

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t; \infty[} (T_x)$$

ressources-actuarielles.net



Absence d'opportunité d'arbitrage et probabilité risque neutre :

Rappels et utilisation en assurance

Version 5.9

Décembre 2023

Frédéric PLANCHET
frederic@planchet.net

La théorie financière moderne fournit des outils pour évaluer les actifs financiers dans le cadre de l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Évaluer un actif financier consiste à en déterminer le prix sur un marché organisé, en général supposé parfait (pas de limite aux transactions, pas de frais, pas de taxes).

Cette présentation propose un bref rappel des notions de base de l'évaluation « économiques » du prix des actifs financiers, ce cadre étant ensuite appliqué à l'évaluation des passifs des assureurs « vie », une fois observé que l'analyse des « clauses optionnelles » incluses dans les contrats d'épargne et de prévoyance conduit « naturellement » à utiliser ces techniques pour évaluer des passifs d'assurance.

Cette présentation est un résumé du support de cours disponible [ici](#).

- 1. L'évaluation par arbitrage**
2. Logiques d'évaluation
3. Exemples

1. L'évaluation par arbitrage

1.1. L'évaluation d'actifs financiers : contexte

Notions de base

Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Dans un tel marché on fait l'hypothèse qu'il n'est pas possible d'obtenir un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul.

Marché complet

Le marché est **complet** si chaque flux financier peut être répliqué par un portefeuille composé de l'actif sans risque et des actifs risqués.

Enfin, un prix est **viable** s'il ne crée pas d'opportunité d'arbitrage.

1. L'évaluation par arbitrage

1.2. L'évaluation d'actifs financiers : formalisation

Du point de vue de la modélisation, on représente un marché financier par un actif sans risque et d actifs risqués, dans un cadre probabiliste dynamique (processus).

On montre alors que la condition d'AOA est équivalente à l'existence d'une ou plusieurs « mesures martingales » sous lesquelles les prix des actifs actualisés sont des martingales.

On rappelle que S est une martingale pour la filtration F (ie information connue à l'instant t) sous la loi de probabilité Q si :

$$E^Q [S_{t+1} | F_t] = S_t$$

En particulier, l'espérance d'une martingale est constante. Sous la probabilité risque neutre, l'espérance des prix actualisés est donc constante.

1. L'évaluation par arbitrage

1.2. L'évaluation d'actifs financiers : formalisation

Exemple de martingale

On considère la somme d'une suite de variables iid et centrées, comme par exemple les résultats d'un tirage à pile ou face (-1, 1) :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Alors cette suite est une martingale pour la filtration (=information disponible) engendrée par X_1, \dots, X_n

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= \sum_{i=1}^n E[X_i | X_1, \dots, X_n] + E[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n + E(X_{n+1}) = S_n \end{aligned}$$

1. L'évaluation par arbitrage

1.2. L'évaluation d'actifs financiers : formalisation

La condition de marché complet assure l'unicité de la mesure martingale.

Ainsi, dans un marché complet vérifiant l'hypothèse d'AOA,

l'unique mesure martingale définit l'unique prix viable ; on l'appelle « probabilité risque neutre ». Pour un flux G en T on obtient donc le prix en 0 par :

$$p(G) = E^Q(\beta_T G)$$

Remarque : cela a pour conséquence que la tendance est considérée comme « subjective » et conduit à donner peu de poids aux analyses d'experts sur de paramètre du titre.

L'ensemble des disparités de situation entre différents actifs est concentré dans la volatilité desdits actifs, l'espérance de rendement est la même pour les différents actifs.

1. L'évaluation par arbitrage

1.3. L'évaluation d'actifs financiers : remarques

La propriété de martingale du prix actualisé de l'actif risqué a pour conséquence que l'espérance de gain sous la probabilité risque neutre est égale au taux sans risque. Le prix du flux G peut s'interpréter comme le montant à investir à l'origine pour obtenir G (aléatoire) à l'échéance :

$$V_T^{p(G),\varphi} = \alpha_{T-1} (1 + r_{T-1}) + \langle \varphi_{T-1}, S_T \rangle = G$$

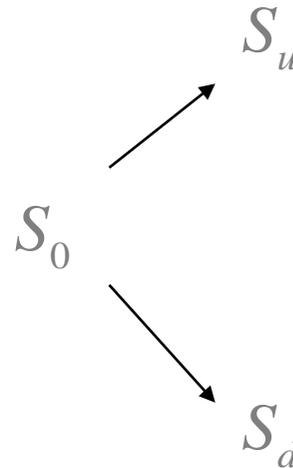
la stratégie financière étant auto-financée. Cette **couverture** de G doit être **gérée** entre 0 et T : à chaque période il faut recomposer le portefeuille d'arbitrage (*cf.* stratégies de couverture des actifs).

1. L'évaluation par arbitrage
- 2. Logiques d'évaluation**
3. Exemples

2. Logiques d'évaluation

2.1. L'évaluation en temps discret

On peut tirer de ce raisonnement par absence d'opportunité d'arbitrage des éléments de valorisation des actifs financiers conditionnels, par exemple les options. On considère un titre risqué dont le cours évolue de la manière suivante :



$$S_u = u \times S_0$$

$$S_d = d \times S_0$$

2. Logiques d'évaluation

2.1. L'évaluation en temps discret

$$\begin{array}{l}
 \nearrow C_u = [S_u - K]^+ = [u \times S_0 - K]^+ \\
 C_0 \\
 \searrow C_d = [S_d - K]^+ = [d \times S_0 - K]^+
 \end{array}$$

en prenant une position longue (achat) sur une action et courte (vendeuse) sur un certain nombre n d'options, il est possible de constituer un portefeuille dont la valeur en 1 est certaine. En effet, il suffit pour cela de déterminer n tel que :

$$S_u - nC_u = S_d - nC_d \quad \longrightarrow \quad n = \frac{(u - d)S}{[S_u - K]^+ - [S_d - K]^+}$$

2. Logiques d'évaluation

2.1. L'évaluation en temps discret

Le portefeuille ainsi constitué a un rendement certain, il doit donc rapporter le taux sans risque :

$$S_0 - n \times C_0 = \left(d \times S_0 - n \times [d \times S_0 - K]^+ \right) \times e^{-r}$$

ce qui conduit à :

$$C_0 = \frac{1}{n} \left(\left(1 - d \times e^{-r} \right) S_0 - n e^{-r} \times [d \times S_0 - K]^+ \right)$$

La valeur de cette option ne dépend pas directement de la probabilité p de hausse du cours de l'action sur la période. Ce résultat s'explique par le fait que cette information est déjà contenue dans le niveau actuel du cours de l'action.

2. Logiques d'évaluation

2.1. L'évaluation en temps discret

Après quelques manipulations on peut écrire :

$$C_0 = (qC_u + (1-q)C_d)e^{-r}$$

avec

$$q = \frac{e^r - d}{u - d}$$

Cette expression est de la forme « espérance du flux au terme actualisé au taux sans risque sous la probabilité risque neutre » :

$$C_0 = E^Q \left(e^{-r} C_1 \right)$$

NB : il faut que $d \leq e^r \leq u$

2. Logiques d'évaluation

2.1. L'évaluation en temps discret

Exemple numérique

Paramètres		Résultats	
S	100	Cu	5
K	105	Cd	0
u	1,1	n	0,25
d	0,9	q	0,75
r	4,88%	Valeur de l'option	3,57

Cette option permet d'assurer qu'à la fin de la période 1, en achetant aujourd'hui une option de valeur 3,57, on pourra acheter le titre au plus 105 quoi qu'il arrive. Le vendeur de l'option de son côté est assuré de ne pas perdre d'argent en 1 en vendant le titre 105 au plus si il a géré sa couverture.

2. Logiques d'évaluation

2.1. L'évaluation en temps discret

Exemple numérique - suite

	Acheteur	Vendeur
Date 0	-3,57 Montant déboursé pour acheter l'option	+3,57 Montant placé dans un portefeuille de couverture
Date 1	$[S_1 - K]^+$	$-[S_1 - K]^+$ $+ [S_1 - K]^+ = 0$

2. Logiques d'évaluation

2.2. Options et garanties pour un contrat d'assurance vie

Considérons un contrat d'épargne avec un taux garanti de 0 % (capital garanti) et une clause de participation aux bénéfices financiers à hauteur de 50 %.

On fait l'hypothèse que dans l'univers risque-neutre, l'actif de l'assureur produit sur une période :

- un rendement de 20 % avec une probabilité de 75 %,
- un rendement de -20 % avec une probabilité de 25 %.

Le taux sans risque sur cette période s'élève à 10 %. Avec une épargne valant 100 en début de période, le résultat de l'assureur en fin de période vaut :

$$\begin{cases} 100 \times (1 + 20\%) - 100 - 50\% \times [100 \times (1 + 20\%) - 100] = 10, & \pi = 75\%, \\ 100 \times (1 - 20\%) - 100 = -20, & \pi = 25\%. \end{cases}$$

2. Logiques d'évaluation

2.2. Options et garanties pour un contrat d'assurance vie

Dans le scénario avec l'hypothèse best estimate (l'actif procure le sans-risque), le résultat de l'assureur vaut, au terme :

$$100 \times (1 + 10\%) - 100 - 50\% \times [100 \times (1 + 10\%) - 100] = 5$$

Selon la définition donnée supra, le coût des options et garanties de ce contrat vaut :

$$\frac{(75\% \times 10 + 25\% \times -20) - 5}{1 + 10\%} = -2,27$$

NB : le calcul *best estimate* s'entend dans l'univers risque-neutre, ie avec un actif qui rapporte le taux sans risque.

2. Logiques d'évaluation

2.2. Options et garanties pour un contrat d'assurance vie

On en déduit que :

- dans une logique MCEV la valeur pour l'actionnaire du contrat est égale à :

$$\frac{5}{1+10\%} (\text{best estimate}) - 2,27 (\text{coût des options}) = 2,27$$

- dans une logique réglementaire le montant de la provision dans les comptes est :

$$100 (\text{valeur de marché}) - 2,27 (\text{coût des options}) = 97,73$$

NB : ces valeurs sont des valeurs en 0, les flux futurs ont été actualisés au taux sans risque.

2. Logiques d'évaluation

2.3. L'évaluation d'une option en temps continu

On considère un titre risqué dont le cours évolue de la manière suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

On s'intéresse à la valorisation d'une option de vente européenne de prix d'exercice K et de maturité T , le flux à l'échéance étant défini par :

$$C_T = [K - S_T]^+$$

Pour évaluer le prix en 0 de ce dérivé, l'idée est de construire un portefeuille autofinancé répliquant les flux d'un placement sans risque :

$$V_t = n(t)C_t + q(t)S_t$$

2. Logiques d'évaluation

2.3. L'évaluation d'une option en temps continu

La propriété de Markov pour les diffusions assure que le prix de l'option ne dépend de la valeur du sous-jacent qu'au travers de la valeur atteinte en t , et la formule d'Itô permet alors d'écrire :

$$dC(t, S_t) = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt$$

Par ailleurs, la condition d'autofinancement assure que :

$$dV_t = n(t) dC_t + q(t) dS_t$$

Le choix $n = -1$ $q = \frac{\partial C}{\partial S}$

annule alors la composante aléatoire du portefeuille, qui doit donc rapporter le taux sans risque :

$$dV = rV dt$$

2. Logiques d'évaluation

2.3. L'évaluation d'une option en temps continu

On obtient ainsi une EDP dont la résolution n'est pas simple :

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad C(S_T, T) = [S_T - K]^+$$

On observe alors que le théorème de Feynman-Kac permet de décrire la solution de cette équation comme une espérance :

$$C(t, T) = \exp(-r(T-t)) E^Q [S(T) - K]^+$$

avec pour dynamique de S sous la probabilité Q :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\tilde{B}_t$$

2. Logiques d'évaluation

2.3. L'évaluation d'une option en temps continu

On remarque alors que le prix de l'option est égal à l'espérance du flux financier actualisé, sous la probabilité Q . Le lien avec les martingales est fait par le théorème de Girsanov, qui permet de conclure que le sous-jacent actualisé est une martingale sous la probabilité Q définie par :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{\mu-r}{\sigma} B_T - \frac{T}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)$$

On en déduit immédiatement que :

$$C(T) = \exp(-rT) E^Q[S_T - K]^+$$

NB : observer que sous Q $\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\tilde{B}_t$ et appliquer la formule d'Itô à $\tilde{S}(t) = e^{-rt} S(t)$

2. Logiques d'évaluation

2.3. L'évaluation d'une option en temps continu

Dans le cas d'un support modélisé par un mouvement brownien géométrique, le prix de l'option de vente (*put*) est donné par la formule :

$$P(S, t, K) = Ke^{-rt}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

N est la fonction de répartition de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2. Logiques d'évaluation

2.3. L'évaluation d'une option en temps continu

Ces formules permettent de définir la composition du portefeuille de couverture qui réplique l'option :

$$W = -P(S_0, T, K, r, \sigma) + \alpha_0 S_0 + \beta_0$$

En effet en remarquant que :

$$W = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial S} = 0$$

on obtient que

$$\alpha_0 = N(-d_1(T)) \qquad \beta_0 = P(S_0, T, K, r, \sigma) - \alpha_0 S_0$$

ce qui fournit un outil opérationnel pour la gestion de ce portefeuille en indiquant les quantités d'actif risqué et d'actif sans risque à détenir pour être couvert.

2. Logiques d'évaluation

2.3. L'évaluation d'une option en temps continu

On peut ensuite complexifier en ajoutant des actifs, en modifiant les caractéristiques de l'option, etc.

En pratique :

- ✓ on n'a de formule fermée que dans quelques cas simples (B&S notamment).
- ✓ l'unicité de la mesure martingale (et donc du prix de l'actif conditionnel) se perd très vite ; il est alors nécessaire d'ajouter des hypothèses pour déterminer le prix du contrat d'assurance : *cf.* le modèle de Merton.

1. L'évaluation par arbitrage
2. Logiques d'évaluation
- 3. Exemples**

3. Exemples

3.1. Garanties plancher sur des contrats en UC (support)

Dans les exemples précédents, le risque n'est que financier : aucun risque d'assurance (mutualisable) n'est présent. En pratique toutefois ces deux types de risques sont présents conjointement, en particulier en assurance.

Illustration : garantie plancher sur un contrat en UC ; en cas de décès à la date t , l'assureur garantit le remboursement de :

$$G_t = S_t + [K - S_t]^+$$

L'évaluation du coût de la garantie (partie asymétrique du flux ci-dessus est, pour un individu d'âge x :

$$C = \sum_{i=0}^n q_{x+i} \times {}_i p_x \times P(S_o, i+1, K)$$

avec : $P(S, T, K) = \exp(-rT) \times E^Q [K - S_T]^+$

3. Exemples

3.1. Garanties plancher sur des contrats en UC

La formule précédente est une conséquence de l'application du cadre de valorisation « économique » imposé par le dispositif prudentiel :

	Mutualisable	Non mutualisable
Réplicable	Quelques cas de titrisation, mais globalement négligeable	Finance de marché
Non réplicable	L'assurance « classique »	Perte d'indépendance dans les risques d'assurance, risques de modèle, erreurs de réplifications, etc.

$$PT = BE + RM = E^{P^A \otimes Q^F} \left(\sum_{j \geq 0} \frac{F_j}{(1 + R_j)^j} \right) + RM$$

3. Exemples

3.1. Garanties plancher sur des contrats en UC

La formule d'évaluation des « puts moyens pondérés » est donc l'application de ce cadre au cas particulier considéré :

$$\begin{aligned}
 C &= E^{P^a \otimes Q^f} \left[e^{-rT_x} \left[K - S_{T_x} \right]^+ \mathbf{1}_{T_x \leq T} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^T {}_{n-1}p_x \times q_{x+n-1} \times E^{Q^f} \left[e^{-rn} \left[K - S_n \right]^+ \right]
 \end{aligned}$$

La légitimité de cette formule est conditionnée par :

- ✓ une mutualisation suffisante du risque d'assurance ;
- ✓ la gestion effective de la couverture au cours du temps.

Le modèle de raisonnement par absence d'opportunité d'arbitrage impose un ajustement permanent des proportions de l'actif sans risque et de l'actif risqué.

3. Exemples

3.1. Garanties plancher sur des contrats en UC

Application :

On considère les paramètres suivants :

$$S_0 = 1, K = 1$$

$$\mu = 8,5\%, \sigma = 25\%$$

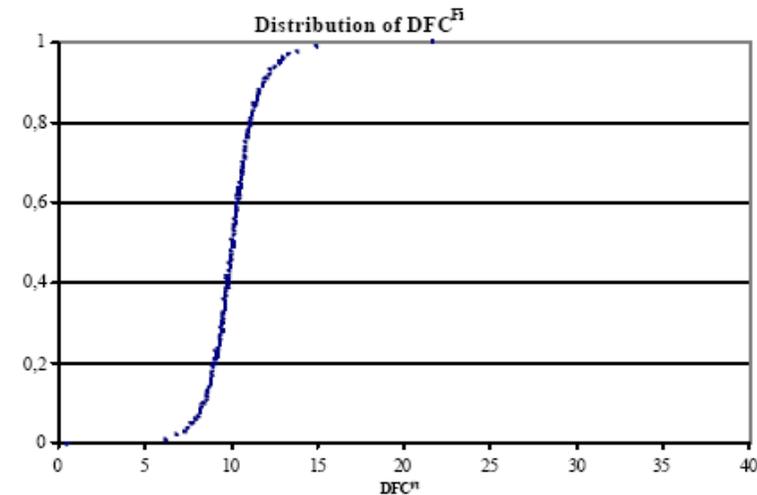
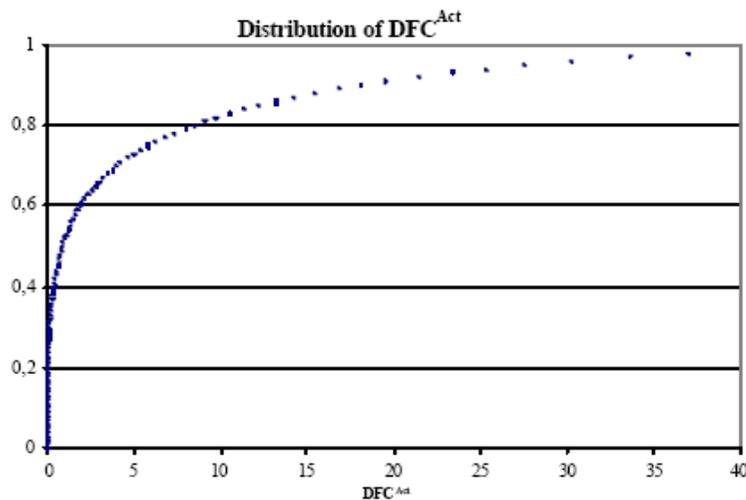
$$r = 5\%$$

et on évalue l'engagement associé à la garantie plancher pour une population de 1 000 assurés âgés de 45 ans sur une durée de 8 ans. Les calculs sont menés par simulation, 10 000 tirages sont effectués.

3. Exemples

3.1. Garanties plancher sur des contrats en UC

La distribution du coût en fonction de la gestion de la couverture est :



La situation dans laquelle la gestion de la couverture n'est pas mise en œuvre est bien plus dangereuse. Le « prix » de la clause optionnelle n'a de sens qu'avec une gestion active du portefeuille de couverture. « Gérer » la couverture consiste en pratique à constituer en 0 un portefeuille d'arbitrage et à ajuster régulièrement sa composition en fonction du marché.

3. Exemples

3.1. Garanties plancher sur des contrats en UC

Lorsque la garantie est valorisée avec la formule des puts moyens pondérés en probabilité risque neutre, deux facteurs génèrent mécaniquement des imperfections de couverture et des besoins de réajustement :

- ✓ la mutualisation imparfaite des décès
- ✓ l'impossibilité matérielle de réajuster la position en continu

De plus, des coûts de transaction doivent être pris en compte.

Si il sont proportionnels aux volumes échangés, il est possible d'évaluer le coût de ces imperfections :

- ✓ d'une part le coût de l'erreur de couverture lié au caractère discret des réallocations;
- ✓ d'autre part le coût des transactions associées.

3. Exemples

3.2. Choix du taux d'actualisation

Les flux associés à un risque financier sont (notamment dans un cadre MCEV ou IFRS) actualisés au taux sans risque. On peut alors montrer par un argument d'absence d'opportunité d'arbitrage que le taux d'actualisation que l'on doit utiliser pour des flux associés à un risque mutualisable est le taux sans risque, autrement dit que la prime de risque est dans ce contexte nulle.

Toutefois ceci n'est vrai que si la mutualisation est suffisante, et dans le cas d'une mutualisation partielle, l'investisseur peut exiger une telle prime.

En effet, du fait d'obligations réglementaires ou d'une règle de gouvernance, on peut imaginer que le capital requis pour la couverture des engagements soit fixé à un niveau tel qu'il permette une notation AA par les organismes spécialisés. Le capital immobilisé est supérieur à l'évaluation *best estimate* que l'investisseur en ferait *a priori*.

3. Exemples

3.2. Choix du taux d'actualisation

Plus généralement :

- ✓ ou bien on est dans le cadre d'une idéalisation d'un flux de **passif répliquable** (que l'on peut reproduire avec des actifs pour être couvert quel que soit la réalisation de l'état du monde). On est alors capable **d'éliminer le risque** en investissant à la date 0 un montant dans un portefeuille d'actifs ensuite géré sans rajouter de mise (il est autofinancé). Dans cette situation le taux d'actualisation à utiliser est le taux sans risque (puisque finalement tout se passe comme si on faisait un investissement sans risque)
- ✓ ou bien on ne rentre pas dans ce cadre ; alors il y a débat sur le taux d'actualisation, qui va pouvoir être **supérieur au taux sans risque** pour refléter le coût de la prise en compte de ces imperfections.

3. Exemples

3.2. Choix du taux d'actualisation

Exemple

Supposons par exemple, pour fixer les idées, que dans le cas d'une mutualisation imparfaite le montant de la provision d'une garantie Temporaire Décès ou Rente Viagère soit fixé en référence au quantile à 75% de la distribution des sinistres (supérieur donc à l'espérance du coût des sinistres). En pratique on détermine alors la prime de risque en écrivant :

$$\frac{E(S)}{1+r} = \frac{VaR(S;75\%)}{1+\rho}$$

avec r le taux sans risque et S la charge des sinistres. Autrement dit, la rémunération du capital effectivement immobilisé attendue par l'actionnaire est déterminée de sorte qu'investir, pour le même risque, le capital best estimate rémunéré au taux sans risque ou le capital effectivement immobilisé au taux intégrant la prime de risque soit indifférent à la date initiale.

3. Exemples

3.2. Choix du taux d'actualisation

Exemple

Pour une garantie de type temporaire décès on a $S = \sum_{i \in I} K_i 1_{\{T_{x_i} = 0\}}$ et donc :

$$VaR_{\alpha}(S) \approx V_{\alpha} = \sum K_i \times q_{x_i} + \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum K_i \times q_{x_i} \times (1 - q_{x_i})}$$

D'où

$$\rho = \frac{\sum K_i \times q_{x_i} + \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum K_i \times q_{x_i} \times (1 - q_{x_i})}}{\sum K_i \times q_{x_i}} (1 + r) - 1$$

3. Exemples

3.2. Choix du taux d'actualisation

Exemple

Numériquement, en prenant un portefeuille constitué d'assurés âgés de 20 à 70 ans, avec 10 000 assurés par âge, un capital décès identique pour tous et la table de mortalité TF00-02 on trouve :

Effectif	510 000
Charge espérée (Qx moyen)	0,2801%
Charge provisionnée (Quantile 75%)	0,2835%
Marge en % du <i>best estimate</i>	1,76%
Taux sans risque	4,00%
Taux incluant la prime de risque	5,27%

- Black F., Scholes M. (1973) « The pricing of options and corporate liabilities », Journal of Political Economy 81 (3), 637-54.
- Bouchard B. (2007) « Introduction à l'évaluation d'actifs financiers par absence d'opportunité d'arbitrage », support de cours Paris VI.
- Bouleau N. (1998) « Martingales et marchés financiers », Editions Odile Jacob
- Embrechts P. (2000) « Actuarial versus financial pricing of insurance », Risk Finance 1 (4), 17-26.
- Frantz C., Chenut X., Walhin J.F. (2003) « Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee », Proceedings of the 13th AFIR Colloquium, Maastricht.
- Merton R.C. (1976) « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous », Journal of Financial Economics 3, 125-44.
- Planchet F., Thérond P.E., Juillard M. (2011) Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques, Paris : Economica.

<http://www.ressources-actuarielles.net>

Annexe n°1 : formule d'Itô

Soit une diffusion définie par l'équation

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t$$

alors

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\sigma^2(t, X_t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t$$

Annexe n°2 : Théorème de Feynman-Kac

La solution de l'EDP :

$$\frac{\sigma^2(x,t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu(x,t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} - r(x,t) f = 0 \quad f(x,T) = \phi(x)$$

admet la représentation suivante :

$$f(x,t) = E_t^Q \left[\exp \int_t^T r(X_s, s) ds \phi(X(T)) \right]$$

avec pour dynamique de X sous la probabilité Q :

$$dX_t = \mu(x,t) dt + \sigma(x,t) dB_t$$

sous réserve que :

$$\int_0^t E \left[\left(\sigma(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \right)^2 \right] ds < \infty$$

Annexe n°3 : Théorème de Girsanov

On considère un mouvement brownien B sous P et un processus adapté λ vérifiant la condition de Novikov :

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(u) du \right) \right] < \infty$$

On définit alors un processus W et une mesure Q en posant :

$$W_t = B_t + \int_t^T \lambda(u) du \quad \frac{dQ}{dP} = \exp \left(- \int_0^T \lambda(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(u) du \right)$$

Alors le processus W est un Q -mouvement brownien.