



Association internationale de la sécurité sociale

Quinzième Conférence internationale des actuaires et statisticiens de la sécurité sociale

Helsinki, Finlande, 23-25 mai 2007

**Méthodes utilisées pour établir les
projections relatives à la mortalité**

Distributions prédictives de la mortalité future

Juha M. Alho
Professeur
Université de Joensuu
Finlande

ISSA/ACT/CONF/15/4(b)

Méthodes utilisées pour établir les projections relatives à la mortalité future

Distributions prédictives de la mortalité future

Juha M. Alho
Professeur
Université de Joensuu
Finlande

Résumé

Un examen des projections passées de la mortalité montre que celles-ci ont prédit des régressions permanentes de la mortalité qui se sont vérifiées. Toutefois, les statistiques montrent aussi que ces régressions ont été plus rapides que prévu. Les variantes prédictives différentes (hautes et basses) n'ont pas tenu suffisamment compte de cet écart de prévision.

Certains éléments montrent qu'outre selon l'âge et le sexe, la mortalité varie aussi selon toute une série de facteurs socio-économiques et environnementaux. Cela dit, les tentatives faites pour incorporer ces informations dans les projections n'ont pas amélioré leur exactitude. Des méthodes d'extrapolation statistique relativement simples ont produit de meilleurs résultats dans des tests empiriques. Les modèles statistiques et les distributions prédictives qui en résultent présentent un avantage supplémentaire: ils offrent des évaluations de l'exactitude que peuvent attendre les utilisateurs des projections. Si, intrinsèquement, les distributions prédictives sont plus complexes que les projections classiques, il existe aujourd'hui des exemples d'analyses économiques complexes fondées sur ces projections.

1. Introduction

Sven Wicksell (1926, pp. 91, 104-106), dans une projection de la population de la Suède, a utilisé des tables de mortalité pour les années 1816 à 1840 et 1911 à 1915 pour étudier le taux de régression de la mortalité. Il a estimé que la régression se poursuivrait, mais a exprimé des réserves quant à son ordre de grandeur. Selon son hypothèse la plus réaliste, l'espérance de vie atteindrait un palier à 69,5 ans. Le niveau asymptotique de mortalité serait atteint pour les cohortes jeunes vers l'année 1960, pour la population en âge de travailler, en 1970-1990, et pour les cohortes de 95 ans ou plus, en 2025. L'espérance de vie asymptotique était de 12 années plus élevée que pour la période 1911 à 1915.

Dans une projection pour les Etats-Unis, Whelpton et coll. (1947) ont plaidé pour le recours au raisonnement dans la fixation des valeurs cibles pour la mortalité future, plutôt qu'à l'extrapolation des tendances. Pour établir les valeurs cibles pour l'année 2000, les auteurs

ont étudié les écarts de mortalité régionaux, effectué des comparaisons avec les pays qui, à l'époque, avaient la mortalité la plus faible, et évalué les tendances de la mortalité par cause. Leurs projections moyennes impliquaient un allongement de l'espérance de vie de la population masculine autochtone de race blanche, qui passerait de 62,6 en 1939-1940 à 68,6 en 2000. Comme Wicksell, Whelpton et al. ont postulé que la mortalité régresserait plus rapidement au début mais se stabiliserait en 1990, bien avant l'année 2000.

Une comparaison de ces projections et d'autres avec les valeurs observées par la suite indique que les prédictions de régressions continues ont été correctes. Toutefois, les statistiques montrent aussi que les régressions réelles ont été plus rapides que prévu (par exemple, Alho 1990, *National Research Council* 2000, Lee et Miller 2001, Keilman et coll. 2007). Par exemple, les Nations Unies signalent des espérances de vie en Suède en 2000-2005 pour les hommes et les femmes de 77,8 et 82,3, respectivement, soit 10 années de plus que la valeur asymptotique de Wicksell. Pour les Etats-Unis, l'espérance de vie des hommes de race blanche en 2003 s'établissait à 75,3, soit 6,7 années de plus que ce que prévoit Whelpton.

Whelpton a produit des variantes basses et hautes pour tenir compte de l'incertitude des projections. Pour la population masculine autochtone de race blanche, ces variantes étaient 66,2 et 72,1 ans. Cet intervalle ne rend pas compte, loin s'en faut, de la valeur réelle. D'autres analyses des projections passées (voir Alho, Crujisen et Keilman 2007) ont relevé à la fois le pessimisme des projections de mortalité et le faible écart de leurs intervalles haut-bas.

Wicksell et Whelpton étaient tous deux des novateurs théoriques et des analystes de données brillants. Il est exclu que d'autres auraient pu mieux faire. Il a été admis que les projections démographiques sont plus incertaines que ce que l'on croyait généralement, et ce fut une des raisons importantes pour formuler le problème des projections en termes probabilistes (voir Land 1986, *National Research Council* 2000, Alho et Spencer 2005, et Booth 2006).

A la section 2, nous établissons une notation et définissons la notion de distribution prédictive. A la section 3, nous examinons les difficultés qui surgissent lorsqu'on tente d'utiliser des connaissances de fond pour améliorer les projections. La section 4 aborde des aspects de la modélisation stochastique récente qui peuvent améliorer les projections futures de la mortalité. Nous concluons à la section 5 en notant les applications liées à la viabilité budgétaire.

2. Distribution prédictive de la mortalité

2.1. Evolution de la mortalité et de l'espérance de vie

Admettons que X est une variable aléatoire qui représente la durée de vie. Définissons la probabilité de survie jusqu'à l'âge x comme $P(X > x) = p(x)$. Nous pouvons exprimer la probabilité par la formule suivante (par exemple, Alho et Spencer 2005, p. 76)

$$p(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu(z) dz\right),$$

où $\mu(x) \geq 0$ est le risque de décès. La probabilité de survivre z années supplémentaires, compte tenu de la survie jusqu'à l'âge x , est exprimée par $p_x(z) = p(x+z)/p(x)$, de sorte que l'espérance de vie restante, compte tenu de la survie jusqu'à l'âge x , est

$$e_x = \int_0^{\infty} p_x(z) dz.$$

Si $x = 0$, nous obtenons l'espérance de vie à la naissance, e_0 .

Lorsque le but est de décrire l'évolution de la mortalité, nous indexons les mesures relatives à la période t comme $\mu(x,t)$, $p(x,t)$, $p_x(z,t)$, et $e_x(t)$. Ces mesures concernent des cohortes synthétiques qui se présenteraient si les individus faisaient face aux risques du moment t . Nous pouvons toutefois définir aussi les probabilités de survie de la cohorte née au moment t comme

$$h(x,t) = \exp\left(-\int_0^x \mu(z,t+z) dz\right),$$

de sorte que la probabilité conditionnelle de survivre z années supplémentaires est $h_x(z,t) = h(x+z,t)/h(x,t)$, par exemple.

2.2. Distributions prédictives

Evaluons approximativement le risque par constance segmentée dans les rectangles du diagramme de Lexis. Ou bien, postulons que l'âge prend les valeurs $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$, où ω est l'âge le plus élevé possible, à supposer que ce qui nous intéresse est de prédire les risques pour $t = t+1, t+2, \dots, t+T$, où $T > 0$ est le temps de devancement de la projection. Nous écrivons $Y_t = \{\mu_{x,t+z} : x = 0, 1, \dots, \omega, z = 1, \dots, T\}$ pour le vecteur aléatoire des valeurs futures. Supposons que H_t représente l'historique jusqu'au moment t . Par exemple, si les risques de mortalité ont été estimés pour les années $t-Z, \dots, t-1, t$, nous avons $\{\mu_{x,t-z} : x = 0, 1, \dots, \omega, z = 0, 1, \dots, Z\} \subset H_t$. Toutefois, l'historique comprend aussi, par exemple, des données relatives à la mortalité par cause, et à la mortalité ou la morbidité par situation socio-économique, situation de famille, éducation, style de vie, ethnicité, région géographique, conditions caractérisant la période d'enfance, etc¹.

La distribution prédictive de Y_t est la distribution de probabilité conditionnelle de Y_t pour H_t , avec la densité $f(Y_t | H_t)$ (Alho et Spencer 2005, pp. 271-274). Il s'agit essentiellement des termes que Törnqvist (1949) a employés dans ce qui est apparemment le premier exposé de projections probabilistes pour une population selon les cohortes², et grosso modo la même approche que celle adoptée par Hoem (1973).

¹ Plusieurs exemples sont donnés dans les articles de la série *Perspectives on mortality forecasting*, publiés par l'Office suédois de la sécurité sociale.

² Les projections pour une population selon les cohortes désignent une comptabilité de l'évolution de la population par âge et par sexe, dans laquelle les taux de naissance et de décès propres à l'âge sont utilisés pour générer les naissances et les décès (voir notamment Alho et Spencer 2005, p. 228).

Vues sous l'angle bayésien, les valeurs futures Y_t ont une densité qui dépend généralement d'un modèle paramétrique (voir des exemples dans Alho et Spencer 2005, pp. 271-277). Les paramètres du modèle ont eu une distribution à priori, et les données passées H_t , ont été utilisées pour aligner les précédentes sur une distribution à posteriori. Sa distribution à posteriori est utilisée pour déterminer la distribution marginale de Y_t , qui est la distribution prédictive. Toutefois, l'historique H_t , est, en pratique, une collection extrêmement complexe d'observations. Ainsi, de nombreux aspects du choix du modèle, de la qualité des données etc. sont souvent ignorés dans les discussions bayésiennes de la démographie (e.g., Daponte et coll. 1997).

Les probabilités qui interviennent dans les distributions prédictives sont interprétées comme des degrés subjectifs d'incertitude (voir, par exemple, Alho 2005). La moyenne (ou médiane) de la distribution correspond généralement à l'hypothèse la plus réaliste du prévisionniste, et l'écart type correspond à l'incertitude du prévisionniste. La figure 1 présente une illustration schématique dans laquelle μ est l'hypothèse la plus réaliste de mortalité ($\mu_{x,t+z}$ à un âge particulier x , dans une année future particulière $t + z$, par exemple) et deux densités gaussiennes sont dessinées, la densité solide représentant un degré plus élevé de certitude. Nous avons également représenté l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ qui sépare un écart type σ de la médiane. Cet intervalle couvre la mortalité future avec une probabilité de 2/3 au-dessous de la densité solide.

La subjectivité de l'interprétation ne signifie pas, cependant, que "tout est bon". Comme examiné dans Alho et Spencer (2005, pp. 244-247), une équipe de projections qui se respecte doit être à même de fournir des arguments suffisants quant à la raison pour laquelle une spécification particulière est utilisée. De plus, les affirmations subjectives devraient être compatibles avec l'interprétation fréquentiste des probabilités la plus courante. Par exemple, si l'on affirme que les intervalles de projection ont une probabilité de 80% de couvrir les valeurs de mortalité futures lorsque la projection est faite, et que nous voyons rétrospectivement qu'elles ont constamment une probabilité de couverture plus faible ou plus forte, il est certain que nous devons nous poser des questions.

3. Incorporer les connaissances dans les projections

3.1. Indications du passé

La mortalité humaine a commencé à régresser dans les pays européens au cours du XIXe siècle suite à l'amélioration de l'assainissement et de la nutrition, les progrès de la médecine jouant un rôle auxiliaire (voir Tilly 1978; *National Research Council* 2000, pp. 117-120). Les informations relatives à la transition proviennent essentiellement de registres paroissiaux, de registres civils, des premiers recensements et d'études de populations spéciales qui sont soumises à diverses formes de sélection³. Les éléments dont on dispose semblent indiquer que l'espérance de vie à la naissance s'est située dans une fourchette de 30 à 40 années pendant des siècles avant le XIXe siècle (voir notamment Jonker 2003; Alho et Spencer 2005, pp. 86-87, 124-125, 142, 153).

³ Les spécialistes de la démographie historique sont même remontés plus loin en arrière en utilisant des restes de squelettes, des généalogies, etc. (voir Willigan et Lynch 1982).

Bien qu'il y ait eu occasionnellement des renversements de tendance, l'allongement de l'espérance de vie a été remarquablement constant. C'est ce que montrent les "données sur l'espérance de vie selon la meilleure pratique" de Oeppen et Vaupel (2002). Elles montrent qu'en 1840, l'espérance de vie selon la meilleure pratique était de 40 ans pour les Suédoises et qu'elle a augmenté de façon quasi linéaire pour atteindre 80 ans en 2000, date à laquelle les Japonaises occupaient la première place. Le rythme de l'allongement a été presque constant, à 2,5 années tous les dix ans.

Dans certains pays, cette évolution a toutefois été moins régulière. Nous voyons à la figure 2 (ou à la figure 2.5 dans Keilman et coll. 2007) que, dans les pays européens, l'espérance de vie moyenne des femmes est passée de 50 ans en 1900 à 80 ans en 2000, soit une amélioration de 3 années par décennie. Toutefois, en 1950, l'espérance de vie moyenne des femmes atteignait déjà 70 ans. Par conséquent, au cours de la première moitié du siècle, l'augmentation a atteint 4 années par décennie, contre 2 années seulement au cours de la seconde moitié du siècle.

Ces changements cachent des écarts considérables d'un pays à l'autre. Il n'empêche que la vitesse de l'accroissement de l'espérance de vie a généralement été de loin supérieure à celle postulée dans les projections officielles⁴. La crainte d'être accusé de spéculation (De Gans 1999, pp. 244-246) peut avoir joué un rôle. Par exemple, Whelpton et al. (1947, p. 13) défendent leur projection élevée de 72,1 en disant que "cette longévité semble dans l'ordre des possibilités mais nécessitera des progrès marquants de la médecine et de la santé publique".

Whelpton a aussi estimé qu'il existait une limite inférieure à la mortalité qui est biologiquement déterminée et qui est presque atteinte. De plus, on a estimé que les efforts pour se rapprocher de la limite produisaient des "rendements décroissants". Ces opinions reposent sur le bon sens, mais les indications des projections passées montrent que cette idée a contribué à une sous-estimation systématique de l'espérance de vie future au siècle dernier. Le groupe d'experts des projections de mortalité, de l'Académie nationale des sciences des Etats-Unis, a examiné ces éléments ainsi que d'autres et a conclu que l'on ne peut déduire de l'examen des données passées qu'il n'y aurait pas de limite supérieure à l'espérance de vie humaine mais que nous n'avons pas encore observé de preuve de cette limite et que, si elle existe, "elle est sans doute largement supérieure à 85 années" (*National Research Council* 2000, p.137).

3.2. Difficulté d'exploitation des informations sur les causes de décès ou les expositions

Tabeau et coll. (2001) font rapport sur une série impressionnante d'efforts de recherche pour déterminer si les données sur les causes spécifiques de décès et les informations sur les relations entre les expositions environnementales, la morbidité et la mortalité peuvent être utilisées pour améliorer les projections. Tout le monde convient que cette recherche est de la plus haute importance par rapport aux efforts visant à réduire encore la mortalité. Pourtant, il n'est pas facile de traduire ces progrès en une augmentation de la précision des projections.

Fixons un âge x . Pour simplifier la notation, nous omettrons x de la notation, et nous écrirons $\mu(x,t) = \mu(t)$, par souci de concision. Classons les décès par cause $c = 1, \dots, C$, de sorte

⁴ Par exemple, Wicksell et Whelpton ont fait état d'accroissements de 1,2 et 1 année par décennie, respectivement.

que la mortalité est $\mu(t) = \mu_1(t) + \dots + \mu_c(t)$. Supposons que l'évolution dans le temps du risque de cause c est de la forme $\mu_c(t) = g_c(t) + \varepsilon_c(t)$, où $g_c(t)$ est la tendance et le terme d'erreur $\varepsilon_c(t)$ a une espérance zéro. Supposons qu'il y ait des fonctions $f_0(t), \dots, f_s(t)$, telles que la tendance a la représentation linéaire,

$$g_c(t) = \sum_{j=0}^s \beta_{c,j} f_j(t).$$

Un exemple réaliste aurait $s = 2$, et $f_j(t) = t^j$, ou nous aurions un polynôme du deuxième ordre dont la variable serait le temps. Une conséquence directe des définitions est que, si nous écrivons $\mu(t) = g(t) + \varepsilon(t)$, et $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \dots + \varepsilon_c(t)$, la tendance de la mortalité totale doit alors être de la forme

$$g(t) = \sum_{j=0}^s \beta_j f_j(t),$$

où $\beta_j = \beta_{1,j} + \dots + \beta_{c,j}$. Puisque la tendance de la mortalité totale est égale à la somme des tendances des causes, d'un point de vue empirique, cela ne ferait pas beaucoup de différence que les causes soient analysées distinctement et les résultats additionnés, ou que la mortalité totale soit analysée directement (pour plus de détails, voir Alho 1991).

Venons-en aux déterminants de la mortalité. En maintenant l'âge x fixe, nous fixons également une cause c . Admettons qu'il existe une mesure de l'exposition $D \geq 0$, telle que le risque de c pour ceux qui ont $D = d$ est

$$\mu_c(t, d) = g_c^*(t)(1 + \varphi_c d) + \varepsilon_c(t, d),$$

où $g_c^*(t)$ est la tendance du risque de base, et l'espérance du terme d'erreur est zéro. Admettons que l'exposition moyenne au moment t (à l'âge x) change de manière linéaire, ou $m_c(t) = \alpha_c + \delta_c t$. Supposons que la tendance de base est

$$g_c^*(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \beta_{c,j}^* t^j.$$

Dans ce cas, la tendance de la cause c est de la même forme $g_c(t)$ que ci-dessus, si nous considérons que $f_j(t) = t^j$, et définissons

$$\beta_{c,0} = (1 + \varphi_c \alpha_c) \beta_{c,0}^*; \beta_{c,j} = (1 + \varphi_c \alpha_c) \beta_{c,j}^* + \varphi_c \delta_c \beta_{c,j-1}^*, j = 1, \dots, s-1; \beta_{c,s} = \beta_{c,s-1}^* \varphi_c \delta_c.$$

Par conséquent, les changements d'expositions influencent la tendance, mais cela se traduirait déjà dans la tendance passée de la mortalité par cause. Nous l'observerions correctement, même si nous ne savions pas que cela est dû à une composition du risque de base et aux distributions des expositions.

Les deux exemples montrent qu'ajouter une structure n'améliore pas nécessairement la modélisation de la tendance d'un agrégat⁵. Les circonstances dans lesquelles des gains peuvent être obtenus concernent des situations dans lesquelles, par exemple, nous observons des changements soudains dans les mœurs tabagiques. Si nous estimons qu'elles persistent, les pathologies qui s'y rapportent avec un délai de latence important peuvent être mieux prévues qu'en se bornant à examiner la tendance passée.

4. Progrès dans la construction des modèles stochastiques

Booth (2006, pp. 554-559) contient un exposé exhaustif des propositions récentes pour améliorer les modèles démographiques stochastiques, et nous nous concentrerons donc ici sur trois aspects seulement: les améliorations des techniques d'exploration, le rôle de l'espérance de vie comme mesure de la mortalité, et l'emprunt d'information à des séries similaires.

4.1. Techniques d'extrapolation

Alho et Spencer (2005, pp. 234-236) considèrent la représentation formelle suivante des risques de mortalité,

$$\mu(x,t) = \exp(\alpha(x) + \beta(x,t)),$$

où $\beta(x,0) = 0$ pour tous les x . En utilisant D pour la différenciation selon le temps, le taux de changement de mortalité peut s'écrire sous la forme $D \log \mu(x,t) = D\beta(x,t)$. Le modèle dit "bilinéaire" de Lee et Carter (1992) considère que $\beta(x,t) = \delta(x)\kappa(t) + \varepsilon(x,t)$, où $\varepsilon(x,t)$ est un terme d'erreur à moyenne zéro et $\kappa(0) = 0$. Par conséquent, pour ce modèle, le taux de changement à l'âge x est $\delta(x)D\kappa(t)$. L'indice temporel $\kappa(t)$ est modélisé comme une marche aléatoire avec dérive. Si la dérive est absorbée dans $\delta(x)$, la projection du taux de changement est simplement $\delta(x)$. Tuljapurkar et coll. (2000), notamment, fournissent des preuves du bon ajustement du modèle.

La méthode Lee-Carter peut-elle être améliorée? Bell (1997) a conclu qu'estimer âge par âge les taux de régression selon l'âge débouche sur un ajustement similaire à celui de l'application de la décomposition en valeurs singulières suggérée par Lee et Carter. C'était étonnant, car traiter les âges un par un est une méthode grossière dont on sait qu'elle produit des profils de mortalité non monotones. Booth et coll. (2006) comparent quatre variantes du modèle bilinéaire avec la proposition originale de Lee-Carter⁶.

1) La proposition originale de Lee et Carter (1992) consiste à ajuster un modèle bilinéaire aux taux logarithmiques de mortalité passés, $\{\log \mu_{x,t-z} : x = 0,1,\dots,\omega, z = 0,1,\dots,Z\}$, en utilisant la méthode des moindres carrés. Il s'agit d'une procédure du maximum de

⁵ Ceci est compatible avec ce qui a été observé: les modèles économétriques à grande taille des économies nationales ne prédisent pas nécessairement mieux le PIB que les modèles à équation unique qui font intervenir le PIB uniquement.

⁶ Les modèles non pris en compte sont, par exemple, le modèle de Renshaw et Haberman 2003.

vraisemblance, si les erreurs du modèle sont réparties normalement et sont homoscédastiques. En pratique, Lee et Carter s'en sont écartés en réajustant les estimations des indices temporels $\kappa(t)$ de manière à ce qu'ils correspondent au nombre annuel de décès, chaque année.

2) Lee et Miller (2001) ont modifié l'approche de base de l'estimation en raccourcissant la période d'observation pour obtenir un meilleur ajustement; en ajustant les indices temporels pour les aligner sur l'espérance de vie à la naissance plutôt que sur le nombre total de décès, et en appliquant des taux de changement aux dernières valeurs de mortalité observées plutôt qu'aux valeurs médianes de la mortalité par âge.

3) Booth, Maindonald et Smith (2002) ont utilisé un critère de qualité de l'ajustement statistique pour choisir la période de données à utiliser pour estimer le modèle bilinéaire; et les indices temporels ont été ajustés pour mieux les aligner sur la distribution des décès pour tous les âges, plutôt que sur le nombre total ou sur l'espérance de vie.

4) Hyndman et Ullah (2006) ont appliqué à leurs estimations le lissage des différents âges; ils ont autorisé plus d'un terme de produit bilinéaire (comme Bell et ses collaborateurs l'avaient fait précédemment) et utilisé des modèles de séries chronologiques plus généraux pour les séries chronologiques multidimensionnelles produites. Pour cette raison, aucun ajustement des indices temporels n'a été nécessaire. Comparée à Booth et al., la période d'observation était également restreinte, bien que ce ne soit pas une caractéristique nécessaire de la méthode proposée.

5) De Jong et Tickle (2006) ont également limité la période de l'estimation et ont appliqué le lissage des différents âges en utilisant des splines. Un filtre de Kalman a été utilisé pour établir des estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres du modèle en vraisemblance normale.

Les données ont été tirées de la base de données sur la mortalité humaine pour dix pays, par âge et par sexe. Des observations de la période 1986-2000 ont été utilisées pour évaluer l'exactitude des projections. Dans l'échelle des taux logarithmiques de décès, il a été constaté que les méthodes 2)-5) étaient plus exactes que 1), mais il n'y avait pas de différences entre les quatre. Les auteurs attribuent cela principalement à la période d'ajustement plus longue utilisée dans la méthode originale.

Du point de vue de l'espérance de vie, on a constaté que toutes les méthodes sous-estiment l'espérance de vie des hommes mais, pour l'espérance de vie des femmes, toutes les méthodes étaient en gros exemptes de biais. Toutefois, aucune des méthodes n'aurait pu prédire le changement de tendance que nous avons observé à la figure 2.

4.2. Rôle de l'espérance de vie

Nous avons utilisé l'espérance de vie à la naissance comme principale mesure succincte pour caractériser les projections passées et leur exactitude. On peut se demander pourquoi l'espérance de vie a un rôle aussi important.

Pour certaines applications, les mesures du type de l'espérance de vie présentent un intérêt essentiel. Par exemple, les paiements attendus au bénéficiaire d'une rente, qui commence à recevoir les paiements à l'âge x au moment t , correspondent à

$$\int_0^{\infty} e^{-rz} h_x(z, t-x) dz,$$

où r est le taux d'actualisation. Toutefois, cela ressemble à l'espérance de vie d'une cohorte, non d'une période et, dans ces applications, nous aurions d'ordinaire $x \gg 0$.

L'espérance de vie à la naissance d'une période est une fonction complexe, non linéaire des risques par âge. En considérant tous les âges en même temps, elle peut servir de contrôle de vraisemblance pour toute projection des risques. Nous savons rétrospectivement que Wickzell et Whelpton ne se sont pas trompés en postulant que les régressions passeraient progressivement des âges jeunes aux âges plus vieux. Cela signifie que la représentation bilinéaire $\beta(x, t) = \delta(x)\kappa(t)$ qui n'a qu'une seule composante âge×temps ne s'est pas exactement vérifiée. En outre, une inspection directe de l'espérance de vie suggère des améliorations plus rapides de l'espérance de vie que l'extrapolation utilisant des modèles bilinéaires à une seule composante (voir notamment Alho et Spencer 2005, pp. 82-83). Cela semble indiquer que nous devrions examiner si les modèles qui incorporent des changements de taux de régression de la mortalité des âges plus avancés sont empiriquement corroborés.

4.3. Emprunt d'information à des séries de données similaires

En choisissant une série de données courte, il est possible d'obtenir un bon ajustement du modèle et celui-ci peut produire des projections à court terme précises. Toutefois, il se peut que les résidus du modèle ne rendent pas compte de l'incertitude à laquelle il faut s'attendre en termes de projections à long terme, lorsque l'incertitude dans les tendances domine. Bien qu'il n'existe pas d'autre moyen général pour sortir de ce dilemme que de permettre un degré réaliste d'incertitude, il existe des possibilités d'amélioration par "emprunt d'information" à des séries de données similaires.

4.3.1. Projection cohérente pour un groupe de pays

La figure 2 montre qu'il y a eu une convergence manifeste des espérances de vie dans les pays européens. D'une manière plus générale, puisque les pays développés ont des niveaux de vie similaires, des technologies médicales similaires etc., une analyse conjointe pourrait être plus résistante aux biais de la sélection à la fois des périodes des données et des modèles de projection qu'une analyse pays par pays.

Li et Lee (2005) ont mis au point un élargissement du modèle bilinéaire qui tient compte du pays. Supposons que le risque du pays i soit

$$\mu(x, t, i) = \exp(\alpha(x, i) + \beta(x, t, i)),$$

où

$$\beta(x, t, i) = \delta(x)\kappa(t) + \eta(x, i)\xi(t, i) + \varepsilon(x, t, i).$$

En fixant i , nous voyons qu'il s'agit toujours d'un modèle bilinéaire en termes d'âge et de temps. Dans la généralisation, la clé est, qu'à présent, $\kappa(t)$ représente la tendance temporelle commune non stationnaire, et les indices temporels par pays $\xi(t, i)$ sont stationnaires. Cette idée est manifestement prometteuse.

Li et Lee appliquent la méthode à 15 pays avec de bonnes données. Les observations portent sur la période 1952-1996 et des projections de l'espérance (pour les deux sexes combinés) sont faites jusqu'en 2050. Le modèle fonctionne, comme attendu. Les pays présentant des tendances divergentes sont rapprochés d'une tendance commune. La moyenne des projections en 2050 est essentiellement la même (84,45) que ce que les auteurs obtiennent avec la méthode du pays unique de Lee-Carter (84,23), mais l'écart type de la distribution prédictive de l'espérance de vie régresse d'une valeur médiane de 3,1 années obtenue au moyen des projections distinctes à 2,5 années.

4.3.2. Analyse bayésienne des séries hétérogènes de mortalité

L'Organisation mondiale de la santé possède une base de données complexe sur la mortalité qui contient des informations sur un vaste éventail de causes de décès, par âge et par sexe, pour la quasi-totalité des pays du monde. La série de données contient également des variables socio-économiques. Girosi et King (2007) ont mis au point un modèle bayésien pour traiter les données conjointement. Si l'on se base sur une version provisoire de l'ouvrage de Girosi-King, il apparaît que les deux principaux aspects de leurs distributions à priori sont les suivants. Premièrement, le lissage des estimations dans le temps et sur les âges est imposé par le biais de distributions à priori diffuses. La proximité géographique, économique ou sociale peut également être prise en compte. Deuxièmement, les distributions à priori pour les modèles de régression sont formulées en termes de la valeur attendue de la variable dépendante (c'est-à-dire du taux logarithmique de mortalité) plutôt qu'en termes de coefficients de régression (voir Alho et Spencer 2005, p. 272).

Le modèle est de nature très générale et l'on peut s'attendre à ce qu'il soit appliqué dans de nombreux contextes. Imposer le lissage est une caractéristique importante dans cette méthode, comme dans celles qui sont examinées à la section 4.1. Cela contribue en particulier à empêcher (ou à réduire) l'apparition, dans les projections, de non-monotonicités dans les âges.

Les auteurs montrent que les projections de mortalité par cause sont sensiblement plus exactes lorsque l'on adopte l'approche bayésienne. Toutefois, on ne voit pas encore clairement quels seront les résultats des méthodes proposées par rapport aux méthodes de séries temporelles de la section 4.1., lorsqu'elles sont appliquées à la mortalité totale dans les pays pour lesquels on dispose de données de qualité.

4.3.3. Projection UPE pour les pays de l'Union européenne

Quinze pays de l'Union européenne et trois autres pays européens ont été analysés dans le cadre du projet UPE⁷, afin de produire une projection stochastique pour tous ces pays. Compte tenu du problème de la cohérence entre les pays, un taux de régression moyen par âge a d'abord été estimé pour 11 pays pour lesquels on disposait de données de qualité, au cours des 30 dernières années (Alho et Spencer 2005, p. 235). Ce taux a été pris comme taux de régression ultime. Pour chaque pays, un taux initial de régression a ensuite été estimé en lissant les estimations empiriques des dix dernières années. Il a été postulé qu'il existe une transition linéaire à partir du taux de régression initial jusqu'au taux de régression ultime en 2030. Pour empêcher la divergence entre la mortalité des hommes et des femmes, un ajustement proportionnel a été appliqué aux risques des hommes de manière à ce que

⁷ UPE est l'abréviation de "*Uncertain Population of Europe*". Ce projet a été financé par la Commission européenne au titre du Cinquième programme-cadre européen pour la recherche sociale. Les résultats du projet et les données sur l'organisation du projet sont disponibles en partie sur le site <http://stat.fi/tup/euupe/>.

l'écart d'espérance de vie soit de 4 (5 dans un cas) années pour la dernière année de la projection (2049).

Les espérances de vie moyennes qui en résultent (pour tous les pays) étaient 84,5 pour les hommes et 88,7 pour les femmes. Ces valeurs sont supérieures de 3 années à celles qui sont postulées dans la dernière révision des Nations Unies. Pour les 12 pays européens dans leur ensemble de données, Li et Lee (2005) ont obtenu comme moyenne des espérances de vie en 2050 (pour les deux sexes combinés) 85,2 ans, alors que la moyenne des projections UPE pour les hommes et les femmes des mêmes pays était 86,6 ans. Cette différence est probablement due en partie à la manière dont l'UPE a ajusté la mortalité des hommes.

Le projet UPE a également produit des estimations de l'incertitude des projections qui ont tiré parti du contexte multi-pays (Alho et coll. 2007). Nous avons utilisé les projections "naïves" (ou de base) et leur erreur empirique pour établir les estimations d'incertitudes. Dans le cas des risques de mortalité, une projection raisonnablement bonne est obtenue automatiquement en postulant que les risques régressent aux mêmes taux (non négatifs) qu'ils l'ont fait dans un passé récent (Alho 1990). Lorsque cette procédure est appliquée à des séries temporelles qui comprennent des changements de tendance du type que nous avons observé dans l'espérance de vie européenne au XXe siècle, nous obtenons une estimation d'erreur involontaire qui comprend des sources d'incertitude comme l'erreur d'estimation et l'erreur de spécification de modèle, qui sont souvent omises. Ces estimations ont été paramétrées en termes de "modèle d'erreur à l'échelle" (*scaled model of error*) (voir par exemple Alho et Spencer 2005, pp. 280-283). Les données utilisées dans l'estimation provenaient de neuf pays européens ayant de longues séries de données historiques. Des méthodes d'estimation robustes ont été utilisées pour éliminer l'effet des grands chocs causés par les guerres, par exemple.

Le résultat a été que la médiane des erreurs type (pour tous les pays), pour l'espérance de vie en 2049, était 3,5 années pour les hommes et 3,7 années pour les femmes. Les écarts type de Li et Lee (2005), obtenues à partir de leur modèle paramétrique cohérent, pour un temps de devancement comparable, étaient 70% de ces valeurs. Une comparaison avec les projections d'EUROSTAT est encore plus frappante⁸. Bien que ces projections ne sont pas destinées à être prises en termes probabilistes, nous notons que la demi-largeur de l'intervalle haut-bas d'EUROSTAT pour l'espérance de vie était 1,3 pour les femmes et 1,5 pour les hommes, soit 40% de nos chiffres.

5. Les applications

En pratique, une simulation sur ordinateur est utilisée pour prélever des échantillons dans la distribution prédictive, une fois celle-ci précisée. Même si le logiciel pour le faire est disponible⁹, la production de distributions prédictives de la mortalité future (et d'autres variables démographiques) est plus complexe que l'établissement de variantes différentes. On peut donc raisonnablement se demander ce que l'on gagne à faire cet effort.

Aux Etats-Unis, Lee et Tuljapurkar (2000) ont effectué une série de calculs relatifs à la solvabilité du système de sécurité sociale américain. Ces calculs indiquent qu'il est peu

⁸ La révision de 2004 de la projection des Nations Unies n'avait qu'une seule variante pour la mortalité.

⁹ Pour une description du programme PEP qui a été utilisé dans la projection UPE, voir le site <http://joensuu.fi/statistics/juha/>

probable que le système soit viable au niveau de financement actuel. A terme, des changements devront intervenir dans la politique. Alho et Vanne (2006a,b) ont étudié la viabilité du secteur public de la Finlande (défini de manière très large, de sorte qu'il comprend les systèmes de retraite sous conditions de revenus) en utilisant la méthode de la comptabilité générationnelle. Dans cette méthode, tous les impôts et toutes les dépenses publiques sont actualisés pour établir le passif public net¹⁰ qu'impliquent les politiques actuelles. C'est principalement parce que le secteur public présente actuellement une valeur nette (due aux retraites financées en partie par capitalisation et aux entreprises d'Etat) que le système a de bonnes chances de rester solvable pendant le prochain siècle, au niveau actuel d'impôts et de prestations. Cela dit, comme le montre la figure 3, une grande incertitude subsiste en ce qui concerne le passif public net. Cette incertitude est due, pour quelque 30%, à l'incertitude démographique et, pour le reste, à l'incertitude de l'évolution économique future.

Dans ces exemples, les agents économiques ne réagissent pas aux faits démographiques inattendus. Dans un ouvrage à paraître, publié sous la direction d'Alho, Hougaard-Jensen et Lassila (2007), plusieurs études sont décrites dans lesquelles des simulations démographiques stochastiques ont été utilisées conjointement avec des modèles macro-économiques à générations imbriquées. Dans ces modèles, les salaires réagissent à l'offre de capital et à la taille de la population active, la consommation totale dépend du nombre de consommateurs, les taux d'impôt peuvent dépendre de la taille relative de la population des retraités, etc. Une des conclusions est que, pour les systèmes de retraites, l'incertitude démographique constitue un problème majeur mais, et c'est peut-être étonnant, c'est beaucoup moins le cas pour les systèmes de soins de santé. Combiner les simulations stochastiques avec les modèles à générations imbriquées est une méthode qui a également été utilisée pour garantir la viabilité des systèmes de retraite (Alho, Lassila et Valkonen 2006).

Bibliographie

- Alho, J.M. 1990. "Stochastic methods in population forecasting". *International Journal of Forecasting* 6, 521-530.
- . 1991. "Effect of aggregation on the estimation of trend in mortality". *Mathematical Population Studies* 3, 53-67.
- . 2005. "Remarks on the use of probabilities in demography and forecasting". pp. 27-38 in Keilman N. (ed.). 2005. "Perspectives on mortality forecasting II. Probabilistic models". *Social Insurance Studies* No. 2. Stockholm, Social Insurance Agency.
- Alho, J.M.; Crujisen, H.; Keilman, N. 2007. "Empirically-based specification of forecast uncertainty", in Alho, J.M.; Hougaard-Jensen, S.; Lassila, J. (eds.) 2007.
- Alho, J.M.; Hougaard-Jensen, S.; Lassila, J. (eds.) 2007. *Demographic uncertainty and fiscal sustainability*. Cambridge, Cambridge University Press. (to appear)
- Alho, J.M.; Lassila, J.; Valkonen, T. 2004. "Demographic uncertainty and evaluation of sustainability of pension systems", pp. 95-112 in Holzmann, R.; Palmer, E. (Eds.) *Pension reform; issues and prospects for Non-Financial Defined Contribution (NDC) schemes*. Washington, D.C., The World Bank.

¹⁰ Un passif positif signifie que le secteur public a une dette nette, un passif négatif signifie qu'il a un actif net.

- Alho, J.M.; Spencer, B.D. 2005. *Statistical demography and forecasting*. New York, Springer.
- Alho, J.M.; Vanne, R. 2006a. "On predictive distributions of public net liabilities". *International Journal of Forecasting* 22, 725-733.
- Alho, J.M.; Vanne, R. 2006b. "On stochastic generational accounting". pp. 291-303 in Gauthier, A.H.; Chu, C.Y.C.; Tuljapurkar, S. 2006. *Allocating public and private resources across generations*. Dordrecht, Springer.
- Booth, H. 2006. "Demographic forecasting: 1980 to 2005 in review". *International Journal of Forecasting* 22, 547-581.
- Booth, H.; Hyndman, R.J.; Tickle, L.; de Jong, P. 2006. "Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions". *Demographic Research* 15, 289-310.
- Booth, H.; Maindonald, J.; Smith, L. 2002. "Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline". *Population Studies* 56, 325-336.
- Daponte, B.O.; Kadane, J.B.; Wolfson, L.J. 1997. "Bayesian demography: projecting the Iraqi Kurdish population, 1997-1990". *Journal of the American Statistical Association* 92, 1256-67.
- DeGans, H.A. 1999. *Population forecasting 1895-1945*. Dordrecht, Kluwer.
- De Jong, P.; Tickle, L. 2006. "Extending Lee-Carter mortality forecasting". *Mathematical Population Studies* 13, 1-18.
- Giroi, F.; King, G. 2007. *Demographic forecasting*. Princeton, Princeton University Press. (to appear)
- Hoem, J. 1973. "Levels of error in population forecasts". *Artikler* 61. Oslo, Central Bureau of Statistics.
- Hyndman, R.J.; Ullah, M.S. 2006. "Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach". *Computational Statistics and Data Analysis*.
- Jonker, M.A. 2003. "Estimation of life expectancy in the Middle Ages". *Journal of the Royal Statistical Society A*, 166, 105-117.
- Keilman, N.; Crujisen, H.; Alho, J.M. 2007. "Changing views of future demographic trends", in Alho, J.M.; Hougaard-Jensen, S.; Lassila, J. (eds.). 2007.
- Land, K.C. 1986. "Methods for national population forecasts: a review". *Journal of the American Statistical Association* 81, 888-901.
- Lee, R.D.; Miller, T. 2001. "Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality". *Demography* 38, 537-550.
- Lee, R.D.; Tuljapurkar, S. 2000. "Population forecasting for fiscal planning: issues and innovations", pp. 7-57 in Auerbach, A.; Lee, R.D. 2000. *Demography and Fiscal Policy*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Li, N.; Lee, R.D. 2005. "Coherent mortality forecasts for a group of populations: an extension of the Lee-Carter method". *Demography* 42, 575-594.
- National Research Council. 2000. *Beyond six billion*. Washington D.C., National Academy Press.
- Oeppen, J.; Vaupel, J. 2002. "Broken limits to life expectancy". *Science* 296(5570), 1029-1031.

- Renshaw, A.; Haberman, S. 2003. "Lee-Carter mortality forecasting: a parallel generalized linear modelling approach for England and Wales mortality projections". *Applied Statistics* 52, 119-137.
- Tabeau, E.; van den Berg Jeths, A.; Heathcote, C. (eds.) 2001. *Forecasting mortality in developed countries*. Dordrecht, Kluwer Academic.
- Tilly, C. 1978. "Historical study of vital processes". pp. 3-55 in Tilly C. (ed.) (1978) *Historical studies in changing fertility*. Princeton, Princeton University Press.
- Törnqvist, L. 1949. "Näkökohdat, jotka ovat määränneet primääristen prognoosiolettamusten valinnan". pp. 68-74 in Hyppölä, J.; Tunkelo, A.; Törnqvist, L. 1949. *Suomen väestöä, sen uusiutumista ja tulevaa kehitystä koskevia laskelmia. Tilastollisia tiedontantoja* 38. Helsinki, Tilastokeskus.
- Tuljapurkar, S.; Li, N.; Boe, C. 2000. "A universal pattern of mortality decline in the G7 countries". *Nature* 40, 789-792.
- Whelpton, P.K.; Eldridge, H.T.; Siegel, J.S. 1947. *Forecasts of the population of the United States 1945-1975*. Washington D.C.; U.S. Census Bureau.
- Wicksell, S.D. 1926. "Sveriges framtida befolkning under olika förutsättningar". *Ekonomisk Tidskrift* 28, 91-123.
- Willigan, J.D.; Lynch, K.A. 1982. *Sources and materials of historical demography*. New York, Academic Press.

Figure 1. *Un exemple de distribution prédictive avec deux écarts type possibles*

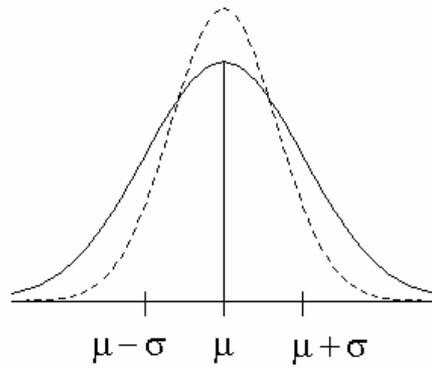


Figure 2. *Espérance de vie des femmes à la naissance dans 18 pays européens*

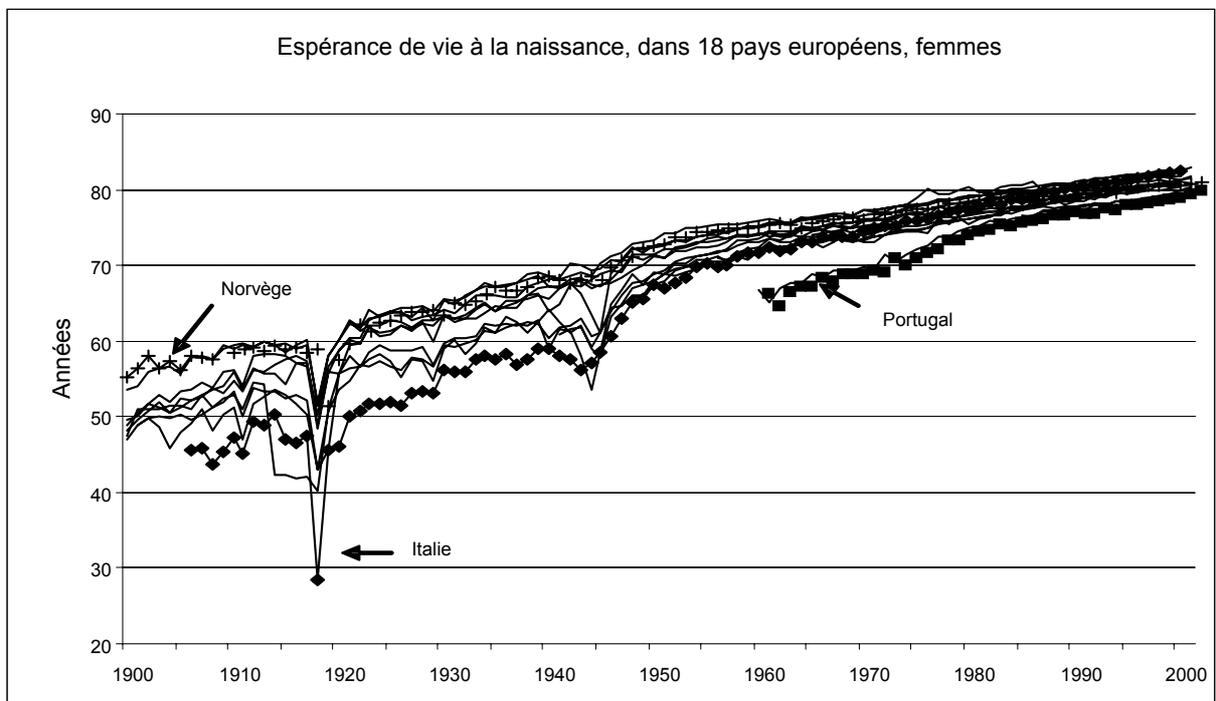


Figure 3. *Distribution prédictive du passif public net en Finlande (1 unité = PIB de l'année 2000)*

