Estimation du prix de marché du risque

Anisa CAJA

ISFA

16 Mars 2012

Introduction

Solvabilité 2 oblige à

1. estimer la distribution de la marge actif-passif à un horizon donné
2. calculer des provisions dans une logique *market consistent* $\Longrightarrow$ le niveau *best estimate* des provisions doit être homogène au prix de la couverture financière

.

Introduction

Solvabilité 2 oblige à

1. estimer la distribution de la marge actif-passif à un horizon donné

   Probabilité historique

2. calculer des provisions dans une logique *market consistent* $\Longrightarrow$ le niveau *best estimate* des provisions doit être homogène au prix de la couverture financière

.

Introduction

Solvabilité 2 oblige à

1. estimer la distribution de la marge actif-passif à un horizon donné

   Probabilité historique

2. calculer des provisions dans une logique *market consistent* $\Longrightarrow$ le niveau *best estimate* des provisions doit être homogène au prix de la couverture financière

   Probabilité risque-neutre

.

Introduction

Solvabilité 2 oblige à

1. estimer la distribution de la marge actif-passif à un horizon donné

   Probabilité historique

2. calculer des provisions dans une logique *market consistent* $\Longrightarrow$ le niveau *best estimate* des provisions doit être homogène au prix de la couverture financière

   Probabilité risque-neutre

.

Le prix de marché du risque est un moyen cohérent qui permet de passer d'un univers à l'autre.

Introduction

- Travailler dans les deux univers à la fois peut être demandeur en terme de calculs.
- En plus, on contraint fortement la forme du prix de marché du risque qui en général est supposé constant.
- Le prix de marché du risque est lié à la **nature du risque modélisé** : risque action, risque de taux, etc...
- En pratique il est déterminé en analysant **le rendement supplémentaire** recherché par un investisseur pour prendre une unité supplémentaire de risque.

Sommaire

En univers historique :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

En univers risque neutre :

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma d\tilde{W}$$

Est-ce que ici il y a un prix de marché du risque ?

En univers historique :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

En univers risque neutre :

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma d\tilde{W}$$

Est-ce que ici il y a un prix de marché du risque ?

$$r = \mu - \lambda\sigma \Rightarrow \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Exemple avec le modèle de Vasicek :
Dynamique des taux en univers historique :

$$dr_t = a\left(b - r_t\right)\, dt + \sigma\, dW_t$$

3 paramètres : a,b, σ.
En univers risque neutre :

$$dr_t = a\left(b_\lambda - r_t\right)\, dt + \sigma\, dW_t^Q$$

avec

$$b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$$

3 paramètres : a, b_λ, σ.

Exemple avec le modèle de Vasicek :
Dynamique des taux en univers historique :

$$dr_t = a\,(b - r_t)\;dt + \sigma\,dW_t$$

3 paramètres : a,b, σ.
En univers risque neutre :

$$dr_t = a\,(b_\lambda - r_t)\;dt + \sigma\,dW_t^Q$$

avec

$$b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$$

3 paramètres : a, b_λ, σ.
Donc la dynamique en univers risque-neutre peut se réécrire :

$$dr_t = a\left(b - \frac{\lambda\sigma}{a} - r_t\right)\;dt + \sigma\,dW_t$$

4 paramètres : a,b, σ ET λ

Sous le modèle de Vasicek le prix d'un Zéro Coupon est :
$P(t, T) =$

$$\exp\left\{\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}(R_\infty - r_t) - (T-t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right\}$$

avec

$$R_\infty = b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Donc le prix est donné en fonction de 4 paramètres, les 3 paramètres de l'univers historique et la prix du risque λ.

Primes de risque dans le théorème de Girsanov

Selon le théorème de Girsanov, on peut spécifier un changement de probabilité qui permet de passer de l'univers historique sous probabilité P au risque-neutre sous probabilité Q.

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^T X_t \, dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T X_t^2 \, dt\right)$$

Le passage se fait donc à l'aide d'un processus $(X_t)_{t>0}$.

Primes de risque dans le théorème de Girsanov

Selon le théorème de Girsanov, on peut spécifier un changement de probabilité qui permet de passer de l'univers historique sous probabilité P au risque-neutre sous probabilité Q.

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^T X_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T X_t^2 dt\right)$$

Le passage se fait donc à l'aide d'un processus $(X_t)_{t>0}$.

En fait $X_t = -\lambda_t$!

Autre point de vue sur les prix de marché du risque

Dynamique affine en univers historique

$\Longrightarrow$

Dynamique affine en univers risque-neutre $\Longrightarrow$ Prix du risque fixe !

Autre point de vue sur les prix de marché du risque

Dynamique affine en univers historique

$\Longrightarrow$

Dynamique affine en univers risque-neutre $\Longrightarrow$ Prix du risque fixe !

Duffee et Stanton [2000] :

Passage de l'univers risque-neutre à l'univers historique

Dynamique affine en univers risque-neutre :

$$dr_t = (ab - ar_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,d\widetilde{W_t}$$

Pour passer en univers historique, le prix de marché du risque choisi est :

$$\lambda_t = \lambda_1\sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t$$

La dynamique en univers historique n'est plus affine :

$$dr_t = \left(ab - ar_t + \lambda_1\sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t\right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

La prime de risque d'une obligation est alors :

$$e_{t,\tau} \approx \left(\lambda_1\sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t\right) \int_0^\tau \exp\left(-as\right) ds$$

Lien entre prime de risque et déflateurs

En utilisant la propriété martingale :

$$\mathbb{E}^Q \left(\exp \left(- \int_0^T r_t \right) S_T \right) = S_0$$

Quel sera Π appelé *déflateur* tel que sous la probabilité P on ait :

$$\mathbb{E}^P \left(\Pi_T S_T \right) = S_0 ?$$

Avec la densité de Radon-Nicodym :

$$E^P\left(\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) S_T \frac{dQ}{dP}\right) = E^Q\left(\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) S_T\right) = S_0$$

Donc

$\Pi_T = \exp\left(-\int_0^T r_t\right) \dfrac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T r_t dt + \int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda_t^2 dt\right)$

On peut alors calculer des prix tout en restant en univers historique, mais il faut calculer **le prix de marché du risque**.

Les déflateurs permettent *une utilisation explicite* du prix de marché du risque !

Sommaire

Modèle

Le taux suit un modèle mono-factoriel :

$$dr_t = u(r_t)\,dt + w(r_t)\,dW_t$$

Alors le prix du Zéro Coupon est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0$$

où λ est le prix de marché du risque. Après estimation du drift et de la volatilité, estimation de λ.

Comment le marché évalue ce risque ?

Modèle

Le taux suit un modèle mono-factoriel :

$$dr_t = u(r_t)\,dt + w(r_t)\,dW_t$$

Alors le prix du Zéro Coupon est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0$$

où λ est le prix de marché du risque. Après estimation du drift et de la volatilité, estimation de λ.

Comment le marché évalue ce risque ? Informations dans la courbe des rendements

$$P(r,t) \approx 1 - r(T-t) + \frac{1}{2}(T-t)^2\left(r^2 - u + \lambda w\right) + \ldots \quad si \ t \to T$$

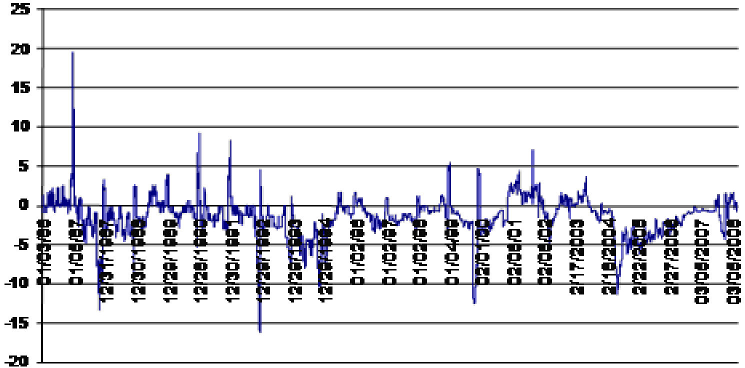
et ...

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u - \lambda w) + \ldots \ si \quad t \to T$$

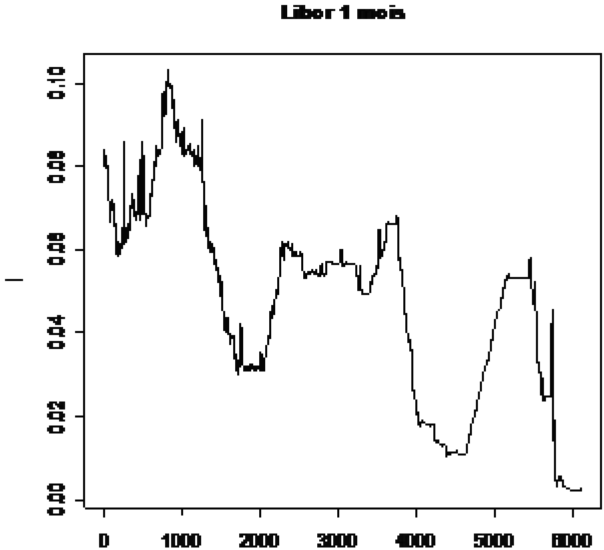
Pente de la courbe des rendements : $\frac{1}{2}(u - \lambda w)$

Résultat de l'estimation

Estimation du prix de marché du risque λ



Données : Taux Libor 1 mois entre janvier 1986 et avril 2010.



Modèle : dr=u(r)dt+w(r) dW
Volatilité : $w(r) = \nu r^{\beta}$
Dérive : $u(r) = \nu^2 r^{2\beta-1} \left(\beta - 0,5 - \frac{1}{2a^2} \ln r - \ln \overline{r}\right)$
avec $\ln \overline{r} = -3,2632$, $a = 0,8199$, $\beta = 0,6327$ et $\nu = 0,0724$
Il ne reste plus qu'à estimer le prix de marché du risque λ

Estimation de λ

On utilise la relation :

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u - \lambda w) + \ldots \; si \quad t \rightarrow T$$

qui est vrai pour le prix des obligations qui se rapprochent de la maturité.

Choix :

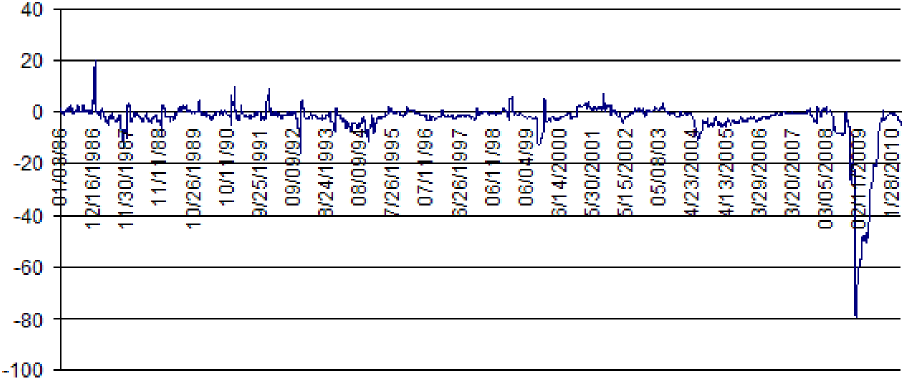
- r : le taux Libor à 1 mois
- $-\frac{\ln P}{T-t}$: rendement d'une obligation à 3 mois, T=3 mois.

On peut donc sortir λ de l'équation :

$$\lambda_t = \frac{2\left(R_t^1 - R_t^{1,3}\right)}{\frac{1}{6} w_t} + \frac{u_t}{w_t}$$

où R_t^1 est le rendement en t d'un ZC de maturité 1 mois et $R_t^{1,3}$ le taux forward à 2 mois dans un mois.

Estimation de λ janvier 1986-avril 2010

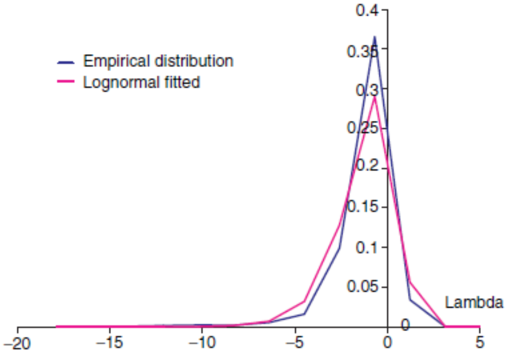


Prix de marché du risque comme un processus stochastique

Le prix de marché est très volatile et il ressemble à un processus stochastique.

Modèle :

$$d\lambda_t = p(\lambda_t)\,dt + q(\lambda_t)\,dW_t$$



Prix de ZC

Par simulation, en utilisant les deux equations :

$$dr_t = (u_t - \lambda_t w_t)dt + w_t dW_t$$

et

$$d\lambda_t = (p_t + \lambda_t q_t)\, dt + q_t d\tilde{W}_t$$

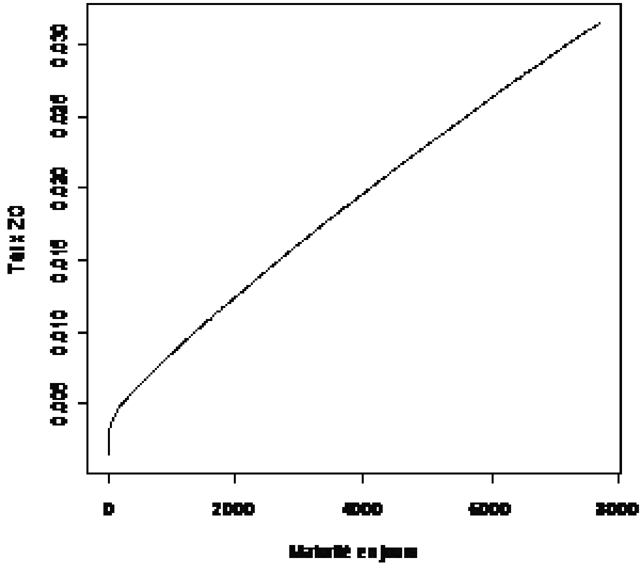
Le prix d'un ZC de maturité T en t est :

$$P(t,T) = \mathbb{E}_t \left(\exp - \int_t^T r_s ds \right)$$

En discrétisant :

$$P(t,T) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \left(\exp \left[- \sum_{i=1}^{n} r_k(t_i) \right] \right)$$

Courbe de taux pour des maturités jusqu'à 30 ans



Sommaire

Conclusion

Si on veut travailler conjointement en univers historique et univers risque-neutre, l'utilisation des prix de marché du risque est une solution cohérente.

Le prix de marché du risque n'est pas constant, qui est l'hypothèse faite souvent.

On peut obtenir assez facilement des prix de ZC et une courbe des taux avec des techniques de simulation type Monte Carlo.

La manière dont le prix de marché du risque est modélisé a une vrai incidence dur les valeurs best estimate *cf Dastarac et Sauveplane [2010]*.

Conclusion

Si on veut travailler conjointement en univers historique et univers risque-neutre, l'utilisation des prix de marché du risque est une solution cohérente.

Le prix de marché du risque n'est pas constant, qui est l'hypothèse faite souvent.

On peut obtenir assez facilement des prix de ZC et une courbe des taux avec des techniques de simulation type Monte Carlo.

La manière dont le prix de marché du risque est modélisé a une vrai incidence dur les valeurs best estimate *cf Dastarac et Sauveplane [2010]*.

Merci de votre attention !

Bibliographie

1] Ahmad R. ; Wilmott P. [2006] " The Market Price of Interest-rate Risk : Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets ", Wilmott magazine.

2] Balduzzi P. ; Robotti C. [2001] " Minimum-Variance Kernels, Economic Risk Premia and Tests of Multi-beta Models ", Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper, n 2001-24.

3] Bernay A. [2008] " Does Equity Risk Decrease in the Long Run ? Some Evidence From French Secular Data ", Bulletin Français dActuariat, Vol. 8, n 16, pp. 88-106.

4] Briys, E., de Varenne F. [1994] " Life Insurance in a Contingent Claim Framework : Pricing and Regulatory Implications " The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 19(1), 5372.

5] Carr P., Geman H., Madan D.B., Yor M. [2002] " The fine structure of asset returns : an empirical investigation ", Journal of business, vol. 75, n 2.

6] Cochrane J.H. ; Piazzesi M. [2005] " Bond Risk Premia ", The American Economic Review

7] Dastarac H., Sauveplane P. [2010] " Les déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ? ", Mémoire dactuariat, ENSAE.

8] Descure C., Borean C. [2006] " Gestion actif-passif et solvabilité ", Proceedings of the 28th international congress of actuaries.

9] Derien A. [2010] " Lhorizon temporel dans Solvabilité 2 ", Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 10, n 19, pp. 43-62.

10] Devineau L., Loisel S. [2009] " Construction dun algorithme daccélération de la méthode des 'simulations dans les simulations' pour le calcul du capital économique Solvabilité II ", Bulletin Français d'Actuariat, vol. 9, n 17.

11] Devolder P. [2001] " les univers virtuels de la finance ", Belgian Actuarial Bulletin, Vol. n 1.

12] Duffee G.R. ; Stanton R.H. [2000] " EMM Estimation of Affine and Nonaffine Term Structure Models ", Working Paper,

Bibliographie

13] Faleh A., Planchet F., Rullière D. [2010] " Les générateurs de scénarios économiques : de la conception à la mesure de la qualité ", Assurances et gestion des risques, Vol. 78 (1/2).

14] Frantz C., Chenut X., Walhin J.F. [2003] " Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee ", Proceedings of the 13th AFIR Colloquium.

15] Grosen A., Jorgensen P.L. [2000] " Fair valuation of life insurance liabilities : The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies ", Insurance : Mathematics and Economics, 26, pp. 37-57.

16] Hille E., Phillips R.S. [1957] Functional Analysis and Semigroups, American Mathematical Society, Providence, RI.

17] Künsch H. R. [1989] " The jackknife and the bootstrap for general stationary observations ", Annals of Statistics 17, 1217-1241.

18] Mehra R. [2003] " The Equity Premium : Why Is It a Puzzle ? ", Financial Analysts Journal

19] Nteukam T. O., Planchet F., Thérond P.E. [2011] " Optimal strategies of hedging portfolio of unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee ", Insurance : Mathematics and Economics, Volume 48, Issue 2, pp. 161-175.

20] Planchet F. [2009] " Provisionnement et couverture des garanties financières : deux notions indissociables. ", la Tribune de lAssurance (rubrique " le mot de lactuaire "), n 138 du 01/07/2009.

21] Planchet F., Thérond P.E., Kamega A. [2009] Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation, Paris : Economica.

22] Ross S. [1976] " The arbitrage theory of capital asset pricing ", Journal of Economic Theory 13, 341-360.

23] Sijlamassi M., Ouaknine Y. [2004] " Valorisation par les déflateurs stochastiques ", Mémoire dactuariat, ENSAE.

24] Smith A.D. [1996] " How Actuaries Can Use Financial Economics. ", British Actuarial Journal, Vol. 2, n 5, pp.

Bibliographie

25] Smith A.D., Southall F.E. [2001] " A Stochastic Asset Model for Fair Values in Pensions and Insurance ", CAS Convention.

26] Stanton R. [1997] " A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk ", Journal of Finance 52 : 1973-2002.

27] Torosantussi L. ; Uboldi A. ; Bernaschi M. [2002] " Empirical evaluation of the market price of risk using the CIR model ", International Journal of Theoretical and Applied Finance.

28] Wüthrich M.V., Bülhmann H., Furrer H. [2007] "Market consistent actuarial valuation", EAA Lecture Notes, Springer.

29] Zemmour J. [2002] " Un modèle déquilibre partiel darbitrage multifactoriel : lécueil des primes de risque des facteurs ", CNRS, Working Paper.

Sommaire

Risque obligation

Dans le cas des obligations, il y a au moins quatre facteurs de risque :

- le risque de taux
- le risque de crédit ,
- le risque de liquidité ,
- le risque de corrélation .

Risque action

- prime de risque sur l'augmentation des dividendes,
- prime de risque sur le taux de change,
- le ratio dividendes/prix.

Les méthodes d'estimation des primes de risque varient selon les actifs et les risques sous-jacents.

CAPM

$$E\left(R_j\right) = R_f + \beta_j \left(E\left(R_M\right) - R_f\right)$$

où R_j est le rendement espéré de l'actif, R_f est le taux sans risque, β_j est le coefficient beta de l'actif j et R_M est le rendement espéré du marché.

Hypothèse du CAPM :

$$\beta_j = \frac{\operatorname{cov}\left(R_j, R_M\right)}{\operatorname{var}\left(R_M\right)}$$

En fonction des primes de risque :

$$E\left(R_j\right) - R_f = \beta_j \left(E\left(R_M\right) - R_f\right)$$

APT-Arbitrage Pricing Theory

$$E\left(R_j\right) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} F_i$$

où α_0 est un terme constant sans une signification particulière, F_i est un facteur non-spécifié et β_{ij} la sensibilité du rendement de l'actif j par rapport au facteur i.

Théorie utilitariste - MEHRA[2003]

- Les primes de risque observées sont **plus élevées** que celles que la théorie économique prédit.
- Sur le marché américain les primes de risque sont autour de $7\% - 8\%$ alors que la théorie prédit 1% !

Comment les agents choisissent les actions qu'ils achètent ?

- Une action qui rapporte plus en temps de croissance qu'en temps de crise doit avoir une prime de risque positive.
- Les actions qui permettent de lisser la consommation sont plus appréciées

Selon MEHRA, titres relativement sans risque et actions risqués doivent avoir à peu près le même rendement

Modèle

L'**utilité** est de type CRRA :

$$U(c_t, \alpha) = \frac{c_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, 0 < \alpha < \infty$$

Le **choix optimal** de l'investisseur est tel que :

$$p_t U'(c_t) = \beta E_t\left(\left(p_{t+1} + y_{t+1}\right) U'(c_{t+1})\right)$$

On note $\frac{p_{t+1}+y_{t+1}}{p_t} = r_{e,t+1}$ le rendement de l'action.
Prime de risque :

$$E_t(R_{e,t+1}) - R_{e,t+1} = -\operatorname{cov}\left(\frac{U'(c_{t+1}), R_{e,t+1}}{E_t(U'(c_{t+1}))}\right) = \lambda_{t+1}$$

Résultats : $r_f = 12,7\%$, $E(r_e) = 14,1\%$ et $\lambda = 1,4$