MODÈLES FINANCIERS EN ASSURANCE ET ANALYSES DYNAMIQUES

Support de cours 2023-2024

Absence d'opportunité d'arbitrage et probabilité risque neutre
Rappels et utilisation en assurance

Frédéric PLANCHET

Version 5.6

Décembre 2023

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION

Cette introduction constitue un bref rappel du paradigme de l'évaluation des actifs financiers et de l'utilisation de ces méthodes en assurance.

Après un bref rappel du contexte, on passe en revue les principes d'évaluation qui sont à la base des outils de la finance de marché. Les éléments mathématiques sont cités sans formalisme, l'idée étant essentiellement de faire comprendre la logique générale du dispositif et non de développer les aspects techniques. Les points cités dans cette synthèse sont développés dans le corps du texte.

Les dispositifs de détermination de la solvabilité d'une entreprise d'assurance (Solvabilité 2), d'évaluation de la valeur d'une entreprise d'assurance (EEV / MCEV) et de comptabilisation des actifs et passifs d'assurance (IFRS) évoluent et introduisent de nouvelles notions.

Ces référentiels mettent notamment en avant la notion de valeur de marché et à ce titre les modèles visent à intégrer l'ensemble des caractéristiques des contrats d'assurance et des actifs détenus par les entreprises : options, droits aux rachats qui interviennent dans la valorisation de marché des engagements des organismes assureurs, etc.

La théorie financière fournit des outils pour évaluer les actifs financiers. Évaluer un actif financier consiste à en déterminer le prix sur un marché organisé, en général supposé parfait (pas de limite aux transactions, pas de frais, pas de taxes). L'analyse des « clauses optionnelles » incluses dans les contrats d'épargne et de prévoyance conduit « naturellement » à utiliser ces techniques pour évaluer des passifs d'assurance.

2. CADRE GÉNÉRAL DE L'ÉVALUATION PAR ARBITRAGE

Les notions de base[1] sur lesquelles les modèles d'évaluation s'appuient sont :

- l'**absence d'opportunité d'arbitrage** (AOA) : dans un tel marché on fait l'hypothèse qu'il n'est pas possible d'obtenir un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul.

- L'hypothèse de **marché complet** : le marché est complet si chaque flux financier peut être répliqué par un portefeuille autofinancé composé de l'actif sans risque et des actifs risqués. La **réplication** consiste donc en la possibilité de fabriquer un portefeuille autofinancé qui génère à l'échéance le même flux que le support que l'on réplique.

---

[1] Voir Bouleau (1998) pour une vulgarisation de ces notions et Bouchard (2007) pour un exposé formel détaillant les outils mathématiques avec rigueur.

Enfin, on dit qu'un prix est viable s'il ne créé pas d'opportunité d'arbitrage.

Du point de vue de la modélisation, on représente un marché financier par un actif sans risque et *d* actifs risqués, dans un cadre probabiliste dynamique (processus). On montre alors que la condition d'AOA est équivalente à l'existence d'une ou plusieurs *mesures martingales*, de sorte que sous ces mesures les **prix actualisés** soient des martingales.

On rappelle que *S* est une martingale pour la filtration *F* (*i.e.* information connue à l'instant *t*) sous la loi de probabilité *Q* si $E^Q\left[S_{t+1}\middle|F_t\right] = S_t$. En particulier, l'espérance d'une martingale est constante.

Exemple de martingale :

On considère la somme d'une suite de variables i.i.d. et centrées, comme, par exemple les résultats d'un tirage à pile ou face (-1, 1) :

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

Alors cette suite est une martingale pour la filtration (=information disponible) engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ car :

$$E\left[S_{n+1}\middle|X_1,\ldots,X_n\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\middle|X_1,\ldots,X_n\right] + E\left[X_{n+1}\middle|X_1,\ldots,X_n\right]$$
$$= S_n + E\left(X_{n+1}\right) = S_n$$

Par ailleurs l'hypothèse de marché complet assure l'unicité de la mesure martingale. On en déduit un résultat fondamental, qui est que, dans un marché complet vérifiant l'hypothèse d'AOA, l'unique mesure martingale définit l'unique prix viable ; on l'appelle *probabilité risque neutre*. Pour un flux G en *T* on obtient donc le prix en 0 par le simple calcul de l'espérance du flux actualisé :

$$p(G) = E^Q\left(\beta_T G\right)$$

avec β_T le facteur d'actualisation ($\beta_T = \mathbf{exp}(-rT)$ si le taux sans risque est constant). Cela a notamment pour conséquence que la tendance d'évolution du titre est considérée comme « subjective » et conduit à donner peu de poids aux analyses d'experts sur le devenir de la valeur du titre. L'ensemble des disparités de situations entre différents actifs est concentré dans la volatilité desdits actifs, l'espérance de rendement des différents actifs étant, dans l'univers risque neutre, constante. Ceci est une conséquence immédiate de la propriété de martingale du prix actualisé de l'actif risqué sous la probabilité risque neutre. En effet, écrire que $E^Q\left(S_T\right) = \beta_T^{-1} S_0$ revient à dire que

$E^Q\left(\beta_T S_T\right) = S_0$.

D'un point de vue pratique, le prix du flux G peut s'interpréter comme le montant à investir à l'origine pour obtenir le montant G (aléatoire) à l'échéance, avec une stratégie financière auto-financée. Cette couverture de G doit être gérée entre 0 et *T* : à chaque période il faut recomposer le portefeuille d'arbitrage. Ceci fournit un puissant outil de mise en œuvre concrète de la couverture du risque.

3. Approches en temps discret et en temps continu

3.1. L'évaluation en temps discret

On peut tirer de ce raisonnement par absence d'opportunité d'arbitrage des éléments de valorisation des actifs financiers conditionnels, par exemple les options. On considère un titre risqué dont le cours évolue de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} & & S_u \\ & \nearrow & \\ S_0 & & \\ & \searrow & \\ & & S_d \end{array}$$

On considère une option d'achat sur une période sur ce sous-jacent ; l'ensemble des situations possibles à l'échéance peut se représenter de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccl} & & C_u = \left[S_u - K\right]^+ = \left[u \times S_0 - K\right]^+ \\ & \nearrow & \\ C_0 & & \\ & \searrow & \\ & & C_d = \left[S_d - K\right]^+ = \left[d \times S_0 - K\right]^+ \end{array}$$

en prenant une position longue (achat) sur une action et courte (vendeuse) sur un certain nombre *n* d'options, il est possible de constituer un portefeuille dont la valeur en 1 est certaine. En effet, il suffit pour cela de déterminer *n* tel que $S_u - nC_u = S_d - nC_d$, ce qui conduit facilement à :

$$n = \frac{(u-d)S}{\left[S_u - K\right]^+ - \left[S_d - K\right]^+}.$$

Le portefeuille ainsi constitué a un rendement certain, il doit donc rapporter le taux sans risque, d'où l'on tire que $S_0 - n \times C_0 = \left(d \times S_0 - n \times \left[d \times S_0 - K\right]^+\right)e^{-r}$ ce qui conduit à :

$$C_0 = \frac{1}{n}\left(\left(1 - de^{-r}\right)S_0 + ne^{-r} \times \left[dS_0 - K\right]^+\right).$$

La valeur de cette option ne dépend pas directement de la probabilité *p* de hausse du cours de l'action sur la période. Ce résultat s'explique par le fait que cette information est déjà contenue dans le niveau actuel du cours de l'action. Après quelques manipulations, et sous réserve que $d \le e^r \le u$, on peut écrire :

$$C_0 = \left(qC_u + (1-q)C_d\right)e^{-r}$$

avec $q = \dfrac{e^r - d}{u - d}$. Cette expression est de la forme « espérance du flux au terme actualisé au taux sans risque sous la probabilité risque neutre »:

$$C_0 = E^Q\left(e^{-r}C_1\right)$$

On retrouve donc dans ce contexte très simple le résultat général rappelé *supra*.

Exemple numérique

À titre d'illustration, on considère la situation suivante :

Paramètres		**Résultats**	
S	100	Cu	5
K	105	Cd	0
u	1,1	n	0,25
d	0,9	q	0,75
r	4,88%	**Valeur de l'option**	**3,57**

Cette option permet donc d'assurer qu'à la fin de la période 1, en achetant aujourd'hui une option de valeur 3,57, on pourra acheter le titre au plus 105 quoi qu'il arrive. Le vendeur de l'option de son coté est assuré de ne pas perdre d'argent en 1 en vendant le titre 105 au plus s'il a géré sa couverture. Le bilan de l'opération de vente d'une telle option d'achat peut se résumer de la manière suivante :

Fig. 1 : Synthèse des états du monde

	Acheteur	Vendeur
Date 0	-3,57 Montant déboursé pour acheter l'option	+3,57 Montant placé dans un portefeuille de couverture
Date 1	$\left[S_1 - K\right]^+$	$-\left[S_1 - K\right]^+$ $+\left[S_1 - K\right]^+ = 0$

3.2. Application : options et garanties pour un contrat d'assurance vie

Considérons un contrat d'épargne avec un taux garanti de 0 % (capital garanti) et une clause de participation aux bénéfices financiers à hauteur de 50 %. On fait l'hypothèse que sous la probabilité risque-neutre, l'actif de l'assureur produit sur une période :

- un rendement de 20 % avec une probabilité de 75 %,

- un rendement de -20 % avec une probabilité de 25 %.

Le taux sans risque sur cette période s'élève donc à 10 %. Avec une épargne valant 100 en début de période, le résultat de l'assureur en fin de période vaut :

$$\begin{cases} 100\times(1+20\%)-100-50\%\times\left[100\times(1+20\%)-100\right]=10, & \pi=75\%, \\ 100\times(1-20\%)-100=-20, & \pi=25\%. \end{cases}$$

On en déduit que la valeur actuelle probable de la prestation future vaut :

$$\frac{100+50\%\times75\%\times20}{1+10\%}=97,73.$$

Cette provision peut se décomposer en :

- coût de la garantie de capital : $100/(1+10\%)=90,9$,
- coût de la PB : $(20\times50\%\times75\%)/(1+10\%)=6,8$.

Parallèlement, la valeur actuelle du résultat futur pour l'assureur vaut

$$\frac{25\%\times-20+50\%\times75\%\times20}{1+10\%}=2,3.$$

Dans une approche *Embedded Value*, ce résultat peut se décomposer entre celui obtenu dans le scénario *best estimate* duquel on déduire la valeur-temps de l'option de PB. Dans notre exemple, le scénario *best estimate* correspond au cas[2] où l'actif de l'assureur produit le rendement moyen de 10 %, le résultat de l'assureur au terme vaut alors :

$$100\times(1+10\%)-100-50\%\times\left[100\times(1+10\%)-100\right]=5.$$

Ainsi, la valeur actuelle du résultat futur pour l'assureur peut se décomposer entre :

- le résultat *best estimate* : $100-(100+50\%\times10)/(1+10\%)\simeq4,5$;
- la valeur temps de l'option de PB : $2,3-4,5=-2,2$.

[2]. Incidemment, avec le processus d'évolution de l'actif utilisé, ce scénario qui est le scénario moyen est impossible.

3.3. L'ÉVALUATION EN TEMPS CONTINU

En pratique les modèles de la finance mathématique font largement appel à des approches en temps continu, qui permettent une plus grande flexibilité, au prix d'un outillage théorique conséquent. L'objectif de cette section est de faire une présentation très simplifiée en dimension 1 de ces outils, *via* l'exemple d'une option de vente européenne. On considère donc un titre risqué dont le cours évolue de la manière suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dB_t .$$

On s'intéresse à la valorisation d'une option de vente européenne de prix d'exercice *K* et de maturité *T*, le flux à l'échéance étant défini par $C_T = \left[K - S_T\right]^+$. Pour évaluer le prix en 0 de ce dérivé, l'idée est de construire un portefeuille autofinancé répliquant les flux d'un placement sans risque :

$$V_t = n(t)C_t + q(t)S_t$$

La propriété de Markov pour les diffusions assure que le prix de l'option C ne dépend de la valeur du sous-jacent qu'au travers de la valeur atteinte en *t*, soit $C = C(t, S_t)$ et la formule d'Itô permet alors d'écrire :

$$dC(t,S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt .$$

Par ailleurs, la condition d'autofinancement assure que :

$$dV_t = n(t)dC_t + q(t)dS_t$$

Le choix $n = -1$ et $q = \frac{\partial C}{\partial S}$ annule alors la composante aléatoire du portefeuille, qui doit donc rapporter le taux sans risque : $dV = rV\,dt$. On obtient ainsi une EDP dont la résolution n'est pas simple :

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

avec la condition aux limites : $C(S_T, T) = \left[S_T - K\right]^+$.

Formule d'Itô

On considère la diffusion $dX_t = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dB_t$ et une fonction $f(t,x)$ deux fois continûment dérivable, alors $Y_t = f(t,X_t)$ est une diffusion et on a :

$$df(t,X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\sigma^2(t,X_t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t) dX_t$$

On observe alors que le théorème de Feynman-Kac permet de décrire la solution de cette équation comme une espérance :

$$C(t,T) = \mathbf{exp}(-r(T-t)) E^Q\left[S(T) - K\right]^+$$

avec pour dynamique de S sous la probabilité Q $\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\,d\tilde{B}_t$. Après quelques manipulations on trouve alors que le prix de l'option de vente (*put*) est donné par la formule :

$$P(S,t,K) = Ke^{-rt} N(-d_2) - S \times N(-d_1)$$

avec

$$d_1 = \frac{\mathbf{ln}\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \text{ et } d_2 = \frac{\mathbf{ln}\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

On remarque alors que le prix de l'option est égal à l'espérance du flux financier actualisé, sous la probabilité Q.

Théorème de Feynman-Kac

La solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\sigma^2(x,t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu(x,t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} - r(x,t) f = 0$$

avec la condition initiale $f(x,T) = \phi(x)$

admet la représentation suivante :

$$f(x,t) = E_t^Q \left(\mathbf{exp}\left(\int_t^T r(X_s,s)ds \right) \phi(X_T) \right)$$

avec pour dynamique de X sous la probabilité Q

$$dX_t = \mu(x,t)\,dt + \sigma(x,t)\,dB_t$$

dès lors que $\int_0^t E\left[\left(\sigma(X_s,s)\frac{\partial f}{\partial x}(X_s,s)\right)^2\right]ds < \infty$.

Le lien avec les martingales est fait par le théorème de Girsanov, qui permet de conclure que le sous-jacent actualisé est une martingale sous la probabilité Q définie par

$$\frac{dQ}{dP} = \mathbf{exp}\left(-\frac{\mu - r}{\sigma}B_T - \frac{T}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right).$$

La condition d'AOA implique que les processus de prix actualisés sont des martingales, comme Q rend martingale le processus $e^{-rt}S_t$ et qu'ici le marché est complet (donc Q est unique), on en déduit immédiatement que le prix de l'option est égal à l'espérance du flux actualisé sous la mesure Q, soit $C(T) = \mathbf{exp}(-rT)E^Q\left[S_T - K\right]^+$, qui est un simple cas particulier de la formule de la formule générale présentée page 4.

Théorème de Girsanov

On considère un mouvement brownien *B* sous une probabilité *P* un processus adapté λ vérifiant la condition de Novikov :

$$E\left[\mathbf{exp}\left(\frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)du\right)\right] < \infty$$

On définit alors un processus *W* et une mesure *Q* en posant :

$$W_t = B_t + \int_t^T \lambda(u)\,du \text{ et } \frac{dQ}{dP} = \mathbf{exp}\left(-\int_0^T \lambda(u)\,dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)\,du\right)$$

Alors le processus W est un Q-mouvement brownien.

Ces formules explicites pour le prix du dérivé permettent de définir la composition du portefeuille de couverture qui réplique l'option :

$$W = -P(S_0,T,K,r,\sigma) + \alpha_0 S_0 + \beta_0$$

En effet en remarquant que $W = 0$ et $\frac{\partial W}{\partial S} = 0$ on obtient que $\alpha_0 = N(-d_1(T))$ et $\beta_0 = P(S_0,T,K,r,\sigma) - \alpha_0 S_0$, ce qui fournit un outil opérationnel pour la gestion de ce portefeuille en indiquant les quantités d'actif risqué et d'actif sans risque à détenir pour être couvert. On peut ensuite complexifier en ajoutant des actifs, en modifiant les caractéristiques de l'option, etc. En pratique toutefois :

- on n'a de formule fermée que dans le cas de B&S ;
- l'unicité de la mesure martingale (et donc du prix de l'actif conditionnel) se perd très vite ; il est alors nécessaire d'ajouter des hypothèses pour déterminer le prix du contrat d'assurance : le modèle de Merton en fournit un exemple simple.

Dans les exemples précédents, le risque n'est que financier : aucun risque d'assurance (mutualisable) n'est présent. En pratique toutefois ces deux types de risques sont présents conjointement, en particulier en assurance.

4. ILLUSTRATIONS PRATIQUES

4.1. GARANTIE PLANCHER SUR UN CONTRAT EN UNITÉS DE COMPTE

Dans le cadre d'une garantie plancher sur un contrat en unités de compte, l'assureur garanti en cas de décès à la date *t* le remboursement de $G_t = S_t + \left[K - S_t\right]^+$. Il est donc « naturel » de proposer comme évaluation du coût de la garantie pour un individu d'âge x :

$$C = \sum_{i=0}^{n-1} q_{x+i} \times {}_i p_x \times P\left(S_o, i+1, K\right)$$

avec $P\left(S,T,K\right) = \mathbf{exp(}-rT\mathbf{)} \times E^Q\left[K - S_T\right]^+$. Cette formule d'évaluation dite des « puts moyens pondérés » est en fait une espérance :

$$\begin{aligned} C &= E^{P^a \otimes Q^f}\left[e^{-rT_x}\left[K - S_{T_x}\right]^+ 1_{T_x \le T}\right] \\ &= E^{P^a}\left[E^{Q^f}\left(e^{-rT_x}\left[K - S_{T_x}\right]^+ 1_{T_x \le T} \middle| T_x\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{T} {}_{n-1}p_x \times q_{x+n-1} \times E^{Q^f}\left(e^{-rn}\left[K - S_n\right]^+\right) \end{aligned}$$

La légitimité de cette formule est conditionnée par :

- une mutualisation suffisante du risque d'assurance ;
- la gestion effective de la couverture au cours du temps, que ce soit par l'achat des options ou la mise en place d'un portefeuille de couverture.

Le modèle de raisonnement par absence d'opportunité d'arbitrage impose un ajustement permanent des proportions de l'actif sans risque et de l'actif risqué. Dans le cas plus général où le risque d'assurance n'est pas parfaitement mutualisé, il convient de prendre en compte la marge pour risque :

$$C = E^{P^a \otimes Q^f}\left[e^{-rT_x}\left[K - S_{T_x}\right]^+ 1_{T_x \le T}\right] + RM .$$

Application :

On considère les paramètres suivants :

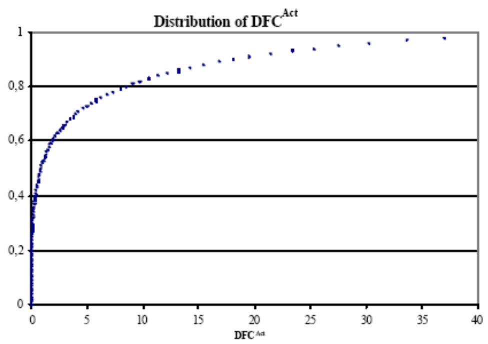
$$S_0 = 1, K = 1$$

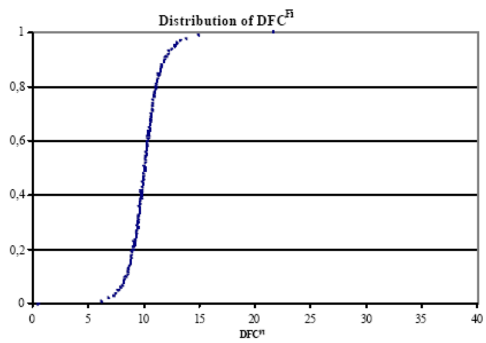
$$\mu = 8{,}5\%, \sigma = 25\%$$

$$r = 5\%$$

et on évalue l'engagement associé à la garantie plancher pour une population de 1 000 assurés âgés de 45 ans sur une durée de 8 ans. Les calculs sont menés par simulation, 10 000 tirages sont effectués. La distribution du coût en fonction de la gestion de la couverture est :

Fig. 2 : Distributions avec et sans réplication





La situation dans laquelle la gestion de la couverture n'est pas mise en œuvre est bien plus dangereuse. Le « prix » de la clause optionnelle n'a de sens qu'avec une gestion active du portefeuille de couverture. Lorsque la garantie est valorisée avec la formule des *puts* moyens pondérés en probabilité risque neutre, deux facteurs génèrent mécaniquement des imperfections de couverture et des besoins de réajustement :

- la mutualisation imparfaite des décès

- l'impossibilité matérielle de réajuster la position en continu

De plus, des coûts de transaction doivent être pris en compte. Si il sont proportionnels aux volumes échangés, il est possible d'évaluer évaluer le coût de ces imperfections :

- d'une part le coût de l'erreur de couverture lié au caractère discret des réallocations ;

- d'autre part le coût des transactions associées.

4.2. Choix du taux d'actualisation

Les flux associés à un risque financier sont (notamment dans un cadre MCEV ou IFRS) actualisés au taux sans risque. On peut alors montrer par un argument d'absence d'opportunité d'arbitrage que le taux d'actualisation que l'on doit utiliser pour des flux associés à un risque mutualisable est le taux sans risque, autrement dit que la prime de risque est dans ce contexte nulle.

Toutefois ceci n'est vrai que si la mutualisation est suffisante, et dans le cas d'une mutualisation partielle, l'investisseur peut exiger une telle prime.

En effet, du fait d'obligations réglementaires ou d'une règle de gouvernance, on peut imaginer que le capital requis pour la couverture des engagements soit fixé à un niveau tel qu'il permette une notation AA par les organismes spécialisés. le capital immobilisé est supérieur à l'évaluation *best estimate* que l'investisseur en ferait *a priori*.

Plus généralement :

- ou bien on est dans le cadre d'une idéalisation d'un flux de passif réplicable (que l'on peut reproduire avec des actifs pour être couvert quel que soit la réalisation de l'état du monde). On est alors capable d'éliminer le risque en investissant à la date 0 un montant dans un portefeuille d'actifs ensuite géré sans rajouter de mise (il est autofinancé). Dans cette situation le taux d'actualisation à utiliser est le taux sans risque (puisque finalement tout se passe comme si on faisait un investissement sans risque)
- ou bien on ne rentre pas dans ce cadre ; alors il y a débat sur le taux d'actualisation, qui va pouvoir être supérieur au taux sans risque pour refléter le coût de la prise en compte de ces imperfections.

<u>Exemple</u>

Supposons par exemple, pour fixer les idées, que dans le cas d'une mutualisation imparfaite le montant de la provision d'une garantie Temporaire Décès soit fixé en référence au quantile à 75 % de la distribution des sinistres (supérieur donc à l'espérance du coût des sinistres). En pratique on détermine alors la prime de risque en écrivant :

$$\frac{E(S)}{1+r} = \frac{VaR(S,75\%)}{1+\rho}$$

avec r le taux sans risque et S la charge des sinistres. Autrement dit, la rémunération du capital effectivement immobilisé attendue par l'actionnaire est déterminée de sorte qu'investir, pour le même risque, le capital *best estimate* rémunéré au taux sans risque ou le capital effectivement immobilisé au taux intégrant la prime de risque soit indifférent à la date initiale.

4.3. Illustration des problématiques IFRS et MCEV : portefeuille d'épargne

On considère un contrat qui a pour objet le versement d'un capital aux bénéficiaires désignés en cas de décès de l'assuré avant le terme, à l'assuré en cas de vie au terme. Le montant du capital versé en cas de décès ou au terme est garanti à la souscription. Le contrat est à prime unique (pas de possibilité de versement libre), avec un taux minimum garanti sur la durée du contrat, de 8 ans, une clause de participation aux bénéfices et la possibilité de rachat partiel ou total.

La modélisation *market consistent* de ce contrat passe par la modélisation des variables suivantes :

- rendement du portefeuille financier,
- attribution de PB discrétionnaire : politique énoncée par l'assureur (taux cible de revalorisation des contrats), 90 % des produits financiers et techniques,
- rachat de contrats : loi centrale estimée sur les observations et déformée en fonction de l'écart entre le taux de revalorisation et les taux de revalorisation de marché.

Les données individuelles utilisées sont reprises dans le tableau ci-dessous :

Fig. 3 : <u>Données individuelles</u>

Date de naissance	Date de souscription	Date de terme	Epargne constituée	TMG	PB
20/05/1972	01/08/2002	20/06/2010	100	3,00%	90%
01/06/1958	01/01/2004	01/01/2012	120	3,00%	90%
30/04/1975	01/01/2003	01/01/2011	140	3,00%	90%
16/12/1979	30/06/2000	30/06/2008	200	3,00%	90%

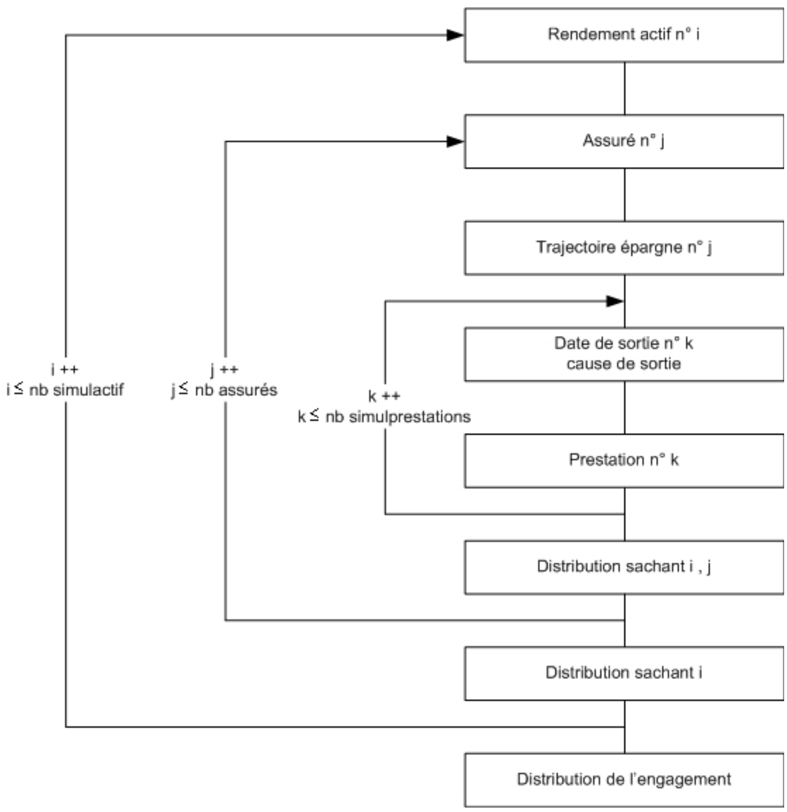
et on retient les valeurs suivantes des paramètres du calcul :

Fig. 4 : Paramètres

Domaine	Variable	Valeur
Evaluation	Date	01/01/2006
Nombre de simulations	Passif	1 000
	Actif	1 000
Rendement de l'actif	Taux sans risque	4,88%
	Volatilité	5,00%
Revalorisation de l'épargne	Rendement déjà acquis	0,00%
	Prochaine date de revalorisation	31/12/2006
Rachat	Pénalité par semestre restant à courir	0,30%

D'un point de vue pratique, les calculs sont menés par simulation selon le schéma suivant :

Fig. 5 : Organisation des calculs



Les résultats obtenus sont constitués, dans une perspective IFRS de la somme des prestations actualisées sur 8 ans, dont la valeur espérée (sous la probabilité risque neutre) fournira le montant des provisions :

Fig. 6 : Résultats

Statistique	Valeur
Moyenne	571,42
Minimum	516,50
Maximum	705,34
Variance	895,30
Ecart-type	29,92
Risque financier	96,83%
Risque non-financier	3,17%

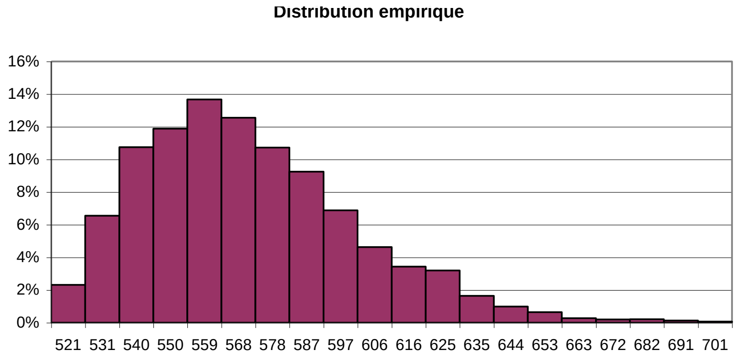
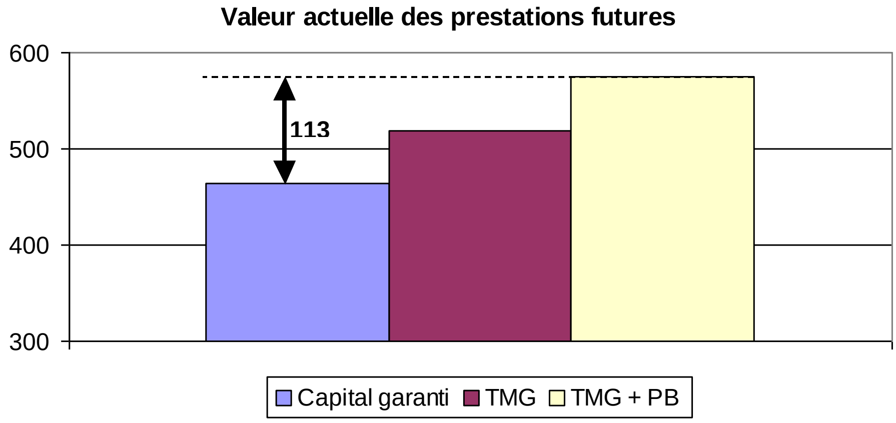


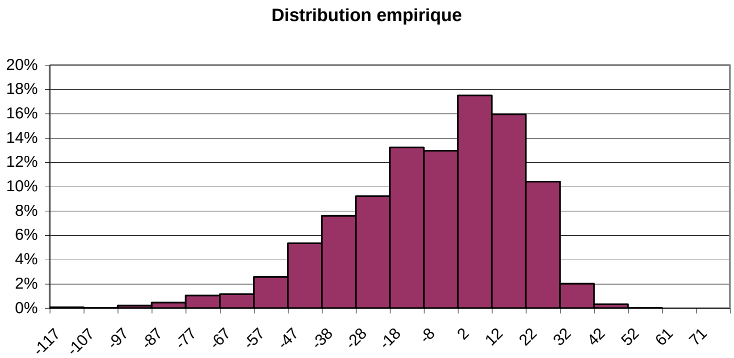
Fig. 7 : Valeur actuelle des prestations



Dans un contexte MCEV on s'attachera à la somme des résultats actualisés sur 8 ans :

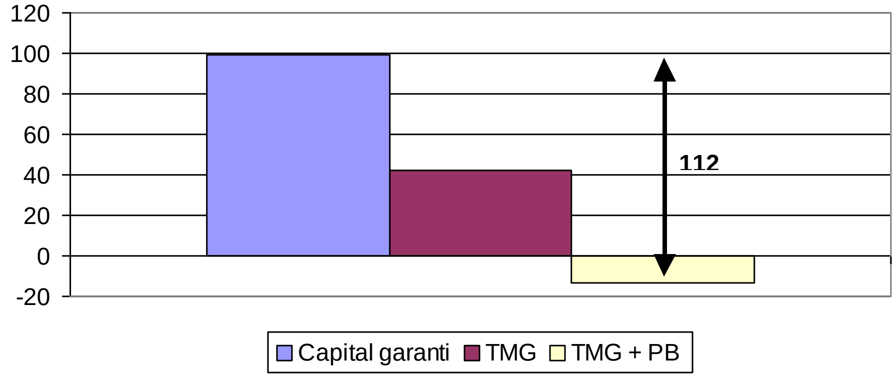
Fig. 8 : Vision MCEV

Statistique	Valeur
Moyenne	-9,85
Minimum	-121,76
Maximum	76,33
Variance	606,10
Ecart-type	24,62
Risque financier	97,18%
Risque non-financier	2,82%



L'espérance peut être décomposée selon :

Fig. 9 : Décomposition de l'espérance



À ce stade il est important de noter que sur ce type de contrats, la mortalité ne fait pas peser de risque significatif sur l'assureur. Ce risque est de fait intégré implicitement dans le coût d'immobilisation du capital requis.

On peut également observer que les simulations de Monte Carlo conduisent à des scénarios avec des taux de rendement très élevés ou très bas (« valeurs extrêmes) : il s'avère difficile de calibrer les lois de rachat compte tenu de l'absence d'historique dans ces zones.

Au surplus, la simplicité de cet exemple ne doit pas masquer les difficultés opérationnelles rencontrées dans la pratique, pour lesquelles on peut citer la modélisation des comportements futurs des assurés (rachat, prorogation, *etc.*) et de l'assureur (gestion des actifs, revalorisation). Le niveau de capital requis à prendre en considération n'est également pas immédiat : EMS, capital économique, agence de notation (S&P, Fitch, etc.), SCR, …

5. Références

Black F., Scholes M. (1973) « The pricing of options and corporate liabilities », Journal of Political Economy 81 (3), 637-54.

Bouchard B. (2007) « Introduction à l'évaluation d'actifs financiers par absence d'opportunité d'arbitrage », support de cours Paris VI.

Bouleau N. (1998) *Martingales et marchés financiers*, Paris : Editions Odile Jacob

Embrechts P. (2000) « Actuarial versus financial pricing of insurance », Risk Finance 1 (4), 17-26.

Frantz C., Chenut X., Walhin J.F. (2003) « Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee », Proceedings of the 13th AFIR Colloquium, Maastricht.

Merton R.C. (1976) « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous », Journal of Financial Economics 3, 125-44.

PLANCHET F., THÉROND P.E., JUILLARD M. (2011) *Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques - seconde édition*, Paris : Economica.