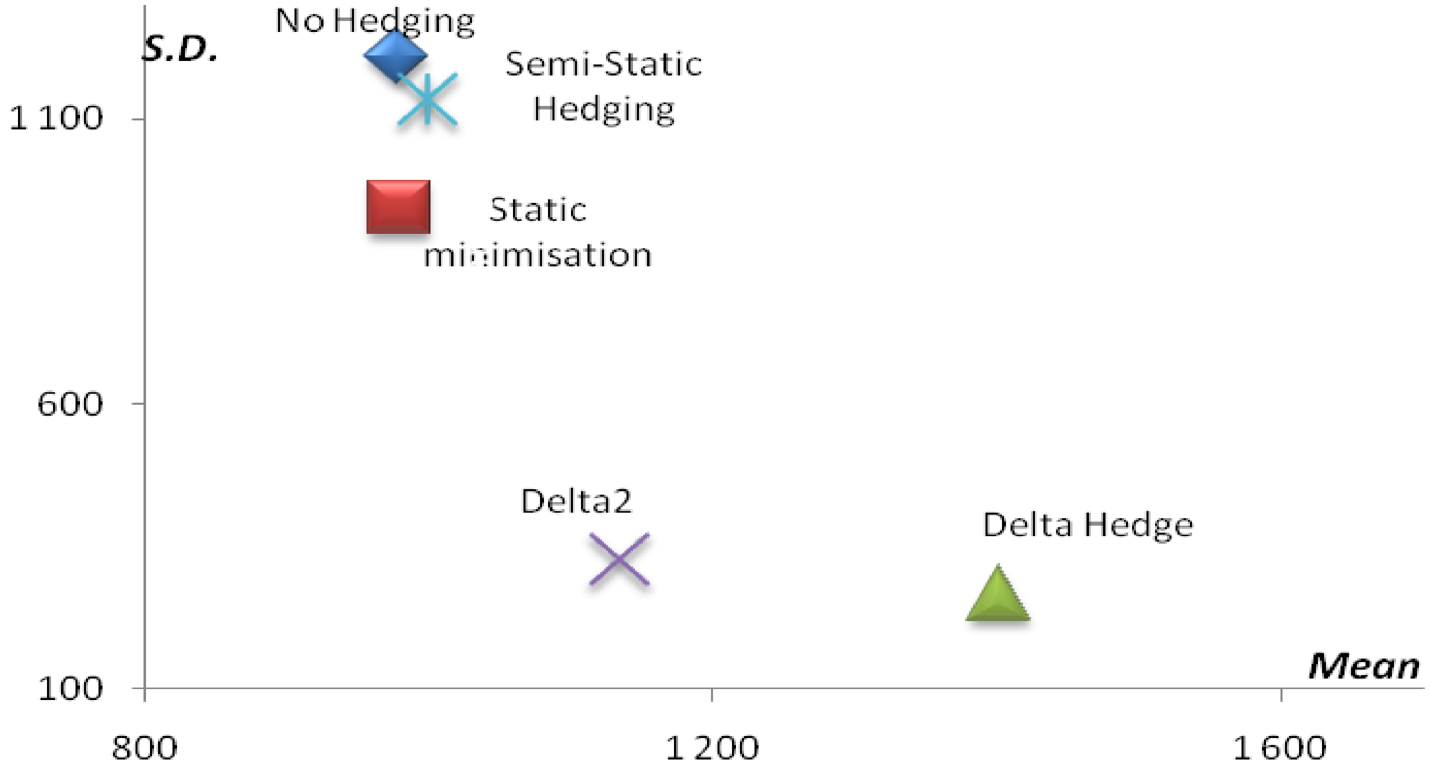
- Les indicateurs de risque des coûts futurs espérés

	Expected	Standard deviation	VaR 99,75%	VaR 99%	CTE 99,75%	CTE 99%	Maximum
No Hedging	950	1 177	5 006	4 459	5 007	4 463	6 124
Static minimisation	980	923	4 487	3 841	4 488	3 845	5 902
Delta Hedge	1 406	260	2 158	2 040	2 158	2 041	2 581
Delta2	1 140	328	2 179	1 965	2 179	1 966	2 605
Semi-Static Hedging	984	1 093	4 803	4 102	4 804	4 106	5 398

4. Implémentation

4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

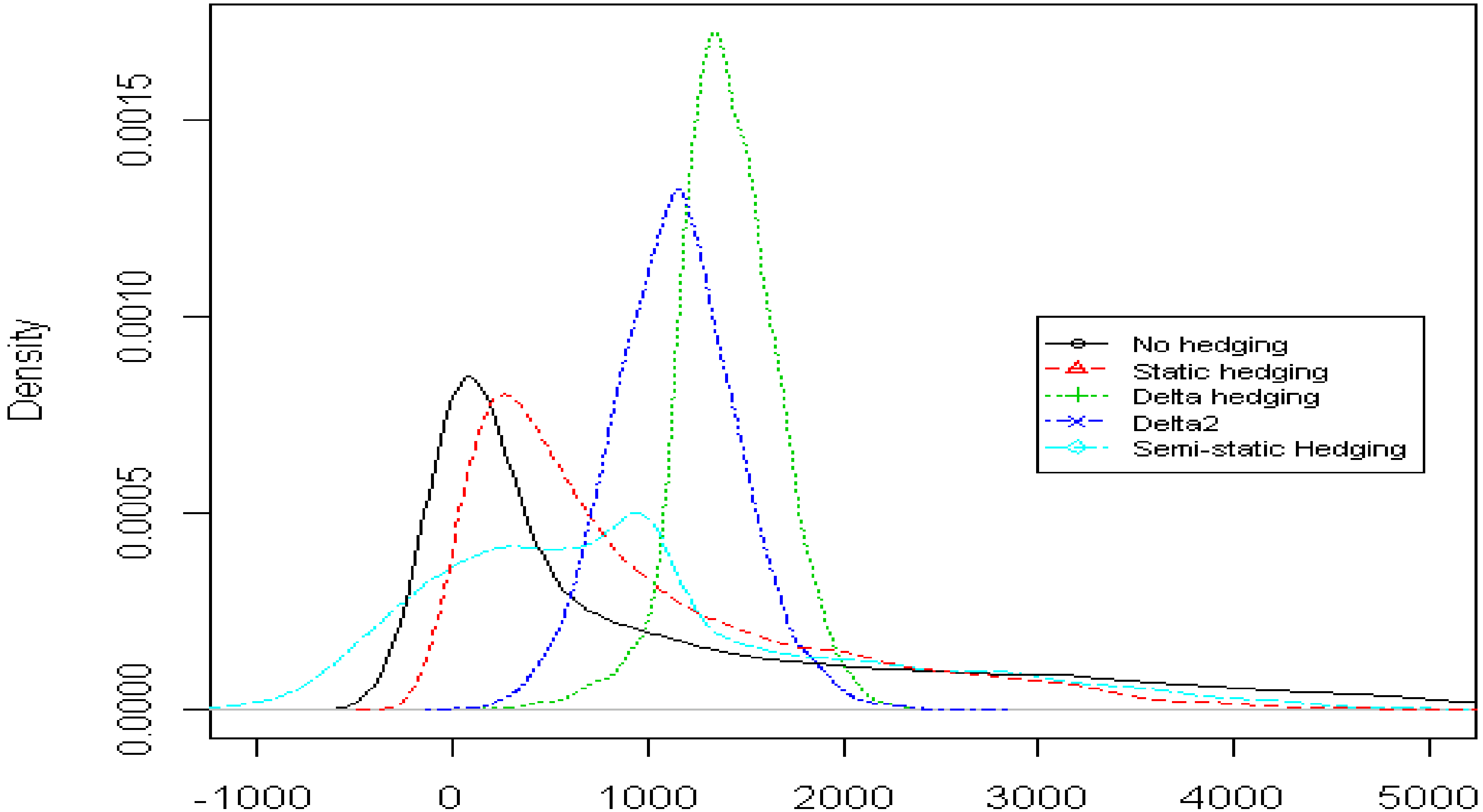
- Plan moyenne-variance des stratégies



4. Implémentation

4.2 Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

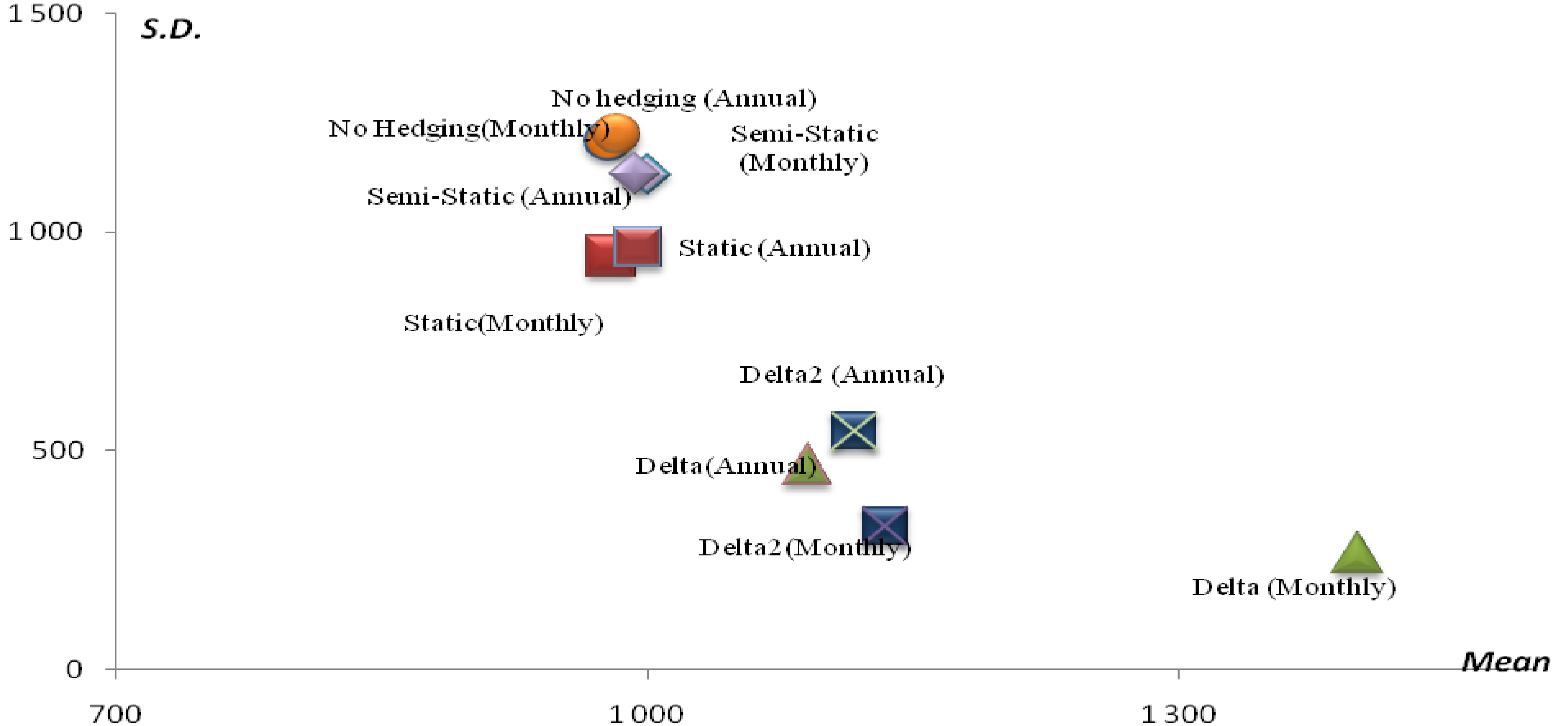
- Densités empiriques des coûts futurs espérés



4. Implémentation

4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

- Variation des indicateurs de risque entre indemnisations annuelles et indemnisations mensuelles.



4. Implémentation

4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

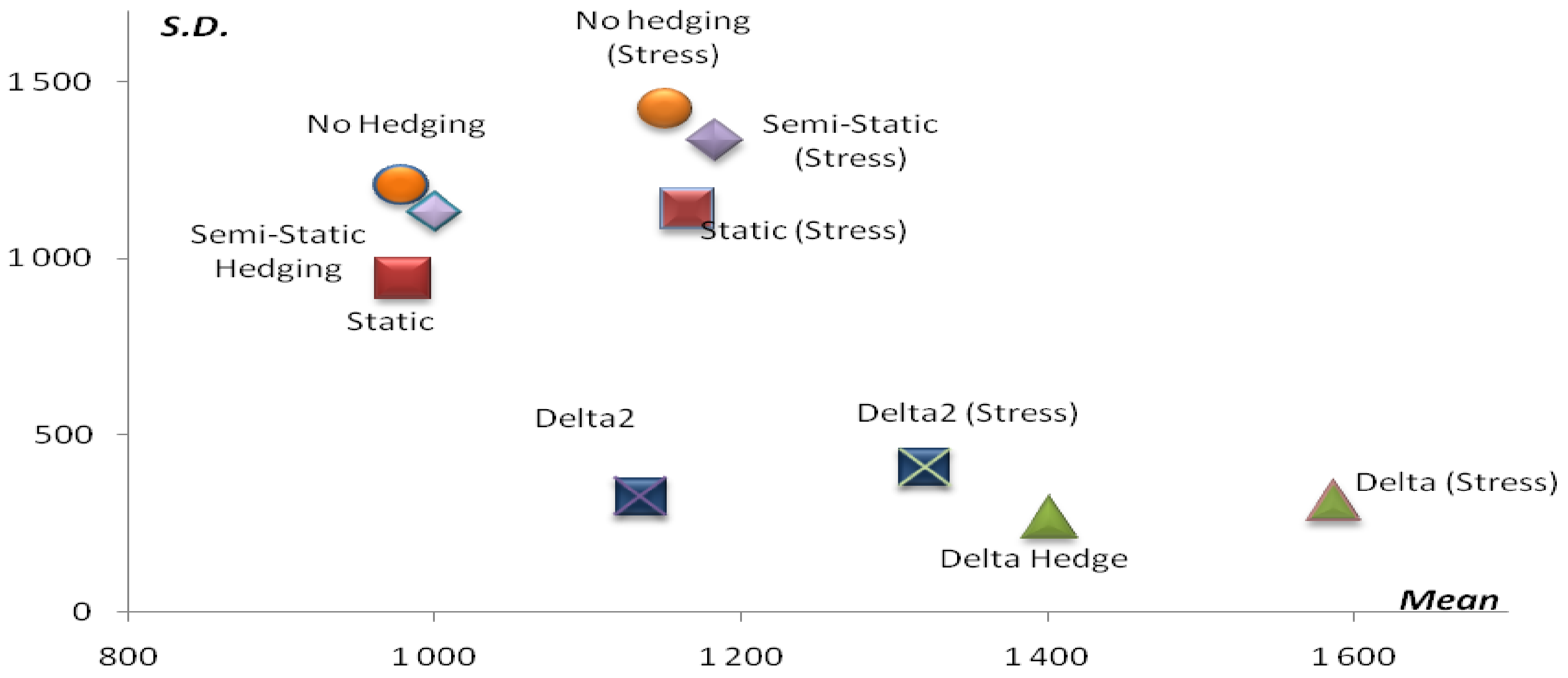
- Impact de l'intervalle de couverture dans la stratégie Delta2

	Expected	Standard deviation	VaR 99,75%	VaR 99%	CTE 99,75%	CTE 99%	Maximum
No Hedging	950	1 177	5 006	4 459	5 007	4 463	6 124
Static minimisation	980	923	4 487	3 841	4 488	3 845	5 902
Delta Hedge	1 406	260	2 158	2 040	2 158	2 041	2 581
Delta2 [-1,1]	1 140	328	2 179	1 965	2 179	1 966	2 605
Delta2 [-2,2]	1 102	396	2 279	2 060	2 279	2 062	2 869
Delta2 [-3,3]	1 082	457	2 420	2 158	2 420	2 160	3 103
Semi-Static Hedging	984	1 093	4 803	4 102	4 804	4 106	5 398

4. Implémentation

4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

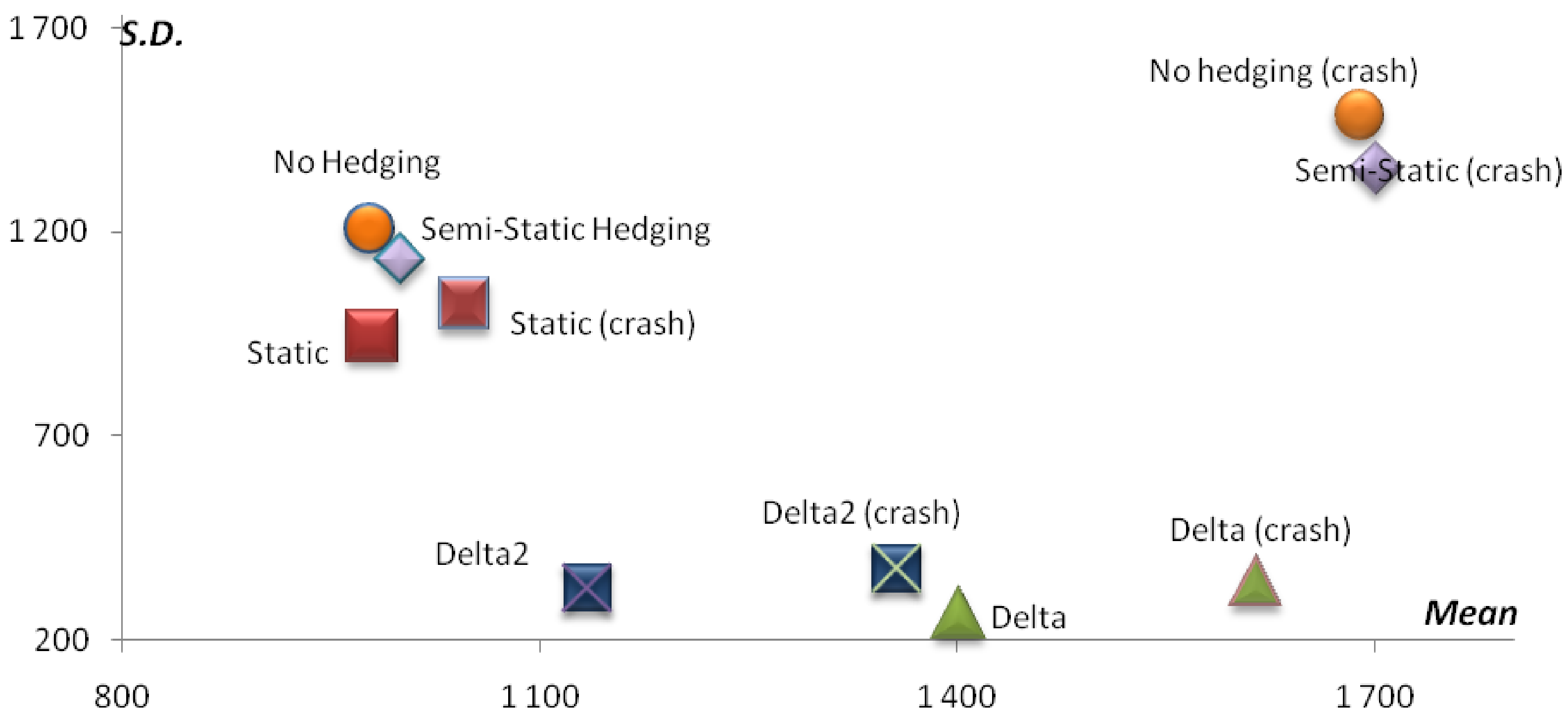
- Choc à la hausse de 20% de la mortalité future.



4. Implémentation

4.2. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle de BS

- Choc à la baisse de 30% de l'actif sous-jacent.



4. Implémentation

4.3. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle à sauts de Merton

❑ Paramètres

Number of simulation	1000
Maturity of insurance portfolio	15 years
Volatility of underlying asset	15 %
Intensity of poisson process	1
Volatility of discontinuous part (Jump volatility)	10%
Mean of amplitude of jump	0%
Drift of underlying asset	8.5%
Risk-free interest rate	5%
Guarantee	100
Initial value of underlying asset	100
Frequency of observation portfolio	Monthly
Costs of transaction	1%
Number of short-term options using in Carr hedging	2
Maturity of short-term options using in Carr hedging	1 year
Insurance portfolio	1,000 insured aged 45
Interval of re-hedging in corrected delta hedging	[-1,1]

4. Implémentation

4.3. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle à sauts de Merton

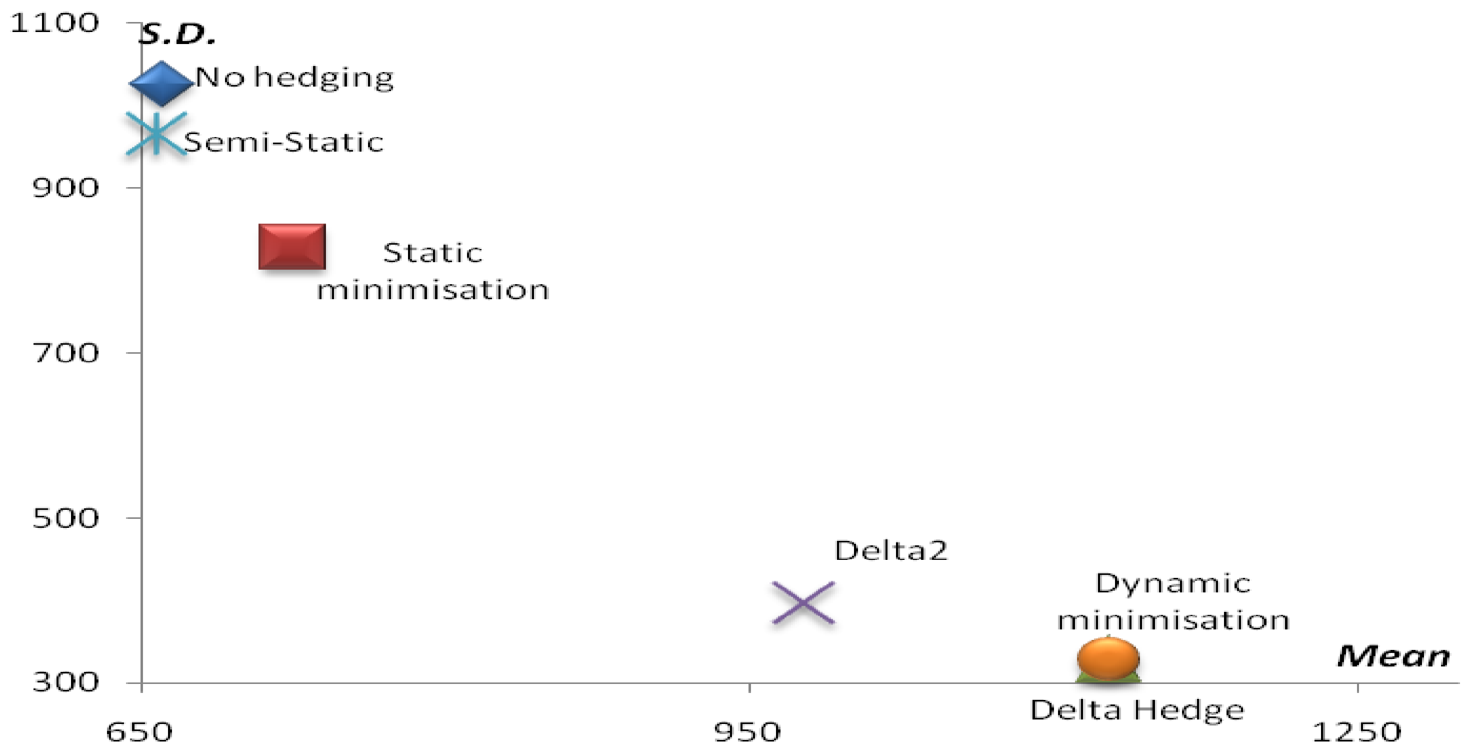
- Indicateurs de risque dans le modèle de Merton

	Expected	Standard deviation	VaR 99,75%	VaR 1%	CTE 99,75%	CTE 99%	Maximum
No Hedging	661	1026	5315	4514	5316	4521	5747
Static minimisation	725	828	4612	3907	4613	3913	5189
Dynamic minimisation	1127	328	2501	2057	2502	2061	3251
Delta Hedge	1127	328	2501	2057	2502	2061	3251
Delta2 Hedging	977	396	2520	2111	2521	2114	2983
Semi-Static	658	965	4655	4013	4657	4019	5495

4. Implémentation

4.3. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle à sauts de Merton

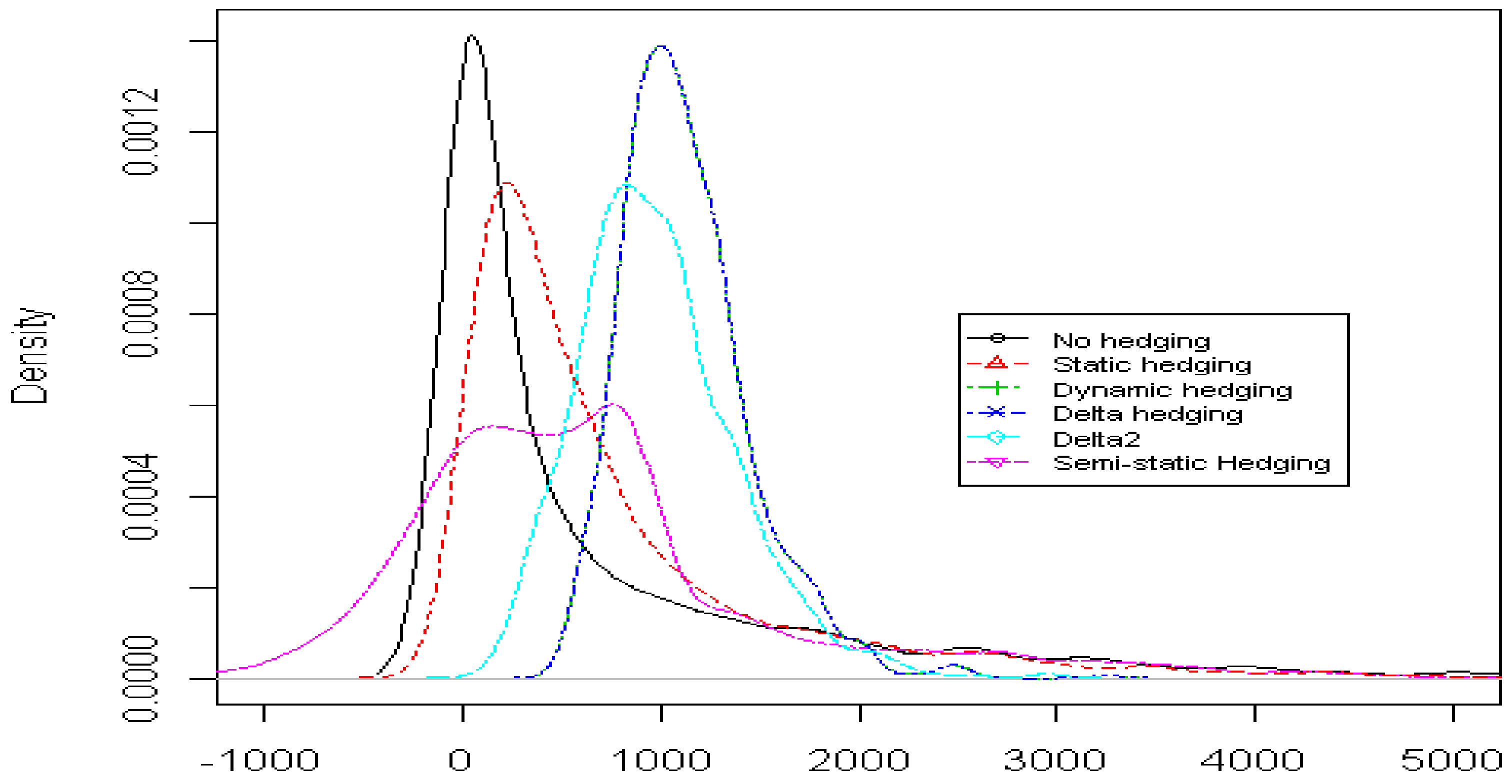
❑ Plan moyenne-Variance des stratégies



4. Implémentation

4.3. Exemple de couverture d'un GMDB dans le modèle à sauts de Merton

- Densités empiriques des stratégies



Conclusion (1/3)

- Toutes les stratégies de couverture permettent de réduire la volatilité et les exigences de capitaux de l'assureur (VaR et CTE);
- La couverture statique:
  - Elle peut générer une perte supérieure à la non couverture;
  - Elle est faiblement impactée par une hausse des coûts de transaction;
  - Elle varie peu selon la périodicité des indemnisations,
  - mais elle est soumise au même titre que la non couverture à une surmortalité future ou à une chute brutale des cours.

Conclusion (2/3)

❑ La couverture semi-statique:

- Faiblement sensible à une hausse des coûts de transaction;
- Soumise au même titre que la couverture statique et la non couverture à une surmortalité future;
- Les indicateurs de risque peuvent être améliorés par accroissement de la maturité des options de court-terme;
- Mais la disponibilité des options n'est pas garantie;
- Fournie les meilleurs indicateurs de risque lorsque les options existent sur les marchés et le portefeuille semi-statique est rebalancé.

Conclusion (3/3)

❑ Les couvertures en delta:

- En moyenne coûte plus chère à l’assureur que les autres stratégies;
- Fournissent les meilleur indicateurs de risques extrêmes;
- Fournissent les mêmes indicateurs de risques que la couverture de minimisation de l’erreur de couverture;
- Dans le cas des indemnisations à haute fréquence, ou une hausse des couts de transaction, privilégié la stratégie de recomposition selon un intervalle de couverture,
- Résistent mieux aux chocs.