Le théorème de Cholesky et les vecteurs gaussiens

La décomposition d'une matrice symétrique définie positive

Soit Γ une matrice symétrique définie positive. D'après théorème de Choleski, il existe une unique matrice triangulaire A à diagonale positive telle que $\Gamma = A^tA$. On appelle A la « racine carrée de Γ » et on note (par convention) $A = \sqrt{\Gamma}$. On désigne également A sous le terme de « décomposée de Cholesky de Γ ».

De manière pratique, il existe un mécanisme simple de construction explicite de A qui comporte 2 étapes :

- Etape 1 : Construction de la première colonne.

On pose $\Sigma_{1,1}=\sqrt{\Gamma_{1,1}}$ puis $\forall i=2,...,d, \Sigma_{i,1}=\frac{\Gamma_{i,1}}{\Sigma_{i,1}}$.

- Etape 2 : Construction par récurrence des colonnes $j\in\{2,...,d\}$. on pose :

$$\forall i=1,...,j-1, \Sigma_{i,j}=0$$

$$\Sigma_{j,j}=\left(\Gamma_{j,j}-\sum_{k=1}^{j-1}\Sigma_{j,k}^2\right)^{1/2} \quad \forall i=j+1...d, \Sigma_{i,j}=\frac{\Gamma_{i,j}-\sum_{k=1}^{j-1}\Sigma_{j,k}\Sigma_{i,k}}{\Sigma_{j,j}}$$

Application aux vecteurs gaussiens

En particulier, si on se donne Γ une matrice symétrique, définie positive, et si $X \sim N(0, Id_d)$ suit une loi gausienne centrée d-dimensionnelle, on dispose d'une construction explicite d'une variable aléatoire de loi $N(m, \Gamma)$.

En effet, il existe une (unique) matrice A triangulaire inférieure à diagonale positive telle que $\Gamma = A^tA$: si on pose $Y = m + AX$, alors il découle de ce qui précède que $Y \sim N(m, \Gamma)$.

<u>*Démonstration :*</u>

Posons $Y = m + AX$

On a trivialement $E(Y)= E(m + AX) = m + A \underbrace{E(X)}_{=0} = m$

Par ailleurs, $\Gamma_Y=E\left((Y-E(Y))^t(Y-E(Y))\right) = E\left(AX^t(AX)\right)$.

Or, $AX^t(AX) = AX^tX^tA$ et $E(AX^t(AX)) = AE(X^tX)^tA = A^tA = \Gamma$, donc $\Gamma_Y = \Gamma$.

Enfin, toute combinaison linéaire des composantes de Y est combinaison linéaire des composantes de X qui sont des lois gaussiennes indépendantes, donc Y suit une loi gaussienne. On a donc bien $Y \sim N(m, \Gamma)$.

Utilisation en finance

Supposons que le titre *i* soit convenablement décrit par la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_i - q_i)dt + \sigma_i \, dB_t^1$$

Faisons l'hypothèse réaliste que le cours du titre *i* est corrélé avec l'évolution du marché action dans son ensemble, ce que l'on écrira formellement :

$$dB^1 * d\tilde{B}^a = \rho_i dt$$

où $\tilde{B}^a$ est un mouvement brownien qui régit l'évolution du marché actions. Alors il existe un mouvement brownien B^i, indépendant de $\tilde{B}^a$ tel que :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_i - q_i)dt + \sigma_i \, \rho_i \, d\tilde{B}_t^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} dB_t^i$$

Pour démontrer ce résultat, on remarque que si :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

alors la décomposition de Choleski de s'écrit :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & .c \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

ce qui conduit aux équations :

$$a^2 = \sigma_1^2 \, , \; ac = \rho\sigma_1\sigma_2 \; \text{ et } \; c^2 + b^2 = \sigma_2^2$$

La résultat découle alors du fait que pour décrire un mouvement brownien, il suffit de décrire les lois conjointes des marginales finies (théorème de Kolmogorov).