



N°d'ordre NNT :

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale ED 486
Sciences Économiques et de Gestion

Spécialité de doctorat : Sciences de Gestion
Discipline : Sciences actuarielles

Soutenue publiquement le 23/06/2021, par :
Kamal ARMEL

Valorisation économique des engagements en assurance vie : analyse critique de l'approche standard et propositions d'améliorations

Devant le jury composé de :

DEVOLDER Pierre - Professeur Université catholique de Louvain (UCL) – Rapporteur

FOLUS Didier - Professeur des Universités - Université Paris Nanterre – Rapporteur

EL KAROUI Nicole - Professeur Émérite - Université Pierre et Marie Curie - Examinatrice

EYRAUD-LOISEL Anne - Maître de Conférences - Université Claude Bernard Lyon 1 – Examinatrice

JIAO Ying - Professeur des Universités - Université Claude Bernard Lyon 1 – Examinatrice

PLANCHET Frédéric - Professeur des Universités - Université Claude Bernard Lyon 1-Directeur de thèse

ROBERT Christian - Professeur des Universités - ENSAE PARIS, 5 Avenue Le Chatelier – Invité

Remerciements

Je souhaiterais, en premier lieu, exprimer mes remerciements à Frédéric PLANCHET, mon directeur de thèse. J'ai apprécié ses qualités humaines et professionnelles. Son accompagnement et sa confiance tout au long de ces dernières années ont été précieux et nos échanges ont été constructifs et inspirants.

Je remercie également l'Université Claude Bernard Lyon 1 et l'Ecole Doctorale de Sciences économiques et de Gestion d'avoir permis la réalisation de cette thèse dans des conditions optimales. Je remercie en particulier le laboratoire SAF et son directeur Stéphane LOISEL pour la chaleur de l'accueil et le soutien dont j'ai pu bénéficier.

Contaminé in-utérus par les mathématiques, par deux parents enseignants, on ne peut négliger ce conditionnement fœtal dans l'aboutissement de cette thèse. Un grand merci donc à mes parents.

Par ailleurs, exercer une activité professionnelle à temps plein tout en menant à bien les travaux de recherches nécessite une organisation efficace et un environnement familial bienveillant. Je remercie donc mon épouse de m'avoir supporté et encouragé durant cette entreprise. Et je remercie, enfin, une célèbre plateforme de streaming (dont je tairai le nom) d'avoir occupé mon épouse pendant mes longues soirées R & D !

Résumé

La valorisation « économique » des passifs au sens de la norme Solvabilité 2 correspond au *best-estimate* (espérance des flux futurs actualisés) complétée, le cas échéant, d'un ajustement, au titre des risques non-couvrables, compensant l'immobilisation du capital de solvabilité requis. La valorisation des passifs dans le référentiel IFRS 17 est similaire et correspond au *best-estimate* (l'espérance des flux futurs actualisés), complété d'un ajustement au titre des risques non-financiers.

Les approches de valorisation « économique » des passifs imposée par Solvabilité 2 et IFRS 17, ne peuvent trouver donc leur pleine application que lorsque l'on est en capacité de définir : (1) une mesure de probabilité adaptée, (2) les flux futurs du passif et (3) les taux d'actualisation.

L'application de ces approches aux contrats d'épargne en présence d'un dispositif de participation aux bénéfices conduit les praticiens à la structure de modélisation désormais classique dans laquelle un générateur de scénarios économiques « risque neutre » alimente un modèle de projection de flux pour permettre une approximation par simulation de la valeur du passif.

Le chapitre I, présente une analyse critique de ce processus de valorisation. On y discute notamment les choix de modélisation et de mesure de probabilité retenus par les praticiens et leurs implications. On démontre notamment que le marché de l'assurance vie est un marché incomplet où des opportunités d'arbitrage sont persistantes. L'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité « risque-neutre » ne sont donc pas assurées. L'utilisation de cette probabilité pour valoriser les passifs d'épargne en euro paraît donc inadaptée et l'évaluation devrait donc être réalisée sous la probabilité historique.

Le chapitre II montre que, par construction, le prix des passifs d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices, conditionnellement au risque, n'est pas unique. Ce chapitre propose également une écriture mathématique de la valeur des passifs et explicite, sur le plan quantitatif, la structure optionnelle implicite aux contrats. Il définit aussi le lien entre cette structure optionnelle et les modèles de génération de scénarios économiques et établit quelques critères de qualité de ces modèles.

Les chapitres III et IV proposent une démarche de construction de générateurs de scénarios économiques risque-neutres respectant les exigences réglementaires et se placent dans le cadre conventionnel retenu par les praticiens. Les modèles développés ont été utilisés pour évaluer les sensibilités du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et des données utilisées pour leur calibrage. On observe notamment que les impacts sur la valeur des passifs sont comparables aux fonds propres.

Le chapitre V propose une démarche alternative aux pratiques conventionnelles du marché. Elle consiste à construire un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique respectant les exigences réglementaires. Ce chapitre montre notamment que les problèmes théoriques et numériques qui ont longtemps constitué un obstacle à l'utilisation pratique d'une approche par les déflateurs peuvent être levés.

Mots-clés : Solvabilité 2, IFRS 17, assurance vie, valorisation économique, *best-estimate*, générateurs de scénarios économiques, mesure de probabilité, déflateurs.

Articles présentés dans ce rapport de thèse

La rédaction des cinq chapitres de ce rapport de thèse s'est appuyée essentiellement sur les cinq articles suivants :

- **Chapitre I** : ARMEL K., PLANCHET F., [2021a] « [The economic evaluation of life insurance liabilities: pitfalls, best practices and recommendations for relevant implementation](#) » Institut Louis Bachelier, Opinions & Débats n20, janvier 2021.
- **Chapitre II** : ARMEL K., PLANCHET F. [2019a] « [How to Define the Quality of an Economic Scenario Generator to Assess the Best Estimate of a French Savings Contract in € ?](#) », *Bankers Markets Investors*, n°157, June 2019.
- **Chapitre III** : ARMEL K., PLANCHET F. [2018] « [Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ?](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 85 (1-2).
- **Chapitre IV** : ARMEL K., PLANCHET F. [2020a] « [Use of CIR-Type Interest Rate Models to Assess the Economic Value of Participating Savings Contracts](#) », LSAF, Document de travail.
- **Chapitre V** : ARMEL ET PLANCHET [2020b] « [Assessing the economic value of life insurance contracts with stochastic deflators](#) », LSAF, Document de travail.

Abstract

The "economic" valuation of liabilities under Solvency 2 framework corresponds to the best estimate (expected discounted future cash flows) supplemented, where appropriate, by an adjustment for non-hedgeable risks, offsetting the immobilization of the solvency capital requirement. The valuation of liabilities under IFRS 17 is similar and corresponds to the best estimate (expected discounted future cash flows), plus an adjustment for non-financial risks.

The economic valuation approach for liabilities imposed by Solvency 2 and IFRS 17 can therefore only be fully applied when one has the ability to define: (1) the future cash flows of the liability, (2) an appropriate probability measure and (3) the discount rates.

The application of this approach to with-profit savings contracts leads practitioners to the now classic modelling structure in which a "risk neutral" economic scenario generator feeds a flow projection model to allow an approximation by simulation of the value of the best-estimate.

Chapter I presents a critical analysis of this valuation process. In particular, it discusses the modelling and probability measure choices made by practitioners and their implications. In particular, it is shown that the life insurance market is an incomplete market where arbitrage opportunities are persistent. The existence and uniqueness of a "risk-neutral" probability measure is therefore not guaranteed. The use of this probability to value with-profit savings liabilities seems therefore questionable and the valuation should then be carried out using the historical probability.

Chapter II shows that, by construction, the price of with-profit savings liabilities, conditional on risk, is not unique. This chapter also proposes a mathematical writing of the value of liabilities and makes explicit, in quantitative terms, the option structure of contracts. It also defines the link between this option structure and economic scenario generation models and establishes some quality criteria for these models.

Chapters III and IV propose an approach to build risk-neutral economic scenario generators that comply with regulatory requirements and are placed within the conventional framework adopted by practitioners. The models developed were used to evaluate best-estimate sensitivities to the choice of interest rate models and the data used to calibrate them. In particular, we observe that the impacts on the value of liabilities are comparable to own funds.

Chapter V proposes an alternative approach to conventional market practices. It consists of building an economic scenario generator under historical probability that respects regulatory requirements. This chapter shows in particular that the theoretical and numerical problems that have long been an obstacle to the practical use of a deflator approach can be overcome.

Keywords: Solvency 2, IFRS 17, life insurance, economic valuation, best-estimate, economic scenario generators, probability measure, deflators.

Articles presented in this thesis report

The five chapters of this thesis report are based mainly on the following five articles:

- **Chapter I :** ARMEL K., PLANCHET F., [2021a] « [The economic evaluation of life insurance liabilities: pitfalls, best practices and recommendations for relevant implementation](#) » Institut Louis Bachelier, Opinions & Débats n20, janvier 2021.
- **Chapter II :** ARMEL K., PLANCHET F. [2019a] « [How to Define the Quality of an Economic Scenario Generator to Assess the Best Estimate of a French Savings Contract in € ?](#) », *Bankers Markets Investors*, n°157, June 2019.
- **Chapter III :** ARMEL K., PLANCHET F. [2018] « [Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ?](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 85 (1-2).
- **Chapter IV :** ARMEL K., PLANCHET F. [2020a] « [Use of CIR-Type Interest Rate Models to Assess the Economic Value of Participating Savings Contracts](#) », LSAF, working paper.
- **Chapter V :** ARMEL ET PLANCHET [2020b] « [Assessing the economic value of life insurance contracts with stochastic deflators](#) », LSAF, working paper.

Table des matières

Remerciements	1
Résumé	3
Abstract	5
Table des matières	7
I. Introduction et principaux résultats	9
I.1 La valorisation « économique » des engagements d'assurance.....	10
I.2 Contrats d'épargne, flux futurs, <i>best-estimate</i> et facteurs de risque	13
I.3 Mesure de probabilité et règles de gestion	22
I.4 Génération de scénarios économiques et courbe de taux	36
I.5 Conclusion.....	42
II. Valorisation des passifs d'épargne participatifs et génération de scénarios économiques	44
II.1 Préambule	45
II.2 Reformulation quantitative de la problématique.....	48
II.3 Peut-on construire un GSE cohérent avec la structure optionnelle des passifs des contrats d'épargne participatifs ?.....	55
II.4 Conclusion.....	69
III. Utilisation de modèles de taux normaux et log-normaux pour valoriser les contrats d'épargne participatifs	72
III.1 Préambule	73
III.2 Générateur de scénarios économiques pour calculer le <i>best-estimate</i>	74
III.3 Modélisation mathématique et propriétés analytiques.....	77
III.4 Démarche et données	100
III.5 Calibrage et simulation.....	105
III.6 Impact du choix du modèle de taux et des données de calibrage sur le <i>best-estimate</i>	116
III.7 Conclusions	118
IV. Utilisation des modèles de taux de type CIR pour valoriser les contrats d'épargne participatifs	120
IV.1 Préambule	121
IV.2 Modèles univariés : définition, calibrage et simulation.....	123

IV.3	Modélisation de la structure de dépendance	126
IV.4	Analyse des résultats et des sensibilités du <i>best-estimate</i>	134
IV.5	Conclusion.....	143
V.	Valoriser les contrats d'assurance vie avec des déflateurs stochastiques.....	147
V.1	Introduction	148
V.2	Approche par les déflateurs avec un modèle de taux de type CIR++.....	150
V.3	Application : calibrage du modèle et sensibilités du <i>best-estimate</i>	160
V.4	Conclusion.....	168
VI.	Conclusion.....	170
VII.	Références.....	172
VIII.	Annexes.....	180
VIII.1	Le contexte des contrats d'épargne.....	180
VIII.2	Liquidation de la richesse et moneyness.....	186
VIII.3	Les modèles de type CIR pour une utilisation pertinente en assurance	189
VIII.4	Approche par les déflateurs : démonstrations	212

I. Introduction et principaux résultats

La valorisation « économique » des passifs sous solvabilité 2 correspond au *best-estimate* (flux futurs actualisés) complété d'un ajustement compensant l'immobilisation du capital de solvabilité requis des risques non-couvrables. Le cadre de valorisation en IFRS 17 est similaire, dans la mesure où il propose la valorisation du passif comme la somme d'un *best-estimate* (flux futurs actualisés) et d'un ajustement au titre des risques non financiers.

L'approche de valorisation économique des passifs imposée par Solvabilité 2 et IFRS 17, ne peut trouver donc sa pleine application que lorsque l'on a la capacité de définir : (1) les flux futurs du passif, (2) une mesure de probabilité adaptée et (3) les taux d'actualisation.

L'application de cette approche aux contrats d'épargne en euros (et plus généralement en présence d'un dispositif de participation aux bénéfices) conduit les praticiens à retenir la structure de modélisation désormais classique dans laquelle un générateur de scénarios économiques « risque neutre » alimente un modèle de projection de flux pour permettre une approximation par simulation de la valeur du best estimate.

Ce chapitre, présente une analyse critique du processus de valorisation économique des passifs d'assurance vie. On y discute les choix de modélisation et de mesure de probabilité retenus par les praticiens et leurs implications. Il présente également les principaux résultats des travaux de recherche.

I.1 La valorisation « économique » des engagements d'assurance

Depuis une trentaine d'année, la notion d'évaluation « économique » de flux financiers s'est développée, dans le monde de l'assurance, au sens où la valeur de l'engagement associée à un risque répliquable doit être égale au prix de la couverture de ce risque.

Cette notion, initialement créée en finance avec le développement des marchés de dérivés, depuis la fin des années 1970 - avec les travaux fondateurs de BLACK et SCHOLES [1973], puis MERTON [1976], suivis par HARRISSON et KREPS [1979] et HARRISSON et PLISKA [1981] - établit un lien direct entre le prix d'un actif contingent et une technique de gestion du risque consistant à répliquer des flux de cet actif par un portefeuille d'actif auto-financé.

Les marchés d'actifs contingents ont connu un développement considérable du fait de la gestion active des positions, permettant de limiter le risque¹, les imperfections de couverture donnant elle-même lieu à une littérature spécifique pour optimiser les règles de gestion de l'actif de couverture (cf. NTEUKAM et al. [2011]).

Au début des années 1990, BRIYS et de VARENNE [1994] ont remarqué l'analogie formelle de certains flux de contrats intégrant une participation aux bénéfices à des flux d'options vanilles et ont, par analogie, proposé d'utiliser le cadre de calcul de prix par absence d'opportunité d'arbitrage pour les contrats d'assurance.

Impliquant de valoriser l'actif de l'assureur en valeur de marché, cette nouvelle vision du bilan a séduit l'industrie au tout début des années 2000, les plus-values latentes étant importantes et non reconnues dans les comptes sociaux.

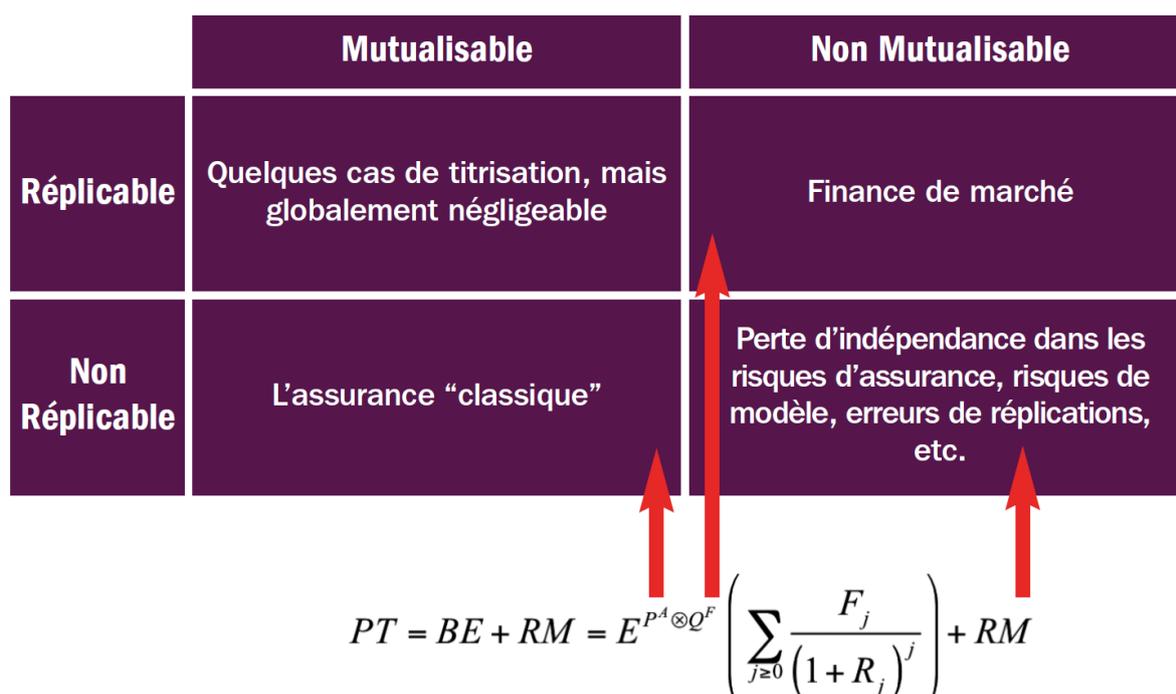
Elle a donc été adoptée comme principe de base de valorisation du bilan dans la directive Solvabilité 2.

Dans ce cadre, la valorisation « économique » correspond au *best-estimate* (flux futurs actualisés) et est complétée, le cas échéant, d'une marge de risque compensant l'immobilisation du capital de solvabilité requis des risques non-couvrables (se traduisant par un coût du capital des risques non-financiers ou des imperfections de couverture pour les risques financiers).

Les référentiels « économiques », Solvabilité 2 comme IFRS 17, induisent ainsi un cadre de calcul des engagements d'assurance que l'on peut résumer par le schéma présenté ci-après (*Figure I.1*).

¹ Et même, dans le cadre idéalisé d'un marché complet sans frictions ni frais de l'éliminer.

Figure I.1 : Liens entre risque et technique de valorisation



De manière synthétique, les risques d'assurance mutualisables sont évalués dans un cadre statistique, les risques financiers répliquables dans un cadre d'absence d'opportunité d'arbitrage, et l'ensemble des risques qui n'entrent dans aucune de ces deux cases relèvent de la marge pour risque.

Par ailleurs, le cadre de valorisation en IFRS 17 est similaire à celui de Solvabilité 2 dans la mesure où il propose la valorisation du passif comme la somme d'un *best-estimate* (flux futurs actualisés) et d'un ajustement au titre des risques non financiers.

Bien que les deux normes, Solvabilité 2 et IFRS 17, présentent des divergences sensibles, les principes d'évaluation, sous la norme Solvabilité 2, discutés dans ce rapport se généralisent naturellement à la norme IFRS 17².

Les questions liées aux calculs de la marge de risque ne seront pas abordées dans ce rapport. Autrement dit, nous nous focalisons sur la partie des flux relevant de la gestion par réplification des flux, sans considérer les risques d'assurance et les imperfections de couverture. Nous ne ferons donc pas la distinction dans la suite entre les termes *best-estimate* et « valeur du passif ».

L'article 75 de la norme Solvabilité 2 précise que les passifs sont « valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes ». L'article 77 définit le *best-estimate* comme la « moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle

² Rappelons que sous IFRS 17, la marge de service contractuelle, estimant les bénéfices attendus et non encore réalisés, ne fait pas partie des fonds propres IFRS 17 comme l'est la valeur des profits futurs sous la norme Solvabilité 2. Dans les deux normes, les engagements de l'assureur envers les assurés sont constitués d'un *best-estimate* et d'un ajustement.

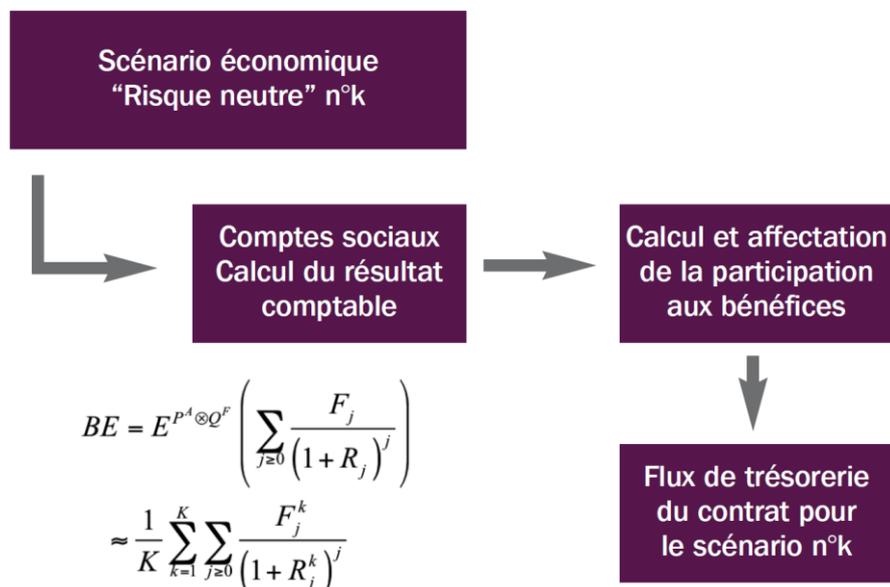
attendues des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la **courbe des taux sans risque pertinent** ».

Cette approche, qualifiée de dynamique dans WALTER et BRIAN [2008], se rapproche de la définition Keynésienne de la valeur fondamentale. En effet, dans sa Théorie Générale, Keynes indique que « la valeur fondamentale d'une entreprise correspond à une estimation de la valeur actuelle des flux futurs de revenus attachés à la détention de son capital ».³

L'approche de valorisation économique des passifs imposée par Solvabilité 2, ne peut trouver donc sa pleine application que lorsque l'on a la capacité de définir : (1) les flux futurs du passif, (2) une mesure de probabilité adaptée et (3) les taux d'actualisation.

L'application de cette approche aux contrats d'épargne en présence d'un dispositif de participation aux bénéfices (contrat dit en « euros » en France) conduit les praticiens à retenir la structure de modélisation désormais classique dans laquelle un générateur de scénarios économiques (voir par exemple LEROY et PLANCHET [2013]) « risque neutre » alimente un modèle de projection de flux pour permettre une approximation par simulation de la valeur du *best estimate* (cf. PLANCHET [2015]) comme le montre le schéma ci-après (Figure I.2).

Figure I.2 : Calcul de la valeur économique d'un contrat avec interactions actif / passif



Dans ce rapport, nous analysons de manière détaillée chacun des composants de ce processus afin de discuter les implications en termes de modélisation dans le but de réaliser des évaluations aussi pertinentes que possible de la « valeur économique » des flux de passif d'un assureur vie. Le rapport de thèse s'organise comme suit :

- **Le chapitre I** propose un rappel sur les options et les garanties des contrats d'épargne avec une clause de participation au bénéfice (contrat dit en « euros » en France), présente les pratiques du secteur et discute la pertinence du choix de la mesure de probabilité « risque neutre » pour l'évaluation des passifs d'épargne en

³ WALTER et BRIAN [2008] présentent une analyse critique de la notion de valeur fondamentale. Cette analyse est conduite au plus près de la tension entre le calcul abstrait des phénomènes financiers et les formes concrètes que prennent ces phénomènes.

euros. Ce chapitre présente également les principaux résultats des travaux de recherche présentés dans ce rapport de thèse.

- **Le chapitre II** propose une écriture mathématique de la valeur des passifs d'épargne avec une clause de participation au bénéfice. Il explicite, sur le plan quantitatif, la structure optionnelle implicite aux contrats. Il définit également le lien entre cette structure optionnelle et les modèles de génération de scénarios économiques et établit des critères de qualité de ces modèles.
- **Le chapitre III** propose une démarche de construction de générateurs de scénarios économiques (GSE) risque-neutres, dont les modèles de taux sont normaux ou log-normaux. Cette démarche respecte les exigences réglementaires Solvabilité 2 et se place dans le même cadre conventionnel retenu par les praticiens. Les modèles développés dans ce chapitre III sont destinés à la valorisation des passifs des contrats d'épargne participatifs et ont été utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et des données utilisées pour leur calibrage.
- **Le chapitre IV** étend les travaux réalisés au chapitre III et introduit des modèles de taux de type CIR. Il s'agit des modèles CIR++ et CIR2++. Des sensibilités du *best-estimate* aux modèles de taux et aux données ont été également réalisées.
- **Le chapitre V** propose une démarche de construction et de calibrage des GSE alternative aux pratiques conventionnelles du marché. Elle consiste à construire un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique destiné à la valorisation des passifs des contrats d'épargne avec des clauses de participation aux bénéfices cohérent avec les référentiels Solvabilité 2 et IFRS 17.

I.2 Contrats d'épargne, flux futurs, *best-estimate* et facteurs de risque

I.2.1 Le contexte des contrats d'épargne

Sur le marché français de l'assurance vie, on rencontre majoritairement deux types de contrats d'épargne : les contrats en euros et les contrats en unités de compte (y compris l'euro-croissance).

À fin 2018, les encours des contrats d'épargne représentaient 1 692 Md€⁴ soit 70 % des placements du marché de l'assurance français (FFA [2019]). Les contrats d'épargne en euros représentent 1 297 Md€⁵, soit 54 % des placements et les contrats en unités de compte (UC) représentent 341 Md€ soit 14 % des placements.

Dans ce rapport, nous nous intéressons à la valorisation économique des contrats classiques d'épargne en euros et plus généralement aux contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices (cf. la section VIII.1 en annexe pour une présentation détaillée des contrats d'épargne en euros).

Les options incluses dans ces contrats peuvent être synthétisées en trois catégories :

⁴ Dont 54 Md€ de provisions pour participation aux bénéfices.

⁵ Hors provisions pour participation aux bénéfices.

- Options financières : l'assureur s'engage sur une rémunération minimale de l'épargne en garantissant un taux minimal de revalorisation ou une participation aux bénéfices (PB) garantie.
- Options comportementales : l'assureur propose des options de rachat, d'arbitrage euro-UC, de versements libres ou programmés, bonus de fidélité... L'activation de ces options est à l'appréciation de l'assuré.
- Options biométriques : sont les options dépendant du risque de mortalité (ou de longévité) comme la proposition par l'assureur de rentes différées.

L'assuré bénéficie donc de trois options à caractère financier (cf. BRYs et DE VARENNE [1994]):

- L'option de taux technique ou de taux de participation aux bénéfices garantis, assimilable à une option vanille européenne.
- L'option de rachat, assimilable à une option de vente américaine.
- L'option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés, assimilable à une *swaption*.

Ainsi, les facteurs de risques auxquels sont exposés les passifs des contrats d'épargne classiques en euros sont (cf. ARMEL et PLANCHET [2019] et LAURENT et al. [2016]):

- Les risques biométriques et de rachats structurels qui sont non-répliquables. Ils sont néanmoins mutualisables ;
- Les risques liés aux comportements conjoncturels (ou dynamiques) des assurés qui sont non-répliquables (cf. section 1.2.4 et 1.3). Ces comportements représentent la réaction des assurés aux contextes économiques, financiers et aux taux de revalorisation (et donc aux décisions de l'assureur). Ils peuvent se traduire par des rachats, des arbitrages ou des versements ;
- Les risques du marché financier et notamment le risque de taux qui peuvent être en partie répliquables.

La réaction de l'assureur aux taux de rendements de l'actif et aux anticipations des comportements des assurés prend la forme d'actions de gestion, sur la base d'un taux comptable, dont la résultante est le taux servi (cf. section 1.2.3 pour une présentation d'algorithme type de calcul du taux servi pratiqué par la place).

Les sections suivantes expliquent sommairement comment construire les flux futurs des passifs des contrats d'épargne en euros afin d'évaluer le *best-estimate* et synthétisent les pratiques de modélisation de la place.

1.2.2 Analyse des flux de trésorerie⁶

L'article 77 de la directive Solvabilité 2 précise que les flux de trésorerie utilisés dans le calcul de la meilleure estimation tiennent compte de toutes les entrées et sorties de

⁶ Pour plus de détails sur la construction des flux et l'évaluation du *best-estimate*, le lecteur peut se référer au chapitre II ou à ARMEL et PLANCHET [2019].

trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ces derniers.

Le *best-estimate* des contrats d'épargne en euros calculé à un instant t s'écrit (cf. chapitre II) :

$$BE(t) = E \left(\sum_{i=t}^{+\infty} F_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right)$$

où r_i est le taux sans risque à terme à l'échéance i .

Le flux F_i est la somme des paiements versés aux assurés et des frais diminués des primes et des chargements :

$$F_i = \text{Paiements}_i^{\text{bruts}} - \text{Primes}_i + \text{Frais}_i - \text{Chargements}_i$$

En pratique, l'évaluation du *best-estimate* se fait le plus souvent par des simulations de Monte-Carlo (cf. [Figure 1.2](#)) et l'évaluation des flux s'arrête à un horizon de projection T .

Les contrats futurs sont, par ailleurs, exclus du périmètre d'évaluation du *best-estimate*. En outre, si les contrats d'épargne ne contiennent pas de garanties financières prédéterminées pour tous les versements futurs, ce qui est en général le cas des contrats d'épargne classiques, les primes futures ne peuvent pas être prises en compte dans le périmètre d'évaluation (ACPR [2013]).

Aussi, les chargements et les frais sont des fonctions de la valeur de rachat (l'épargne acquise), du nombre de contrats (notamment pour l'évaluation des frais fixes) et de l'inflation (cf. ACPR [2013]). L'évaluation de la valeur de rachat et de la probabilité de présence de l'assuré dans le portefeuille, à la date de calcul du flux, permettent de calculer les flux de chargements et de frais.

La valeur de rachat d'un contrat d'épargne (épargne acquise) à l'instant $t + 1$, notée $VR(t + 1)$ s'écrit en fonction de la valeur de rachat à l'instant t et des taux de revalorisation nets de chargements servis à l'instant $t + 1$, noté c_{t+1} , comme suit (cf. ARMEL et PLANCHET [2019] et BONNIN et al. [2014]) :

$$VR(t + 1) = VR(t) \times \exp(c_{t+1}) = PM_0 \times \exp \left(\sum_{i=0}^t c_{i+1} \right)$$

avec $VR(0) = PM_0$ où PM_0 désigne la provision mathématique à l'instant 0.

Cette valeur de rachat est conditionnelle à la présence de l'assuré à la date de calcul. La valeur de rachat probabilisée est la valeur de rachat multipliée par la probabilité de présence dans le portefeuille.

La sortie du support d'épargne en euros peut s'expliquer par deux facteurs : le décès ou la cessation (rachats ou arbitrages des supports en € vers des supports en UC)⁷.

Soit :

- q_t le taux de mortalité entre t et $t + 1$ et $q_{-1} = 0$.
- v_t le taux de rachat entre t et $t+1$ et $v_{-1} = 0$.

⁷ On parlera dans la suite de « rachat » ou de « cessation » sans distinction.

Alors la valeur de rachat probabilisée (notée $VRP(t + 1)$) est :

$$VRP(t + 1) = PM_0 \times \prod_{j=0}^t (1 - q_j)(1 - v_j) \times \exp\left(\sum_{i=0}^t c_{i+1}\right)$$

Et le flux de trésorerie sortant net de chargement et de frais à la date $t + 1$ est :

$$F_{t+1} = PM_0 \times \left(\prod_{j=0}^{t-1} (1 - q_j)(1 - v_j)\right) (q_t + v_t - q_t \cdot v_t) \times \exp\left(\sum_{i=0}^t c_{i+1}\right)$$

Les orientations nationales (ACPR [2013]) précisent que « *En plus des rachats structurels que l'assureur peut observer dans un contexte économique « normal » sur les contrats d'assurance-vie épargne euro, l'assureur doit tenir compte de rachats conjoncturels ; ceux-ci interviennent notamment dans un contexte fortement concurrentiel lorsque l'assuré arbitre son contrat d'assurance au profit d'autres supports financiers (produits assuranciers, bancaires ou immobiliers)* ». L'ACPR recommande d'utiliser des tables d'expérience ou de marché pour modéliser le rachat structurel. La modélisation du rachat conjoncturel (ou dynamique) présentée dans ACPR [2013] est discutée dans la section I.2.4.

Les taux de rachats sont donc supposés s'écrire comme la somme d'un taux de rachat dynamique, traduisant des comportements d'arbitrages financiers et d'un taux de rachat structurel supposé indépendant de la conjoncture économique ou financière (ex. la réalisation d'un retrait pour financer des vacances).

Ainsi, en introduisant l'espérance conditionnelle aux risques de marché et sous l'hypothèse d'indépendance⁸, on peut directement utiliser les taux de décès ou de rachats structurels donnés par les tables, réglementaires ou d'expérience, sans avoir recours à des techniques de simulations dans les simulations dans le processus de calcul du *best-estimate*.

En notant :

- q_t taux de mortalité entre t et $t + 1$.
- v_t taux de rachat entre t et $t+1$. Ce taux comprend le rachat dynamique et le rachat structurel.
- $R(t) = \prod_{j=1}^{t-1} (1 - v_j)$ et $R(0) = 1$ est la part non-rachetée de l'épargne entre 0 et t .
- $\psi(t) = \exp\{\sum_{i=1}^t c_i - \sum_{i=1}^t r_i\}$ avec :
 - o c_i : le taux de revalorisation de l'épargne net de chargements à la date i . Ce taux doit être supérieur au taux minimum garanti ;
 - o r_i est le taux sans risque pour la période entre $i - 1$ et i .

Alors sur un horizon de projection fini noté T le *best-estimate* net de chargements et de frais discrétisé s'écrit (ce calcul est détaillé dans le chapitre II) :

$$BE^{net}(0) = PM_0 \cdot E \left(\sum_{t=1}^T \frac{l_{t-1}}{l_0} \cdot R(t-1) \cdot (q_{t-1} + v_{t-1} - q_{t-1} \cdot v_{t-1}) \cdot \psi(t) + \frac{l_T}{l_0} \cdot R(T) \cdot \psi(T) \right)$$

Plus généralement (cf. chapitre II), on peut écrire le *best-estimate* sous la forme :

⁸ Une catastrophe de mortalité peut engendrer, néanmoins, l'arrêt de l'économie.

$$BE(0) = PM_0 \cdot E \left(\sum_{t=1}^T \alpha_t \cdot \psi(t) \right)$$

Le facteur α_t prend en compte la probabilité de sortie durant l'année t à cause de décès ou de rachats, la probabilité d'être sous contrat à l'instant $t - 1$ et les taux de frais ou de chargements. Ce facteur est stochastique car il dépend de l'état de l'économie (il intègre notamment les rachats dynamiques).

En pratique, cette espérance est évaluée par les praticiens sous une mesure « risque-neutre ». Elle nécessite donc la génération de scénarios économiques avec la probabilité « risque-neutre ». La pertinence de l'utilisation de cette mesure est discutée dans la section 1.3.

On peut noter également qu'à « l'intérieur de l'espérance », il y a notamment deux processus stochastiques dépendant de l'économie et des comportements des agents (assurés et assureurs) :

- Le taux de revalorisation qui dépend de l'état du marché et de la politique d'investissement de l'assureur. Il est, en outre, le résultat d'une optimisation du bénéfice sous les contraintes de l'économie et des comportements des assurés.
- Le taux de rachat dynamique traduisant un comportement d'arbitrage financier dont l'objectif est de maximiser la rentabilité. Il peut être négatif, ce qui signifie que les assurés rachètent moins que « d'habitude », notamment quand la « *moneyness* »⁹ du contrat d'assurance leur est favorable, ou positif quand des investissements plus rentables, conditionnellement au risque, que le contrat d'assurance se présentent.

Les sections suivantes, 1.2.3 et 1.2.4, présentent une synthèse des pratiques retenues par la place pour modéliser la politique de revalorisation et les comportements dynamiques des assurés.

1.2.3 Algorithme de revalorisation : revue des pratiques du marché Français

Les options et les garanties proposées dans les contrats d'épargne en euros ont comme sous-jacent l'actif du fonds euros géré par l'assureur à sa discrétion.

Le *Tableau 1.1* présente la répartition de l'actif des assureurs en valeur de marché à fin 2016 (source FFA [2017a]).

⁹ Cf. annexe VIII.2.2 pour une définition de la « *moneyness* » d'un contrat d'épargne en euro.

Tableau I.1 : placements des sociétés d'assurance fin 2016

Encours des placements des sociétés d'assurances à fin 2016	En Mde	Allocation
Actions d'entreprises	401	17%
Obligations d'entreprises	907	39%
Obligations émises ou garanties par l'État	773	33%
Actifs immobiliers	97	4%
Actifs monétaires	123	5%
Autres	49	2%
Total	2 350	100%
Dont sociétés vie et mixte	2 114	90%
Dont sociétés dommages	236	10%

On peut observer que :

- Les actifs détenus par les assureurs sont simples : obligations, actions, investissements en immobilier et du monétaire ;
- Les actifs obligataires sont prédominants, traduisant une politique de gestion du *gap* de duration actif-passif par la « couverture » partielle des flux du passif par des flux obligataires ;
- La liquidité est pilotée avec des investissements en actions et dans du monétaire ;
- La gestion de la performance est réalisée, notamment avec les investissements en actions, en immobilier et dans quelques actifs obligataires.

Si la composition des actifs des compagnies d'assurance peut montrer les similarités évoquées ci-dessus, les politiques de gestion, d'allocations et de *stock-picking* sont propres à chaque assureur.

Les modèles de valorisation des passifs prennent en compte la politique de gestion de l'actif de l'assureur. Cette gestion se traduit notamment par des allocations stratégiques, des réalisations de plus ou moins-values latentes (PMLV), des opérations d'achat-vente, etc...

À chaque date, l'assureur dispose de revenus financiers générés par son actif résultant de sa politique et peut revaloriser les contrats d'épargne.

L'algorithme de revalorisation des contrats d'épargne en euros peut se présenter comme un processus d'optimisation sous contraintes. L'assureur cherche à optimiser son résultat (par exemple : marge, ROE, dividende cible, taux de rendement interne...) sous les contraintes économiques, réglementaires, contractuelles et des comportements des assurés. On peut notamment lister les contraintes suivantes : taux technique, taux minimum garanti, taux de la concurrence et taux de participation aux bénéfices minimum.

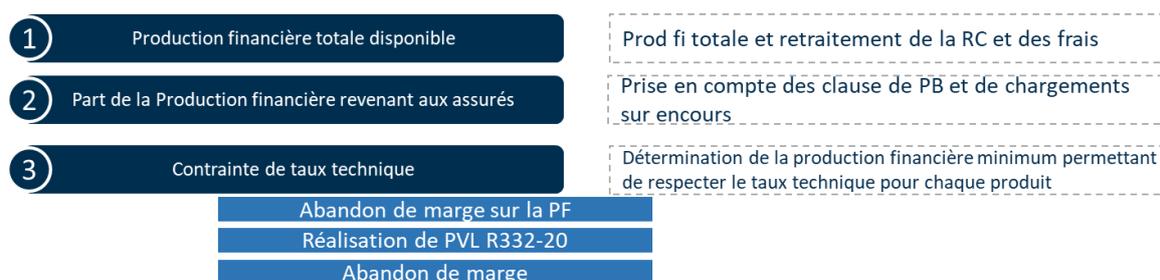
Dans les modèles de valorisation des passifs, l'optimisation de la marge ne se limite pas au seul algorithme de revalorisation, mais implique aussi la politique d'investissement. En effet l'assureur peut envisager de modéliser une politique d'achat-vente optimale des actifs obligataires, dont les PMVL réalisées dotent la réserve de capitalisation qui est assimilable aux fonds propres (et n'est pas acquise aux assurés). L'ACPR (ACPR [2013]) précise néanmoins que la politique obligataire de l'organisme dans les modèles actif-passif

doit être cohérente avec la politique obligatoire pratiquée sous l'hypothèse de continuité d'activité.

L'examen des algorithmes de revalorisation de certains acteurs majeurs sur le marché de l'épargne en euros français a permis de dresser un schéma type du processus de revalorisation, qui est présenté dans la suite du chapitre (Figure I.3 à Figure I.6). Il reprend les étapes d'optimisation de la rentabilité (désigné par « marge » dans le reste de l'étude), sous contraintes implémentées dans les modèles, et reflète les processus de revalorisation des contrats mis en place en pratique par les assureurs.

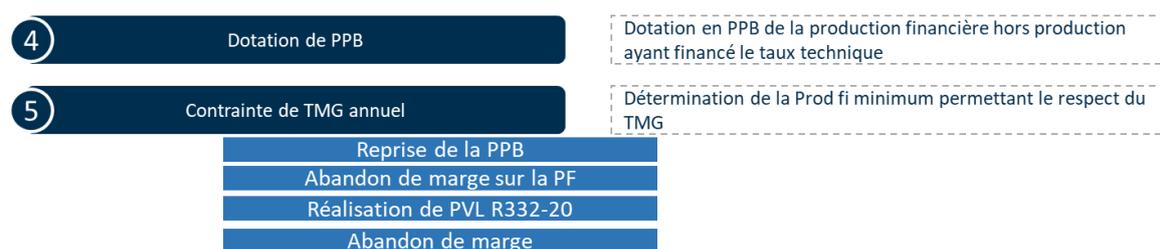
Les trois premières étapes visent à revaloriser les contrats du taux technique comme le montre la figure suivante. Notons que la sous étape d'abandon de marge sur PF (PF : Produits Financiers au sens comptable) peut survenir chez certains acteurs après l'étape de réalisation de PVL (plus-values latentes).

Figure I.3 : Service du taux technique



Si la production financière est suffisante pour servir les taux techniques, la provision pour participation aux bénéfices (PPB) est dotée du reliquat. La PPB ainsi augmentée est utilisée ensuite pour servir les taux minimums garantis (l'abandon de marge sur PF peut survenir chez certains acteurs après l'étape de réalisation de PVL).

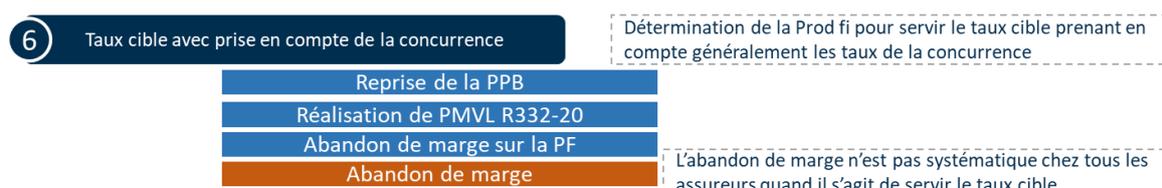
Figure I.4 : Service du taux minimum garanti



Si la PPB est suffisante pour payer les taux minimums garantis, alors on examine ce que l'on appelle « le taux de revalorisation cible »¹⁰. Quand la richesse (produits financiers et PPB) est significative, certains assureurs réalisent des moins-values latentes pour ajuster la richesse distribuée à la baisse et sortir du portefeuille les actifs en dépréciation. Si elle est significativement faible, on peut constater un abandon de marge sur les produits financiers ou une réalisation de PVL avant d'envisager un abandon de marge sur le résultat.

¹⁰ Cf. ci-dessous pour une définition du taux de revalorisation cible et une présentation des pratiques de marché.

Figure I.5 : Service du taux cible



La dernière étape consiste à vérifier les contraintes de distribution de la participation aux bénéficiaires minimale obligatoire (notamment la PPB datant de plus de 8 ans).

Figure I.6 : Correction du taux cible pour satisfaire la contrainte de PB min



Les acteurs ont en pratique peu de marge quant à la revalorisation des contrats par les taux techniques ou les taux minimums garantis. On observe des écarts à la marge dans les modèles de génération de produits financiers :

- Sur l'étape 1 – production financière : réalisation systématique de X % des PMVL (*turnover* systématique sur actions et immobilier), réallocation des actifs...
- Sur les étapes 3 et 5 : certains assureurs réalisent des PVL avant tout abandon de marge sur les produits financiers (PF).

Pour l'étape 6, des approches hétérogènes sont observées sur la place pour la définition du taux de revalorisation cible. On distingue usuellement des logiques faisant intervenir « un taux espéré par l'assuré » et une ou plusieurs références dans la construction de ce taux :

- Les taux d'intérêt éventuellement retraités du taux de chargements sur encours (p. ex. TME, taux *swap* ou zéro-coupon 10 ans, moyenne pondérée de taux *swap* 1 an et 10 ans, livret A, taux *swap* 10 ans augmenté de l'ajustement pour volatilité, etc.) ;
- Des performances financières d'un indice (p. ex. ajustement des performances du CAC40 sur 3 ans) ;
- Benchmark interne (p. ex. taux servi aux assurés l'année N ou N-1) ;
- Taux concurrentiel comme le taux publié par l'ACPR (ACPR [2018]) ou le taux de rendement moyen du marché.

D'autres exemples de références sont fournis par l'INSTITUT DES ACTUAIRES ([2016], p. 42).

La majorité des approches mises en pratique utilisent un ou deux indicateurs, dont très fréquemment, un indicateur de taux d'intérêt. Cette logique se justifie notamment par la relation étroite que l'on observe entre le taux de l'OAT et les revalorisations observées dans le passé (cf. BOREL-MATHURIN et al. [2018]).

Certains assureurs supposent, par exemple, que le taux attendu par les assurés est une moyenne pondérée « d'un effet mémoire » et d'un taux servi par la concurrence supposé égale au taux OAT 10 ans :

$$Tx_attendu(t) = \max(TMG, a \times tx_Servi(t - 1) + (1 - a) \times OAT(t, 10ans))$$

Dans cet exemple, le taux cible final correspond au taux attendu diminué d'un *Spread* subjectif qui matérialise des caractéristiques du produit représentant un frein aux rachats, comme une garantie de taux ou une fiscalité particulièrement avantageuse.

$$Tx_cible(t) = \max(TMG, Tx_attendu(t) - Spread(t))$$

Le taux de revalorisation final peut être différent (à la hausse ou à la baisse) du taux cible défini à l'étape 6.

L'écart entre le taux de revalorisation et le taux attendu par les assurés est utilisé par les praticiens comme une variable déterminante du rachat dynamique. La section suivante présente une synthèse des pratiques de la place.

1.2.4 Comportements dynamiques des assurés

Le comportement dynamique des assurés est modélisé par le rachat dynamique. Il est donc supposé dans les modèles de la place que les assurés modulent leurs rachats à la hausse ou à la baisse en fonction des opportunités d'arbitrages financiers qui se présentent.

D'après ACPR [2013], les rachats dynamiques sont couramment modélisés par une fonction dépendant uniquement de l'écart entre le taux servi et un taux dépendant de l'environnement économique, souvent appelé taux de rendement espéré par l'assuré (cf. section 1.2.3). Le taux de rachats dynamiques devra être additionné au taux de rachats structurels.

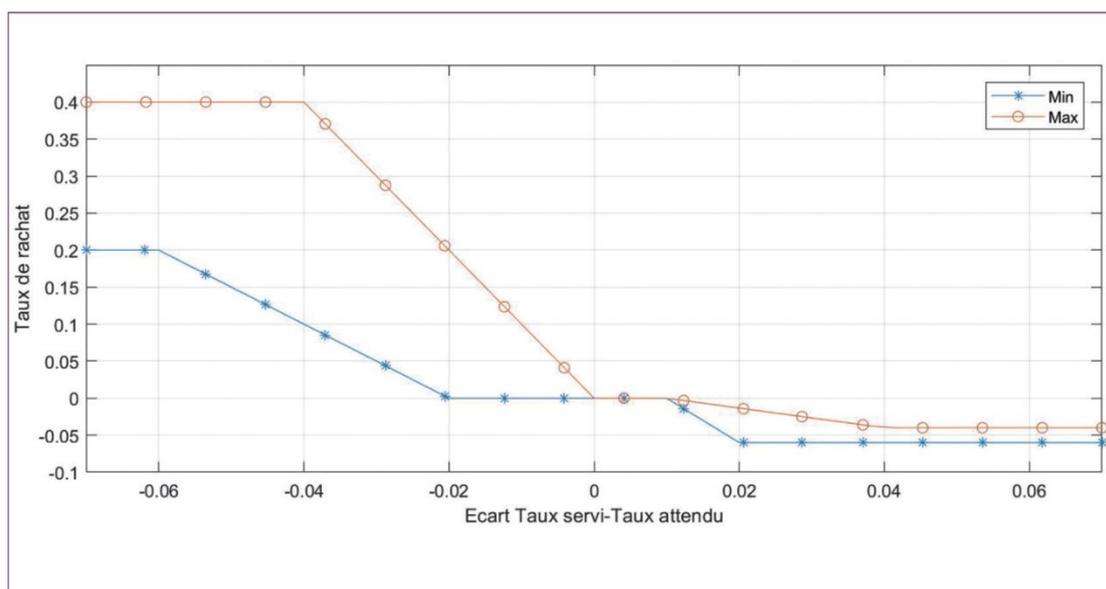
Si le taux servi (TS) est inférieur au taux attendu (TA) par les assurés, ces derniers auront tendance l'année suivante à racheter plus que ne l'indique la courbe de rachats structurels.

À l'inverse, si les assurés se voient offrir un taux supérieur à leurs attentes, ils rachèteront, l'année suivante, moins que par le passé.

L'ACPR (ACPR [2013]) propose de maintenir, dans les modèles, les rachats dynamiques en fonction de l'écart ($TS - TA$) à l'intérieur d'un tunnel présenté dans la [Figure 1.7](#).

La majorité des organismes utilise la forme de loi proposée par l'ACPR (ACPR [2013]) pour modéliser les rachats dynamiques. Cette forme de loi consiste à supposer que le rachat dynamique est une fonction affine par morceau de la grandeur ($TS - TA$).

Figure I.7 : Tunnel min-max proposé par l'ACPR pour la modélisation du rachat dynamique



Le modèle de rachats dynamiques implémenté par la place suppose donc explicitement que la décision de rachat résulte d'un raisonnement se basant sur des données historiques (les taux servis et les taux de la concurrence à date) et non sur les anticipations rationnelles des assurés (cf. section I.3.1.3 pour une discussion sur les implications mathématiques de ce point).

Les écarts de modélisation que l'on peut observer entre assureurs portent sur le paramétrage de la fonction de réaction affine par morceaux (taux attendu, seuils, etc.), mais pas sur le cadre de base. Sur le plan académique, le peu de références existantes sur le sujet, portent sur la rationalisation des paramètres de la fonction affine par morceau ou l'étude de variables explicatives des rachats (par exemple SURU [2011] et RAKAH [2015]). On trouve aussi quelques travaux proposant des modélisations à l'aide de régressions de type logistique (cf. SAKHO [2018]).

Dans cette section, nous avons présenté la démarche de construction des flux futurs des contrats d'épargne en euros afin d'évaluer le *best-estimate*. Nous avons également présenté une synthèse des pratiques de modélisation de la place.

Dans la section suivante, nous allons discuter la pertinence du choix, par la place, d'une mesure de probabilité « risque-neutre » pour valoriser les passifs et sa cohérence avec les comportements, modélisés et observés, des agents (assureurs et assurés).

I.3 Mesure de probabilité et règles de gestion

Les conditions nécessaires et suffisantes à l'utilisation de la mesure de probabilité « risque-neutre » pour l'évaluation du *best-estimate* sont :

- L'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA).
- La complétude du marché.

En effet, les travaux de HARRISSON et KREPS [1979] et HARRISON et PLISKA [1981] ont montré que, sous l'hypothèse de marché complet¹¹ et d'AOA, il existe une unique mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique telle que les prix actualisés soient, sous cette probabilité, des martingales. Ce résultat ramène le calcul du prix d'un actif à un calcul d'espérance.

Plus généralement on notera qu'actualiser les prix au taux sans risque revient à changer de numéraire : au lieu d'exprimer la valeur d'un actif en unité monétaire courante, on l'exprime dans une unité particulière, constituée par un bon de capitalisation au taux sans risque. Cette approche a été généralisée par GEMAN, EL KAROUI et ROCHET [1995] qui montrent qu'on peut associer à tout numéraire (processus mesurable strictement positif), une mesure de probabilité sous laquelle les prix des actifs sont des martingales.

Nous discutons dans la suite les deux hypothèses nécessaires à l'existence d'une mesure de probabilité risque neutre unique en assurance vie : AOA et complétude.

1.3.1 Opportunités d'arbitrage dans le marché de l'épargne en euros

Un marché sans opportunités d'arbitrage est un marché où il est impossible de mettre en œuvre une stratégie financière qui, tout en n'impliquant aucun investissement initial, assure un gain espéré non nul.

Dans un marché liquide, où il n'y a ni coûts de transaction, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage (EL KAROUI [2004]). La propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage est satisfaite sur tout marché parfait en équilibre.

En assurance, la présence et la persistance des opportunités d'arbitrages s'expliquent au moins par :

- La structure du marché de l'assurance épargne en euros et la nature des contrats.
- L'asymétrie d'information et la rationalité limitée des agents intervenant sur ce marché.

1.3.1.1 Quelques opportunités d'arbitrage liées à la structure du marché de l'assurance

1.3.1.1.1 Exemple 1 : Richesse initiale et opportunités d'arbitrage

Un investisseur souhaitant investir un montant de $PM(0)$ dans un fonds en euros peut profiter d'une richesse initiale cumulée par l'assureur. Cette dernière se présente comme suit :

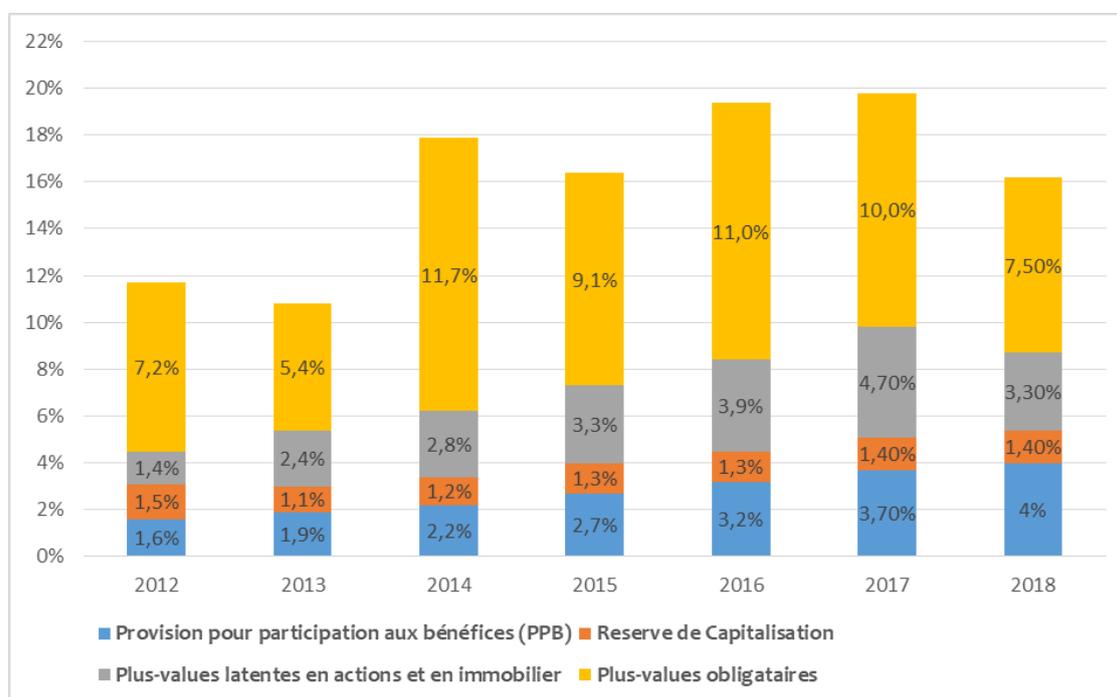
- La provision pour participation aux bénéfices qui est totalement acquise aux assurés présents à la date de sa distribution (et non lors de sa dotation). Sa distribution est à la discrétion de l'assureur.
- Les plus ou moins-values latentes de l'actif du fonds en euros. Rappelons que les produits financiers sont évalués sur la base des valeurs comptables des actifs.

¹¹ Dans le cadre idéalisé du marché, les titres sont parfaitement divisibles et les ventes à découvert sont permises. Les opérateurs sont rationnels et disposent de la même capacité à traiter l'information. Ils ne peuvent pas faire bouger les prix par une action individuelle. Il n'y a pas de barrière aux emprunts. Les taux de prêt et d'emprunt sont identiques. Il n'y a pas de frais de transaction, ni de fiscalité.

- Les provisions permettant le pilotage des rendements comptables, comme la réserve de capitalisation, la provision pour aléas financiers et la provision pour risque d'exigibilité. Ces provisions sont à la discrétion de l'assureur.

Le graphique ci-après (*Figure I.8*) illustre l'importance de la richesse initiale cumulée par les entreprises régies par le code des assurances sur le marché français (cf. FFA [2017b] et FFA [2019]).

Figure I.8 : Richesse initiale des assureurs sur le marché français de 2012 à 2018 en % des provisions d'assurance vie hors UC



En 2018, la richesse initiale maximale moyenne des assureurs vie est d'au moins 16,1 % des encours des fonds en euro. Ce qui est comparable à trois fois les fonds propres cumulés (cf. *Tableau I.2*).

La richesse initiale acquise totalement aux assurés est de 4,0 %. Ainsi, la richesse initiale pouvant être distribuée par l'assureur sans obligation réglementaire et à sa discrétion peut varier théoriquement dans un intervalle dont le diamètre représente 12,1 % des encours en 2018. Ce qui est comparable à deux fois les fonds propres cumulés des assureurs vie en 2018 comme le montre le tableau suivant.

Tableau I.2 : les encours et fonds propres des sociétés d'assurance vie et mixtes (FFA [2019])

(en Md€)	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Provisions techniques brutes au bilan	1 558,7	1 636,3	1 713,3	1 783,0	1 844,5	1 863,8
Fonds propres ¹	63,2	66,1	70,9	73,4	76,5	79,0
Ratio : fonds propres et plus-values latentes / provisions techniques (%)	10,7%	16,6%	14,7%	15,1%	14,7%	11,9%
Part des unités de compte dans les provisions techniques au bilan (%)	15,8%	16,3%	17,0%	17,8%	19,7%	18,8%
Plus-values latentes	109,2	210,8	187,9	202,1	200,9	150,1

¹ Y compris résultat de l'exercice

Cette richesse initiale crée de fait une opportunité d'arbitrage. En effet, elle est acquise en partie aux assurés et sera distribuée dans les taux de revalorisation futurs en plus de la

performance de l'actif. Ainsi, la valeur actuelle d'un investissement de $PM(0)$ unités monétaires peut être supérieur ou égale à $PM(0)$ comme discuté dans le chapitre II.

Un investisseur peut en théorie avoir une position courte de $PM(0)$ sur un actif sans risque et investir $PM(0)$ dans un contrat d'assurance (qui est sans risque pour les investissements de moins de 70 000 euros, cf. section VIII.1).

1.3.1.1.2 Exemple 2 : participation aux bénéfices discrétionnaire et opportunités d'arbitrages

La politique de l'assureur a un impact significatif sur la valeur du contrat d'assurance. Soit en effet deux assureurs A et B avec des caractéristiques identiques : les mêmes actifs et passifs, évoluant dans un même environnement économique et ayant la même richesse initiale.

Si l'assureur B décide dans sa politique de revalorisation de prendre une marge inférieure à celle de l'assureur A, cela implique que les taux de revalorisation servis par l'assureur B sont plus importants et la valeur d'un passif B est donc supérieure à celle d'un passif A.

La vente à découvert de contrats A et l'achat de contrats B permet de générer un gain certain pour l'assuré.

Plus généralement, on montre dans le chapitre II que la valeur des passifs des contrats d'épargne en euros dans le référentiel Solvabilité 2 n'est pas unique et ne représente pas seulement la valeur du risque, mais au mieux, celle du risque conditionnellement à la politique de revalorisation de l'assureur.

Le *best-estimate* peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle fermé dont les bornes sont indépendantes des choix de modèles de génération de scénarios économiques.

La largeur de cet intervalle peut être significative et correspondre à l'écart entre une richesse initiale minimale, dont la distribution est obligatoire, et une richesse maximale à la disposition de l'assureur¹².

Sur la base des statistiques présentées dans le *Tableau 1.2*, la largeur peut être évaluée en moyenne comme l'écart entre la richesse initiale totale et la PPB. Elle a atteint 12,1 % des encours à fin 2018 (comparable à deux fois les fonds propres).

Les deux exemples précédents illustrent des cas explicites où l'on peut observer des opportunités d'arbitrages en assurance vie.

Par ailleurs, on peut observer chaque année des écarts assez significatifs entre les taux de revalorisation des contrats d'épargne en euros du marché français¹³ sans que cela n'engendre des écarts de risques pour les assurés, ni des transferts d'épargne substantiels entre assureurs.

Plus généralement, les mécanismes de partage et de mutualisation de la richesse (initiale et générée durant la vie du fonds euro) entre (1) l'assureur et les assurés via les règles de participation aux bénéfices, de dotation de la réserve de capitalisation et des autres réserves, et (2) entre les assurés d'une même génération (la PB est acquise à tous) et de

¹² Pour plus de détail sur la construction de cet intervalle le lecteur peut consulter le chapitre II ou ARMEL et PLANCHET [2019].

¹³ <https://www.argusdelassurance.com/epargne/assurance-vie/assurance-vie-tous-les-rendements-2018-des-fonds-en-euros.139849>

générations différentes¹⁴ via la PPB et les autres réserves, créent de fait des opportunités d'arbitrage. En effet, on peut constater que :

- Les politiques discrétionnaires des assureurs créent des opportunités d'arbitrage car les rendements sont hétérogènes malgré la similarité des risques pour l'assuré (nuls pour les encours inférieurs à 70 000 euros) ;
- La mutualisation du rendement entre assurés et le partage de la richesse cumulée (PMVL, PPB, et les autres réserves) permet de profiter (ou éviter) des performances passées de l'actif sans y avoir investi initialement.

L'existence et la persistance de ces opportunités d'arbitrage peuvent s'expliquer, au moins, par la structure du marché de l'épargne, l'asymétrie d'information et la rationalité limitée des agents.

1.3.1.1.3 Le marché de l'épargne en euros : des opportunités d'arbitrages persistantes

Les opportunités d'arbitrages en assurance persistent et il n'est pas toujours possible de les saisir. Cela peut s'expliquer au moins par les limites structurelles suivantes du marché de l'épargne en euros :

- Liquidité : les transferts de portefeuilles d'épargne en euros entre assureurs sont peu fréquents et les rachats des polices par les assurés peuvent être réglés dans un délai de 2 mois.
- Limitations sur la gestion (achat-vente) :
 - o Il est impossible de transférer des contrats d'épargne en euros en France à une autre personne. Le seul acheteur potentiel du contrat est l'assureur qui l'a vendu. La valeur de rachat n'est pas la valeur économique, mais la valeur de l'épargne acquise à la date de rachat.
 - o Une opération de rachat sur un contrat n'est pas symétrique à une opération de versement sur ce même contrat. L'impact sur les *payoffs* peut être significatif et dépend de la nature des clauses contractuelles comme : les garanties de taux, la répartition de l'investissement entre les supports en euros et en UC, les prélèvements, la structure de frais, la pénalité fiscale, etc.
 - o Les transferts de contrats entre assureurs sont relativement rares.
- Le coût en cas de rachat est important : il se compose d'une pénalité de rachat facturée par l'assureur et d'une pénalité fiscale (cf. section VIII.1).

Ces limites structurelles des échanges des contrats d'épargne en euros et leur nature font que le marché de l'assurance épargne est sensiblement différent des marchés financiers organisés ou la coordination des agents par le prix est plus efficace.

Cette efficacité sur les marchés financiers peut s'expliquer par la construction d'un espace organisant et fluidifiant les échanges (liquidité, réduction des frottements, vente à

¹⁴ HOMBERT et LYONNET [2017] étudient le partage de risque intergénérationnel dans les contrats d'assurance vie en euros. Ils montrent que les taux de revalorisation sont substantiellement moins volatils que les rendements de l'actif de l'assureur, ce qui les rend plus prévisibles et montrent que les flux de collecte ne réagissent que faiblement à la prédictibilité de ces taux.

découvert, compensation des options, pénalisation de certaines asymétries d'information comme le délit d'initié, etc.).

En effet, dans le paradigme standard d'équilibre général, il est supposé que la coordination des agents soit assurée par les prix. Compte tenu de l'hypothèse de rationalité, les contrats élaborés par les agents sont complets et optimaux. Ils assurent parfaitement leur coordination et sont de ce fait le seul moyen de coordination nécessaire.

Cependant, d'après l'économie des conventions (cf. BATIFOULIER et al. [2001] et EYMARD et al. [2006]), les prix sont en effet le moyen de coordination efficace lorsque toutes les hypothèses de la théorie de l'équilibre général sont vérifiées. Ils n'assurent plus la coordination interindividuelle parfaite lorsque, notamment, il existe une incertitude et d'importantes asymétries d'information (cf. section 1.3.1.2.2).

Absente de la théorie walrassienne, la convention serait un élément de coordination complémentaire au mécanisme de prix. Pour les auteurs conventionnalistes, le prix est donc un moyen de coordination parmi d'autres et efficace dans un espace particulier : le marché. Celui-ci est structuré par des règles. SEARLE [1995] en distingue deux catégories : les règles régulatrices et les règles constitutives (cf. BATIFOULIER et al. [2001]).

La régulation des pratiques est faite par des règles régulatrices. Ces règles sont au même titre que le prix, un moyen de coordination interindividuelle. Elles régulent des conduites qui existaient déjà auparavant comme le mode d'échange d'information : interdire le délit d'initié.

Les règles constitutives créent la possibilité même de la coordination des conduites et les instituent. Elles ne règlent pas une activité qui existait auparavant, mais définissent l'espace, le cadre, les contraintes et les règles de l'interaction entre les agents. Prenons l'exemple du commissaire-priseur (remplacé par les robots sur les places boursières). Celui-ci est centralisateur de l'information, crieur de prix, appliquant la loi de l'offre et la demande et interdisant tout échange avant l'atteinte de l'équilibre. Sans ces règles, les prix ne peuvent assurer la coordination des décisions. Le marché est donc un espace construit. C'est parce qu'il existe des règles qui structurent l'espace de coordination du marché financier que les prix assurent la coordination comme l'illustre bien l'article de MUNIESA [2000]. Ces règles ne sont pas de simples moyens de coordination au même titre que les prix, elles définissent le cadre à l'intérieur duquel un moyen de coordination, ici le prix, opère.

Nous avons montré dans cette section la présence, sur le marché de l'épargne en euros, d'opportunités d'arbitrage que la structure de ce marché et la nature des contrats ne permettent pas de saisir.

La présence d'opportunités d'arbitrage peut s'expliquer, en outre, par (1) l'inefficience informationnelle des marchés et (2) la rationalité limitée (ou l'irrationalité) des agents (assurés et assureurs). Ces deux points sont discutés dans les sections suivantes (1.3.1.2 et 1.3.1.3).

1.3.1.2 Efficiences des marchés et asymétries d'information

Quel rapport entre l'arbitrage et l'efficiences des marchés ? Si la structure des prix sur les marchés est telle que certains éléments prédictibles des prix futurs ne sont pas reflétés dans les prix actuels, alors il devient possible de réaliser, en espérance, un profit sans

investissement initial et d'exploiter donc une opportunité d'arbitrage. Sous l'hypothèse d'efficience des marchés, de telles opportunités d'arbitrage ne sont pas possibles.

L'efficience informationnelle est donc une condition nécessaire à l'existence d'une probabilité risque neutre.

Par ailleurs, l'article 75 de la norme Solvabilité 2 précise que les passifs sont « valorisés au montant pour lequel ils pourraient être **transférés** ou **réglés** dans le cadre d'une transaction conclue, dans **des conditions de concurrence normales**, entre **des parties informées** et consentantes ».

Cette définition associe la valorisation en « juste valeur » des passifs et l'idée de contractants bien informés. L'information est considérée donc comme une hypothèse centrale dans l'évaluation du juste prix des passifs.

Aussi, outre le sujet, désormais classique, de l'efficience informationnelle des marchés financiers (cf. WALTER [1996], [2005] et [2013]), on peut observer des situations d'asymétries d'information en assurance.

La section 1.3.1.2.1 revient sur la notion d'efficience informationnelle et ses limites. La section 1.3.1.2.2 présente quelques asymétries d'information que l'on peut observer sur le marché de l'épargne en euros.

1.3.1.2.1 **Efficience informationnelle**¹⁵

Introduite formellement en 1965 par Fama (complétée et amendée entre 1965 et 1976 par le même auteur), l'idée de l'efficience des marchés financiers représente l'aboutissement d'un siècle de pensée théorique financière. Cette reconstruction séculaire est présentée en détail dans WALTER ([1996], [2005] et [2013]).

On dit simplement qu'il y a efficience lorsque les prix reflètent toute l'information disponible. WALTER [2013] propose de parler « d'efficacité » informationnelle et non d'efficience. Dans ce cas, « l'efficacité d'un marché dans le sens informationnel serait sa capacité à transformer de l'information en prix. De ce point de vue, un marché peut être plus ou moins efficace dans le sens où le prix peut intégrer plus ou moins d'information ». Le même auteur considère l'hypothèse d'efficacité informationnelle comme une convention stochastique.

Par ailleurs, la critique de cette hypothèse sur les marchés financiers peut s'organiser en trois volets :

- Les incohérences internes, par exemple :
 - La théorie des bulles rationnelles (exemple : BLANCHARD et WATSON [1984], TIROLE [1982] et [1985]) qui partent du principe que les anticipations portant sur les prix et non sur les fondamentaux se réalisent quand les acteurs y adhèrent. Le prix n'est donc pas le produit de l'information mais d'une vision stratégique des acteurs (exemple de HARRISON et KREPS [1978] où chaque investisseur est amené à modifier son évaluation en fonction de l'évaluation proposée par autrui).
 - Le paradoxe de GROSSMAN et STIGLITZ [1980] : si le prix est efficient et si l'information est coûteuse, alors il est rationnel de ne pas s'informer

¹⁵ Cette section est inspirée des travaux de WALTER ([1996], [2005] et [2013]) et ORLEAN [2008].

directement. Mais s'il en est ainsi, plus personne n'étant incité à s'informer, le prix ne peut pas être efficient.

- La finance comportementale s'est développée autour de la psychologie cognitive (notamment de KAHNEMAN et TVERSKY [1979]) et fonde son raisonnement principalement sur l'hypothèse de corrélation des irrationalités des agents. L'arbitrage réel étant risqué, cette hypothèse conteste vivement l'argument néoclassique selon lequel l'arbitrage d'acteurs rationnels fera converger les prix vers leurs fondamentaux.
- La finance auto-référencée (ORLEAN [2004]) vise à montrer qu'il est possible de concevoir un cadre théorique rejetant l'hypothèse d'efficience, tout en refusant de faire de l'irrationalité des acteurs une pièce centrale de sa compréhension des bulles spéculatives. L'approche autoréférentielle refuse de faire de la valeur fondamentale, une donnée objective, préexistante à son calcul et susceptible d'être connue par tous les investisseurs. L'évaluation légitime est le résultat du processus autoréférentiel, lui-même, au cours duquel chacun cherche à se positionner face aux anticipations des autres.

Outre les limites de l'hypothèse d'efficience des marchés financiers, qui s'étendent naturellement au marché de l'épargne français, on peut observer des asymétries d'information spécifiques à l'assurance vie. Ce point est discuté dans la section suivante.

1.3.1.2.2 Asymétries d'information du marché d'épargne en euros

ALBRECHER [2016] liste des situations d'asymétries d'information en assurance dont des éléments sont repris dans la suite, enrichis et adaptés aux contrats d'épargne en euros.

Asymétries d'information entre les agents et le « monde »

Cette asymétrie concerne tous les intervenants sur le marché de l'assurance vie : assureurs, assurés, réassureurs, gestionnaire d'actif, etc. Elle consiste à distinguer l'incertitude du risque. Keynes affirme, en effet, que personne ne peut connaître l'ensemble des événements susceptibles d'affecter sa décision. L'ensemble des possibles n'est pas une donnée préalable aux choix ; ceux-ci s'effectuent généralement à partir d'une connaissance limitée des faits. Ainsi, l'incertitude ne peut plus se réduire à un calcul de probabilités sur un ensemble donné d'états de la nature, mais doit être considérée comme radicale.

Asymétries d'information entre l'assuré et l'assureur

L'assuré dispose de plus d'informations sur ses objectifs d'investissement et son profil de risque réel que ce qu'il exprime à l'assureur.

La connaissance de l'assureur, du processus de raisonnement qui peut pousser un assuré à arbitrer son épargne et de son niveau de connaissance des marchés, est limitée. D'ailleurs, l'hétérogénéité observée sur le marché dans la définition des taux attendus montre l'absence de consensus sur la caractérisation des comportements des assurés.

Aussi, l'assureur ne dispose pas d'une information complète de la situation financière évolutive de l'assuré et qui peut avoir un impact sur son comportement : situation fiscale, revenus, patrimoine, carrière...

Enfin, l'assureur n'est pas en mesure d'anticiper totalement les objectifs d'investissement des assurés dans un environnement économique et fiscal en changement permanent (ex.

objectif de succession ou d'utilisation du contrat d'assurance comme « livret » d'épargne à court terme compte tenu de la baisse des taux des livrets bancaires¹⁶).

Un rachat prive l'assureur de sa marge future et peut générer des pertes si l'assuré ne reste pas suffisamment longtemps pour couvrir les frais engagés par l'assureur pour souscrire le contrat. Par symétrie, quand la « *moneyness* » profite à l'assuré, la baisse des rachats coûte à l'assureur.

Asymétries d'information entre l'assureur et l'assuré

L'expérience de l'assureur, sa capacité à mieux mesurer la rentabilité du contrat et son risque (et le mutualiser) créent de fait des asymétries d'information dont une liste non-exhaustive est présentée ci-après :

- **La politique d'investissement** : l'assureur connaît parfaitement son actif (sous-jacent aux options vendues aux assurés). La politique discrétionnaire de gestion de celui-ci rend difficile l'anticipation, par les assurés, des flux futurs du sous-jacent sur toute la vie du contrat. En effet, la politique d'allocation et de *stock-picking* est mise à jour régulièrement par l'assureur et la composition de l'actif (donc du sous-jacent) peut changer à sa discrétion.
- **La politique de pilotage de la richesse** : l'assureur peut piloter les plus-values latentes (PVL) de son portefeuille obligataire avec la réserve de capitalisation¹⁷. Par exemple, dans un contexte de taux négatif, une obligation OAT achetée avant la politique d'assouplissement monétaire de la BCE est en PVL et affiche des coupons intéressants. Ces coupons profitent aux assurés sous forme de produits financiers si cette obligation n'est pas vendue. Si celle-ci est vendue, la PVL dote la réserve de capitalisation (assimilable aux fonds propres) et constitue pour l'assureur, un moyen de couvrir partiellement le risque de hausse des taux. L'assuré est, cependant, privé d'un surplus de revalorisation.
- **La politique de revalorisation de l'assureur** : elle est à sa discrétion et n'est pas figée dans l'espace (par exemple, la décision de revaloriser certains contrats plus que d'autres), ni dans le temps (par exemple, changement des objectifs de ROE).
- **La capacité de calcul** de l'assureur cumulée à sa meilleure connaissance des actifs et des passifs fait qu'il est mieux informé de la « *moneyness*¹⁸ » des contrats. L'assureurs peut profiter de cette information pour lancer des campagnes de rachats (*buy-back*) des contrats en incitant les assurés à sortir moyennant des bonus. L'assureur profite ainsi d'une opportunité d'arbitrage lui permettant de payer moins cher ses engagements au passif¹⁹.
- **La connaissance de la concurrence** : l'assureur dispose également d'une meilleure connaissance de la concurrence et peut, en conséquence, ajuster sa politique commerciale, sa gestion des investissements et sa politique de revalorisation afin d'avoir une meilleure optimisation de sa marge.

¹⁶ Cf. par exemple LES ECHOS [2020].

¹⁷ La réserve de capitalisation est une provision technique admise comme élément de fonds propres sous Solvabilité 2.

¹⁸ Cf. ARMEL et PLANCHET [2019] pour une définition de cette notion dans le cas des contrats d'épargne en euros.

¹⁹ Cf. LES ECHOS [2016] pour un exemple de campagne de *buy-back*.

Autres asymétries d'information

Il existe une asymétrie d'informations naturelle entre les assureurs concurrents sur le marché de l'épargne en euros. Cela concerne, par exemple, les profils de rendements / risques des assureurs, l'attitude et l'évaluation du marché entre concurrents, la nature des actifs et des passifs, les politiques de revalorisation, etc.

La prise en compte dans le modèle de valorisation Solvabilité 2 des anticipations, que fait l'assureur de la position de ses concurrents, se matérialise par l'introduction d'un taux, dit de la concurrence, dans l'algorithme de revalorisation. On observe cependant une hétérogénéité entre assureurs pour le choix et l'objectivation de ce taux (cf. section I.2.4).

Enfin, on peut noter qu'il y a naturellement des asymétries d'information entre l'assureur et le réassureur, ainsi qu'entre l'assureur et les investisseurs compte tenu d'une meilleure connaissance par l'assureur de son profil de rendement / risque.

Les asymétries d'information observées sur le marché de l'assurance impliquent systématiquement la présence d'opportunités d'arbitrage. Par ailleurs, EYRAUD-LOISEL [2019] montrent que le caractère incomplet du marché est dû non seulement à un manque d'actifs de réplication, mais aussi à un manque d'information. L'incomplétude du marché de l'épargne en euros peut s'expliquer donc au moins par l'incapacité à répliquer les flux et l'asymétrie d'information. La construction d'un portefeuille de réplication auto financé pour couvrir les options et les garanties du passif ne peut être envisagée que de façon partielle (cf. section I.3.2).

1.3.1.3 La rationalité des agents

À l'évidence, si tous les agents sont rationnels, au sens de la théorie financière, l'efficience informationnelle prévaut. En effet, si chaque agent est capable d'évaluer correctement les prix, aucune valorisation ne peut dévier de la « juste » valeur du contrat. Les agents rationnels sont alors des preneurs de prix et leurs comportements sont coordonnés par ce dernier. Cependant, l'irrationalité des agents peut rendre les prix inefficients et créer donc des opportunités d'arbitrages.

Après une revue de littérature synthétique sur l'hypothèse de rationalité des agents, nous présentons quelques limites spécifiques à l'assurance vie dans cette section.

1.3.1.3.1 Qu'est-ce qu'être rationnel ?

L'axiomatisation achevée par SAVAGE [1954] suppose que tout individu, face à un choix, connaît l'ensemble de ses actions possibles, ainsi que la liste exhaustive des circonstances (états de la nature) susceptibles de l'affecter. Il lui suffit de choisir l'action lui permettant d'atteindre la satisfaction la plus élevée possible optimisant ainsi son utilité.

Plusieurs travaux empiriques réfutent la théorie de l'utilité espérée. Les critiques empiriques se focalisent notamment sur l'hypothèse de la cognition des individus (KAHNEMAN et TVERSKY [1974]). La théorie de l'utilité espérée dote, en effet, les agents de capacités cognitives importantes. Or, les individus ne peuvent pas déterminer l'action optimale, car ils n'ont ni les capacités de recueil et d'analyse de l'information, ni les capacités de calcul nécessaires.

SIMON [1976] propose une redéfinition de la rationalité et oppose les concepts de rationalité substantielle et rationalité procédurale.

L'hypothèse de rationalité substantielle est celle proposée par la théorie économique standard : l'agent maximise l'espérance mathématique d'une fonction d'utilité donnée. Cette conception est qualifiée de substantielle car le jugement de rationalité ne porte que sur le résultat de la décision. Elle s'oppose à l'hypothèse de rationalité procédurale, qui s'intéresse au processus de délibération qui conduit à une décision. Une décision est alors jugée rationnelle, si le processus qui l'a engendrée est rationnel.

Par ailleurs, la rationalité limitée est une notion critique de la maximisation de l'utilité espérée. Avant d'opposer rationalité substantielle et rationalité procédurale, SIMON [1947] oppose rationalité illimitée et rationalité limitée. Mais si les rationalités substantielles et illimitées ne correspondent qu'à une seule et même hypothèse, celle utilisée en économie, les rationalités procédurale et limitée sont distinctes.

La rationalité limitée signifie que les individus ne disposent ni de l'information, ni des capacités de calcul nécessaires pour pouvoir maximiser une fonction d'utilité. Une fois reconnu les limites cognitives des agents, il est nécessaire de déterminer les procédures de décision suivies par les agents, puisque celle-ci transparaissent alors dans leurs comportements : la recherche, l'évaluation et l'ordonnancement des différentes actions envisageables procèdent d'un processus de délibération. La rationalité limitée n'est qu'une caractérisation négative de la rationalité, dont l'aspect positif est la rationalité procédurale (BATIFOULIER et al. [2001]).

Dans une vision Keynésienne de la coordination, l'agent ne fait pas que calculer lors de la délibération procédurale conduisant à une décision, il interprète. Il sélectionne, en effet, les informations qu'il juge principale pour formuler sa décision. On parle alors de rationalité interprétative (BATIFOULIER et al. [2001]).

1.3.1.3.2 La rationalité des agents sur le marché de l'épargne

En raison du manque de données disponibles, la caractérisation des comportements des assurés générant des arbitrages financiers optimisateurs de l'utilité est un sujet délicat. Comme expliqué dans la section 1.2.4, la majorité des acteurs suppose que le rachat dynamique dépend d'une fonction de satisfaction mesurée comme la simple différence entre un taux servi et un taux attendu. Ce dernier n'est pas simple à caractériser et sa définition diffère d'ailleurs d'un acteur à l'autre.

Les risques de rachats structurels et de rachats massifs en assurance-vie ont été analysés dans de nombreuses publications actuarielles comme MILHAUD et al. [2010] et LOISEL et MILHAUD [2011].

À ce jour, aucune publication ne permet de caractériser parfaitement le phénomène de rachat dynamique, motivé par une volonté d'arbitrage financier pour optimiser l'espérance du gain.

Par ailleurs, le parallèle que l'on peut faire entre les paniques bancaires et les rachats dynamiques n'est pas totalement pertinent, dans la mesure où les deux phénomènes ont des motivations différentes et que les leviers des assureurs sont différents de ceux du secteur bancaire. D'ailleurs, les rachats importants que l'on a observés sur le marché français étaient localisés, ne concernant que quelques rares assureurs, et faisaient suite à une dégradation de leur réputation (cf. BOREL-MATHURIN et al. [2018]).

SEJOURNE [2006] montre, par ailleurs, que les comportements des épargnants (rachats, arbitrages, versements, investissements) ne correspondent pas à ceux d'agents

économiques rationnels (rationalité substantielle) et bien informés. Il ne caractérise pas, cependant, le processus et la rationalité des assurés engendrant des arbitrages financiers en assurance vie.

L'incapacité des assureurs à caractériser de façon complète le phénomène de rachats dynamiques rend son anticipation complexe. Les assureurs ne peuvent anticiper les comportements des assurés que de façons partielles rendant la gestion du risque de rachats dynamiques imparfaite.

Par ailleurs, le modèle de rachats dynamiques retenu par la place, ne suppose pas que les assurés maximisent leur utilité et se place de fait dans un modèle en présence d'opportunité d'arbitrage. En effet, le modèle présenté dans la section 1.2.4 suppose que les décisions des assurés dépendent d'une fonction de satisfaction. Cette dernière est l'écart entre le taux servi et le taux attendu, et n'impliquent à aucun moment les anticipations du marché, se basant uniquement sur une analyse historique.

Aussi, les assurés souscrivant au même fonds, n'ont pas forcément les mêmes attentes car ils n'ont pas les mêmes profils (objectifs, ancienneté, patrimoine, fiscalité, etc.). La fonction de satisfaction devrait être propre à chaque assuré.

Un assuré rationnel, au sens substantiel, souhaitant racheter son contrat pour le réinvestir sur un horizon d'intérêt T , devrait à minima, à l'image de l'assureur, évaluer la valeur du *payoff* à la date T en prenant en compte (1) ses anticipations des revalorisations futures (et non-passées) à servir par son assureur (2) ses anticipations de la pénalité fiscale en cas de rachat (3) ses anticipations futurs des revalorisations des produits d'épargne concurrents et de leurs fiscalités et (4) ses risques biométriques. Ce qui peut sembler complexe compte tenu de la capacité cognitive et la capacité calculatoire des assurés.

En conclusion, le marché de l'épargne en euros est un marché où des opportunités d'arbitrage sont présentes et persistantes. Comme développé ci-dessus, cela s'explique, au moins, par la nature des contrats d'épargne et leur structure optionnelle, les asymétries d'information, la rationalité limitée (ou l'irrationalité) des agents et la structure du marché de l'épargne.

En présence d'opportunités d'arbitrage, il n'existe pas de mesure de probabilité « risque-neutre », rendant les prix martingale.

Aussi, la réplication des engagements d'assurance ne peut être que partielle sur le marché et la mesure de probabilité « risque neutre », si elle existe, n'est pas forcément unique. Ce point est discuté dans la section suivante.

1.3.2 Réplication des flux

1.3.2.1 Les flux des contrats d'épargne en euros sont partiellement répliquables

La cohérence des approches financières pour calculer des prix se trouve dans l'équivalence, dans un monde respectant l'absence d'opportunité d'arbitrage, entre prix et valeur initiale d'un portefeuille de couverture. Le portefeuille de couverture, convenablement géré, possède la propriété qu'il annule le risque associé à l'incertitude sur le flux : la valeur à maturité de ce portefeuille est égale au montant du flux à honorer, quel que soit l'état du monde. Bien entendu, cette situation est idéalisée et nécessite des hypothèses non satisfaites en pratique, mais elle fournit un cadre de gestion des risques (il s'agit donc de

constituer et de gérer des portefeuilles répliquants) en contrôlant à la marge le coût des imperfections.

On peut observer sur ce point que l'article fondateur de Black et Scholes (BLACK et SCHOLES [1973], TANKOV [2011] et TOUZI et TANKOV [2012]) obtient le prix du dérivé en construisant explicitement une stratégie de réplication de son flux.

Dans un contexte d'assurance, un lien direct peut-être effectué entre des dérivés vanilles et le contrat d'assurance pour les garanties introduites dans les contrats en unité de compte (cf. BRENNAN et SCHWARTZ [1976]). Le premier exemple, pour lequel la réglementation française a prévu l'utilisation de la formule de Black-Scholes dès la fin des années 1990, est celui des garanties « plancher », garantissant le remboursement *a minima* du montant investi en cas de décès de l'assuré. Les actuaires ont alors analysé le lien entre probabilité « risque neutre » et probabilité historique en s'intéressant à la gestion des risques de ce type de contrats (cf. MERLUS et PEQUEUX [2000], FRANZ et al. [2003]), ainsi que la question de la gestion pratique de la couverture (NTEUKAM et al. [2011]). Les contrats à annuités variables en constituent la généralisation la plus directe (BAUER et al. [2007], COLEMAN et al. [2005]). Dans tous ces cas, un lien explicite direct est effectué entre la valorisation de l'engagement et la manière de gérer l'actif en représentation de cet engagement. Aux imperfections de couvertures strictement financières, s'ajoutent les fluctuations induites par la mutualisation imparfaite des risques d'assurance (mortalité, longévité, rachat, etc.).

Pour les contrats d'épargne en euros, en revanche, l'actif n'est ni cantonné, ni géré en fonction des options identifiées au passif. En effet, si dans le cas des garanties sur des contrats en unités de compte, l'assureur met effectivement en place des couvertures financières, il n'en est pas de même pour des contrats en euros. Dans ce dernier cas, s'il existe une politique de couvertures ponctuelles pour des situations extrêmes, notamment en termes d'environnement de taux, aucun portefeuille de réplication n'est mis en place face aux provisions *best estimate*. Cela serait, d'ailleurs, peu efficace, coûteux et conduit de fait à une déconnexion entre la logique d'évaluation (qui fournit la valeur d'une couverture) et la gestion du risque (absence de mise en œuvre effective de la couverture). La formule de calcul d'un *best estimate* présente donc bien, dans ce contexte, un caractère normatif.

Par ailleurs, la couverture des risques techniques (rachat, mortalité, versement, etc.) est réalisée partiellement en investissant sur des supports obligataires ou avec la souscription de contrat de réassurance.

Les assureurs vie disposent en effet de modèles ALM²⁰ (calculs en probabilité historique) permettant la prise en compte des contraintes de gestion du portefeuille (écart de durée entre l'actif et le passif, le *cash-flow matching*, rendement cible, marge cible, etc.) pour construire une allocation stratégique respectant l'appétit au risque de l'assureur (le risque n'étant pas nul). L'alignement de l'actif sur une nouvelle allocation stratégique, peut néanmoins, s'étaler sur plusieurs mois (voire années).

La couverture des flux de rachats dynamiques est complexe car leur caractérisation est partielle et leur anticipation par l'assureur est limitée (cf. section 1.3.1.2.2 et 1.3.1.3.2).

²⁰ ALM : Asset and Liability Management.

Aussi, la réplique de la politique de gestion des assureurs par des actifs et des dérivés est partielle, car le processus de participation aux bénéficiaires est subjectif et n'est figé ni dans l'espace, ni dans le temps. Il implique également des opérations et des provisions comptables rendant complexe la mise en pratique d'une couverture financière.

Mais, peut-on répliquer le passif, si l'assureur adopte une gestion financière en distribuant le taux de rendement financier de son actif, dans un cadre où les rachats dynamiques sont constants ?

Cette question est discutée dans le chapitre II et une synthèse est présentée dans la section suivante.

1.3.2.2 Contrat d'épargne en euros et réplique des flux : exemple des options par cliquets

Dans un cadre où les rachats dynamiques sont constants et où l'assureur distribue le rendement financier de son actif, on peut montrer que le *best-estimate* peut s'écrire comme la somme d'options par cliquets dont le sous-jacent est l'actif de l'assureur et dont le notionnel intègre, notamment, les provisions mathématiques, les probabilités de sortie, les frais et les chargements.

Dans le cas où les risques assurantiels de mortalités et de rachats structurels sont parfaitement mutualisés avec une volatilité faible, la couverture des options et des garanties des contrats d'épargne en euros revient à une couverture des flux de l'actif sur le marché financier. Cela consiste à construire un portefeuille de réplique des options par cliquets dont le sous-jacent est l'actif de l'assureur.

En pratique, cette réplique est complexe. Les assureurs détiennent, en effet, certains actifs peu liquides (comme des *private-equities*, des obligations privées et de l'immobilier) et sur des maturités significatives (comme des obligations et des investissements en infrastructures). Ils peuvent, néanmoins, avoir recours à des mécanismes de couvertures partielles en étudiant les corrélations des actifs détenus, avec les indices de référence des marchés financiers.

1.3.3 Peut-on retenir une mesure risque neutre pour la valorisation des passifs ?

L'utilisation pratique d'une évaluation « risque neutre » est adaptée et devrait être limitée au marché des dérivés (cf. EL KAROUI et al. [2017]). Cela nécessite à la fois de couvrir les flux et de mettre à jour quotidiennement toutes les mesures de probabilité, les modèles, les prix et les positions.

On peut observer, en effet, que cette approche d'évaluation suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage et suppose que les flux du contrat soient entièrement répliquables (puisque l'on calcule ainsi la valeur du portefeuille de couverture à l'origine). Ce qui s'avère inexact et conduit d'ailleurs logiquement à d'importantes difficultés de mise en œuvre des techniques de « portefeuilles répliquants » pour ce type d'engagements.

Comme discuté ci-dessus, des opportunités d'arbitrage persistent dans le marché de l'épargne et la réplique des flux des passifs ne peut être que partielle. Le marché est donc incomplet. L'utilisation d'une mesure de probabilité « risque neutre » pour la valorisation des passifs est donc discutable.

Enfin, sur le plan pratique, l'utilisation d'une mesure « risque neutre » se traduit par une difficulté de mise en œuvre à laquelle sont confrontés les praticiens. Le passage de la probabilité « historique » à celle « risque neutre » consiste à augmenter la probabilité de survenance des événements défavorables pour l'investisseur de manière à refléter son aversion pour le risque. Or, les règles de gestion implémentées dans les modèles de valorisation ne sont pas adaptées aux situations dans lesquelles les taux atteignent des niveaux considérés comme irréalistes. L'utilisation d'un déflateur stochastique, permettant d'utiliser des scénarios historiques, constitue une piste de résolution de cette difficulté. Ce point est développé dans la section V.

La section suivante présente sommairement les pratiques de génération de scénarios économiques « risque-neutre » de la place, et notamment les taux d'intérêt, destinés à évaluer le passif dans un cadre *Marked-to-Model*. Ensuite, sont présentées les sensibilités du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et des données de calibrage sous la mesure « risque-neutre ». Enfin, nous présentons un calcul du *best-estimate* sous la probabilité historique et sa sensibilité aux choix des données de calibrage du modèle de taux.

I.4 Génération de scénarios économiques et courbe de taux

I.4.1 La génération de scénarios économiques

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un modèle mathématique reproduisant l'environnement économique. Il est utilisé pour produire des simulations du comportement joint des valeurs du marché financier et des variables économiques sur un horizon d'intérêt.

En assurance, un GSE permettant de valoriser des obligations, des actions, des investissements en immobilier et des titres monétaires couvre 98 % de l'actif des entreprises d'assurance et permet de diffuser les taux sans risque (cf. [Tableau I.1](#)).

Le processus de génération de scénarios économiques destiné à l'évaluation du *best-estimate* peut être synthétisé en trois étapes (cf. ARMEL et PLANCHET [2018]) :

1. L'environnement de modélisation : il s'agit de choisir la mesure de probabilité et les variables économiques à modéliser.
2. Les modèles : il s'agit de construire les modèles mathématiques des variables d'intérêt. Cela consiste à choisir les modèles qui vont représenter la dynamique individuelle de ces variables et le choix du modèle qui représente le co-mouvement.
3. Les paramètres et le calibrage : il s'agit de choisir les produits financiers dérivés pour les calibrages, les données, les méthodes d'estimation statistique des paramètres des modèles et des méthodes de validation.

I.4.2 Pratiques de génération de scénarios économiques

I.4.2.1 Un cadre de valorisation *Marked to Model*²¹

L'application d'une approche *Marked-to-Market* pour évaluer le *best-estimate*, dans les contrats d'épargne en euros, implique de disposer des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé, profond et liquide, le calcul est réalisé dans un cadre *Marked-to-Model*.

Il en résulte que le calibrage et la validation du générateur de scénarios économiques (GSE) par une confrontation des résultats issus des simulations aux données observées, dans le cadre d'une démarche statistique, ne peuvent être envisagés.

Solvabilité 2 impose néanmoins, que le GSE soit *Market Consistent*²², c'est-à-dire, cohérent avec les prix observés (voir par exemple EL KAROUÏ et al. [2017] pour une analyse critique de la *Market-Consistency*). Les spécifications techniques QIS5 [2010] précisent qu'un calibrage *Market-Consistent* doit se présenter comme suit (TP.2.97) :

- Le modèle d'actifs doit être calibré pour refléter la nature et la durée des passifs, en particulier les passifs intégrant des garanties et des options.
- Le modèle d'actifs doit être calibré en prenant en compte la courbe de taux sans risque utilisée pour actualiser les flux de trésorerie.
- Le modèle d'actifs doit être calibré à une mesure de la volatilité pertinente.

I.4.2.2 La convention de calibrage des modèles de taux sans risque

En pratique, les praticiens se contentent de calibrer et d'apprécier le GSE en référence aux instruments financiers (*calls, puts, caps, floors, swaptions, etc.*) dérivés des facteurs de risque modélisés sans justifier l'adéquation de ces instruments aux options du passif (cf. chapitre III pour une présentation de ce processus de calibrage et des exigences réglementaires). Ce calibrage est dynamique et est cohérent avec les exigences actuelles de la réglementation Solvabilité 2.

Le choix du modèle de diffusion de la structure par termes des taux d'intérêt est un élément central de la construction d'un GSE « risque neutre ». Face aux contraintes réglementaires et en l'absence de prix observables des passifs des contrats d'épargne en euros, une convention de calibrage des taux sans risque s'est établie²³. Cette convention peut se synthétiser en quatre étapes :

1. **Les modèles et les instruments financiers dérivés** : choix du modèle de taux et choix des produits dérivés pour son calibrage : *caps, floors, swaptions...*
2. **Les prix d'exercice et les volatilités implicites** : choix d'un prix d'exercice et extraction des volatilités de marché²⁴. Celles-ci correspondent aux volatilités

²¹ Le lecteur peut se référer aux chapitres II et III pour une présentation détaillée du cadre et du processus quantitatif d'évaluation du *best-estimate* des contrats d'épargne en euros.

²² Cf. par exemple WÜTRICH [2016].

²³ Cf. le Q&A du QIS 5, publié par l'EIOPA, question 76 du document <https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/CEIOPS-Q-and-A-document-20101104.pdf>

²⁴ Les surfaces de volatilité ne résultent pas forcément d'une mesure de prix directe, mais d'une reconstruction par le fournisseur de prix (par exemple via un modèle SABR pour Bloomberg).

implicites des produits dérivés choisis à l'étape 1. Elles sont cohérentes avec la courbe de taux sans risque du marché.

3. **La valorisation des produits dérivés** en utilisant la courbe publiée par l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) : utilisation du modèle de Black (si les volatilités sont implicites à un modèle log-normal) ou du modèle de Bachelier (si les volatilités sont implicites à un modèle normal) pour l'évaluation d'un prix des instruments dérivés en utilisant la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA. Ce sont ces prix qui vont jouer le rôle de « prix de marché » pour calibrer le modèle de taux retenu.
4. **Le calibrage du modèle de taux retenu** en minimisant une distance entre : (1) les prix réestimés à partir de la courbe de taux EIOPA et les volatilités de marché, et (2) les prix théoriques du modèle de taux.

Les limites de cette convention sont détaillées dans le chapitre III.

I.4.3 Analyse des sensibilités du *best-estimate* aux modèles de taux « risque neutre »

Le choix du modèle de diffusion de la structure par termes des taux d'intérêt est un élément central de la construction d'un GSE « risque neutre ». Une comparaison entre les modèles de Hull et White, G2++ et LMM+ est présentée au chapitre III et complétée avec l'analyse des modèles CIR++ et CIR2++ au chapitre IV.

Une synthèse des choix retenus pour la construction des générateurs de scénarios économiques est présentée ci-après (*Figure I.9*).

Figure I.9 : Choix de modélisation

1 Environnement de modélisation				
Mesure	Risque neutre			
Variables économiques	Taux d'intérêt sans risque	Action	Immobilier	
2 Modèles mathématiques				
Modèles univariés	CIR++ CIR2++	Hull & White G2++	LMM	Black-Scholes Black-Scholes
Structure de dépendance	Matrice de corrélation extraite de données historiques			
3 Paramètres				
Instruments	Caps & Swaptions sur Euribor	Swaptions sur Euribor	Calls sur CAC40	Données historiques
Données : périodicité & profondeur	Données annuelles sur 10 ans Données observées le 02 Jan 2018		3 ans	12 ans
Méthode d'optimisation	Distance Euclidienne (distance L2)			Volatilité historique

Le *Tableau I.3* montre les résultats des sensibilités du *best-estimate* aux choix (1) du modèle de taux, (2) des données de calibrage (*cap* et *swaptions*), et (3) du facteur de décalage du modèle de Black utilisé dans le processus de calibrage. Cependant, le modèle LMM, calibré

sur les données observées au 2 janvier 2018, n'a pu être retenu du fait de sa divergence. La version retenue dans les tests de sensibilité est un modèle ajusté et convergent, qui n'est donc plus « *market consistent* ».

Tableau I.3 : comparaison des best-estimates

Best-estimate en M€	Ecart-type	Min	Max	Ecart (Max-Min)/Moyenne
Modèles de type CIR market-consistant : CIR++ et CIR2++	0,77%	90,54	92,37	2,00%
Modèles normaux market-consistant (HW & G2 ++)	1,20%	87,48	91,36	4,30%
Modèles market-consistant : CIR+, CIR2+, HW & G2++	1,13%	87,48	92,37	5,38%
Tous les modèles yc LMM ajusté	1,06%	87,48	92,37	5,38%

On peut retenir en synthèse de ces travaux que les modèles G2++ et CIR2+ constituent des solutions performantes pour les calculs de valeurs *best estimate*, avec un degré de complexité bien supérieur pour le CIR2++ sans gain majeur en termes de capacité à représenter les prix de marché. Le LMM+ décalé, utilisé par certains assureurs, est inadapté du fait des problèmes de convergence et du caractère arbitraire du décalage qu'il est nécessaire d'introduire pour prendre en compte les taux négatifs.

D'une manière générale, on peut observer que, parmi les modèles ci-dessus, ceux initialement conçus pour éviter les taux négatifs ont été adaptés à ce nouveau contexte économique en introduisant un décalage qui, par un simple glissement de l'origine sur l'axe des abscisses, permet de laisser le modèle inchangé. Cet ajustement a été effectué initialement dans l'urgence, pour permettre d'utiliser des outils informatiques en place, dont la modification peut prendre du temps (BEINKER et STAPPER [2012] illustrent sur ce point la position des conseils en finance au début de la période de taux négatifs). Mais l'absence de justification théorique du décalage et son caractère arbitraire devrait conduire à exclure ces modèles dans une perspective plus pérenne.

Par ailleurs, l'impact du choix des modèles de taux sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître, d'abord, assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 5,4 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 7,0 % des provisions mathématiques.

Cet impact est substantiel s'il est comparé aux fonds propres et aucun critère indiscutable ne permet, à ce stade, de préférer l'un ou l'autre des modèles ci-dessus, une fois le modèle LMM exclu du fait de son absence de convergence. ARMEL et PLANCHET [2019] montrent, par ailleurs, que la capacité d'un modèle de taux à reproduire les prix de *floorlets* et, par extension, les prix de *caps*, peut être considérée comme un critère de choix des modèles de taux destinés à valoriser les passifs des contrats d'épargne en euros.

S'il semble délicat de remettre en cause à court terme la logique de calcul qui s'est imposée, ces dernières années, dans le cadre du nouveau dispositif prudentiel, il peut cependant être utile de réfléchir à des approches alternatives, potentiellement utilisables dans le cadre de l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*). En effet, l'approche usuelle de calcul d'un *best estimate* est peu adaptée à l'ORSA compte tenu de sa lourdeur de mise en œuvre et des besoins en capacité de calcul qu'elle requiert. Au surplus, cela peut apparaître paradoxal que l'application du dispositif Solvabilité 2 conduise à des montants de provision sans ancrage dans une politique de gestion des risques et, en ce sens, largement arbitraires (en tous cas au moins aussi arbitraires que les provisions mathématiques actuelles).

Dès lors, on peut chercher à analyser de manière plus fine l'articulation des composantes répliquables et non répliquables du rendement servi par le contrat. Une approche de ce type est, par exemple, proposée dans BONNIN et al. [2014]. Le développement de GSE, dans ce contexte, est discuté dans GOURIEROUX et MONTFORT [2015].

On peut également envisager l'utilisation des déflateurs comme solution technique, imparfaite, mais permettant de donner du sens à la notion de « valeur économique » (voir par exemple le chapitre V, ARMEL et PLANCHET [2020b], CHENG et PLANCHET [2019] et CISSE [2019]). Si cette approche ne change rien d'un point de vue théorique (si les hypothèses d'AOA et de complétude sont vérifiées, cf. section 1.3), elle présente toutefois plusieurs intérêts pratiques importants :

- Les scénarios économiques utilisés pour les simulations sont injectés dans un modèle ALM implémentant les règles comptables et les décisions discrétionnaires de l'assureur (attribution de participation aux bénéficiaires) et de l'assuré (rachat) : l'utilisation d'un déflateur permet d'injecter dans ce modèle ALM des scénarios générés sous la probabilité historique, ce qui rend possible la justification des fonctions de réaction (calcul du taux cible et détermination des rachats conjoncturels notamment) ; cette justification est, en effet, impossible avec des scénarios « risque neutre », où l'on est conduit à donner un poids important à des scénarios très peu probables historiquement (cf. section V.3.4).
- Elle permet une séparation complète de la valorisation (calcul de prix), intégrée dans le noyau d'actualisation et de la construction des flux, dans le modèle ALM. Le calibrage du noyau d'actualisation à partir de dérivés vanille est ainsi plus légitime que dans le cas de l'utilisation d'une mesure « risque neutre ».

La sous-section suivante présente une étude de sensibilité du *best-estimate* au changement de la mesure de probabilité.

1.4.4 Évaluation en probabilité historique et sensibilité aux données de calibrage

Le chapitre V complète les tests de sensibilité présentés dans les chapitres III et IV en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique, dont le modèle de taux est le modèle CIR++, sur le *best-estimate* des contrats d'épargne en euros. Des sensibilités aux choix des données et du facteur de décalage du modèle de Black, utilisé dans le processus de calibrage, ont été réalisées également.

Afin d'évaluer ces impacts, nous avons repris les mêmes modèles et paramètres d'évaluation des passifs présentés dans le chapitre V.

Nous avons retenu, par ailleurs, une approche de calibrage (1) implicite pour les paramètres des modèles, et (2) historique pour la prime de risque. Cette démarche conduit à séparer de manière nette la détermination du coût des options, incluses dans le déflateur et la production des flux du contrat. Elle respecte également les exigences du régulateur.

En effet, bien que le modèle théorique suppose que les paramètres historiques et les paramètres implicites soient égaux, ils sont différents en pratique. Les paramètres calibrés sur des données historiques dépendent des choix de ces données (indice, taille, fréquence,

etc.). Les paramètres implicites dépendent du prix des instruments financiers, du prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque et éventuellement des facteurs de décalage utilisés pour permettre aux modèles de prendre en compte des taux négatifs. Aussi, comme évoqué plus haut, les surfaces de volatilité implicites ne résultent pas forcément d'une mesure de prix directe, mais d'une reconstruction par le fournisseur de prix (par exemple via un modèle SABR pour Bloomberg). Ce point est discuté dans REBONATO [2004].

Par ailleurs, dans le référentiel Solvabilité 2, les scénarios économiques utilisés pour l'évaluation du *best-estimate* doivent être cohérents avec les prix du marché (*Market-Consistent*) et les spécifications techniques QIS [2010] font référence à un calibrage des modèles en prenant en compte les volatilités implicites²⁵.

Sous la probabilité historique, nous constatons que les *best-estimates* sont peu sensibles aux facteurs de décalage du modèle de valorisation de Black et aux choix des produits dérivés pour le calibrage. Le *Tableau 1.4* montre, en effet, que l'écart entre les valeurs minimales et maximales représente 2 % de la valeur moyenne des *best-estimates*.

Tableau 1.4 : comparaison des best-estimates RN-PH

<i>Best-estimate en M€</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Ecart (Max-Min)/Moyenne</i>
Modèle CIR++ en probabilité historique	0,68%	85,03	86,74	1,99%
Modèle CIR++ et modèle CIR2++ en probabilité risque neutre	0,77%	90,54	92,37	2,00%
Tous les modèles market-consistant (RN et PH) : CIR++, CIR2++, HW & G2++	2,42%	85,03	92,37	8,08%
Tous les modèles yc LMM ajusté	2,32%	85,03	92,37	8,08%

Si l'on reprend les résultats de sensibilités présentés dans chapitre III et IV, il ressort du *Tableau 1.4* que l'impact sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market-consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 8,1 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 10,5 % des provisions mathématiques. Cet impact est, cependant, substantiel s'il est comparé aux fonds propres. En effet, ces derniers représentent en moyenne 6,1 % des encours des contrats d'épargne en euros, en France, à fin 2018 (cf. *Tableau 1.2*).

1.4.5 Analyse des écarts entre les best-estimates en probabilités historique et « risque-neutre »

Il ressort de l'analyse des valorisations réalisées avec des GSE sous la probabilité historique et des GSE risque-neutres dont les modèles de taux sont des modèles CIR++ que la baisse des *Best-estimates*, évalués en probabilité historique, s'expliquent notamment par l'étalement des rachats sur l'horizon de projection à la suite de la baisse des rachats dynamiques. Quand on retient une approche par les déflateurs, on constate en effet que l'espérance des flux garantis est plus faible sur la quasi-totalité de l'horizon de projection et que leur duration est plus importante comme le montre le *Tableau 1.5*.

²⁵ Cf. le Q&A du QIS 5, publié par l'EIOPA, question 76 du document : <https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/CEIOPS-Q-and-A-document-20101104.pdf>

Tableau I.5 : Durations des flux et étalement des rachats²⁶

Duration flux garantis en année	Calibrage sur des Caps ATM			Calibrage sur des Swaptions ATM		
	0,4%	1,0%	2,0%	0,4%	1,0%	2,0%
Facteur de décalage Black au calibrage CIR++						
Evaluation sous Q	8,2	8,2	8,1	8,2	8,2	8,4
Evaluation sous P	9,0	9,1	9,3	9,2	9,2	9,0
Ecart	0,8	1,0	1,1	1,0	0,9	0,5

Les rachats dynamiques sont donc plus importants quand la valorisation des engagements est réalisée sous la probabilité risque-neutre. Par conséquent, l'algorithme de revalorisation de l'assureur, sous la probabilité historique, est moins contraint à distribuer un surplus de la richesse disponible pour tenter de baisser les rachats dynamiques lui permettant ainsi d'améliorer sa marge (quand la *moneyness* lui est favorable). Ayant moins de rachat l'assiette des chargements sur encours est plus importante, ce qui se traduit par le transfert d'une partie de la richesse vers les fonds propres économiques et par la baisse du *best-estimate*.

Une analyse détaillée est proposée dans la section V.3.4.

1.5 Conclusion

Les travaux de mise en place des modèles de calcul de provisions *best estimate* pour des contrats d'épargne et, plus largement, des contrats avec une clause de participation aux bénéfices (financiers) ont abouti à une forme de consensus de place articulant un générateur de scénarios économiques « risque-neutre » avec un modèle de projection de flux.

Cette structure de modèle présente l'avantage de permettre une prise en compte aisée de règles de gestion potentiellement complexes décrivant le pilotage du taux servi en fonction d'une part des conditions de marché et d'autre part de la situation propre de l'assureur (notamment en termes de volume de plus ou moins-values latentes).

Elle repose toutefois sur l'approximation discutable que les flux associés à ces contrats sont répliquables dans un marché sans opportunités d'arbitrage, ce qui implique des difficultés de mise en œuvre des modèles et induit une inadéquation forte entre le principe d'évaluation et la gestion des risques associée au contrat.

Par ailleurs, en présence d'opportunités d'arbitrage dans un marché incomplet, l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité « risque-neutre » ne sont plus assurées. L'utilisation de cette probabilité pour valoriser les passifs d'épargne en euro paraît donc inadaptée et l'évaluation devrait donc être réalisée sous la probabilité historique.

Le chapitre suivant (chapitre II) montre d'ailleurs que, par construction, le prix des passifs d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices, conditionnellement au risque, n'est pas unique. Il propose également une écriture mathématique de la valeur et explicite, sur le plan quantitatif, la structure optionnelle implicite aux contrats. Il définit aussi le lien entre cette structure optionnelle et les modèles de génération de scénarios économiques et établit des critères de qualité de ces modèles.

Les chapitres III et IV proposent une démarche de construction de générateurs de scénarios économiques risque-neutres respectant les exigences réglementaires Solvabilité

²⁶ Le *best-estimate* garanti (BEG) est l'espérance des flux sortants intégrant la garantie de taux actualisés.

2 et se placent dans le cadre conventionnel retenu par les praticiens. Les modèles développés ont été utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et des données utilisées pour leur calibrage.

Le chapitre V propose une démarche alternative de construction et de calibrage des GSE aux pratiques conventionnelles du marché. Elle consiste à construire un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique respectant les exigences réglementaires Solvabilité 2.

II. Valorisation des passifs d'épargne participatifs et génération de scénarios économiques

Appliquer une démarche *Mark-to-Market* pour évaluer les engagements de l'assureur en juste valeur, pour les contrats d'épargne participatifs, implique de disposer des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est réalisé dans un cadre *Mark-to-Model*.

Le calibrage et la validation du générateur de scénarios économiques (GSE), utilisé pour la valorisation des passifs, par une confrontation des simulations aux données observées, dans le cadre d'une démarche statistique, ne peuvent être envisagés.

Comme discuté au chapitre I, les praticiens retiennent une mesure de probabilité « risque-neutre » et se contentent de calibrer et d'apprécier le GSE en référence aux instruments financiers (*caps, floors, swaps...*) dérivés des facteurs de risque modélisés sans justifier la relation de correspondance (ou de bijection) entre ces instruments financiers et les options des passifs.

Ce chapitre propose une écriture mathématique de la valeur des passifs d'épargne avec une clause de participation au bénéfice. Il explicite, sur le plan quantitatif, la structure optionnelle implicite aux contrats. Il définit également le lien entre cette structure optionnelle et les modèles de génération de scénarios économiques et établit des critères de qualité de ces modèles.

II.1 Préambule

II.1.1 Valorisation des passifs des contrats d'épargne en €

Le marché de l'épargne en € s'est développé en France dans un contexte institutionnel et fiscal favorable. Les contrats d'épargne bénéficient d'une fiscalité réduite sur les revenus et sur les successions qui incite les ménages à une détention de ces produits sur le long terme. En l'absence de fonds de pension en France, l'assurance vie a fourni un cadre comptable et fiscal aux ménages, aux employeurs et aux institutions de prévoyance pour organiser l'épargne retraite en complément du système obligatoire par répartition.

Comme précisé dans l'annexe VIII.1, les options proposées dans les contrats d'épargne en € classiques peuvent être synthétisées en trois catégories :

- Options financières : l'assureur s'engage sur une rémunération minimale de l'épargne en garantissant un taux minimal de revalorisation ou une PB garantie.
- Options comportementales : l'assureur propose des options de rachat, d'arbitrage, de versement libre ou programmés, bonus de fidélité... L'activation de ces options est à l'appréciation de l'assuré.
- Options biométriques : sont les options dépendant du risque de mortalité (ou longévité) comme la proposition par l'assureur d'une garantie de table si l'assuré transforme son épargne en rente.

Du point de vue de l'assuré (cf. BRYs et de VARENNE [1994]) :

- L'option de taux technique ou de PB garanti peut être assimilée à une option vanille européenne ;
- L'option de rachat peut être assimilée à une option de vente américaine ;
- L'option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés, peut être assimilée à une *swaption*.

Instituée par la Commission Européenne, la directive Solvabilité 2 impose entre autres le calcul en « juste valeur » des passifs d'assurance. Cette valorisation, implique l'évaluation des options et garanties proposées par l'assureur dans ses contrats.

La valorisation « économique » correspond au *best-estimate* (flux futurs actualisés) et est complétée, le cas échéant, d'une marge de risque compensant l'immobilisation du capital de solvabilité requis des risques non-couvrables (se traduisant par un coût du capital des risques non-financiers ou des imperfections de couverture pour les risques financiers)²⁷.

L'article 77 de la directive solvabilité 2 introduit le concept de *best-estimate* et le définit comme la « *moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendues des flux de trésorerie futur), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinent* ».

²⁷ Comme précisé au chapitre I, les questions liées aux calculs de la marge de risque ne seront pas abordées dans ce rapport. Nous ne ferons donc pas la distinction dans la suite entre les termes *best-estimate* et « valeur du passif ».

La valorisation du passif des contrats en € implique notamment la prise en compte de deux sources de risques :

- Des risques couvrables liés aux marchés financiers.
- Des risques non-couvrables liés notamment aux risques techniques : risques biométriques, comportement client...

Les actions de management de l'assureur interviennent notamment dans le pilotage du rendement (comptable) servi aux assurés. Elles sont des fonctions des facteurs de risque.

Les projections de flux de trésorerie doivent également intégrer, dans les contraintes des limites de contrats : les primes futures, la réassurance, les prestations futures (décès, cessions, rentes, ...), les charges futures (frais administratifs, frais de gestion, ...) et l'impôt à terme.

Le calcul du *best-estimate* doit prendre en compte :

- Les options financières et garanties des contrats ;
- La structure biométrique ;
- Le comportement des assurés ;
- L'impact des actions de management sur les options du contrat ;
- Une modélisation appropriée des risques sous-jacents et de leur structure de dépendance.

Aussi, les hypothèses de construction des flux doivent être définies avec une granularité suffisamment fine et l'agrégation des contrats doit se faire en groupes présentant des risques homogènes.

L'évaluation des options et des garanties financières, la diffusion des flux futurs de trésorerie des contrats d'épargne en € et la construction de la courbe des taux sans risque nécessitent la mise en place d'un générateur de scénario économique stochastique (GSE).

II.1.2 Générateur de scénarios économiques pour calculer le *best-estimate*

Les générateurs de scénarios économiques (GSE) peuvent produire, sur plusieurs horizons, des scénarios matérialisant l'impact des différents facteurs de risques économiques et financiers, tels que les taux d'intérêt, le taux d'inflation, le rendement des actions, le rendement de l'immobilier, sur les prix des actifs.

Appliquer une démarche *Mark to Market* pour évaluer le *best-estimate* en juste valeur implique de disposer *a priori* des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est donc mené dans un cadre *Mark-to-Model*. Dans ce cadre, le GSE est calibré par les praticiens non pas sur les options et garanties du contrat d'assurance mais sur des produits financiers (*caps, floors, swaptions...*). Sa qualité est appréciée par sa capacité à reproduire les prix de ces produits financiers.

Solvabilité 2 impose néanmoins, que le GSE soit *Market Consistent*²⁸, c'est-à-dire, cohérent avec les prix observés des actifs (voir par exemple EL KAROUI et al. [2017] pour une analyse

²⁸ Cf. par exemple WÜTRICH [2016].

critique de la *Market-Consistency*). Les spécifications techniques QIS5 [2010] précisent qu'un calibrage *Market-Consistent* doit se présenter comme suit (TP.2.97) :

- Le modèle d'actifs doit être calibré pour refléter la nature et la durée des passifs, en particulier les passifs intégrant des garanties et des options.
- Le modèle d'actifs doit être calibré en prenant en compte la courbe de taux sans risque utilisée pour actualiser les flux de trésorerie.
- Le modèle d'actifs doit être calibré à une mesure de la volatilité pertinente.

Les orientations élaborées par l'EIOPA (cf. ACPR [2015] - orientations 55 à 60) présentent en complément un certain nombre de contraintes qu'un GSE doit satisfaire. Il y est notamment précisé que :

- Les instruments financiers retenus pour calibrer les GSE doivent être pertinents eu égard aux caractéristiques des options et garanties financières proposées par l'assureur ;
- Les données doivent provenir de marchés financiers qui soient profonds, liquides et transparents. Les résultats fournis par le GSE doivent être cohérents avec les données du marché financier (règlement délégué article 76).

II.1.3 Problématique

La capacité d'un modèle à bien représenter l'instrument financier qu'il modélise constitue un critère de respect de la cohérence avec les valeurs de marché. Les modèles devraient donc être choisis et calibrés pour représenter au mieux les prix des instruments financiers retenus dans le processus de modélisation. Ils ne sont par ailleurs pas destinés à représenter correctement les prix d'autres instruments de structure différente. En d'autres termes, le GSE, est propre à l'objectif (valoriser un instrument financier) pour lequel il est construit (cf. sur ce point FELIX et PLANCHET [2015]).

Dans cette logique, le processus de génération de scénarios économiques devrait être validé en appréciant sa capacité à reproduire le prix des options des contrats d'épargne en €. Or ces valeurs ne sont pas observables. La validation du GSE par une comparaison des résultats du modèle aux prix observés ne peut donc être envisagée. Les praticiens se contentent alors d'apprécier le GSE en le confrontant aux instruments financiers qui ont servi à sa fabrication sans justifier la relation de correspondance ou de bijection entre ces instruments financiers et les options du passif.

Se pose alors la question de la pertinence de l'approche de modélisation des générateurs de scénarios économiques destinés à valoriser les passifs des contrats d'épargne participatifs.

Par ailleurs, le processus de génération de scénarios économiques pour la valorisation du *best-estimate* dans le cadre d'une approche *mark-to-model* peut être synthétisé en trois étapes (cf. chapitre III, IV et V) :

1. L'environnement de modélisation : il s'agit de choisir les variables économiques à modéliser. La mesure retenue par les praticiens est la mesure de probabilité risque neutre.

2. Les modèles : il s'agit de construire les modèles mathématiques des variables d'intérêt. Cela consiste à choisir les modèles qui vont représenter la dynamique individuelle de ces variables et le choix du modèle qui représente le co-mouvement.
3. Les paramètres et calibrages : il s'agit de choisir les produits financiers dérivés pour les calibrages, les données, les méthodes d'estimation statistique des paramètres des modèles et des méthodes de validation.

Les implications du choix de la mesure risque neutre sont discutés au chapitre I. Ce sont les étapes 2 et 3 qui seront discutées dans ce chapitre II qui s'organise comme suit :

- La section II.2 propose une formalisation du cadre théorique du calcul du *best-estimate* et propose une reformulation quantitative de la problématique ;
- La section II.3 propose une analyse de la structure optionnelle du *best-estimate* et cherche à construire un lien entre cette structure et le modèle de génération de scénarios économiques.

Notons par ailleurs que les chapitres 0, IV et V présentent des études de sensibilités du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et de leur calibrage sous la mesure risque-neutre et sous la probabilité historique.

II.2 Reformulation quantitative de la problématique

II.2.1 Introduction

Deux sources d'aléas, représentées par deux espaces probabilisés filtrés, sont distinguées :

- $(\Omega^f, (F_t^f)_{t \geq 0}, Q)$ ²⁹: pour les risques financiers qui peuvent être couvrables³⁰ ;
- $(\Omega^a, (F_t^a)_{t \geq 0}, P)$ pour les risques d'assurance qui ne sont pas couvrables. On peut éviter le recours à l'utilisation de cette probabilité (sauf pour les rachats dynamiques) en introduisant l'espérance conditionnelle des flux sachant les facteurs de risque financiers.

Le *best-estimate* des contrats en € calculé à un instant t s'écrit (LAURENT et al. [2016]) :

$$BE(t) = E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=t}^{+\infty} F_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right)$$

où r_i est le taux sans risque à terme à l'échéance i .

Le flux F_i est la somme des paiements versés aux assurés et des frais diminués des primes et des chargements :

$$F_i = \text{Paiements}_i^{\text{bruts}} - \text{Primes}_i + \text{Frais}_i - \text{Chargements}_i$$

En pratique, l'évaluation du *best-estimate* se fait dans un cadre de calcul Monte-Carlo et le calcul des flux s'arrête à un horizon de projection T . Le *best-estimate* à l'instant 0 s'écrit donc comme une moyenne de $M \times N$ trajectoires simulées ; M représentant les trajectoires

²⁹ Q ne désigne pas ici forcément une mesure de probabilité « risque neutre ».

³⁰ Ou répliquables, les 2 termes sont employés ici sans distinction.

des variables financières sous la probabilité Q et N le nombre de trajectoires des risques non-couvrables sous la probabilité P :

$$BE(0) = E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T F_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right) = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=0}^T F_{i,m,n} \cdot \exp(-i \cdot r_{i,m}) \right)$$

Pour les risques mutualisables, le calcul de l'espérance est en général simple. On peut éviter le recours aux simulations dans les simulations en introduisant des flux moyens comme le montre la section II.2.2.3.

En l'absence de primes futures le *best-estimate* s'écrit :

$$BE(0) = E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Paiements}_i^{\text{bruts}} \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right) - E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Chargements}_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right) + E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Frais}_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right)$$

Sans perte de généralité, on suppose dans la suite que les chargements prélevés par l'assureur sont égaux aux frais engagés pour la gestion des contrats. Le cas général où les frais sont différents des chargements peut se déduire directement de ce qui suit en décomposant le taux de chargement en taux de frais sur encours et en marge sur chargements (positive ou négative). On peut écrire alors :

$$E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Chargements}_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right) = E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Frais}_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right)$$

et :

$$BE(0) = E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Paiements}_i^{\text{bruts}} \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right)$$

En distinguant les flux nets et les frais, on écrit donc :

$$BE(0) = \underbrace{E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Paiements}_i^{\text{nets}} \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right)}_{\text{Terme 1 : paiements nets}} + \underbrace{E^{P \otimes Q} \left(\sum_{i=0}^T \text{Frais}_i \cdot \exp(-i \cdot r_i) \right)}_{\text{Terme 2 : prix du contrat/frais}}$$

Le *best-estimate* peut s'écrire donc comme la somme de deux termes :

- Terme 1 : représentant les flux futurs nets payés aux assurés comprenant les options et garanties proposés par l'assureur ;
- Terme 2 : représentant les chargements encaissés par l'assureur et sont égaux aux frais engagés par celui-ci. Ce terme peut s'interpréter comme le prix du contrat et intègre implicitement le prix des options et garanties.

Le *best-estimate* s'écrit donc : $BE(0) = BE^{\text{net}}(0) + BE^{\text{frais}}(0)$. Dans la suite nous nous intéressons d'abord au *best-estimate* calculé sur la base des taux de revalorisation nets de chargements. La meilleure estimation des frais est ensuite explicitée.

Il est noté que le calcul du *best-estimate* dans la norme Solvabilité 2 est réalisé sur des portefeuilles en *runoff* (les contrats futurs sont hors périmètre).

II.2.2 Cadre théorique

II.2.2.1 La valeur de rachat

L'assureur rémunère chaque instant u l'épargne en € de l'assuré d'un taux de revalorisation de l'épargne net de chargements instantané noté c_u . Ce taux de rémunération est le résultat d'une décision du management prenant en compte notamment le taux de rendement de l'actif, la richesse disponible de l'assureur et le taux minimum garanti.

La valeur de rachat d'un contrat d'épargne, noté $VR(t)$ s'écrit en fonction de la provision mathématique à l'instant 0 et des taux de revalorisation net de chargements comme suit (cf. BONNIN et al. [2014]) :

$$VR(t) = PM(0) \times \exp \left\{ \int_0^t c_u \cdot du \right\}$$

La valeur actuelle de la valeur de rachat à l'instant t s'écrit :

$$VR(t) \cdot \delta(t) = PM(0) \times \exp \left\{ \int_0^t c_u \cdot du - \int_0^t r_u \cdot du \right\} = PM(0) \cdot \psi(t)$$

où $\delta(t) = \exp \left(- \int_0^t r_u \cdot du \right)$ et r_u est le taux d'intérêt court instantané.

En cas de sortie du contrat, donc en cas de décès ou de rachat, la valeur versée par l'assureur est égale à $VR(\tau)$ ou τ désigne l'instant (aléatoire) de sortie du contrat.

La valeur actuelle du flux sortant est donc :

$$\Lambda = VR(\tau) \cdot \delta(\tau)$$

La variable aléatoire τ est supposée être le temps d'arrêt de la filtration naturelle associée au processus des valeurs de rachats ($VR(t), t \geq 0$).

Le *best-estimate* à l'instant 0 pour un contrat d'épargne en € s'écrit :

$$BE^{net}(0) = E^{P \otimes Q}(\Lambda)$$

Le lecteur peut se référer à PRUDENT [1996] qui présente un cadre similaire pour la valorisation des clauses de rachats anticipés.

II.2.2.2 Formule continue du best-estimate net de chargements

On peut distinguer deux sources d'aléas sous la probabilité P :

- Une composante P^a représentant les risques purement techniques liés aux risques d'assurance - rachat structurel et mortalité - que l'on suppose mutualisables et indépendants des marchés financiers. Soit θ_1 l'ensemble des paramètres définissant ces risques. Ce paramètre comprend donc les tables de mortalité et les courbes de rachat.
- Une composante P^h représentant les risques liés aux comportements dynamiques des assurés, dépendant des taux de revalorisation. Ces comportements sont supposés indépendants des risques techniques (donc de P^a). La réaction des assurés aux taux de revalorisation est caractérisée par une fonction de rachat conjoncturel dont les paramètres sont représentés par le vecteur θ_2 .

La réaction de l'assureur aux taux de rendements de l'actif et aux anticipations des comportements des assurés prend la forme d'actions de gestion, sur la base d'un taux comptaible, dont la résultante est le taux servi. Le vecteur de paramètres de cette fonction de réaction est représenté par θ_3 .

Soit par ailleurs θ_4 le vecteur de paramètres des risques financiers. Cela représente les paramètres du GSE (tendance, volatilités, vitesse de retour à la moyenne...).

On note $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ l'ensemble des paramètres du modèle de calcul.

Soit h la fonction de hasard représentant le taux de sortie instantané. Cette fonction est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+)^n$ vérifiant pour tout $(t, u_t) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+)^n$:

$$S(t, u_t) = \exp\left(-\int_0^t h(t, u_t) dt\right)$$

$$d\ln(S(t, u_t)) = -h(t, u_t) dt$$

où :

- $S(t, u_t)$ est la fonction de survie définie sur $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+)^n$;
- t représente le temps ;
- u_t est une variable caractérisant les rachats conjoncturels. Elle peut représenter les n derniers taux servis à l'instant t entrant dans le calcul de la fonction de satisfaction des assurés. Le facteur n peut s'interpréter comme le temps de réaction aux taux servis.

La fonction de hasard et la fonction de survie ont comme paramètres θ_1 et θ_2 .

Soit : $BE^a(0) = E^{P^a}(\Lambda)$, alors :

$$BE^a(0) = E^{P^a}(\Lambda) = \int_0^{+\infty} \Lambda. dP^a = \int_0^{+\infty} -\Lambda. dS(t, u_t) = \int_0^{+\infty} \Lambda. S(t, u_t) h(t, u_t) dt$$

Donc :

$$BE^a(0) = PM(0). \int_0^{+\infty} \psi(t). S(t, u_t) h(t, u_t) dt$$

Il s'en suit que :

$$BE^{net}(0) = E^{P \otimes Q}(\Lambda) = E^{P^h \otimes Q}(BE^a(0))$$

$$BE^{net}(0) = PM(0). E^{P^h \otimes Q} \left(\int_0^{+\infty} \psi(t). S(t, u_t) h(t, u_t) dt \right)$$

Ce qui s'écrit en explicitant les vecteurs de paramètres du modèle :

$$BE^{net}(0|\theta) = PM(0). E^{P^h \otimes Q} \left(\int_0^{+\infty} \psi(t|\theta_3, \theta_4). S(t, u_t|\theta_1, \theta_2) h(t, u_t|\theta_1, \theta_2) dt \right)$$

En notant :

$$\alpha(\theta) = E^{P^h \otimes Q} \left(\int_0^{+\infty} \psi(t|\theta_3, \theta_4). S(t, u_t|\theta_1, \theta_2) h(t, u_t|\theta_1, \theta_2) dt \right)$$

S'établit alors la relation de proportionnalité suivante :

$$BE^{net}(0|\theta) = PM(0) \cdot \alpha(\theta)$$

II.2.2.3 Formule discrétisée du best-estimate net de chargements

Sur un horizon de projection fini noté T le best-estimate discrétisé s'écrit :

$$BE^{net}(0) = PM(0) \cdot E^{Ph \otimes Q} \left(\sum_{t=1}^T \frac{l_{t-1}}{l_0} \cdot R(t-1) \cdot (q_{t-1} + v_{t-1} - q_{t-1} \cdot v_{t-1}) \cdot \psi(t) + \frac{l_T}{l_0} \cdot R(T) \cdot \psi(T) \right)$$

avec :

- q_t taux de mortalité entre t et $t + 1$.
- v_t taux de rachat entre t et $t+1$. Ce taux comprend le rachat conjoncturel et le rachat structurel.
- $R(t) = \prod_{j=1}^{t-1} (1 - v_j)$ et $R(0) = 1$ est la part non-rachetée de l'épargne entre 0 et t .
- $\psi(t) = \exp\{\sum_{i=1}^t c_i - \sum_{i=1}^t r_i\}$ avec :
 - o c_i : le taux de revalorisation de l'épargne net de chargements à la date i . Ce taux doit être supérieur au taux minimum garanti ;
 - o r_i est le taux sans risque pour la période entre $i - 1$ et i .

II.2.2.4 La meilleure estimation des frais

Soit ι le taux de frais/chargements annuel constant appliqué à l'épargne acquise. Comme précisé ci-dessus, ce taux correspond également au taux de frais. Le montant de frais engagés par l'assureur entre t' et t , s'écrit :

$$I(t, t') = VR(t') \cdot \exp\left(\int_{t'}^t c_u \cdot du + (t - t') \cdot \iota\right) - VR(t') \cdot \exp\left(\int_{t'}^t c_u \cdot du\right)$$

donc :

$$I(t, t') = VR(t) \cdot (\exp((t - t') \cdot \iota) - 1) \simeq (t - t') \cdot \iota \cdot VR(t)$$

Pour $t' = t - 1$ on peut écrire :

$$I(t) = I(t, t') = VR(t) \cdot (\exp(\iota) - 1) \simeq VR(t) \cdot \iota \simeq \iota \cdot PM(0) \cdot \exp\left(\int_0^t c_u \cdot du\right)$$

En suivant le même raisonnement que la section précédente et en gardant les mêmes notations, la meilleure estimation des chargements/frais discrétisée à pas annuel s'écrit :

$$BE^{frais}(0) = (\exp(\iota) - 1) \cdot PM(0) \cdot E^{Ph \otimes Q} \left(\sum_{t=1}^T \frac{l_t}{l_0} \cdot R(t) \cdot \psi(t) \right)$$

Donc :

$$BE^{frais}(0|\theta) = (\exp(\iota) - 1) \cdot PM(0) \cdot \beta(\theta) \simeq \iota \cdot PM(0) \cdot \beta(\theta)$$

II.2.2.5 La formule discrétisée du best-estimate

Notons :

- $f_t = \frac{l_{t-1}}{l_0} \cdot R(t-1) \cdot (q_{t-1} + v_{t-1} - q_{t-1} \cdot v_{t-1})$: la probabilité de sortie entre $t-1$ et t ;
- $g_t = \frac{l_t}{l_0} \cdot R(t)$: la probabilité de présence à l'instant t .

Les grandeurs f_t et g_t sont stochastiques car elles intègrent les rachats conjoncturels.

Sur un horizon de projection fini noté T le best-estimate discrétisé s'écrit :

$$BE(0) = BE^{net}(0) + BE^{frais}(0)$$

donc :

$$BE(0) = PM(0) \cdot E^{Ph \otimes Q} \left(\sum_{t=1}^T (f_t + \iota g_t) \cdot \psi(t) + g_T \cdot \psi(T) \right)$$

II.2.3 Reformulation quantitative de la problématique

Pour simplifier les notations, reprenons la relation de proportionnalité démontrée dans les sections précédentes :

$$BE(0|\theta) = PM(0) \cdot (\alpha(\theta) + \iota \cdot \beta(\theta))$$

Dans l'hypothèse où les paramètres suivants sont prédéfinis :

- Le vecteur θ_1 : tables de mortalité et courbes de rachat structurel. Ces risques sont supposés être parfaitement mutualisés et ne dépendent pas des risques financiers.
- Le vecteur θ_2 : l'ensemble des paramètres de la fonction de réaction des assurés aux taux servis (par exemple la fonction proposée dans les ONC, cf. ACPR [2013]). La fonction de réaction prend comme arguments des rendements financiers et la résultante est donc aléatoire.
- Le vecteur θ_3 : l'ensemble des paramètres de la fonction de réaction de l'assureur aux comportements des assurés et aux taux de rendements de l'actif (actions de gestion). La fonction de réaction prend comme arguments des rendements financiers. La résultante est donc aléatoire.

Dans un cadre où les fonctions de réaction sont déterministes, la structure stochastique du best-estimate dépend uniquement du vecteur de paramètres θ_4 du GSE.

Dans ce cadre, on écrit par simplification :

$$BE(0|\theta) = PM(0) \cdot (\alpha(\theta_4) + \iota \cdot \beta(\theta_4))$$

On pose :

$$\lambda(\theta_4) = (\alpha(\theta_4) + \iota \cdot \beta(\theta_4)) = \frac{BE(0|\theta)}{PM(0)}$$

II.2.3.1 Méthode de calibrage standard

En général, le GSE devraient être choisis et calibrés pour représenter au mieux les prix des instruments financiers retenus dans le processus de modélisation. Dans ce cadre, calibrer un GSE pour calculer le *best-estimate* revient à :

- Choisir une mesure de distance³¹ noté d ;
- Construire le vecteur des observations λ^{obs} ;
- Construire le vecteur des prix théoriques λ^{th} ;
- Calibrer le modèle en choisissant θ_4 tel que : $\hat{\theta}_4 = \underset{\theta_4}{\operatorname{argmin}}(d(\lambda^{obs}, \lambda^{th}(\theta_4)))$.

On peut trouver des applications de ce processus assez classique en modélisation financière dans ARMEL et PLANCHET [2018] et dans des publications de référence comme BRIGO et MERCURIO [2001] ou HULL [2007].

II.2.3.2 Méthode de calibrage conventionnelle

En épargne, l'application du processus standard se heurte à une limite majeure : le *best-estimate* est un prix qui n'est pas observé. Il n'existe pas de marché d'échanges des passifs d'assurance des contrats d'épargne en *runoff*.

Face à la nécessité, réglementaire notamment, de calculer le *best-estimate* et l'incapacité de calibrer les GSE par le processus standard, une convention de valorisation s'est établie (cf. chapitre III).

Cette convention consiste notamment à calibrer le GSE sur les prix de produits financiers échangés sur le marché jouant le rôle de substitut au *best-estimate*. Les paramètres du GSE sont déduits ensuite par l'optimisation suivante :

$$\hat{\theta}_4 = \underset{\theta_4}{\operatorname{argmin}}(d(prod_fi^{obs}, prod_fi^{th}(\theta_4)))$$

L'hypothèse sous-jacente à cette pratique est l'équivalence entre certaines options financières et les options des passifs des contrats d'épargne participatifs. Cette hypothèse ne peut cependant être vérifiée car le *best-estimate* n'est pas observable.

Se posent alors les questions de la définition et l'évaluation de la qualité des générateurs de scénarios économiques destinés à valoriser les passifs des contrats d'épargne participatifs.

³¹ Pour rappel la distance de Minkovski d'ordre p entre deux vecteur $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ réels s'écrit : $d(X, Y) = \sqrt[p]{\sum_1^n |x_i - y_i|^p}$ et pour $p = +\infty$, $d(X, Y) = \sup(|x_i - y_i|)$. On retrouve un cadre similaire pour les fonctions mesurables dans les espaces de Lebesgue.

II.3 Peut-on construire un GSE cohérent avec la structure optionnelle des passifs des contrats d'épargne participatifs ?

II.3.1 Analyse qualitative de la construction du *best-estimate*

II.3.1.1 Richesse initiale de l'assureur

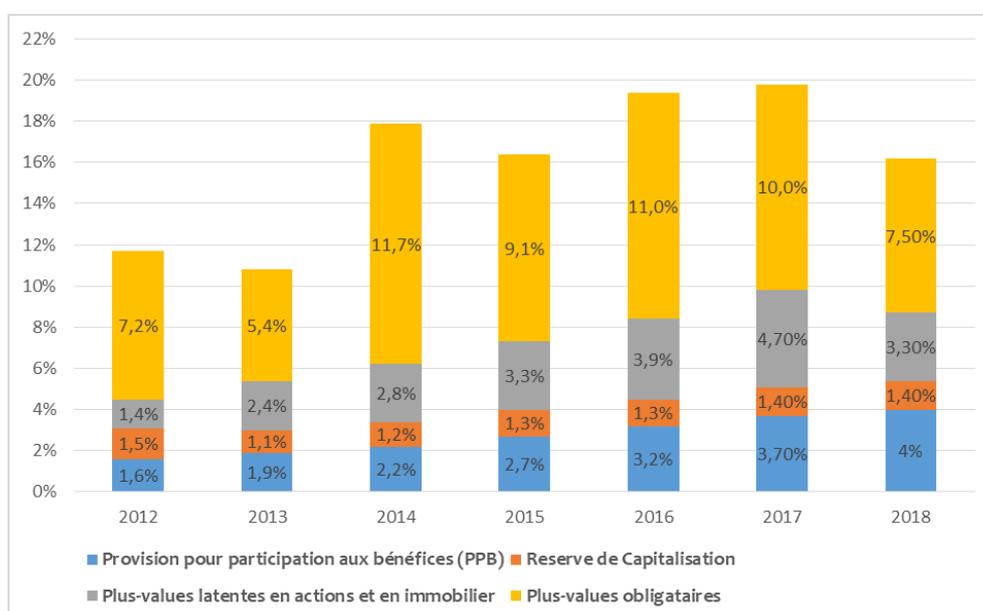
Les contrats futurs sont exclus du périmètre d'évaluation du *best-estimate*. En outre, si les contrats d'épargne ne contiennent pas de garanties financières prédéterminées pour tous les versements futurs, ce qui est en général le cas des contrats d'épargne classiques, les primes futures ne peuvent être prises en compte dans le périmètre d'évaluation (ACPR [2013]). La valorisation du *best-estimate* épargne en € est donc effectuée dans un cadre supposant que l'assureur arrête son activité commerciale et se contente de gérer son encours.

Les assurés, dont l'épargne acquise à la date d'évaluation 0 est la provision mathématique $PM(0)$, peuvent profiter d'une richesse initiale cumulée par l'assureur. Cette dernière se présente comme suit :

- La provision pour participation aux bénéfices qui est totalement acquise aux assurés. Sa distribution est à la discrétion de l'assureur. La valeur initiale de cette provision est notée $PPB(0)$;
- Les plus ou moins-values latentes générées par la gestion comptable des taux de revalorisation déjà distribués. La valeur initiale est notée $PMVL(0)$;
- Les provisions de pilotage des rendements comptables comme la réserve de capitalisation, la provision pour aléas financiers et la provision pour risque d'exigibilité. Ces provisions sont à la discrétion de l'assureur. Leur valeur initiale est notée $PR(0)$.

La *Figure II.1* illustre l'importance de la richesse initiale cumulée par les entreprises régies par le code des assurances sur le marché français (cf. FFA [2017]).

Figure II.1 : richesse initiale des assureurs sur le marché français de 2012 à 2016



En 2018, la richesse initiale maximale moyenne des assureurs vie est d'au moins 16,1 % des encours des fonds en euros. Ce qui est comparable à trois fois les fonds propres cumulés (cf. [Tableau I.2](#)).

La richesse initiale acquise totalement aux assurés est de 4,0 %. Ainsi, la richesse initiale pouvant être distribuée par l'assureur sans obligation réglementaire et à sa discrétion peut varier théoriquement dans un intervalle dont le diamètre représente 12,1 % des encours en 2018. Ce qui est comparable à deux fois les fonds propres cumulés des assureurs vie en 2018 comme le montre le [Tableau I.2](#).

Une erreur additive de 6 % sur l'intégration de la richesse initiale et sa distribution dans les flux futurs représente en moyenne une variabilité du *best-estimate* comparable aux fonds propres cumulés des assureurs vie.

Dans un univers de gestion des contrats en *runoff*, les actifs seront cédés progressivement pour servir des taux de revalorisation comptables ou pour honorer les flux sortants. La valeur latente initiale sera progressivement distribuée en partie aux assurés et intégrée aux flux futurs à la discrétion de l'assureur. Celui-ci partage par ailleurs les bénéfices comptables réalisés sur la cession d'actifs dans les limites réglementaires et contractuelles des clauses de participation aux bénéfices.

La valeur latente initiale et actuelle maximale pouvant être distribuée aux assurés est $PMVL_{max} = PMVL(0)$ ³². La valeur minimale dépend de plusieurs paramètres comme la politique de gestion du rendement comptable, de la performance de l'actif, des clauses de distribution de la participation aux bénéfices et de la politique de dotation/reprise des provisions de pilotage des rendements. Si, par exemple, l'assureur décide de ne réaliser les PMVL que pour les distribuer aux assurés, alors le minimum réglementaire devant être distribué est :

$$PMVL_{min} = 85\% PMVL(0)$$

Dans tous les cas, il existe des $PMVL_{min} \leq PMVL(0)$ tel que :

$$PMVL_{min} \leq PMVL_{distribuée} \leq PMVL_{max}$$

Les provisions de pilotage de rendements comptable seront par ailleurs dotées ou reprises au fur et à mesure de la cession de l'actif et de la réalisation des valeurs latentes. Leur distribution est discrétionnaire et dépend de la politique d'investissement de l'assureur. Ces provisions viennent moduler les rendements financiers de l'actif.

Si certaines provisions de pilotage sont non-nulles à la fin de la projection des flux, l'assureur se réserve le droit de ne pas les verser aux assurés (exemple : la réserve de capitalisation). Le montant maximal actuel pouvant être distribué aux assurés est donc $PR_{max} = PR(0)$. Le montant minimal actuel pouvant être distribué dépend de la politique de l'assureur et peut être nul : $0 \leq PR_{min} \leq PR(0)$.

Notons :

$$Richesse_{min}^{init}(0) = PPB(0) + PMVL_{min}(0) + PR_{min}(0)$$

³² La valeur de marché de l'actif est égale à la valeur comptable augmentée des valeurs latentes. La somme des flux futurs actualisés de l'actif en valeur de marché est égale à la valeur actuelle (AOA). En gestion *runoff*, la totalité de l'actif sera distribuée. La somme des flux futurs comptables actualisés est égale à l'actif actuel en valeur de marché et donc égal à la valeur actuelle comptable de l'actif plus les valeurs latentes.

$$Richesse_{max}^{init}(0) = PPB(0) + PMVL_{max}(0) + PR_{max}(0)$$

Ainsi, la somme des flux futurs actualisés que l'assureur doit distribuer est d'au moins (avec l'hypothèse sous-jacente d'AOA) :

$$PM(0) + Richesse_{min}^{init}(0)$$

Les assurés profitent ou subissent donc un effet mémoire sur l'actif géré par l'assureur. Si la richesse initiale incorporée aux flux futurs est positive, la valeur actuelle de ces flux est supérieure à leur investissement initial ($PM(0)$). Si cette richesse est négative (dans le cas de moins-values latentes significatives par exemple), les assurés rationnels peuvent :

- Garder leurs contrats si la garantie offerte par l'assureur est significative. Dans ce cas, l'assureur peut être contraint d'engager ses fonds propres pour servir les taux garantis ;
- Arbitrer ou racheter leur épargne acquise.

On peut donc supposer que la somme des flux futurs actualisés distribués par l'assureur est dans tous les cas supérieure ou égale à la $PM(0)$.

Par ailleurs, l'assureur rationnel cherchera à maximiser son utilité espérée et évitera de verser plus que la richesse initiale maximale afin d'éviter d'engager ses fonds propres. Pour ce faire, la valeur économique de son engagement minimal envers les assurés doit être inférieure à la provision mathématique augmentée de la richesse initiale maximale.

Cette valeur économique consiste à évaluer la somme des flux futurs minimaux garantis et s'avère nécessaire pour apprécier l'équilibre économique des contrats d'épargnes gérés. C'est ce que nous appelons dans la suite : *best-estimate* contractuel minimal.

II.3.1.2 Valorisation du *best-estimate* contractuel minimal

Nous définissons le *best-estimate* contractuel comme la somme des flux futurs garantis actualisés. Il correspond au scénario où l'assureur verse les taux minimums sur lesquels il s'est engagé (ou il compte s'engager).

Soit $TMG = \{tmg_i\}_{i \in [1, T]}$ la courbe anticipée des taux minimums garantis tel que tmg_i est le taux garanti anticipé déterministe entre les date $i - 1$ et i .

Reprenons les notations de la section II.2.2.3. Par définition, nous avons donc : $c_i = tmg_i$ pour chaque date i .

Les chroniques de f_t et de g_t , supposés dépendre du taux de revalorisation (via le rachat dynamique), des tables de mortalité et de rachats structurels, sont déterministes quand les taux de revalorisation sont déterministes.

Notons par ailleurs que :

$$E^{P^h \otimes Q}(\psi(t)) = \exp\left(\sum_{i=1}^t tmg_i\right) E^Q\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^t r_i\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^t tmg_i\right) \cdot P(0, t)$$

Donc :

$$BE_{contr}(0) = PM(0) \cdot \sum_{t=1}^T \left(f_t^{(tmg_i)} + \iota g_t^{(tmg_i)} \right) P^M(0, t) \cdot \exp \left(\sum_{i=1}^t tmg_i \right) \\ + g_T^{(tmg_T)} \cdot P^M(0, T) \cdot \exp \left(\sum_{i=1}^T tmg_i \right)$$

où $P^M(0, t)$ est le prix d'une obligation zéro coupon sans risque observé sur le marché payant une unité monétaire à la maturité t et ι le taux de chargement.

Notons que :

- Cette écriture du *best-estimate* contractuel ne dépend pas de modèles de génération de scénarios économiques ;
- Le *best-estimate* contractuel représente l'engagement minimal de l'assureur. Il indique notamment le niveau de la garantie quand les taux promis sont significatifs ;
- Le *best-estimate* contractuel est complètement déterminé par la politique et le tarif de l'assureur (les tmg_i et ι), la structure biométrique et la structure comportementale (les chroniques $f_t^{(tmg_i)}$ et $g_t^{(tmg_i)}$) ;
- Le *best-estimate* contractuel représente la valeur minimale obligatoire des flux futurs actualisés. Si le *best-estimate* est inférieur strictement au *best-estimate* garanti, deux cas se présentent :
 - Il existe au moins un taux de revalorisation inférieur strictement au taux garanti ce qui signifie le défaut de l'assureur ;
 - Il n'existe aucun taux de revalorisation inférieur strictement au taux garantis : cela signifie que l'origine de la baisse se trouve dans le comportement des assurés (rachat conjoncturel). Or ce comportement n'est pas rationnel dans le sens où il ne maximise pas l'utilité espérée³³.
- Le *best-estimate* contractuel peut s'interpréter comme le montant minimal que l'assureur peut investir en actifs sans risque tout en étant certain d'honorer ses engagements contractuels ;
- Le *best-estimate* contractuel permet d'étudier la *money*ness du contrat et d'évaluer l'écart entre la garantie et la valeur du rachat (cf. section VIII.2.2).

Notons que le *best-estimate* contractuel est différent du *best-estimate* garanti (BEG) tel qu'il est construit dans ACPR [2013]. Le *best-estimate* contractuel est en effet un scénario possible, notamment quand les rendements de l'actif ne sont pas suffisants pour couvrir les taux garantis. Le BEG est une valeur calculée, ne correspondant à aucun scénario possible. Elle indique la part garantie du *best-estimate* réglementaire. En effet, la méthode de calcul du BEG proposée dans ACPR [2013] se présente en quatre étapes :

- Étape 1 : extraction de la chronique des prestations non revalorisées de calcul du *best-estimate* pour chaque scénario et pour chaque pas de temps (décès, rachats structurels, rachats dynamiques...) ³⁴ ;

³³ Si les taux de revalorisations moyens sont supérieurs aux taux garantis, les assurés sont certains d'avoir un *best-estimate* supérieur au *best-estimate* garanti en gardant le même comportement $f_t^{(tmg_i)}$ et $g_t^{(tmg_i)}$.

³⁴ Cela correspond aux séries f_t et g_t introduites dans ce chapitre et qui sont des variables stochastiques.

- Étape 2 : valorisation de ces prestations par les rendements garantis. Ces rendements garantis incorporent les taux techniques et la PPB arrivée à échéance. L'épargne est diminuée annuellement des chargements contractuels éventuels ;
- Étape 3 : actualisation des flux garantis par les taux propres à chaque scénario ;
- Étape 4 : le BEG est égal à la moyenne des valeurs obtenues sur tous les scénarios.

Cette construction du BEG repose donc sur des chroniques de prestations extraites des scénarios utilisés pour le calcul du *best-estimate* en amont de l'intégration des rendements garantis. Dans ce cas les séries f_t et g_t sont dépendantes des trajectoires stochastiques. Le BEG est une indication sur la part garantie du *best-estimate* et non une mesure de l'engagement minimal de l'assureur.

En conclusion, la valeur minimale du *best-estimate* s'écrit :

$$BE_{min}(0) = \max(PM(0), BE_{contr}(0), PM(0) + Richesse_{min}^{init}(0))$$

Si l'on suppose que l'assureur maximise son utilité et veille à préserver ses fonds propres sociaux, la valeur maximale du *best-estimate* s'écrit :

$$BE_{max}(0) = \max(PM(0), BE_{contr}(0), PM(0) + Richesse_{max}^{init}(0))$$

Si $BE_{max}(0) = BE_{min}(0) = BE_{contr}(0)$ cela signifie que l'assureur mobilisera une partie de ses fonds propres pour honorer ses engagements conditionnellement à l'état du monde à la date 0.

Notons que ses deux bornes du *best-estimate* sont indépendantes des choix de modèles de génération de scénarios économiques.

II.3.1.3 Le *best-estimate* dépend de la politique de l'assureur

La politique de l'assureur impacte le niveau du *best-estimate*. L'exemple suivant illustre comment le pilotage de la richesse initiale peut avoir un impact significatif sur le *best-estimate*.

Soit deux assureurs A et B avec des caractéristiques identiques :

- Ils disposent des mêmes actifs et passifs ;
- Ils évoluent dans un même environnement économique ;
- Ils ont une richesse suffisante pour servir les taux garantis.

Ayant la même structure de portefeuille, les *best-estimates* des deux assureurs ont les mêmes bornes maximales et minimales.

Soit par exemple $BE^A(0) < BE_{max}(0)$ le *best-estimate* de l'entreprise A.

Quel que soit l'état de l'économie, l'assureur B peut choisir un *best-estimate* cible tel que : $BE^A(0) < BE_{cible}(0) < BE_{max}(0)$ en servant un *spread a* solution de l'équation suivante (cf. section VIII.2.1) :

$$BE_{cible}(0) = PM(0)E^{P^h \otimes Q} \left(\sum_{t=1}^T (f_t^a + {}_t g_t^a) \cdot \psi_a(t) + g_T^a \cdot \psi_a(T) \right)$$

avec : $\psi_a(t) = \exp\{\sum_{i=1}^t c_i - \sum_{i=1}^t r_i + t \cdot a\}$ et :

- c_i : le taux de revalorisation de l'épargne net de chargements à la date i versé par l'assureur A. Ce taux doit être supérieur au taux minimum garanti ;
- r_i est le taux sans risque pour la période entre $i - 1$ et i .

L'assureur B, par une décision discrétionnaire, partage plus de richesse initiale que l'assureur A. Le *best-estimate* de B est différent du *best-estimate* de A alors que l'exposition des deux assureurs aux risques est identique.

Cet exemple illustre qu'une action de management sur la politique de partage de richesse peut avoir un impact significatif sur le *best-estimate* fonction du niveau du *spread a*.

La différence entre le *best-estimate* de A et B peut être significatif et varier en moyenne entre 0 % et 16,1 % de la provision mathématique sur la base des statistiques de marché de 2018. Cette différence, aussi significative qu'elle puisse être, peut être définie indépendamment du modèle de génération de scénarios économiques.

II.3.1.4 Conclusion

Nous avons montré dans cette section que la politique de l'assureur peut avoir un impact significatif sur le *best-estimate* et ce quel que soit l'univers des risques biométriques, comportementaux ou économiques.

Dans un environnement de risques prédéfini, le *best-estimate* d'un portefeuille d'épargne en € n'est donc pas unique. Le transfert instantané du portefeuille d'une société à une autre change instantanément le montant du *best-estimate* si les politiques de gestion sont différentes, et ce, même si l'environnement économique reste inchangé.

Il n'existe donc pas une valeur économique d'un passif d'assurance mais une infinité de valeurs représentant chacune une politique de gestion subjective des contrats d'épargne en € par l'entreprise d'assurance. Le *best-estimate* n'est pas la valeur économique du passif. Il représente au mieux la valeur économique des engagements d'assurance conditionnellement à la politique de gestion de l'assureur.

Le processus de calibrage et de validation du générateur de scénarios économiques, utilisés pour évaluer le *best-estimate*, en comparant les simulations aux données observées dans le cadre d'une approche statistique, ne peut être considéré. En effet :

- Le *best-estimate* n'est pas observé dans un marché profond et liquide ;
- Nous pouvons obtenir différentes valeurs du *best-estimate* pour les mêmes risques sous-jacents : un marché profond et liquide pour le *best-estimate* tel qu'il est défini dans le cadre de Solvabilité 2 ne peut exister.

Par ailleurs, le *best-estimate* est borné. Ses bornes ne dépendent pas de modèles de génération de scénarios économiques.

Aussi, quel que soit le choix du GSE, il est possible de piloter les taux de revalorisation pour atteindre un *best-estimate* cible prédéfini entre la valeur minimale et la valeur maximale du *best-estimate*.

Il est donc discutable de faire le lien entre un GSE et un *best-estimate* sans préciser la politique de revalorisation de l'assureur.

Il est discutable également d'utiliser certains produits dérivés de taux pour calibrer le GSE sans établir de lien entre ces dérivés et : la structure optionnelle des engagements de l'assureur, son passif, ses actifs et sa politique.

Le *Tableau II.1* présente la répartition de l'actif des assureurs en valeur de marché à fin 2016 (source FFA [2017]).

Tableau II.1 : placements des sociétés d'assurance fin 2016

Encours des placements des sociétés d'assurances à fin 2016	En Md€	Allocation
Actions d'entreprises	401	17%
Obligations d'entreprises	907	39%
Obligations émises ou garanties par l'État	773	33%
Actifs immobiliers	97	4%
Actifs monétaires	123	5%
Autres	49	2%
Total	2 350	100%
Dont sociétés vie et mixte	2 114	90%
Dont sociétés dommages	236	10%

Un générateur de scénarios économiques permettant de valoriser des obligations, des actions, des investissements en immobilier et des titres monétaires couvre 98 % de l'actif des entreprises d'assurance et permet de diffuser les taux sans risque.

Se pose alors la question : un GSE construit et calibré pour reproduire des prix de produits dérivés tels que les *caps*, les *floors* et les *swaptions*, est-il pertinent pour la valorisation du *best-estimate* ?

Le GSE destiné à valoriser le *best-estimate* est donc destiné à évaluer les options et les garanties du contrat d'épargne. Le sous-jacent de ces options est l'actif de l'assureur. Nous cherchons dans la suite à expliciter la nature de ces options et garanties afin d'établir un lien entre le GSE et le *best-estimate*.

II.3.2 Analyse de la structure optionnelle implicite au *best-estimate* et son lien avec les GSE

II.3.2.1 Définition du périmètre et du cadre d'analyse

Comme précisé dans la section II.2.2.2, l'évaluation du *best-estimate* intègre quatre composantes :

- Composante 1 : la définition des lois de mortalité et de rachat ;
- Composante 2 : la définition de la structure comportementale des assurés ;
- Composante 3 : la définition de la structure comportementale de l'assureur ;
- Composante 4 : la construction d'un générateur de scénarios économiques.

Sans faire d'hypothèses sur les points 1, 2 et 4 nous avons montré dans la section II.3.1.3 que le *best-estimate* peut varier significativement en fonction de la politique de revalorisation de l'assureur et que cette variation peut être totalement indépendante du modèle de génération de scénarios économiques.

Plus généralement si les composantes 1, 2 et 4 sont totalement définies, alors on peut construire une correspondance entre les taux de revalorisation et des *best-estimates* cibles (cf. section II.3.1.3).

Nous pourrions généraliser ce constat comme suit :

- Le *best-estimate* ne peut être défini que si les quatre composantes ci-dessus sont définies ;
- Pour construire une correspondance entre une composante et le *best-estimate* il faut définir les 3 autres composantes ;
- Dans un processus de calibrage (des composantes 2, 3 ou 4) il faut (1) définir trois composantes et (2) disposer de valeurs du *best-estimate* pour déduire les paramètres de la composante que l'on cherche à calibrer.

Comme présenté dans la section II.2, en l'absence d'observations du *best-estimate*, le calibrage des modèles de taux est conventionnel et consiste à utiliser des produits dérivés de taux (*caps*, *swaption*...) pour inférer les paramètres.

Le lien entre ces produits dérivés et le *best-estimate* est discutable. En effet, la fonction qui lie le *best-estimate* aux paramètres du GSE dépend des composantes : 1, 2 et 3. Le paramétrage du GSE peut se révéler incohérent avec l'objectif d'évaluation du *best-estimate* si ces composantes n'interviennent pas dans le processus de calibrage.

Dans cette section nous cherchons à construire un lien entre la structure optionnelle du *best-estimate* et le modèle de génération de scénarios économiques. Notre analyse se place dans un cadre défini comme suit :

- Les risques d'assurance (rachat structurel et mortalité) : sont supposés mutualisables et indépendants de l'environnement économique et financier ;
- Comportement client : le rachat conjoncturel est supposé nul ;
- Politique de l'assureur :
 - o Politique d'investissement : l'assureur transfère directement l'investissement de l'assuré (PM) sur le marché financier. Il réalise des achats / ventes instantanés à chaque fin d'année. La composition et le profil de risque de l'actif sont stables sur toute la période de projection ;
 - o La richesse initiale se compose uniquement de la provision pour participation aux bénéficiaires et est placée sur des supports non risqués. La richesse initiale que l'assureur décide de distribuer sera liquidée à un taux fixe noté a ;
 - o Revalorisation : chaque année l'assureur revalorise l'épargne du taux de rendement financier et d'un *spread* défini à partir de la richesse initiale (a) ;
 - o Chargements et frais : l'assureur applique un taux de chargement sur l'épargne acquise. Le taux de chargements est égal au taux de frais ;
 - o Les taux minimums garantis anticipés sont notés $TMG = \{tmg_i\}_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket}$. Les taux de rendements minimaux de l'actif que l'assureur doit avoir pour honorer ses engagements sont donc $K = \{k_i\}_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket} = \{tmg_i - a\}_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket}$.

II.3.2.2 La structure optionnelle financière implicite à un contrat d'épargne en €

Notons s_t le rendement de l'actif de l'assureur. À chaque date t nous avons :

$$\begin{aligned} VR(t+1) &= VR(t) \cdot \exp(\max(k_{t+1}, s_{t+1}) + a) \\ &= VR(t) \cdot e^a \cdot e^{s_{t+1}} + VR(t) \cdot e^a \cdot \max(0, e^{k_{t+1}} - e^{s_{t+1}}) \end{aligned}$$

À chaque date $t+1$ le *pay-off* est similaire à une option de vente vanille dont le nominal est la valeur de rachat à l'instant t revalorisée du *spread* a .

Le *pay-off* dépend de l'épargne acquise à la date t . La garantie porte sur un nominal stochastique.

L'optionnalité financière présente dans le *best-estimate* est donc différente de celle de la garantie plancher. Cette dernière porte sur un nominal constant et connu à la souscription. L'évaluation du *best-estimate* d'un contrat d'épargne en € par la méthode des *puts* telle qu'elle est appliquée pour valoriser des garanties planchers est inadaptée. En effet à la date $0 < t$ la valeur garantie n'est pas déterministe. Elle dépend des rendements financiers distribués sur toute la trajectoire :

$$VR(t) = PM(0) \cdot e^{a \cdot t} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^t \max(k_i, s_i)\right)$$

L'optionnalité financière implicite à la valeur de rachat présente une structure par cliquets. Elle est donc *path-dependant*. Nous nous intéressons dans la suite à la structure financière par cliquets.

II.3.2.3 Qu'est-ce qu'une option par cliquets ?

Les options par cliquets sont des contrats dérivés qui offrent un rendement annuel minimum garanti chaque année pendant toute la durée du contrat. Ce sont des options exotiques formées d'une série d'option *forward start* consécutives.

Ces options permettent de réduire le risque de pertes tout en offrant la possibilité de profiter d'une potentielle hausse.

Le rendement s_t d'un actif, dont le processus de prix est S_t , sur une période de $t-1$ à t est :

$$s_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$

Les rendements définis par : $\bar{s}_t = \max(\min(s_t, C_t), F_t)$ sont des rendements tronqués. Ils sont plafonné à un niveau C_t et sont au minimum égaux à F_t ($F_t < C_t$). L'absence de plancher et / ou de plafond correspond à $F_t = -1$ et $C_t = +\infty$.

L'expression générale du *payoff* Z_T d'une option par cliquets de maturité T indexée sur S_t est :

$$Z_T = B \cdot \exp\left(\min\left(\max\left(\sum_{t=1}^T \bar{s}_t, F_g\right), C_g\right)\right)$$

où :

- F_g est le plancher global représentant le rendement minimal global sur toute la période de 0 à T ;
- C_g est le plafond global représentant le rendement maximal global sur toute la période de 0 à T ;
- B est le notionnel.

Pour $C_g = +\infty$, l'expression générale du *payoff* s'écrit :

$$Z_T = B \cdot \exp \left(\max \left(\sum_{t=1}^T \bar{s}_t, F_g \right) \right)$$

En posant : $F_g = \sum_{t=1}^T F_t$ et $C_t = +\infty$ on peut écrire :

$$Z_T = B \cdot \exp \left(\max \left(\sum_{t=1}^T \bar{s}_t, F_g \right) \right) = B \cdot \exp \left(\sum_{t=1}^T \max(s_t, F_t) \right)$$

Cette formule est similaire à celle explicitée pour la valeur de rachat dans la section précédente.

La valeur actuelle espérée du *payoff* d'une option par cliquets de maturité T dont le taux minimum garanti à t est F_t s'écrit :

$$Y_T = E^Q \left(\exp \left(\sum_{t=1}^T \max(s_t, F_t) - \sum_{t=1}^T r_t \right) \right)$$

Nous ne présenterons pas dans ce papier une revue de la littérature financière au sujet de la valorisation des options par cliquets. Nous nous contentons de formuler quelques constats :

- La sensibilité du prix de l'option au modèle de valorisation : WILMOTT [2002] montre que les options par cliquets sont sensibles aux modèles et aux paramètres de la dynamique de l'actif sous-jacent ;
- La sensibilité du prix de l'option aux données de calibrage : WINDCLIFF et al. [2006] explore diverses alternatives de modélisation du sous-jacent d'options par cliquets. Ils constatent qu'un modèle calibré sur des options vanilles ne permet pas nécessairement de valoriser correctement les options exotiques. En supposant que le sous-jacent suit un modèle à sauts de Merton, WINDCLIFF et al. [2006] montrent qu'une correction en aval de la volatilité implicite aux options vanilles peut entraîner plus de précision lors de la valorisation d'options par cliquets ;
- Les modèles de taux d'intérêt utilisés dans les références consultées sont essentiellement déterministes. AHLIP et RUTKOWSKI [2008] proposent une démarche d'évaluation d'options *forward start* dans un cadre où le taux d'intérêt suit un modèle CIR et où la volatilité suit un modèle de Heston ;
- Le modèle de volatilité du sous-jacent est une préoccupation assez récurrente des articles consultés ;

- KJAER [2004] présente un cas particulier d'options par cliquets et développe des formules fermées pour les valoriser sous certaines hypothèses dans le cas où les *strikes* sont constants ;
- WINDCLIFF et al. [2006] proposent des méthodes numériques pour évaluer des options par cliquets pour un ensemble de modèles mathématiques de prix du sous-jacent.

II.3.2.4 L'expression du best-estimate en fonction d'options par cliquets

Soit Y_t le prix d'une option par cliquets s'écrivant :

$$Y_t = E^Q \left(\exp \left(\sum_{i=1}^t \max(s_i, F_i) - \sum_{i=1}^t r_i \right) \right)$$

Comme présenté dans la section II.3.2, la totalité du rendement de l'actif est distribuée. On peut écrire alors :

$$F_i = k_i + \iota$$

$$c_i = \max(s_i, F_i) + a - \iota$$

Le rendement c_i distribué est donc supérieur ou égal au taux garanti tmg_i net de chargement.

La probabilité P^h est indépendante de l'aléa financier car les rachats conjoncturels sont supposés nuls et la politique de l'assureur n'intervient pas sur le rendement financier. On a donc :

$$E^{P^h \otimes Q}(\psi(t)) = E^Q \left(\exp \left\{ \sum_{i=1}^t c_i - \sum_{i=1}^t r_i \right\} \right)$$

$$= E^Q \left(\exp \left\{ \sum_{i=1}^t \max(s_i, F_i) + a \cdot t - \iota \cdot t - \sum_{i=1}^t r_i \right\} \right)$$

Donc :

$$E^Q(\psi(t)) = e^{a \cdot t} \cdot e^{-\iota \cdot t} \cdot Y_t$$

Ainsi :

$$BE_a(0) = PM(0) \cdot \left(\sum_{t=1}^T (f_t + \iota g_t) \cdot e^{a \cdot t} \cdot e^{-\iota \cdot t} \cdot Y_t + g_T \cdot e^{a \cdot T} \cdot e^{-\iota \cdot T} \cdot Y_T \right)$$

Le *best-estimate* s'écrit comme une somme d'options par cliquets :

- de notionnels : $N_t = PM(0)(f_t + \iota g_t) \cdot e^{a \cdot t} \cdot e^{-\iota \cdot t}$ si $t < T$ et $N_T = PM(0)(f_T + (\iota + 1)g_T) \cdot e^{a \cdot T} \cdot e^{-\iota \cdot T}$;
- dont le sous-jacent est l'actif de l'assureur.

Notons par ailleurs que le *best-estimate* net de chargement s'écrit :

$$BE_a^{net}(0) = PM(0) \cdot \left(\sum_{t=1}^T f_t \cdot e^{a \cdot t} \cdot e^{-\iota \cdot t} \cdot Y_t + g_T \cdot e^{a \cdot T} \cdot e^{-\iota \cdot T} \cdot Y_T \right)$$

Pour couvrir ses engagements de servir les taux garantis, l'assureur peut acheter des options par cliquets de *strikes* $\{F_i\}_{i \in \llbracket 1, T \rrbracket}$ et de notionnel $N_t^{net} = PM(0) \cdot f_t \cdot e^{a \cdot t} \cdot e^{-\iota \cdot t}$ si $t < T$ et $N_T^{net} = PM(0)(f_T + g_T) \cdot e^{a \cdot T} \cdot e^{-\iota \cdot T}$.

Le coût total de ces options est :

$$Cout_garantie = \sum_{t=1}^T N_t^{net} \cdot (Y_t - 1)$$

Dans l'hypothèse où les chargements sur encours servent uniquement à couvrir les frais de la gestion financière (les frais de structure, de gestions administrative etc., sont nuls) alors, le coût total des couvertures est égal au *best-estimate* de frais :

$$BE^{frais}(0) = PM(0) \cdot \left(\sum_{t=1}^T \iota g_t \cdot e^{a \cdot t} \cdot e^{-\iota \cdot t} \cdot Y_t \right) = \sum_{t=1}^T N_t^{net} \cdot (Y_t - 1)$$

II.3.2.5 Caractérisation des options financières implicites au best-estimate

La structure optionnelle financière du *best-estimate* est totalement caractérisée par les options par cliquets qui le composent. Il suffit de décrire la structure optionnelle élémentaire d'une option par cliquets pour en déduire celle du *best-estimate*.

Dans la suite trois cadres d'analyse des options par cliquets sont présentés. Nous en déduisons que la structure optionnelle du *best-estimate* est cohérente avec :

- Une structure optionnelle vanille *start-forward* sur les actifs risqués de type actions ;
- Une structure optionnelle par *floorlets* sur les actifs obligataires.

Donc dans le cadre d'analyse et de valorisation présenté dans la section II.3.2.1 :

- Le calibrage des modèles de taux destinés à la valorisation du *best-estimate* peut être cohérents avec un calibrage sur des *floorlets* ;
- Le calibrage des modèles de type actions peut être cohérents avec un calibrage sur des options vanilles.

II.3.2.5.1 L'actif de l'assureur est assimilé à un indice actions

Dans le cas où l'actif de l'assureur est assimilé à un indice actions, la valorisation d'options par cliquets peut être réalisée avec des modèles mathématiques de type actions. Les paramètres de ces modèles doivent représenter les caractéristiques de l'actif de l'assureur. Un exemple classique est le modèle de Black-Scholes.

La littérature financière est riche en références traitant les problématiques de valorisation d'options par cliquets dont le sous-jacent est un indice actions. Le lecteur peut se référer, par exemple, à KJAER [2004] qui présente des formules fermées pour la valorisation d'options par cliquets sur un indice actions.

Bien que pratique, le calibrage de tels modèles par une approche *market-consistent* en intégrant les anticipations des acteurs de marché ne peut être réalisé. Des produits dérivés dont le sous-jacent est l'actif de l'assureur ne sont pas échangés sur des marchés liquides et profonds.

II.3.2.5.2 L'actif de l'assureur est assimilé à un panier d'obligations

Supposons que l'actif de l'assureur est composé d'un panier d'obligations sans risque à coupons variable indexés sur les taux d'intérêt sans risque.

Soit T une échéance d'intérêt et soit Y_T une option par cliquets dont la chronique des prix d'exercice est $\{F_t\}_{1 \leq t \leq T}$. Cette option correspond au flux T du *best-estimate*.

Afin de répliquer le *pay-off* de cette option par cliquets, l'assureur peut :

- Acheter une obligation à coupons variables de maturité T indexée sur le taux d'intérêt sans risque dont la courbe de taux *forward* un an est donnée par $\{b_t\}_{1 \leq t \leq T}$ ³⁵;
- Réinvestir les coupons sur les taux sans risque variables et sur la maturité résiduelle ;
- Acheter des *floorlets* dont les prix d'exercice sont les $\{F_t\}_{1 \leq t \leq T}$ et dont le nominal est variable : une sorte de « *floor* par cliquets ».

En effet, à chaque date $t \leq T$, la valeur de l'actif adossé à l'échéance T s'écrit :

$$B_{t+1} = B_t \cdot (1 + \max(b_{t+1}, F_{t+1})) = B_t(1 + b_{t+1}) + B_t(F_{t+1} - b_{t+1})^+$$

et : $B_0 = 1$ est l'investissement initial en obligation à taux variable sans risque.

Le deuxième terme de la formule ci-dessus correspond au *pay-off* d'un *floorlet* dont le nominal est B_t .

Cette expression montre que :

- L'optionalité du passif est cohérente, sous certaines conditions, avec des *floorlets* ;
- Les *pay-offs* des options par cliquets sur un actif composé d'un panier d'obligations peut être valorisé par récurrence en s'appuyant sur la valorisation de *floorlets*. Certains modèles comme le modèle de Black ou le modèle LMM permettent la valorisation de *floorlets* par des formules fermées.

II.3.2.5.3 L'actif de l'assureur est composé d'obligations et de supports risqués

Soit T une échéance d'intérêt et soit Y_T une option par cliquets sur l'actif de l'assureur dont la chronique des prix d'exercice est $\{F_t\}_{1 \leq t \leq T}$.

Sans perte de généralité, supposons que l'actif de l'assureur se compose de deux familles de supports financiers :

- Un actif risqué de type investissements en actions (immobilier, infrastructure,...) dont le prix initial est noté $A_0 = 1$ et dont l'allocation initiale est x_1 . Le rendement annuel entre t et $t + 1$ est noté a_{t+1} ;
- Un actif sans risque (de type obligations) dont le prix initial est noté $B_0 = 1$ et dont l'allocation initiale est x_2 . Le taux de rendement à chaque instant est le taux d'intérêt sans risque *forward* un an noté $\{b_t\}_{1 \leq t \leq T}$.

Afin de répliquer les *pay-offs* de l'option par cliquets, l'assureur peut acheter :

- Un actif risqué de type actions et une option par cliquets sur cet actif de prix d'exercice : $\{F_t^A\}_{1 \leq t \leq T}$;

³⁵ Le taux d'intérêt annuel entre t et $t+1$ est : b_{t+1} .

- Une obligation à coupons variables indexée sur le taux d'intérêt sans risque associée à des *floorlets* dont les prix d'exercice sont $\{F_t^B\}_{1 \leq t \leq T}$ et dont les nominaux sont variables.

Soit $t \leq T$, les prix des actifs s'écrivent alors :

$$A_{t+1} = A_t + A_t \cdot \max(a_{t+1}, F_{t+1}^A)$$

$$B_{t+1} = B_t \cdot (1 + \max(b_{t+1}, F_{t+1}^B)) = B_t(1 + b_{t+1}) + B_t(F_{t+1}^B - b_{t+1})^+$$

L'actif total s'écrit :

$$S_{t+1} = S_t + S_t \cdot \max(x_1 \cdot a_{t+1} + x_2 \cdot b_{t+1}, F_{t+1})$$

A chaque date, on peut définir les prix d'exercices F_{t+1}^A et F_{t+1}^B afin que l'actif soit valorisé au moins par F_{t+1} . Plusieurs solutions sont possibles. Elles dépendent essentiellement de la nature des actifs, de leur structure de dépendance et des objectifs de rentabilité sur chaque actif. Cette problématique n'est pas discutée ici.

Dans le cas où $F_t = x_1 \cdot F_t^A + x_2 \cdot F_t^B$, la réplication des *pay-offs* est prudente. En effet, on peut noter que :

$$S_t \cdot \max(x_1 \cdot a_{t+1} + x_2 \cdot b_{t+1}, F_{t+1}) \leq x_1 \cdot A_t \cdot \max(a_{t+1}, F_{t+1}^A) + x_2 \cdot B_t \cdot \max(b_{t+1}, F_{t+1}^B)$$

L'égalité peut être obtenue dans l'exemple où $a_t = b_t$ et $F_t^A = F_t^B$.

Nous constatons donc que la structure optionnelle implicite au *best-estimate* peut être décomposée en options vanilles sur les actifs risqués et en *floorlets* sur les poches obligataires.

II.3.2.6 Les équations d'équilibre dans un cadre sans opportunités d'arbitrage

Dans la suite, nous supposons que le taux de frais ι sert uniquement à financer la gestion financière des options et garanties des contrats d'épargne.

Dans un marché sans opportunités d'arbitrage, la somme des flux futurs distribués par l'assureur doit être égale à l'investissement initial.

Les assurés investissent à la date $t = 0$ la $PM(0)$ et ne profite d'aucune richesse initiale : $a=0$.

Donc le *best-estimate* est égal à la $PM(0)$:

$$BE(0) = PM(0) = PM(0) \cdot \left(\sum_{t=1}^T (f_t + \iota g_t) \cdot e^{-\iota t} \cdot Y_t + g_T \cdot e^{-\iota T} \cdot Y_T \right)$$

Afin d'avoir une écriture polynomiale en e^ι dans les développements suivants, reprenons l'approximation de la section II.2.2.4 : $e^\iota - 1 \simeq \iota$:

$$BE(0) = PM(0) = PM(0) \cdot \left(\sum_{t=1}^T (f_t + (e^\iota - 1) \cdot g_t) \cdot e^{-\iota t} \cdot Y_t + g_T \cdot e^{-\iota T} \cdot Y_T \right)$$

Le *best-estimate* est un polynôme d'ordre T de $e^{-\iota}$.

Outre les chroniques de probabilité de sorties, nous notons notamment trois variables vectorielles entrant dans la formule ci-dessus :

- Les paramètres du GSE : θ_4 ;

- Les taux garantis K ;
- Le prix de la couverture (ce que l'on peut appeler aussi le tarif du contrat) : ι .

Notons :

- $\Gamma(\theta_4, k, \iota) = PM(0) \left(\sum_{t=1}^T (f_t + (e^t - 1)g_t) \cdot e^{-\iota \cdot t} \cdot Y_t + g_T \cdot e^{-\iota \cdot T} \cdot Y_T \right) - PM(0)$;
- $\Delta(\theta_4, k, \iota) = PM(0) \cdot \left(\sum_{t=1}^T (e^t - 1)g_t \cdot e^{-\iota \cdot t} \cdot Y_t \right) - \sum_{t=1}^T N_t^{net} \cdot (Y_t - 1)$.

Le système d'équations suivant traduit deux propriétés : le *best-estimate* est égal à la provision mathématique en l'absence d'opportunité d'arbitrage et le coût de la garantie est égal aux prix des options par cliquets. On peut écrire :

$$\begin{cases} \Gamma(\theta_4, k, \iota) = 0 \\ \Delta(\theta_4, k, \iota) = 0 \end{cases}$$

Ce système ne peut caractériser les paramètres entrant dans le calcul du *best-estimate* car le nombre de ces paramètres est supérieur aux nombres d'équations à résoudre.

Si l'on dispose d'un générateur de scénario économique et que l'on souhaite tarifier un contrat d'épargne versant $PM(0)$ à $t = 0$ alors :

- Les taux minimum garantis K et le taux de frais ι sont les solutions du système d'équation présenté ci-dessus ;
- Si la chronique des taux garantis K est constante (le même taux garanti k sur toute la durée de vie du contrat) alors le système d'équations peut admettre une solution (k, ι) . Ce couple garantie (k) & coût (ι) caractérise l'équilibre économique du contrat d'épargne dans un univers sans opportunités d'arbitrage.

Par ailleurs, dans un cadre hypothétique³⁶ sans opportunité d'arbitrage où l'on dispose du tarif économique ι d'un contrat à taux garanti k , les paramètres du GSE vérifient le système à deux équations ci-dessus. Il est clair que si le nombre de paramètres du GSE est supérieur ou égale à 3 paramètres, le système d'équation peut admettre une infinité de solutions.

En conclusion, dans un cadre sans opportunités d'arbitrage, il peut exister une infinité de paramètres possibles du GSE qui sont cohérents avec les caractéristiques économiques d'un contrat d'épargne en € (couple taux garanti et tarif des options).

Donc, un lien direct entre les paramètres du GSE et le *best-estimate* ne peut être établi et ce même si la politique de l'assureur est prédéfinie.

II.4 Conclusion

Appliquer une démarche *Mark to Market* pour évaluer le *best-estimate* en juste valeur implique de disposer des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est mené dans un cadre conventionnel *Mark-to-Model*.

Ce chapitre a examiné ce cadre conventionnel sur deux points :

³⁶ Ce cadre n'existe pas en pratique car il n'y a pas de marchés pour échanger des passifs.

- Une analyse du lien entre le *best-estimate*, la politique de revalorisation de l'assureur et les générateurs de scénarios économiques (section II.3.1) ;
- Une analyse de la structure optionnelle financière élémentaire du *best-estimate* et son lien avec le GSE (section II.3.2).

L'analyse du lien entre le *best-estimate*, la politique de revalorisation de l'assureur et les GSE a permis de conclure que :

- Le *best-estimate* d'un portefeuille d'épargne en € n'est pas unique. Le *best-estimate* n'est pas la valeur économique du passif. Il représente au mieux la valeur économique des engagements d'assurance conditionnellement à la politique de gestion de l'assureur ;
- Le processus de calibrage et de validation du GSE, en comparant les simulations aux données observées dans le cadre d'une approche statistique, ne peut être considéré car le *best-estimate* n'est pas observé dans un marché profond et liquide. Un tel marché ne peut exister d'ailleurs du fait de l'absence d'unicité du *best-estimate* conditionnellement aux risques ;
- Le *best-estimate* est borné. Ses bornes ne dépendent pas de modèles de génération de scénarios économiques ;
- Quel que soit le choix du GSE, il est possible de piloter les taux de revalorisation pour atteindre un *best-estimate* cible.

Dans le cadre d'analyse présenté dans la section II.3.2, l'étude de la structure optionnelle financière élémentaire du *best-estimate* et son lien avec le GSE a permis de conclure que :

- La structure optionnelle financière du *best-estimate* est totalement caractérisée par des options par cliquets ;
- Le calibrage des modèles de taux destinés à la valorisation du *best-estimate* est cohérents, sous certaines conditions, avec un calibrage sur des *floorlets* ;
- Le calibrage des modèles de type actions est cohérents, sous certaines conditions, avec un calibrage sur des options vanilles ;
- Dans un cadre hypothétique sans opportunités d'arbitrage ou l'on peut observer le coût des garanties, il existe une infinité de choix de paramètres pour le GSE reproduisant tous ce coût ;
- Un lien direct entre les paramètres du GSE et le *best-estimate* ne peut être établi et ce même si la politique de revalorisation de l'assureur est prédéfinie.

Sur la base des conclusions présentées ici, les chapitres suivants proposent des études comparatives de plusieurs générateurs de scénarios économiques (risque-neutres et historiques) destinés à la valorisation des passifs d'assurance vie et présentent des études de sensibilités du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et des données de calibrage.

Le choix du modèle de diffusion de la structure par termes des taux d'intérêt est en effet un élément central de la construction d'un GSE. Les taux d'intérêt permettent d'actualiser les flux et de valoriser une part significative de l'actif (en moyenne, 77 % des actifs des assureurs vie sont composés d'obligations et d'actifs monétaires en 2016).

Le chapitre suivant (chapitre III) présente, d'abord, les pratiques de génération de scénarios économiques « risque-neutre » de la place, et notamment la modélisation des taux d'intérêt, destinés à évaluer le passif dans un cadre *Marked-to-Model*. Une étude comparative entre les modèles de Hull et White, G2++ et LMM+ est présentée également. Cette étude comparative est complétée dans le chapitre IV avec l'analyse des modèles CIR++ et CIR2++.

III. Utilisation de modèles de taux normaux et log-normaux pour valoriser les contrats d'épargne participatifs

Ce chapitre propose une démarche de construction de générateurs de scénarios économiques risque-neutres, dont les modèles de taux sont normaux ou log-normaux. Cette démarche respecte les exigences réglementaires Solvabilité 2 et se place dans le même cadre conventionnel retenu par les praticiens (dont une analyse critique est présentée au chapitre I). Les modèles développés dans ce chapitre sont utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et des données utilisées pour leur calibrage.

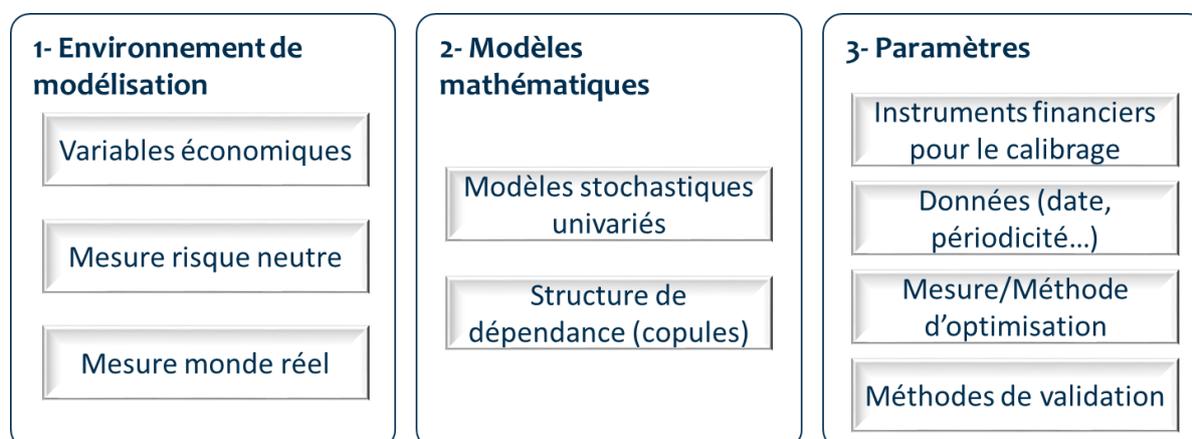
III.1 Préambule

Le processus de génération de scénarios économiques peut être synthétisé en trois étapes (LAURENT et al. [2016], PLANCHET et al. [2009], BALDVINSDOTTIR et PALMBORG [2011], BALLOTTA [2004], ARMEL et al. [2011]...) :

1. L'environnement de modélisation : il s'agit de choisir les variables économiques à modéliser dans un univers probabilisé. La mesure retenue par les praticiens est une probabilité risque neutre. En effet, la génération de scénarios économiques *Market Consistent* sous une probabilité historique rencontre systématiquement la problématique de la quantification des primes de risque. S'en affranchir est pratique. Le passage à une probabilité risque neutre ouvre cette possibilité. Une synthèse de l'approche par les déflateurs en probabilité historique est décrite dans le chapitre V (voir également CAJA et PLANCHET [2010], CHENG et PLANCHET [2018], ARMEL et PLANCHET [2020b] et un exemple de mise en œuvre simplifié proposé dans DASTARAC et SAUVEPLANE [2010]).
2. Les modèles : il s'agit de construire les modèles mathématiques des variables d'intérêt. Cela consiste à choisir les modèles qui représentent la dynamique marginale de ces variables et la structure de dépendance.
3. Les paramètres et le calibrage : il s'agit de choisir les produits financiers dérivés pour les calibrages, les données, les méthodes d'estimation statistique des paramètres des modèles et des méthodes de validation. Le choix de la mesure de distance d'optimisation peut avoir un impact sur le modèle. ARMEL et al. [2011] a montré d'ailleurs que le choix de la copule destinée à représenter la structure de dépendance d'un GSE dépend de la distance retenue pour mesurer les écarts entre une copule empirique et une copule paramétrique.

Ces étapes peuvent se schématiser comme présenté dans la *Figure III.1*.

Figure III.1 : illustration schématique des choix de modélisation et de calibrage d'un GSE



Ce chapitre présente une démarche de construction d'un GSE destiné à l'évaluation de la valeur économique (*best-estimate*) des contrats d'épargne, notamment les contrats en €. Les modèles mathématiques et les caractéristiques techniques du GSE utilisé dans la suite sont documentés dans la section III.3.

Les variables d'intérêt étudiées dans la suite sont les taux d'intérêt sans risque, les actions et les investissements en immobilier. La modélisation stochastique du risque de crédit n'est

pas abordée ici. Ce risque est cependant pris en compte dans les applications numériques de la section III.6 où les *spreads* sont supposés déterministes.

Les prix des actions et des investissements en immobiliers sont supposés suivre un mouvement brownien de type Black et Scholes et trois modèles de taux sont étudiés :

- Un modèle mono-factoriel : Hull & White calibré sur des *caps* et sur des *swaptions* ;
- Un modèle à deux facteurs : modèle gaussien G2++ calibré sur des *caps* et sur des *swaptions* ;
- Un modèle de marché : *Libor Market Model* (LMM) calibré sur des *swaptions*.

La structure de dépendance retenue est la corrélation.

III.2 Générateur de scénarios économiques pour calculer le *best-estimate*

III.2.1 La convention de calibrage des modèles de taux sans risque

Les scénarios économiques utilisés pour la valorisation du *best-estimate* des contrats d'épargne en euro doivent être cohérents avec les prix du marché (*Market-Consistent*). Une évaluation en valeur de marché consiste à valoriser des grandeurs d'intérêt en se référant aux valeurs des actifs et des passifs réellement échangés. L'objectif est de fabriquer une juste valeur qui soit cohérente avec les prix et les risques observables et mesurables sur le marché.

Appliquer une démarche *Mark to Market* pour évaluer le *best-estimate* en juste valeur implique de disposer a priori des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est donc mené dans un cadre *Mark-to-Model*. Dans ce cadre, le GSE est calibré non pas sur les options et garanties du contrat d'assurance mais sur des produits financiers (*caps*, *floors*, *swaptions*...). Sa qualité est appréciée par sa capacité à reproduire les prix de ces produits financiers.

Les orientations élaborées par l'EIOPA³⁷ (cf. ACPR [2015] - orientations 55 à 60) présentent un certain nombre de contraintes qu'un GSE doit satisfaire. Il y est notamment précisé que :

- Les instruments financiers retenus pour calibrer les GSE doivent être pertinents eu égard aux caractéristiques des options et garanties financières proposées par l'assureur ;
- Les données doivent provenir de marchés financiers qui soient profonds, liquides et transparents. Les résultats fournis par le GSE doivent être cohérents avec les données du marché financier (règlement délégué article 76).

Les spécifications techniques QIS [2010] précisent qu'un calibrage *market-consistent* doit se présenter comme suit (TP.2.97) :

- Le modèle d'actifs doit être calibré pour refléter la nature et la durée des passifs, en particulier les passifs intégrant des garanties et des options ;

³⁷ European Insurance and Occupational Pensions Authority.

- Le modèle d'actifs doit être calibré en prenant en compte la courbe de taux sans risque utilisée pour actualiser les flux de trésorerie ;
- Le modèle d'actifs doit être calibré à une mesure de la volatilité correctement calibrée.

L'article 22 de SOLVABILITE 2 - REGLEMENT DELEGUE [2014] précise que le calibrage des paramètres et des scénarios doit être cohérent avec la courbe des taux sans risque pertinents utilisée pour calculer la meilleure estimation visée à l'article 77, paragraphe 2, de la directive 2009/138/CE. L'EIOPA publie tous les mois une courbe des taux sans risque utilisée pour l'actualisation des flux futurs afin d'évaluer le *best-estimate* dans le référentiel Solvabilité 2.

Face à ces contraintes réglementaires et en l'absence de prix observables des passifs des contrats d'épargne en euro, une convention de calibrage des taux sans risque s'est établie³⁸. Cette convention peut se synthétiser en quatre étapes :

1. **Les modèles et les instruments financiers dérivés** : choix du modèle de taux et choix des produits dérivés pour son calibrage : *caps, floors, swaptions...*
2. **Les prix d'exercice et les volatilités implicites** : choix d'un prix d'exercice et extraction des volatilités de marché³⁹. Celles-ci correspondent aux volatilités implicites des produits dérivés choisis à l'étape 1. Elles sont cohérentes avec la courbe de taux sans risque du marché.
3. **La valorisation des produits dérivés** en utilisant la courbe publiée par l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) : utilisation du modèle de Black (si les volatilités sont implicites à un modèle log-normal) ou du modèle de Bachelier (si les volatilités sont implicites à un modèle normal) pour l'évaluation d'un prix des instruments dérivés en utilisant la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA. Ce sont ces prix qui vont jouer le rôle de « prix de marché » pour calibrer le modèle de taux destiné à la valorisation des passifs sous la norme Solvabilité 2.
4. **Le calibrage du modèle de taux retenu** en minimisant une distance entre : (1) les prix réestimés à partir de la courbe de taux EIOPA et les volatilités de marché, et (2) les prix théoriques du modèle de taux.

La courbe des taux sans risque communiquée par l'EIOPA est en général différente de la courbe des taux *swap* du marché. Ainsi, le processus de calibrage présenté ci-dessus intègre les volatilités implicites mais ne permet pas, par construction, de répliquer les prix de marché des instruments financiers dérivés. Ce processus respecte néanmoins les contraintes réglementaires qui évoquent un calibrage sur les volatilités implicites.

Notons également que la courbe de taux sans risque communiquée par l'EIOPA est une courbe reconstruite et est, de fait, inobservable directement sur le marché financier.

Enfin, le régulateur ne précise pas la nature des volatilités à retenir dans un environnement à taux négatifs. Comme expliqué dans la section III.3.1.1, les volatilités implicites aux

³⁸ Cf. le Q&A du QIS 5, publié par l'EIOPA, question 76 du document

<https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/CEIOPS-Q-and-A-document-20101104.pdf>

³⁹ Les surfaces de volatilité ne résultent pas forcément d'une mesure de prix directe, mais d'une reconstruction par le fournisseur de prix (par exemple via un modèle SABR pour Bloomberg).

modèles de Black dépendent d'un facteur de décalage. Ce facteur dépend de la courbe de taux sans risque utilisée dans le modèle de Black pour extraire les volatilités implicites.

III.2.2 Quelques limites de la convention de calibrage des modèles de taux sans risque pour l'évaluation du *best-estimate*

Le *best-estimate* est une grandeur non observée. Le GSE est calibré non pas sur les options et garanties du contrat d'assurance mais sur des produits financiers (*caps, floors, swaptions...*).

La problématique de génération de scénarios économiques pour la valorisation du *best-estimate* implique 5 variables :

1. **Le prix du produit dérivé** : le GSE est calibré sur des produits financiers (*caps, floors, swaption...*). Se pose alors la question de la cohérence de la structure optionnelle du *best-estimate* et du produit financier choisi pour le calibrage du GSE. Cette question est abordée dans la section II.3.2 qui montre que le *best-estimate* a une structure optionnelle par cliquets ;
2. **Le prix d'exercice (*strike*)** : les prix des produits dérivés dépendent des prix d'exercice. Afin de proposer un calibrage des GSE cohérent avec la structure optionnelle du *best-estimate*, ces GSE devraient être calibrés sur des prix d'exercices cohérents avec les seuils d'exercice des options et des garanties du contrat d'épargne en euro. Il serait pertinent donc d'étudier la *moneyness* du passif (cf. section VIII.2.2 pour une définition de la *moneyness* du passif)
3. **La courbe des taux sans risque** est communiquée par l'EIOPA. Il s'agit d'une courbe de taux non observable directement sur le marché financier et ne faisant l'objet d'aucun échange marchand ;
4. **Le facteur de décalage** est un facteur introduit pour permettre aux modèles log-normaux de prendre en compte des taux négatifs. Cela permet de (1) de reproduire les valeurs de marché par le modèle de Black et calibrer les modèle de taux et de (2) diffuser des modèles log-normaux comme le modèle LMM. Le facteur de décalage dépend de la courbe de taux sans risque utilisée dans le modèle, en particulier, de la valeur minimale de cette courbe (cf. section III.3.1.1) ;
5. **Les volatilités implicites** dépendent du prix des instruments financiers, du prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque et du facteur de décalage (cf. section III.3.1.1). Lors du calibrage des modèles de taux destinés à l'évaluation du *best-estimate*, ce sont ces volatilités implicites qui sont utilisées dans le modèle de Black. Il est noté que :
 - a. Le paramétrage du modèle de Black par la courbe de taux sans risque EIOPA implique l'introduction d'un facteur de décalage. Afin de garder une certaine cohérence du modèle, ce facteur devrait être identique à celui utilisé pour extraire les volatilités implicites des cours de marché ;
 - b. La cohérence entre la courbe de taux sans risque EIOPA et la volatilité implicite aux prix de marché n'est pas systématique. Les volatilités dépendent en effet de la courbe de taux sans risque utilisée pour les évaluer (cf. section III.3.1.1) ;

- c. Les volatilités implicites dépendent du prix d'exercice des instruments financiers utilisés dans le processus de calibrage. La cohérence entre les volatilités implicites et les options et garanties du passif n'est pas systématique.

La section suivante présente le cadre théorique de construction d'un générateur de scénarios économiques risque neutre dont les modèles de taux sont Hull-White, G2++ ou LMM+. Elle se compose de trois sous-sections présentant :

- Les modèles de taux ;
- Les actifs risqués de type actions et investissements en immobilier ;
- La structure de dépendance.

III.3 Modélisation mathématique et propriétés analytiques

III.3.1 Modèles de taux

Les modèles de taux présentés dans la suite sont issus de deux familles largement étudiées dans la littérature financière :

- Les modèles dont la dynamique suit une loi normale comme le modèle de Hull-White (et plus généralement la famille des modèles HJM⁴⁰) et le modèle à deux facteurs G2++ ;
- Les modèles de taux dont la dynamique suit une loi log-normale comme le modèle de marché LMM.

Le modèle Hull & White peut être calibré pour reproduire la structure par terme des taux d'intérêt et la structure par termes des volatilités. Il permet également de valoriser les *caps* par une formule fermée et de générer des taux négatifs.

BRIGO et MERCURIO [2007] soulignent toutefois que la reproduction parfaite d'une structure par termes de la volatilité peut présenter certaines limites. En effet, les structures de volatilités implicites au modèle Hull & White risquent d'être irréalistes dans la mesure où elles ne se conforment pas aux formes typiques du marché. REBONATO [2004] souligne également que la valorisation de *caps* par le modèle de Hull et White est moins précise que celle réalisée par le modèle LMM.

Par ailleurs, le modèle gaussien G2++ présente une flexibilité analytique qui facilite considérablement la valorisation des produits dérivés de taux. Le modèle propose en effet des formules fermées pour valoriser les *caps/floors* et les *swaptions*. Aussi, la présence de deux facteurs permet de mieux décrire la variabilité des taux du marché. Cela se traduit par un calibrage plus précis des *swaptions* européennes. Le modèle G2++ permet de générer des taux négatifs. Une description détaillée de ce modèle est présentée dans BRIGO et MERCURIO [2007].

⁴⁰ Se référer à BRIGO et MERCURIO [2007] pour une description détaillée de cette famille.

Contrairement aux modèles Hull & White et G2++ modélisant un processus caché sous-jacent aux prix observés (le taux court instantané), le modèle LMM décrit directement la dynamique des taux négociables sur un marché.

S'agissant d'un modèle log-normal, il génère uniquement des taux positifs qui sont dans certains cas assez importants.

Le modèle LMM est largement utilisé par les praticiens. La principale raison réside dans sa capacité à reproduire des prix cohérents avec le marché pour les *caps*, les *floors* et les *swaptions* (BRIGO et MERCURIO [2007]). En effet, le modèle valorise :

- Les *caps* avec la formule de Black, qui est la formule standard utilisée sur le marché des *caps* ;
- Les *swaptions* avec la formule de *swaptions* de Black, qui est également la formule standard utilisée sur le marché des *swaptions*.

Étant donné que les marchés des *caps* et des *swaptions* sont les deux principaux marchés d'options sur les taux d'intérêt, il est important qu'un modèle soit compatible avec ces formules de marché. Avant l'introduction des modèles LMM, aucune dynamique de taux d'intérêt n'était cohérente avec la formule de Black pour les *caps* et avec la formule de Black pour les *swaptions*.

Les formules de Black pour la valorisation de *caps*, de *floors* et de *swaptions* sont présentées dans la suite.

Notons cependant que les prix valorisés par le modèle LMM dépendent de la spécification des dynamiques de la volatilité instantanée et de la corrélation des taux *forwards*. Une étude détaillée de cette problématique est présentée dans REBONATO [2004] qui décrit et compare différents modèles de volatilité et de corrélation.

Les sections suivantes présentent les spécifications techniques des modèles de taux retenus ainsi que les méthodes de calibrage et de valorisation (zéro-coupon, *caps* / *floors* et *swaptions*). Nous nous sommes appuyés essentiellement sur BRIGO et MERCURIO [2007] pour développer et implémenter ces modèles.

III.3.1.1 Modèles de de Black

L'utilisation de la formule de Black pour la valorisation des *caps*, des *floors* et des *swaptions* est une pratique courante du marché depuis des années.

Outre les prix des obligations et les *taux forwards* observés, la formule de Black nécessite en argument la surface de volatilité observée sur le marché pour valoriser les *caps*, les *floors* et les *swaptions*. Il est noté néanmoins que les surfaces de volatilités ne résultent pas d'une mesure directe du prix mais d'une reconstruction par le fournisseur. Bloomberg utilise par exemple un modèle SABR ⁴¹.

La dynamique du modèle de Black s'écrit : $dS_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(t) \cdot \sigma_{\alpha,\beta} dW_t^{\alpha,\beta}$. Le sous-jacent, dont la volatilité est $\sigma_{\alpha,\beta}$, est noté $S_{\alpha,\beta}$ et $W_t^{\alpha,\beta}$ est un mouvement brownien. Les

⁴¹ Le modèle SABR, ou modèle « Stochastic Alpha, Beta, Rho », est un modèle de volatilité stochastique généralisant le modèle log-normal de Black et permettant de valoriser les *caps/floors* et *swaptions* par des formules fermées de type Black.

paramètres (α, β) représentent respectivement la date d'exercice et la maturité du sous-jacent.

III.3.1.1.1 Valorisation de caps et de floors

La valorisation des *caps* et *floors* par le modèle de Black suppose que le taux *forward* suit la dynamique de Black présentée ci-dessus.

Notons $T = \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$ l'ensemble des dates de paiement des *caps/floors* et T_α le temps d'initialisation. Soit $\tau = \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta\}$ tel que τ_i représente la différence entre T_{i-1} et T_i . Le prix à l'instant $t = 0$ du *cap* de prix d'exercice K et de valeur nominale N est donné par (BRIGO et MERCURIO [2007]) :

$$Cap^{Black}(t = 0, T, \tau, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i Bl(K, F(0, T_{i-1}, T_i), v_i, 1)$$

Avec :

- $P(0, T_i)$ est le prix d'une obligation zéro-coupon observé en $t = 0$ pour l'échéance T_i ;
- $F(0, T_{i-1}, T_i)$ est le taux *forward* observé en $t = 0$ pour la période entre T_{i-1} et T_i ;
- $Bl(K, F, v, \omega) = F\omega\Phi(\omega d_1(K, F, v)) - K\omega\Phi(\omega d_2(K, F, v))$;
- Φ la fonction de répartition gaussienne standard ;
- $d_1(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{v^2}{2}}{v}$;
- $d_2(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{v^2}{2}}{v}$;
- $v_i = \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}$;
- $\sigma_{\alpha, \beta}$ est la volatilité (généralement extraite des cours du marché).

Le prix du *floor* est :

$$floor^{Black}(t = 0, T, \tau, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i Bl(K, F(0, T_{i-1}, T_i), v_i, -1)$$

Notons que le paramètre de volatilité implicite $\sigma_{\alpha, \beta}$ est totalement déterminé à partir du prix d'exercice, des prix de marché des obligations zéro-coupon sans risque et des produits dérivés (des *caps* ou des *floors*). En d'autres termes, étant donné un prix d'exercice et une courbe de taux, la correspondance entre les prix des dérivés et les volatilités implicites est une bijection.

III.3.1.1.2 Valorisation de swaptions

La valorisation des *swaptions* par le modèle de Black suppose que le taux *swap forward* suit la dynamique de Black présentée ci-dessus.

Notons $S_{\alpha, \beta}(t)$ le taux *swap forward* couvrant la période entre T_α et T_β :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P(t, T_j)}$$

Le prix d'une *swaption* européenne payeuse de ténor $T_\alpha - T_\beta$, de nominal N et de prix d'exercice K est donné par (BRIGO et MERCURIO [2007]) :

$$PS^{Black}(0, T, \tau, N, K, \sigma_{\alpha,\beta}) = N \cdot Bl(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta} \sqrt{T_\alpha}, 1) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i$$

Avec :

- $T = \{T_0, \dots, T_M\}$ un ensemble discret de dates ;
- $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ un ensemble tel que τ_i représente la différence entre T_{i-1} et T_i ;
- $P(0, T_i)$ est le prix d'une obligation zéro-coupon observé en $t = 0$ pour l'échéance T_i ;
- $Bl(K, F, v, \omega) = F\omega\Phi(\omega d_1(K, F, v)) - K\omega\Phi(\omega d_2(K, F, v))$;
- Φ la fonction de répartition gaussienne standard ;
- $d_1(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{v^2}{2}}{v}$;
- $d_2(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{v^2}{2}}{v}$;
- $\sigma_{\alpha,\beta}$ est la volatilité (généralement extraite des cours du marché).

Notons que le paramètre de volatilité implicite $\sigma_{\alpha,\beta}$ est totalement déterminé à partir du prix d'exercice, des prix de marché des obligations zéro-coupon sans risque et des prix des *swaptions*. En d'autres termes, étant donné un prix d'exercice et une courbe de taux, la correspondance entre les prix des *swaptions* et les volatilités implicites est une bijection.

III.3.1.1.3 Le modèle de Black et les taux négatifs

Le modèle de Black décrit dans les sections précédentes est un modèle log-normal. L'utilisation de ce modèle dans l'état ne peut s'opérer dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs.

Afin de rendre le modèle de Black cohérent avec des taux négatifs, un facteur de décalage des taux est introduit. Ce facteur est appelé « *shift* » ou « *displacement factor* ». On parle alors du modèle de Black décalé ou du *displaced Black model*. La dynamique du modèle s'écrit en effet :

$$dS_{\alpha,\beta} = (S_{\alpha,\beta} + a) \cdot \sigma_{\alpha,\beta}^{(a)} \cdot dW_t^{\alpha,\beta}$$

Le facteur de translation étant a . Ce facteur est choisi de telle sorte que le prix d'exercice augmenté de a et les valeurs observées de $S_{\alpha,\beta} + a$ soient toujours positifs.

Le modèle de Black décalé ne prend en compte que les taux négatifs supérieurs à $-a$. En pratique, ce facteur est choisi *a priori*. Une attention particulière doit être accordée au processus de choix de ce facteur. En effet la valeur du facteur de décalage :

- devrait être suffisante pour éviter que les grandeurs $S_{\alpha,\beta} + a$ et $K + a$ ne passent en dessous de zéro ;
- mais ne devrait pas être extrêmement élevé car dans ce cas le taux *forward* peut avoir des valeurs négatives significatives.

Par ailleurs, en définissant $\bar{S}_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta} + a$ et $\bar{K} = K + a$ la formulation du modèle Black décalé est équivalente à celle du modèle de Black. Par conséquent, les formules de valorisation des *caps*, *floors* et *swaptions* présentées dans les sections précédentes sont valables pour le modèle de Black décalé en remplaçant $S_{\alpha,\beta}$ par $\bar{S}_{\alpha,\beta}$, K par \bar{K} et $\sigma_{\alpha,\beta}$ par $\sigma_{\alpha,\beta}^{(a)}$.

Cependant, il est important de noter que les volatilités implicites aux prix dépendent du facteur de décalage. En effet, pour un prix d'exercice donné, quatre grandeurs entrent dans la construction du modèle de Black décalé :

1. La courbe des taux ;
2. Le prix du dérivé (*caps*, *floors* ou *swaption*) ;
3. Le facteur de décalage ;
4. Les volatilités implicites.

Donc, pour une courbe de taux donnée, il faut disposer des valeurs de deux variables parmi les variables 2, 3 et 4, pour déduire la troisième variable. Quand les prix sont définis et extraits des marchés financiers, les volatilités implicites dépendent systématiquement du facteur de décalage.

Ainsi, l'utilisation des volatilités implicites aux prix du marché dans un processus de valorisation de produits dérivés par le modèle de Black décalé dans un environnement à taux négatifs ne peut se faire sans précision de la valeur du facteur de décalage utilisé pour générer ces volatilités. L'utilisation de volatilités décalées cohérentes avec le facteur de décalage et la courbe des taux permet de reproduire les prix de marché.

III.3.1.2 Modèle Hull & White

III.3.1.2.1 Dynamique du modèle

Le modèle Hull & White généralise le modèle de VASICEK [1977] et introduit une moyenne à long terme fonction du temps permettant au modèle de reproduire la courbe des taux d'intérêt par terme anticipée par le marché.

HULL & WHITE [1990] supposent en effet que le taux d'intérêt instantané sous la probabilité risque neutre suit la dynamique suivante :

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t)$$

où ϑ , a and σ sont des fonctions déterministes.

Afin d'éviter la complexité qu'engendre le calibrage d'une surface de volatilité implicite au modèle ci-dessus, nous avons fait le choix de retenir le modèle suivant présenté par HULL et WHITE [1994] :

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a.r(t)]dt + \sigma.dW(t)$$

La fonction ϑ est choisie pour que le modèle reproduise la structure par terme des taux d'intérêt actuellement anticipés par le marché. Le calibrage du modèle Hull & White consiste donc à estimer les paramètres a et σ .

Il est noté que le modèle Hull & White est un cas particulier de la famille des modèles HJM dans lequel on suppose que le processus de volatilité vérifie la relation suivante :

$$\sigma(t, T) = \sigma \exp(-a(T - t))$$

Cette forme est facilement interprétable : plus on se rapproche de l'échéance, plus la volatilité diminue.

III.3.1.2.2 Solution de l'équation différentielle

Soit $f^M(0, T)$ le taux *forward* instantané du marché observé à la date 0 pour la maturité T :

$$f^M(0, T) = - \frac{\partial \ln(P^M(0, T))}{\partial T}$$

$P^M(0, T)$ étant le prix d'une obligation zéro-coupon observée à $t=0$ dont la maturité est T .

La moyenne à long terme s'écrit alors :

$$\vartheta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T} + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

où $\frac{\partial f^M}{\partial T}$ est la dérivée partielle du taux *forward* f^M suivant la deuxième variable.

La solution de l'équation différentielle présentée par Hull & White s'écrit :

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)$$

où $\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2$.

Ainsi, la variable $r(t)$ est distribuée normalement conditionnellement à F_s . La moyenne et la variance s'écrivent :

$$E\{r(t)|F_s\} = r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)}$$

$$Var\{r(t)|F_s\} = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)})$$

III.3.1.2.3 Prix d'une obligation zéro-coupon

Le prix d'une obligation zéro-coupon observée à l'instant t et payant une unité monétaire à l'échéance T s'écrit :

$$P(t, T) = E \left(e^{-\int_t^T r(s)ds} | r(t) \right)$$

Notons que la variable $\int_t^T r(s)ds | r(t)$ est distribuée suivant une loi normale :

$$\int_t^T r(s)ds | r(t) \sim N \left(B(t, T)[r(t) - \alpha(t)] + \ln \frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)} + \frac{1}{2} [V(0, T) - V(0, t)], V(t, T) \right)$$

Avec :

- $B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$;
- $V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right)$.

$$\text{Soit : } A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left(B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T)^2 \right).$$

Alors le prix d'une obligation zéro coupon s'écrit : $P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$.

Notons que la distribution du prix d'une obligation zéro-coupon est log-normale.

III.3.1.2.4 Calibrage du modèle Hull & White sur les caps

Le modèle de Hull & White offre la possibilité de valoriser les caps et les floors par des formules fermées. Notons $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des maturités de paiements des caps ou des floors. Soit τ_i la différence entre t_{i-1} et t_i .

Le prix à l'instant $t < t_0$ du cap de prix d'exercice X , de valeur nominale N et défini sur l'ensemble $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ est donné par :

$$\text{Cap}(t, T, N, X) = N \sum_{i=1}^n \left(P(t, t_{i-1}) \Phi(-h_i + \sigma_p^i) - (1 + X\tau_i) P(t, t_i) \Phi(-h_i) \right)$$

Le prix du floor est donné par :

$$\text{Flr}(t, T, N, X) = N \sum_{i=1}^n \left((1 + X\tau_i) P(t, t_i) \Phi(h_i) - P(t, t_{i-1}) \Phi(h_i - \sigma_p^i) \right)$$

Avec :

- $\sigma_p^i = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t_{i-1}-t)}}{2a}} B(t_{i-1}, t_i)$;
- $h_i = \frac{1}{\sigma_p^i} \ln \frac{P(t, t_i)(1 + X\tau_i)}{P(t, t_{i-1})} + \frac{\sigma_p^i}{2}$;
- Φ est la fonction de répartition gaussienne.

Notons :

- $\Theta = (a, \sigma)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix d'un cap i valorisé par le marché via la formule de Black ;
- $Cap_i^{HW}(\Theta)$: le prix d'un cap i valorisé par le modèle Hull & White.

Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des caps retenus pour le calibrage (d est une distance) :

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (Cap_i^{HW}(\Theta))_i \right) \right)$$

Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués. Cette reconstitution par le modèle de Black a, entre autres, deux avantages. Elle permet en effet de :

- Retrouver les prix observés du marché ayant servi pour le calcul des volatilités implicites ;
- Produire des prix cohérents avec les prix de marché quand les volatilités implicites utilisées sont extraites de modèles de volatilités calibrés sur les volatilités du marché (exemple : reconstruction de la nappe de volatilités sur des dates supplémentaires à partir des volatilités de marché).

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle de Hull & White peut être calibré directement sur ces prix de marché en réécrivant la fonction d'optimisation comme suit :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (Cap_i^{HW}(\theta))_i \right) \right)$$

III.3.1.2.5 Calibrage du modèle Hull & White sur des swaptions européennes

Pour calibrer le modèle Hull & White sur des *swaptions*, nous avons choisi une méthode basée sur la génération d'arbres trinomiaux. BRIGO et MERCURIO [2007] présentent le cadre théorique est pratique de génération d'arbre avec le modèle Hull et White.

Le payoff actualisé d'une *swaption* européenne payeuse de nominal N de date d'exercice T_α , de maturité T_β et évaluée à la date $t = 0$ est égal à :

$$f_{\alpha,\beta}(a, \sigma) = N \cdot D(t, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K)^+$$

Avec :

- K est le prix d'exercice ;
- $D(t, T_\alpha)$ est le noyau d'actualisation calculé à t pour l'échéance T_α ;
- $P(T_\alpha, T_i)$ est le prix du zéro-coupon calculé à T_α pour l'échéance T_i ;
- $F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i)$ est le taux *forward* calculé à T_α pour la période entre T_{i-1} et T_i ;
- τ_i est la différence entre T_{i-1} et T_i ;
- a et σ sont les paramètres du modèle Hull & White.

Notons :

- $\theta = (a, \sigma)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix d'une *swaption* i valorisée par le marché via la formule de Black ;
- $f_i^{HW}(\theta)$: le prix d'une *swaption* i valorisée par le modèle Hull & White.

Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des *swaptions* retenues pour le calibrage (d est une distance) :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (f_i^{HW}(\theta))_i \right) \right)$$

Cette optimisation consiste en un algorithme récursif basé sur l'approche de Newton. À chaque itération, un arbre est généré et un prix de *swaption* est évalué à chaque nœud puis actualisé par le noyau d'actualisation correspondant. La distance entre les prix de marché

et les prix théoriques est ensuite calculée. Les itérations peuvent s'arrêter sur un optimum local, d'où la nécessité d'initialiser l'algorithme d'optimisation par plusieurs points.

Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués. Cette reconstitution permet de retrouver des prix cohérents avec les prix observés.

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle de Hull & White peut être calibré directement sur ces prix de marché en réécrivant la fonction d'optimisation comme suit :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (f_i^{HW}(\theta))_i \right) \right)$$

III.3.1.2.6 Le modèle Hull & White et les taux négatifs

Le modèle Hull & White est un modèle normal. Il permet donc de générer des taux négatifs.

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle de Hull & White peut être calibré directement sur ces prix de marché.

L'utilisation des volatilités de Black implicites du marché pour le calibrage du modèle Hull & White dans un environnement économique à taux négatifs, nécessite l'utilisation du modèle de Black décalé.

Le calibrage du modèle de Hull & White sur des *caps*, des *floors* ou des *swaptions* valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites peut se présenter comme suit :

- Etape 1 : calibrage du modèle de Black décalé consistant à définir, pour une courbe de taux sans risque donnée, un facteur de décalage et à extraire les volatilités implicites cohérentes avec la valeur du facteur de décalage choisi en amont comme précisé dans la section III.3.1.1 ;
- Etape 2 : valorisation du produit dérivé dans le cadre du modèle de Black décalé par la formule de Black comme présenté dans la section III.3.1.1. Cette étape permet de disposer des prix de marché des actifs dérivés cohérents, *a priori*, avec les valeurs observées (toute chose égale par ailleurs) car les volatilités implicites et le facteur de décalage sont par construction cohérents avec ces observations. Pour les besoins de valorisation des passifs d'assurance vie, les praticiens valorisent les produits dérivés en prenant en compte la courbe de taux sans risque communiquée par l'EIOPA ;
- Etape 3 : calibrer le modèle Hull & White en utilisant les approches présentées dans les sections III.3.1.2.4 et III.3.1.2.5.

Les paramètres du modèle Hull & White calibrés ainsi sont cohérents avec les valeurs observées et la courbe de taux sans risques dans un environnement à taux négatifs.

III.3.1.3 **Modèle gaussien linéaire à deux facteurs (G2++)**

III.3.1.3.1 Dynamique du modèle

Dans cette section, nous présentons un modèle de taux d'intérêt où le processus instantané de taux court est donné par la somme de deux facteurs gaussiens corrélés plus une fonction déterministe. Cette fonction permet la reproduction de la structure par terme des taux d'intérêt sans risque. Le modèle permet de valoriser, par des formules fermées,

les obligations zéro-coupons, les caps, les floors et les swaptions. Il est noté par ailleurs que ce modèle permet de générer des taux négatifs.

Le taux d'intérêt instantané sous la probabilité risque neutre suit la dynamique suivante :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t)$$

- Notons : $r(0) = r_0$;
- Les deux processus : $\{x(t) : t \geq 0\}$ and $\{y(t) : t \geq 0\}$ sont définis comme suit :

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \text{ et } x(0) = 0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \text{ et } y(0) = 0$$
- W_1 et W_2 sont deux mouvements browniens corrélés : $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ et $-1 \leq \rho \leq 1$;
- Les paramètres r_0, a, b, σ, η sont des constantes positives ;
- La fonction ϕ est déterministe, définie sur toute la période de projection et $\phi(0) = r_0$.

III.3.1.3.2 Solution de l'équation différentielle

Soit $f^M(0, T)$ le taux forward instantané du marché observé à la date 0 pour la maturité T :

$$f^M(0, T) = -\frac{\partial \ln(P^M(0, T))}{\partial T}$$

Et soit F_t le sigma-ensemble généré par la paire (x, y) jusqu'à la date t .

La solution de l'équation différentielle du modèle G2++ s'écrit :

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \phi(t)$$

Donc le taux instantané $r(t)$ suit une loi normale conditionnellement à F_s . Sa moyenne et sa variance sont respectivement :

- $E\{r(t)|F_s\} = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \phi(t)$;
- $Var\{r(t)|F_s\} = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{\eta^2}{2b}(1 - e^{-2b(t-s)}) + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b}(1 - e^{-(a+b)(t-s)})$.

En particulier : $r(t) = \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_0^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \phi(t)$.

Par ailleurs, la fonction ϕ permet de reproduire la structure par terme observée si et seulement si, pour chaque T :

$$\phi(T) = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})$$

III.3.1.3.3 Prix d'une obligation zéro-coupon

Le prix d'une obligation zéro-coupon observé à l'instant t et payant une unité monétaire à l'échéance T s'écrit :

$$P(t, T) = E\left(e^{-\int_t^T r(s)ds} | F_t\right)$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon valorisée par le modèle G2++ s'écrit (BRIGO et MERCURIO [2007]):

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(a, t, T)x(t) - B(b, t, T)y(t))$$

Avec :

- $A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(\frac{1}{2}(V(t, T) - V(0, T) + V(0, t))\right)$;
- $B(z, t, T) = \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z}$;
- $V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right) + \frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b}\right) + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b}\right)$;
- $P^M(0, T)$ le prix d'une obligation zéro-coupon observée à $t = 0$ pour la maturité T .

Notons que la distribution du prix d'une obligation zéro-coupon est log-normale.

III.3.1.3.4 Calibrage du modèle G2++ sur les caps

Notons $T = \{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ l'ensemble des dates de paiement des caps/floors et T_0 le temps d'initialisation. Soit $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ tel que τ_i est la différence entre T_{i-1} et T_i .

Le prix à l'instant $t < T_0$ du cap de prix d'exercice X et de valeur nominale N est donné par :

$$\begin{aligned} \text{Cap}(t, T, \tau, N, X) = & \sum_{i=1}^n \left(-N(1 + X\tau_i)P(t, T_i) \Phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, T_{i-1})}{(1 + X\tau_i)P(t, T_i)}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} - \frac{1}{2} \Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \right. \\ & \left. + P(t, T_{i-1})N \Phi \left(\frac{\ln \frac{P(t, T_{i-1})}{(1 + X\tau_i)P(t, T_i)}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} + \frac{1}{2} \Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \right) \end{aligned}$$

Le prix du floor s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Flr}(t, T, \tau, N, X) = & \sum_{i=1}^n \left(N(1 + X\tau_i)P(t, T_i) \Phi \left(\frac{\ln \frac{(1 + X\tau_i)P(t, T_i)}{P(t, T_{i-1})}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} + \frac{1}{2} \Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \right. \\ & \left. - P(t, T_{i-1})N \Phi \left(\frac{\ln \frac{(1 + X\tau_i)P(t, T_i)}{P(t, T_{i-1})}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} - \frac{1}{2} \Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \right) \end{aligned}$$

Le paramètre Σ est positif et défini comme suit :

$$\begin{aligned} \Sigma(t, T, S)^2 = & \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a(S-T)})^2 (1 - e^{-2a(T-t)}) + \frac{\eta^2}{2b^3} (1 - e^{-b(S-T)})^2 (1 - e^{-2b(T-t)}) \\ & + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab(a+b)} (1 - e^{-a(S-T)})(1 - e^{-b(S-T)})(1 - e^{-(a+b)(T-t)}) \end{aligned}$$

Notons :

- $\theta = (a, \sigma, b, \eta, \rho)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix d'un cap i valorisé par le marché via la formule de Black ;
- $Cap_i^{G2++}(\theta)$: le prix d'un cap i valorisé par le modèle G2++.

Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des caps retenus pour le calibrage (d est une distance) :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (Cap_i^{G2++}(\theta))_i \right) \right)$$

Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués. Cette reconstitution permet de retrouver des prix cohérents avec les prix observés.

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle G2++ peut être calibré directement sur ces prix de marché en réécrivant la fonction d'optimisation comme suit :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (Cap_i^{G2++}(\theta))_i \right) \right)$$

III.3.1.3.5 Calibrage du modèle G2++ sur les swaptions européennes

Considérons une *swaption* Européenne de prix d'exercice X , de date d'exercice T et de nominal N , donnant au détenteur de l'option le droit d'entrer à l'instant $t_0 = T$ dans un *swap* de taux dont les dates de paiement sont $\mathfrak{S} = \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_1 > T$, où il paie un taux fixe X contre un taux variable. Notons : τ_i la différence entre t_{i-1} et t_i , $c_i = \tau_i X$ et $c_n = 1 + \tau_n X$.

Le prix théorique sans opportunité d'arbitrage d'une *swaption* est donné par l'intégrale suivante :

$$ES(t = 0, T, \mathfrak{S}, N, X, \omega) = N\omega P(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[\Phi(-\omega h_1(x)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e^{\kappa_i(x)} \Phi(-\omega h_2(x)) \right] dx$$

Avec :

- $\omega = 1$ ($\omega = -1$) pour une *swaption* payeuse (receveuse) ;
- $h_1(x) = \frac{\bar{y} - \mu_y}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} - \frac{\rho_{xy}(x - \mu_x)}{\sigma_x \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}$;
- $h_2(x) = h_1(x) + B(b, T, t_i) \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}$;
- $\lambda_i(x) = c_i A(T, t_i) e^{-B(a, T, t_i)x}$;
- $\kappa_i(x) = -B(b, T, t_i) \left(\mu_y - \frac{1}{2} (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 B(b, T, t_i) + \frac{\rho_{xy} \sigma_y (x - \mu_x)}{\sigma_x} \right)$;
- $\bar{y} = \bar{y}(x)$ est l'unique solution de l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(a, T, t_i)x - B(b, T, t_i)\bar{y}} = 1$$

- $\mu_x = -M_x^T(0, T)$;

- $\mu_y = -M_y^T(0, T)$;
- $\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}$;
- $\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2bT}}{2b}}$;
- $\rho_{xy} = \frac{\rho\sigma\eta}{(a+b)\sigma_x\sigma_y} (1 - e^{-(a+b)T})$;
- $M_x^T(s, t) = \left(\frac{\sigma^2}{a^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}\right) (1 - e^{-a(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t-2s)}) - \frac{\rho\sigma\eta}{b(a+b)} (e^{-b(T-t)} - e^{-bT-at+(a+b)s})$;
- $M_y^T(s, t) = \left(\frac{\eta^2}{b^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}\right) (1 - e^{-b(t-s)}) - \frac{\eta^2}{2b^2} (e^{-b(T-t)} - e^{-b(T+t-2s)}) - \frac{\rho\sigma\eta}{a(a+b)} (e^{-a(T-t)} - e^{-aT-bt+(a+b)s})$;

La formule de valorisation de *swaption* n'est pas totalement fermée dans la mesure où l'intégrale ci-dessus n'a pas de bornes finies. On peut noter par ailleurs que l'intégrale est calculée sur une variable distribuée suivant la loi normale : $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$. Ainsi, pour les applications numériques, l'intégrale est calculée par la méthode des trapèzes sur l'intervalle $[\mu_x - 10\sigma_x, \mu_x + 10\sigma_x]$.

Notons :

- $\Theta = (a, \sigma, b, \eta, \rho)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix d'une *swaption* i valorisée par le marché via la formule de Black ;
- $ES_i^{G2++}(\Theta)$: le prix d'une *swaption* i valorisée par le modèle G2++.

Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des *swaptions* retenues (d est une distance) :

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (ES_i^{G2++}(\Theta))_i \right) \right)$$

Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués. Cette reconstitution permet de retrouver des prix cohérents avec les prix observés.

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle G2++ peut être calibré directement sur ces prix de marché en réécrivant la fonction d'optimisation comme suit :

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (ES_i^{G2++}(\Theta))_i \right) \right)$$

III.3.1.3.6 Le modèle G2++ et les taux négatifs

Le modèle G2++ est un modèle normal. Il permet donc de générer des taux négatifs.

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle G2++ peut être calibré directement sur ces prix de marché.

L'utilisation des volatilités de Black implicites du marché pour le calibrage du modèle G2++ dans un environnement économique à taux négatifs, nécessite l'utilisation du modèle de Black décalé et suit le même processus présenté dans la section III.3.1.2.6.

III.3.1.4 Libor Market Model (LMM)

III.3.1.4.1 Dynamique du modèle

Un modèle de taux de marché décrit directement la dynamique des taux négociables contrairement aux modèles Hull & White et G2++. Ces derniers modélisent en effet un processus caché sous-jacent aux prix des titres d'intérêt : le taux court instantané.

Considérons un ensemble $E = \{T_0, \dots, T_M\}$ à partir duquel sont construites des paires de dates d'échéance (T_{i-1}, T_i) . Soit $\{\tau_0, \dots, \tau_M\}$ un ensemble tel que τ_i est la différence entre T_{i-1} et T_i . On note $T_{-1} = 0$. Le taux forward noté $F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k)$, $k \in \{1, \dots, M\}$ est égale au taux spot pour $t = T_{k-1}$: $F_k(T_{k-1}) = L(T_{k-1}, T_k)$ où $L(S, T)$ désigne le taux spot observé à la date S pour l'échéance T .

Considérons maintenant la mesure de probabilité Q^k associée au numéraire $P(\bullet, T_k)$, soit au prix de l'obligation zéro-coupons dont la maturité coïncide avec la maturité du taux à terme. Q^k est souvent appelé la mesure forward (ajustée) pour la maturité T_k .

Par définition : $F_k(t)P(t, T_k) = \frac{[P(t, T_{k-1}) - P(t, T_k)]}{\tau_k}$.

Et donc : $P(t, T_k) = \frac{P(t, T_{k-1})}{1 + \tau_k F_k(t)}$.

La dynamique de F_k sous la probabilité Q^k est donnée par :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t) ; t \leq T_{k-1}$$

La variable $Z_i(t)$ est un mouvement Brownien sous Q^i tel que : $dZ_i(t)dZ_j(t) = \rho_{i,j}dt$.

Plus généralement, pour tout entier naturel strictement positif i , la dynamique du taux forward sous Q^i s'écrit (cf. BRIGO et MERCURIO [2007]) :

- Pour : $i < k$ et $t \leq T_i$:

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \rho_{k,j} \frac{\tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t)$$

- Pour : $i = k$ et $t \leq T_{k-1}$:

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t) ; t \leq T_{k-1}$$

- Pour : $i > k$ et $t \leq T_{k-1}$:

$$dF_k(t) = -\sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \rho_{k,j} \frac{\tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t)$$

III.3.1.4.2 Solution de l'équation différentielle

Notons :

- β une fonction de t tel que : $\beta(t) = m$ si $T_{m-2} < t \leq T_{m-1}$ et $m \geq 1$. Donc $t \in]T_{\beta(t)-2}, T_{\beta(t)-1}]$;
- $B(T) = \exp\left(\int_0^T r_t dt\right)$.

Soit :

$$B_d(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)-1})}{\prod_{j=0}^{\beta(t)-1} P(T_{j-1}, T_j)} = P(t, T_{\beta(t)-1}) \prod_{j=0}^{\beta(t)-1} (1 + \tau_j F_j(T_{j-1}))$$

Le numéraire $B_d(t)$ s'interprète comme la valeur actuelle d'un investissement consistant à partir d'une unité monétaire et à investir à chaque échéance dans des obligations zéro-coupons pour le prochain ténor⁴² (l'indice « d » dans B_d fait référence à l'écriture discrète de la valeur de l'investissement).

La mesure Q_d associée au numéraire B_d est appelé la « mesure spot ».

Sous cette mesure, la dynamique du taux *forward* s'écrit :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \rho_{j,k} \frac{\tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t) dZ_k^d(t)$$

En utilisant la discrétisation d'Euler on peut écrire pour $i < k$ (HILL [2009] et BRIGO et MERCURIO [2007]) :

$$F_k(T_{i+1}) = F_k(T_i) \exp \left(\sigma_k(T_i) \left(\sum_{j=i+1}^k \rho_{j,k} \frac{\tau_j \sigma_j(T_i) F_j(T_i)}{1 + \tau_j F_j(T_i)} - \frac{1}{2} \sigma_k(T_i) \right) \tau_i + \sigma_k(T_i) \sqrt{\tau_i} \varepsilon_i^k \right)$$

La variable ε_i^k suit une loi normale centrée réduite et $\langle \varepsilon_i^k, \varepsilon_i^l \rangle = \rho_{k,l}$.

Cette formule récurrente permet de diffuser les taux *forward* à chaque date en partant des taux *forward* observés à la date 0. Ces derniers s'écrivent :

$$F_k(t=0) = \frac{e^{L(0,T_k)T_k - L(0,T_{k-1})T_{k-1}} - 1}{\tau_k}$$

III.3.1.4.3 Prix d'une obligation zéro-coupon

Le prix d'une obligation zéro-coupon s'écrit pour $j < k$:

$$P(T_j, T_k) = \prod_{i=j+1}^K \frac{1}{1 + \tau_i F_i(T_j)}$$

et $P(T_j, T_j) = 1$.

La diffusion des taux *forwards* permet donc de diffuser le prix des obligations zéros coupon.

III.3.1.4.4 Modèles de volatilité instantanée et modèle de corrélation

La valorisation d'obligations ou d'options nécessite la spécification de la forme de la volatilité instantanée et des corrélations.

Plusieurs modélisations de la volatilité instantanée des taux *forward* sont proposées dans la littérature (BRIGO et MERCURIO [2007] et REBONATO [2004]). Deux situations peuvent être distinguées :

⁴² Temps restant jusqu'à la maturité.

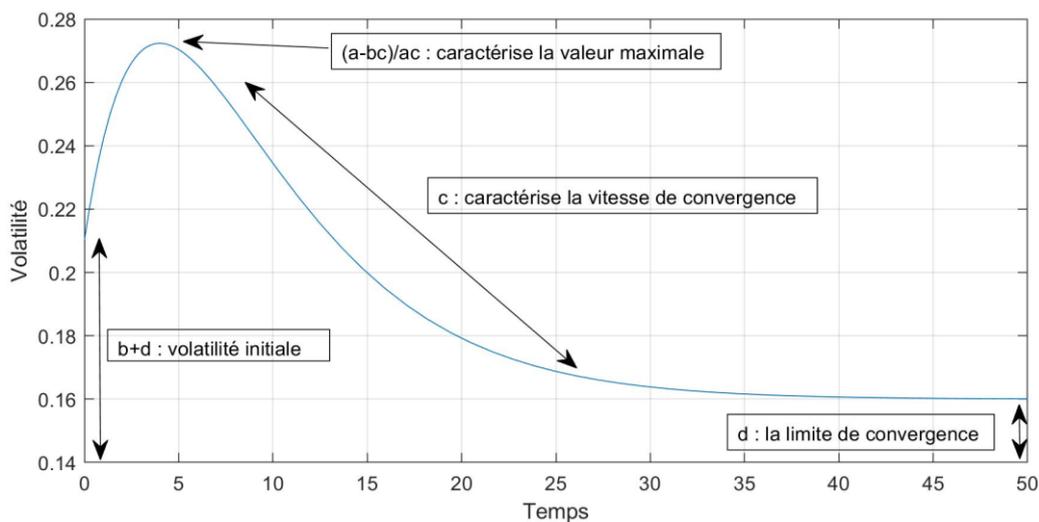
- Les modèles à volatilité constante par morceau impliquant que pendant de courts intervalles de temps, la volatilité d'un taux *forward* est constante ;
- Les modèles proposant l'utilisation d'une forme paramétrique impliquant que la volatilité est une fonction du temps, de la maturité et d'un ensemble de paramètres.

Dans le cadre de nos travaux, nous retenons le modèle de volatilité suivant présenté dans REBONATO [2004] :

$$\sigma_i(t) = (a(T_{i-1} - t) + b)e^{-c(T_{i-1}-t)} + d$$

Cette forme intégrant un terme linéaire avec une décroissance exponentielle caractérise la courbure de la dynamique de la volatilité et permet la formation d'une bosse. Cela implique également que la volatilité converge asymptotiquement vers d quand T_i tend positivement vers l'infini. La *Figure III.2* présente une interprétation des paramètres de la fonction de volatilité de Rebonato de la forme : $f(t) = (at + b)e^{-ct} + d$ où $a=b=5\%$, $c=20\%$ et $d=16\%$.

Figure III.2 : interprétation du modèle de volatilité de Rebonato



Pour le modèle de corrélations, nous avons retenu la forme paramétrique suivante présentée dans REBONATO [2004] :

$$\rho_{ij}(t) = \exp(-\beta |T_i - T_j|)$$

Cette forme paramétrique de la corrélation implique que plus les taux à terme sont éloignés, moins ils sont corrélés. De plus, pour tout β positif, la matrice de corrélation générée est une matrice de corrélation admissible : c'est-à-dire une matrice réelle, symétrique avec des valeurs propres positives.

Cependant, cette forme est caractérisée par l'absence d'une dépendance temporelle : deux taux *forward*, séparés par la même distance temporelle $T_i - T_j$, auront la même corrélation, quelle que soit la date d'expiration T_i .

Le modèle de corrélation retenu peut être généralisé par la forme (REBONATO [2004]) :

$$\rho_{ij}(t) = \exp(-\beta |g(T_i - t) - g(T_j - t)|)$$

Ce modèle généralisé n'est pas retenu ici.

III.3.1.4.5 Calibrage du modèle LMM sur des swaptions européennes

Notons $S^{i,n}(t)$ le taux *swap forward* couvrant la période entre T_i et T_n .

Le marché valorise les *swaptions* avec la formule de Black, ce qui suppose implicitement que le sous-jacent, le taux *swap forward*, est log-normal. Or cette hypothèse est incohérente avec celle supposant que le taux *forward* est log-normal.

En effet, la relation entre le taux *swap forward* $S^{i,n}(t)$, et les obligations zéro-coupon s'écrit :

$$S^{i,n}(t) = \frac{P(t, T_i) - P(t, T_n)}{\sum_{j=i+1}^n \tau_j P(t, T_j)}$$

Donc :

$$S^{i,n}(t) = \sum_{j=i+1}^n w_j(t) F_j(t)$$

$$\text{où : } w_i(t) = \frac{\tau_i P(t, T_i)}{\sum_{j=i+1}^n \tau_j P(t, T_j)}$$

On note donc que si les taux *forward* sont log-normaux, le taux *swap forward* ne peut être log-normal.

Cette dernière expression est néanmoins importante car elle peut conduire à des approximations utiles. En effet, les taux *swap forward* peuvent être interprétés comme des moyennes pondérées des taux *forward*. Cependant, les poids « w » dépendent des « F ». Sur la base d'études empiriques montrant que la variabilité des « w » est faible par rapport à la variabilité des « F », BRIGO et MERCURIO [2007] et REBONATO [1999], proposent d'approcher les « w » par leurs valeurs initiales (déterministes) $w(0)$ et avoir donc :

$$S^{i,n}(t) = \sum_{j=i+1}^n w_j(0) F_j(t)$$

Supposons donc que le taux *swap forward* suit une dynamique log-normale. Sous une mesure de probabilité adaptée, le taux *swap forward* s'écrit :

$$dS^{i,n}(t) = \sigma^{i,n}(t) S^{i,n}(t) dW_t^{i,n}$$

Et soit $v_{i,n}^2$ la variance moyenne du taux *swap forward* sur l'intervalle $[0, T_i]$ multipliée par la longueur de l'intervalle. On a :

$$v_{i,n}^2 = \int_0^{T_i} \sigma^{i,n}(t)^2 dt$$

Le prix d'une *swaption* payeuse de strike K s'écrit (D est le noyau d'actualisation) :

$$D(0, T_i) (S^{i,n}(T_i) - K)^+ \sum_{j=i+1}^n \tau_j P(T_i, T_j)$$

BRIGO et MERCURIO [2007] montrent que le prix de la *swaption* payeuse formulé ci-dessus, coïncide avec celui donné par la formule de Black dont le paramètre de variance (multiplié par T_i) est $v_{i,n}^2$.

Par ailleurs la variance moyenne peut être approchée par la formule de REBONATO (cf. REBONATO [2004] et BRIGO et MERCURIO [2007]) :

$$v_{m,n}^2 = \sum_{i,j=m+1}^n \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}}{S^{m,n}(0)^2} \int_0^{T_m} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt$$

Minimiser une distance entre le prix du marché (donné par le modèle de Black) et le prix calculé par le modèle LMM, revient donc à minimiser la distance entre les volatilités des *swaptions* du marché (calculées donc par le modèle de Black) et les volatilités théoriques calculées par la formule de Rebonato.

Soit $\Theta = (a, b, c, d, \beta)$ le vecteur de l'ensemble des paramètres du modèle (paramètres du modèle de volatilité et du modèle de corrélation). Le calibrage du modèle LMM sur les *swaptions* consiste à résoudre l'équation d'optimisation suivante (d est une distance) :

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((\sigma_{m,n}^{black})_{m,n}, (v_{m,n}(\Theta))_{m,n} \right) \right)$$

III.3.1.4.6 Le modèle LMM et les taux négatifs

Comme le modèle de Black, le modèle LMM est un modèle log-normal. L'utilisation de ce modèle dans l'état ne peut s'opérer dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs.

Afin de rendre le modèle LMM cohérent avec des taux négatif, un facteur de translation des taux *forward* peut être introduit. Ce facteur est appelé « shift » ou « *displacement factor* ». On parle alors de modèle LMM décalé ou du *displaced LMM model*. Sous une mesure adaptée, la dynamique du modèle s'écrit en effet :

$$dF_k(t) = \sigma_k^{(h)}(t)(F_k(t) + h)dZ_k(t); t \leq T_{k-1}$$

Le facteur de translation est noté h .

Comme pour le modèle Black décalé une attention particulière doit être accordée au processus du choix du facteur de décalage. En effet la valeur du facteur de décalage devrait être suffisante pour éviter que les taux *forward* et le *strike décalé* ne passent en dessous de zéro ; mais ne devrait pas être extrêmement élevé car dans ce cas le taux *forward* peut avoir des valeurs négatives significatives.

Les caractéristiques du modèle LMM décalé sont similaires au modèle LMM. Il peut être caractérisé par les mêmes modèles de volatilité et de corrélation présentés dans la section III.3.1.4.4. Le vecteur de paramètre du modèle LMM décalé, $\Theta^{(h)} = (a^{(h)}, b^{(h)}, c^{(h)}, d^{(h)}, \beta^{(h)})$, dépend de la valeur du facteur de décalage choisi en amont.

Une fois le modèle LMM décalé est calibré, le taux *forward* est calculé à chaque pas de temps par la formule suivante (ERRAIS et al. [2004]) :

$$F_k(T_{i+1}) = (F_k(T_i) + h) \exp \left(\sigma_k(T_i) \left(\sum_{j=i+1}^k \rho_{j,k} \frac{\tau_j \sigma_j(T_i) (F_j(T_i) + h)}{1 + \tau_j F_j(T_i)} - \frac{1}{2} \sigma_k(T_i) \right) \tau_i + \sigma_k(T_i) \sqrt{\tau_i} \varepsilon_i^k \right) - h$$

Le calibrage du modèle LMM décalé est similaire au modèle LMM.

En effet, soit $\bar{S}^{i,n}(t)$ le taux swap forward décalé :

$$\bar{S}^{i,n}(t) = S^{i,n}(t) + h = \sum_{j=i+1}^n w_j(0)(F_j(t) + h)$$

Le taux swap forward décalé suit une dynamique log-normale. Sous une mesure de probabilité adaptée, le taux swap forward décalé s'écrit donc :

$$d\bar{S}^{i,n}(t) = \sigma_h^{i,n}(t)\bar{S}^{i,n}(t)dW_t^{i,n}$$

Et soit $(v_{i,n}^{(h)})^2$ la variance moyenne du taux swap forward décalé sur l'intervalle $[0, T_i]$ multipliée par la longueur de l'intervalle. On a :

$$(v_{i,n}^{(h)})^2 = \int_0^{T_i} \sigma_h^{i,n}(t)^2 dt$$

Le prix d'une swaption payeuse de strike K s'écrit (D est le déflateur) :

$$D(0, T_i)(\bar{S}^{i,n}(T_i) - (K + h))^+ \sum_{j=i+1}^n \tau_j P(T_i, T_j)$$

Le prix de la swaption payeuse formulé ci-dessus, coïncide avec celui donné par la formule de Black appliqué au modèle de Black décalé dont le paramètre de variance (multiplié par T_i) est $(v_{i,n}^{(h)})^2$.

En suivant la même démonstration présentée dans BRIGO et MERCURIO [2007] page 282, on peut prouver que :

$$(v_{m,n}^{(h)})^2 = \sum_{i,j=m+1}^n \frac{w_i(0)w_j(0)(F_i(0) + h)(F_j(0) + h)\rho_{i,j}}{(S^{m,n}(0) + h)^2} \int_0^{T_m} \sigma_i^{(h)}(t)\sigma_j^{(h)}(t)dt$$

Minimiser une distance entre le prix du marché (donné par le modèle de Black décalé) et le prix calculé par le modèle LMM décalé, revient donc à minimiser la distance entre les volatilités des swaptions du marché (calculées donc par le modèle de Black décalé) et les volatilités théoriques décalées calculées par la formule de Rebonato ci-dessus.

Notons que le facteur de décalage utilisé pour extraire les volatilités de marché par le modèle de Black décalé doit être égal au facteur de décalage utilisé pour construire les volatilités du modèle LMM décalé.

Soit $\theta^{(h)} = (a^{(h)}, b^{(h)}, c^{(h)}, d^{(h)}, \beta^{(h)})$ le vecteur de l'ensemble des paramètres du modèle (paramètres du modèle de volatilité et du modèle de corrélation). Le calibrage du modèle LMM décalé sur les swaptions consiste à résoudre l'équation d'optimisation suivante (d est une distance) :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((\sigma_{m,n}^{black-shift})_{m,n}, (v_{m,n}^{(shift)}(\theta))_{m,n} \right) \right)$$

Le paramètre θ , résultat de cette optimisation, dépend de la valeur du facteur de décalage.

III.3.2 Modèle actions et immobilier

III.3.2.1 La dynamique du modèle Black & Scholes

Le modèle Black-Scholes ou modèle Black-Scholes est un modèle mathématique du marché pour décrire la dynamique d'un actif (ou d'un indice). Le modèle, dans sa formulation classique, suppose que le prix de l'actif financier est un processus stochastique en temps continu caractérisé par l'équation différentielle stochastique suivante sous la probabilité risque neutre :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma_t dW_t$$

Avec :

- S_t est le prix de l'actif ;
- $r(t)$ est le taux court instantané ;
- σ_t est la volatilité ;
- W_t est un mouvement brownien géométrique.

Le modèle de Black-Scholes à volatilité constante ne peut reproduire l'ensemble des prix des options observés sur le marché pour un sous-jacent donné, car leur volatilité implicite varie en fonction du *strike* et de la maturité (cf. TANKOV [2011] et HULL [2007]). Pour prendre en compte le *smile* du marché, une solution naturelle est de modéliser la volatilité comme une fonction déterministe du temps et de la valeur du sous-jacent.

Nous avons retenu ici un modèle de Black-Scholes dont la volatilité est déterministe et fonction uniquement du temps.

Le taux instantané retenu est celui issu des modèles de taux présentés dans les sections précédentes et est donc stochastique. Cela permet d'assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage du prix modélisé.

III.3.2.2 Solution de l'équation différentielle

L'application du lemme d'Itô à $\ln(S_t)$ permet de prouver que la solution générale de l'équation différentielle stochastique s'écrit (TANKOV [2011] et TANKOV [2015]) :

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t r(u) du - \int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2} du + \int_0^t \sigma_u dW_u \right)$$

- $D(0, T) = \exp \left(- \int_0^T r(u) du \right)$ représente le noyau d'actualisation observé à la date 0 dont l'échéance est T ;
- $\Sigma_t = \sqrt{\frac{\int_0^t \sigma_u^2 du}{t}}$ représente la volatilité annualisée du logarithme népérien du prix du sous-jacent à l'instant t .

soit :

- $E = \{T_0 = 0, \dots, T_M\}$ un ensemble de dates d'intérêt tel que σ_i est constante entre T_{i-1} et T_i ;
- $\{\tau_1, \dots, \tau_M\}$ un ensemble tel que τ_i est la différence entre T_{i-1} et T_i ;

- $R_i = \frac{\ln\left(\frac{P(0,T_i)}{P(0,T_{i-1})}\right)}{\tau_i}$ le taux spot annuel pour la période entre T_{i-1} et T_i .

La forme discrétisée du prix de l'actif s'écrit :

$$S_{T_{i+1}} = S_{T_i} \exp\left(\tau_{i+1} R_{i+1} - \tau_{i+1} \frac{\sigma_{i+1}^2}{2} + \sigma_{i+1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} dW_u\right)$$

Et on a également :

$$S_{T_{k+1}} = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{k+1} \tau_i R_i - \sum_{i=1}^{k+1} \tau_i \frac{\sigma_i^2}{2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} \tau_i \sigma_i^2} \varepsilon_{k+1}\right)$$

où ε_{i+1} est une variable gaussienne centrée réduite.

Notons :

- $\Lambda_k = \sum_{i=1}^k \tau_i R_i$: le taux d'actualisation total de la date 0 à T_k ;
- $\Sigma_{T_k} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k \tau_i \sigma_i^2}{T_k}}$: la volatilité annualisée du logarithme de S_{T_k} .

III.3.2.3 Valorisation d'une option d'achat européenne

Le choix retenu ici est de valoriser les options d'achat par une méthode Monte-Carlo. Ce choix s'explique par :

- La formule fermée de Black-Scholes n'est pas applicable directement quand les taux d'intérêt sont stochastiques. Une formule fermée existe néanmoins pour le modèle de Black-Scholes combiné au modèle de taux Hull et White (cf. HAASTRECHT [2010]) mais n'est pas retenue ici ;
- Une volonté d'appliquer la même méthode de valorisation quel que soit le modèle de taux utilisé pour assurer la comparabilité des résultats.

Le prix d'un *call* à l'instant T sur un actif ne versant pas de dividende s'écrit pour N trajectoires simulées :

$$C(0, S_0, T, K, \Sigma_T) = E(D(0, T)(S_T - K)^+) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N D^{(j)}(0, T) (S_T^{(j)} - K)^+$$

Le calibrage de la dynamique Black-Scholes présentée ci-dessus sous la probabilité risque neutre consiste à estimer l'ensemble des $\{\sigma_i\}_i$ ce qui revient à estimer l'ensemble des volatilités implicites $\{\Sigma_i\}_i$.

Le calibrage du modèle sur des *calls* consiste à résoudre l'équation d'optimisation suivante (d est une distance) pour chaque T :

$$\widehat{\Sigma}_T = \underset{\Sigma_T}{\operatorname{argmin}} \left(d \left(\text{Call}_T^{\text{Marché}}, C(0, S_0, T, K, \Sigma_T) \right) \right)$$

Notons que si l'on retient un modèle à volatilité constante : $\sigma_i = \sigma$, le calibrage du modèle sur des *calls* peut se présenter comme la résolution de l'équation d'optimisation suivante (d est une distance) :

$$\sigma = \underset{\sigma}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_T d \left(\operatorname{Call}_T^{\text{Marché}}, C(0, S_0, T, K, \sigma) \right) \right)$$

III.3.2.4 Calibrage du modèle Black et Scholes sur un indice actions

Notons que le prix d'un *call* de maturité T_k sur un indice actions est une fonction bijective de la volatilité annualisée Σ_{T_k} . Ce dernier paramètre, appelé volatilité implicite, est calculé directement à partir des prix des *calls* observés sur le marché. L'ensemble des volatilités locales $\{\sigma_i\}_i$ s'en déduit ensuite par récurrence.

III.3.2.5 Calibrage du modèle Black et Scholes sur un indice immobilier

Les mouvements des prix de l'immobilier peuvent être assimilés à ceux des prix des actions (KOIVU et al. [2005], DJEHICHE et al. [2005] et LAURENT et al. [2016]). Cependant, le marché des dérivés sur des actifs immobiliers n'est pas aussi liquide et profond que celui des actions.

Nous avons retenu donc un modèle Black-Scholes à volatilité constante pour décrire la dynamique d'un investissement en immobilier. Cette volatilité est calibrée sur les prix historiques.

III.3.3 Modélisation de la structure de dépendance

La modélisation de la structure de dépendance d'un générateur de scénarios économiques est complexe que ce soit en probabilité risque neutre ou en probabilité historique. Une présentation plus détaillée de l'introduction de structures de dépendance multivariée et non-linéaire (copules) en probabilité historique est proposée dans ARMEL et al. [2011]. LAURENT et al. [2016] et HAASTRECHT [2010] présentent par ailleurs le modèle BSHW ou une corrélation implicite peut être estimée entre le bruit gaussien du modèles Hull & White et celui du modèle Black-Scholes.

La problématique des corrélations implicites des actifs financiers a été traitée par plusieurs papiers de la littérature financière (par exemple : DA FONSECA et al. [2007], DRIESSEN et al. [2005], WALKER [2005]). Nous ne connaissons cependant pas d'articles traitant cette problématique dans le cadre d'un générateur de scénarios économiques multivariés sous la probabilité risque neutre.

L'objectif de cette section est de présenter la démarche retenue pour introduire une structure de dépendance entre les dynamiques présentées ci-dessus.

Notons que tous les modèles retenus dans ce chapitre sont normaux ou log-normaux. Nous pouvons donc nous placer dans un espace vectoriel gaussien ou la corrélation décrit complètement la structure de dépendance.

Pour rappel, trois générateurs de scénarios économiques sont construits :

- GSE1 composé d'un modèle Hull et White pour le taux sans risque instantané, un modèle Black et Scholes pour le prix du portefeuille d'actions et un modèle Black et Scholes pour le prix d'un investissement en immobilier ;

- GSE2 composé d'un modèle G2++ pour le taux sans risque instantané, un modèle Black et Scholes pour le prix du portefeuille d'actions et un modèle Black et Scholes pour le prix d'un investissement en immobilier ;
- GSE3 composé d'un modèle LMM pour le taux *forward*, un modèle Black et Scholes pour le prix du portefeuille d'actions et un modèle Black et Scholes pour le prix d'un investissement en immobilier.

Trois matrices de corrélation sont donc à déterminer.

Si nous prenons le GSE 1 :

- Le processus de taux court instantané n'est pas observable sur le marché et la chronique anticipée du mouvement brownien implicite au modèle n'est pas accessible ;
- Le marché n'offre pas d'information sur le prix futur du sous-jacent action mais donne accès uniquement à une information sur sa variabilité (volatilité implicite). La chronique du mouvement brownien sous-jacent n'est pas accessible ;
- Les investissements en immobilier sont calibrés sur des données historiques et non pas sur des données anticipées.

La démarche consistant à (1) construire les observations des aléas browniens pour (2) déduire leurs corrélations (3) que l'on utilise ensuite pour les simulations, n'est pas adaptée à notre problématique.

L'estimation de la corrélation implicite en utilisant des produits dérivés (comme pour le modèle BSHW) est difficile en pratique dans un cadre multivarié. En effet, il faudra trouver au moins un produit dérivé liquide dont les sous-jacents sont l'indice actions et l'investissement en immobiliers pour estimer leur corrélation.

Notre démarche vise à injecter, dans les GSE risque-neutres proposés, les corrélations historiques observées entre les variables suivantes⁴³ :

- $R_1^{(t)}$ le taux sans risque sur un an observé à la date t et $S_1^{(t)} = \ln(R_1^{(t)})$;
- $R_2^{(t)} = A_1^{(t)} - R_1^{(t)}$ le taux de rendement logarithmique annuel observé à la date t de l'historique de l'indice actions diminué du taux sans risque un an ;
- $R_3^{(t)} = I_1^{(t)} - R_1^{(t)}$ le taux de rendement logarithmique annuel observé à la date t de l'historique de l'indice immobilier diminué du taux sans risque un an.

Deux matrices de corrélation sont calculées :

- $M_1 = \text{corrélation}(R_1^{(t)}, R_2^{(t)}, R_3^{(t)})$ la matrice de corrélation utilisée pour les GSE 1 et 2 ;
- $M_2 = \text{corrélation}(S_1^{(t)}, R_2^{(t)}, R_3^{(t)})$ la matrice de corrélation utilisée pour le GSE 3.

⁴³ Pour une discrétisation annuelle, notons que : $\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) - R_{i+1} = -\frac{\sigma_{i+1}^2}{2} + \sigma_{i+1}N(0,1)$. Le rendement de l'indice diminué du taux sans risque est gaussien sous la probabilité risque neutre.

Nous supposons que ces deux matrices ne dépendent pas du temps et ne dépendent pas des variables modélisées.

Le processus de simulation des variables corrélées est le suivant :

1. Simulation des taux d'intérêt indépendamment des autres variables économiques ;
2. À chaque pas de projection t , calcul de la distribution du bruit gaussien, centré et réduit, sous-jacent au taux *forward* un an (pour les GSE 1 et 2) ou de son logarithme (pour le GSE3) ;
3. Simulation de deux bruits gaussiens corrélés au bruit gaussien calculé dans l'étape 2 suivant la matrice de corrélation M_i ($i=1,2$ ou 3) par la méthode de Cholesky ;
4. Utilisation des deux bruits gaussiens dans les simulations des indices actions et immobilier.

Cette approche de simulation de l'indice actions et de l'indice immobilier conditionnellement aux trajectoires du taux *forward* un an permet de construire un modèle risque neutre dont la structure de dépendance est cohérente avec les corrélations historiques observées.

III.4 Démarche et données

La section III.5 présente une application des développements théoriques documentés dans la section III.3 et consiste à générer des scénarios économiques pour valoriser des passifs d'épargne en euro dans le référentiel solvabilité 2.

Une attention particulière est accordée aux modèles de taux. La convention de calibrage présentée dans la section III.2.1 est celle qui est retenue dans l'application présentées dans la suite.

Les choix suivants sont retenus :

- Les options retenues pour le calibrage des différents modèles (*call*, *caps* et *swaption*) sont ATM⁴⁴ ;
- Les volatilités de marché des *caps* et *swaptions* utilisées dans le processus de calibrage sont des volatilités log-normales ATM non décalées fournies par Bloomberg (le facteur de décalage est égale à 0) ;
- La courbe de taux sans risque retenue pour les processus de calibrage et de simulation est la courbe de taux fournie par l'EIOPA le 31/12/2017 ;
- L'utilisation de la courbe EIOPA implique la nécessité d'introduire un facteur de décalage non nul pour calibrer et projeter les modèles de taux. L'introduction de ce facteur non nul (alors que l'extraction des volatilités est réalisée avec un facteur de décalage nul) induit un certain biais dans le modèle comme explicité dans la section III.2.2 :

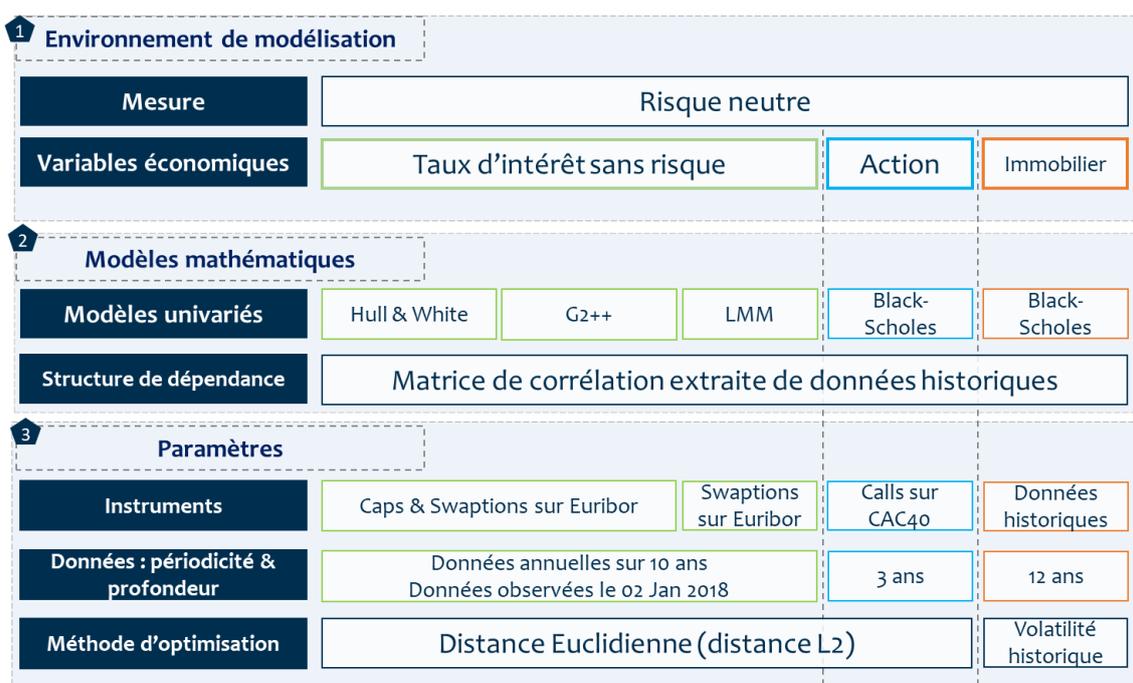
⁴⁴ Un *cap*, un *floor* ou une *swaption* sont ATM (At The Money) si et seulement si le prix d'exercice K_{ATM} s'écrit
$$K_{ATM} = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P(t, T_j)}$$

- Pour les modèles Hull et White et G2++ : différents calibrages ont été réalisés correspondant à différents niveaux du facteur de décalage. Ces modèles sont normaux et ne nécessitent pas la définition d'un facteur de décalage pour la diffusion ;
 - Le modèle LMM a été calibré sur les volatilités de Black sur les maturités ne présentant pas de taux négatifs : aucun facteur de décalage n'a été introduit dans le processus de calibrage ;
 - La diffusion du modèle LMM nécessite la définition d'un facteur de décalage. Plusieurs facteurs de décalage ont été testés ;
 - Trois niveaux du facteur de décalage sont testés : 0,4 %, 1 % et 2 %. La valeur de 0,4 % correspond à la valeur absolue arrondie du taux minimal de la courbe de taux sans risque EIOPA le 31 décembre 2017.
- Pour la projection d'investissements en actions et en immobilier, nous avons retenu des modèles de Black-Scholes à volatilités constantes :
- La volatilité implicite à un investissement en actions est calibrée sur la volatilité implicite du *call* ATM sur le CAC 40 de maturité 3 ans ;
 - La volatilité d'un investissement en immobilier correspond à la volatilité historique des rendements de l'indice des prix de vente des logements anciens publié par l'INSEE⁴⁵.

Une synthèse des choix retenus pour la construction des générateurs de scénarios économiques est présentée dans la *Figure III.3*.

⁴⁵ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/series/102770558>

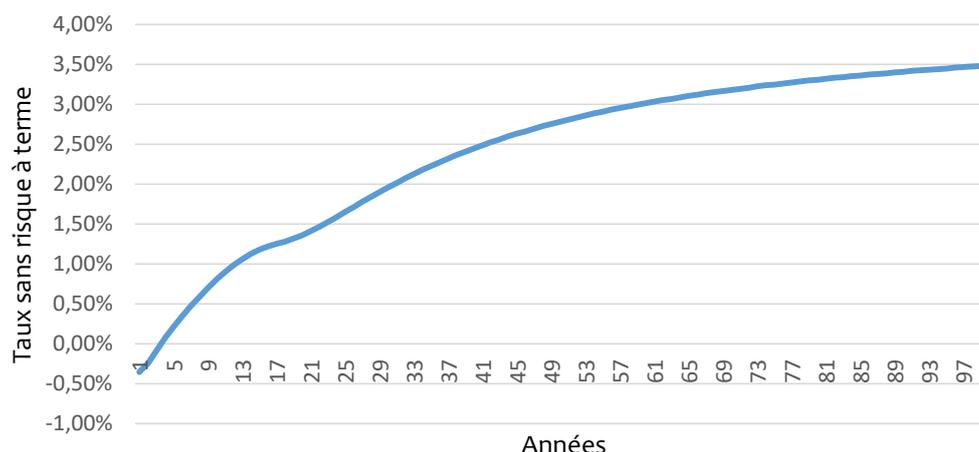
Figure III.3 : choix de modélisation



III.4.1 Analyse des taux sans risque du marché et de l'EIOPA

La courbe de taux sans risque utilisée dans la phase de calibrage et de simulation est la courbe de taux sans risque à terme communiquée par l'EIOPA au 31/12/2017. Nous observons notamment que le taux à terme est négatif sur les trois premières années.

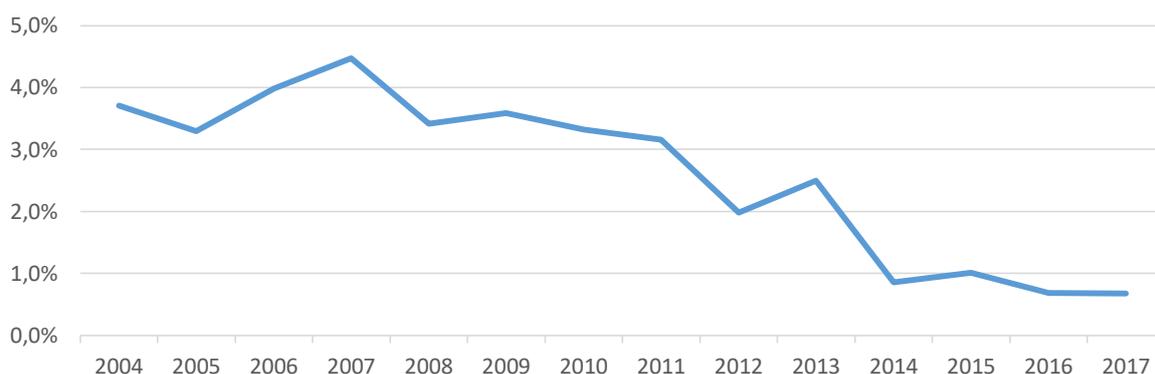
Figure III.4 : taux sans risque EIOPA sans volatility adjustment au 31 décembre 2017



Afin de disposer d'ordre de grandeurs historiques sur l'évolution des taux sans risque historiques et de leur volatilité, nous présentons dans la suite un graphique reprenant l'évolution du TEC 10 et un graphique présentant la volatilité historique par maturité du TEC⁴⁶.

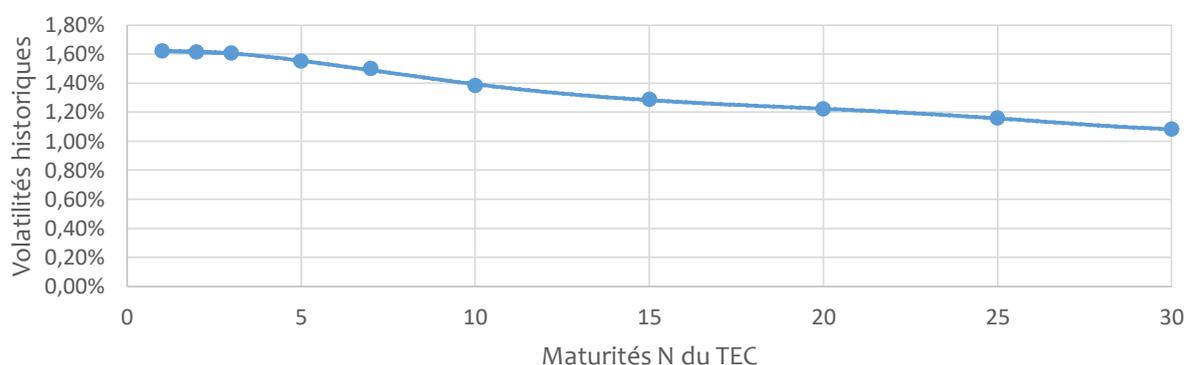
⁴⁶ Rappelons que l'indice quotidien TEC N, Taux de l'Echéance Constante N ans, pour N variant de 1 à 30, est le taux de rendement actuariel d'une valeur du Trésor dont la durée de vie serait à chaque instant égale à N

Figure III.5 : évolution du TEC 10 entre décembre 2004 et décembre 2017



Nous observons une tendance baissière du taux TEC 10 avec un minimum historique en 2017.

Figure III.6 : volatilités historique par maturité du TEC sur la période 2006-2017



Nous observons que la courbe de volatilité historique par maturité des TEC sur la période allant de décembre 2006 à décembre 2017 est décroissante en fonction de la maturité. La volatilité à une maturité donnée N est calculée comme l'écart-type des taux historiques à maturité N sur la période d'observation.

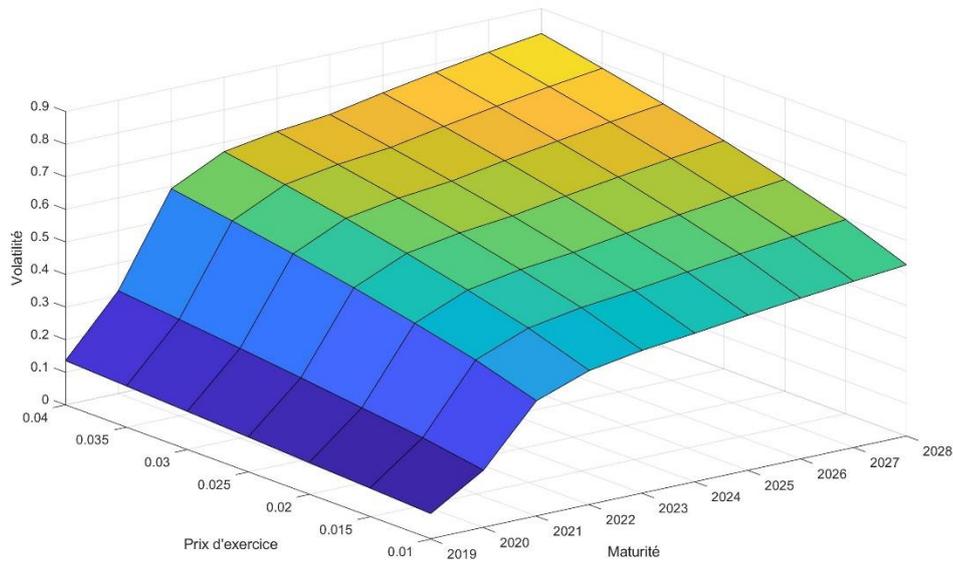
III.4.2 Volatilités implicites des caps et des swaptions

Les graphiques ci-après sont construits à partir de volatilités log-normales implicites aux prix de marché de caps et de swaptions sur le taux Euribor 3 mois. Ces volatilités sont non-décalées (facteur de décalage=0). Les données ont été extraites de Bloomberg le 02 janvier 2018.

Le graphique suivant présente la nappe de volatilité log-normale implicite aux prix de caps sur Euribor observés au 02 janvier 2018 (prix d'exercice, maturité et volatilité).

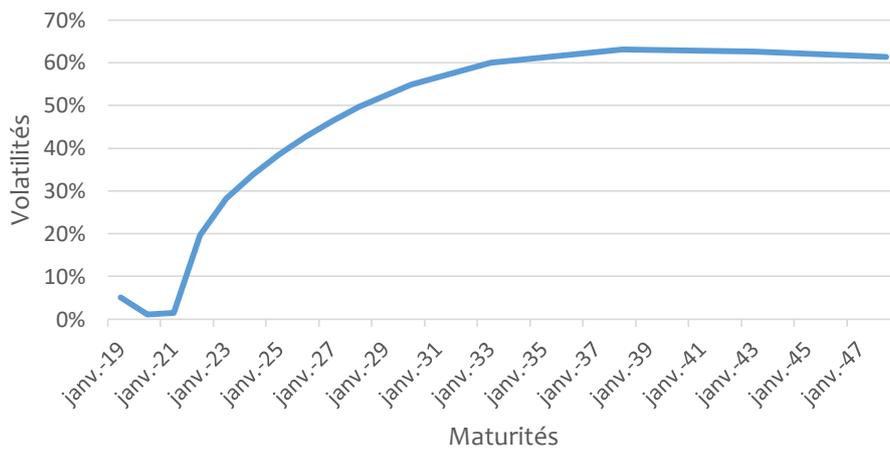
années. Ce taux est obtenu par interpolation linéaire entre les taux de rendement actuariels annuels des 2 valeurs du Trésor qui encadrent au plus proche la maturité N.

Figure III.7 : nappe de volatilité log-normale implicite aux prix de caps au 02 janvier 2018



Le graphique suivant présente la volatilité log-normale du cap ATM (At The Money) sur Euribor 3 mois observée au 02 janvier 2018.

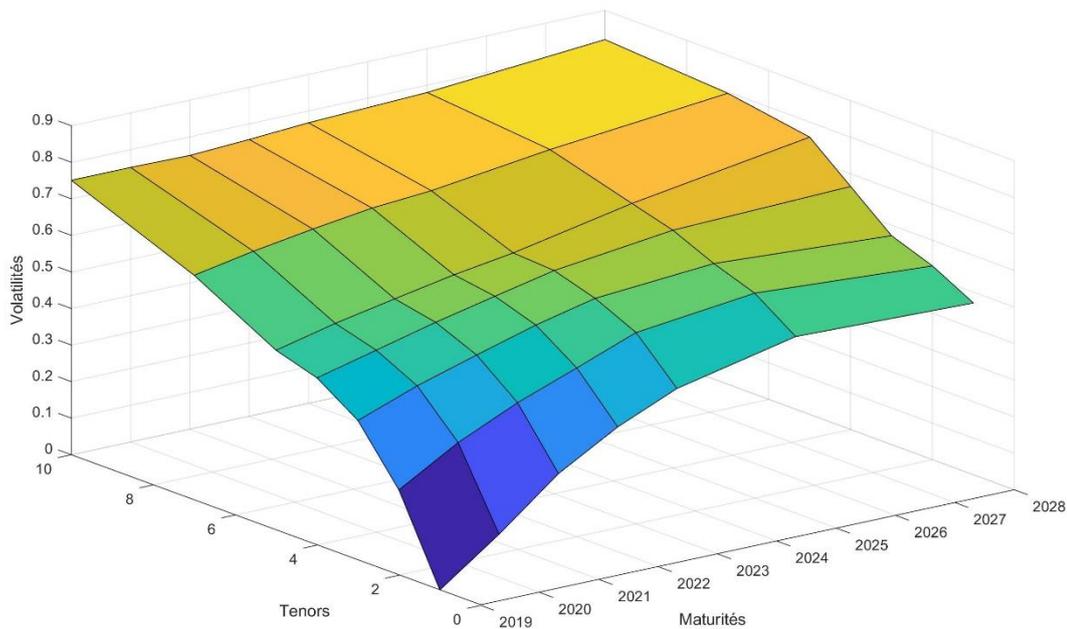
Figure III.8 : volatilité log-normale du cap ATM observé au 02 janvier 2018



Le graphique suivant présente la nappe de volatilité log-normale implicite aux prix d'une swaption ATM observée au 02 janvier 2018 (dates d'exercice, tenors⁴⁷ et volatilités).

⁴⁷ Temps restant jusqu'à la maturité.

Figure III.9 : nappe de volatilité log-normale implicite aux prix d'une swaption ATM au 02 janvier 2018



Nous notons que les volatilités implicites log-normales ont globalement une allure croissante en fonction des maturités.

III.5 Calibrage et simulation

III.5.1 Analyse des prix de Black

Les *Figure III.10* et *Figure III.11* montrent que, en gardant les volatilités de marché constantes en fonction du facteur de décalage, les prix de *caps* pour la maturité 5 ans et de *swaptions ATM* de maturité 1 an, évalués par le modèle de Black, sont croissants en fonction du facteur de décalage. Rappelons que si les volatilités implicites dépendent du facteur de décalage, les prix de Black sont par construction constants en fonction du facteur de décalage si on les recalcule avec la même courbe de taux ayant servi à l'extraction des volatilités (cf. section III.3.1.1).

Figure III.10 : évolution des prix de caps évalués par le modèle de Black en fonction du facteur de décalage pour la maturité 5 ans

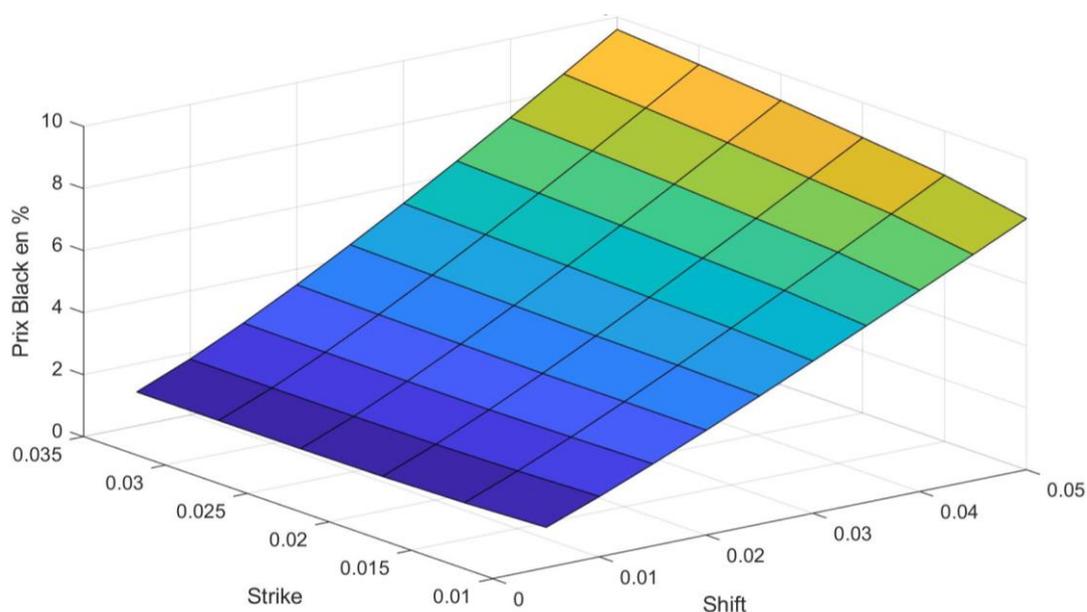
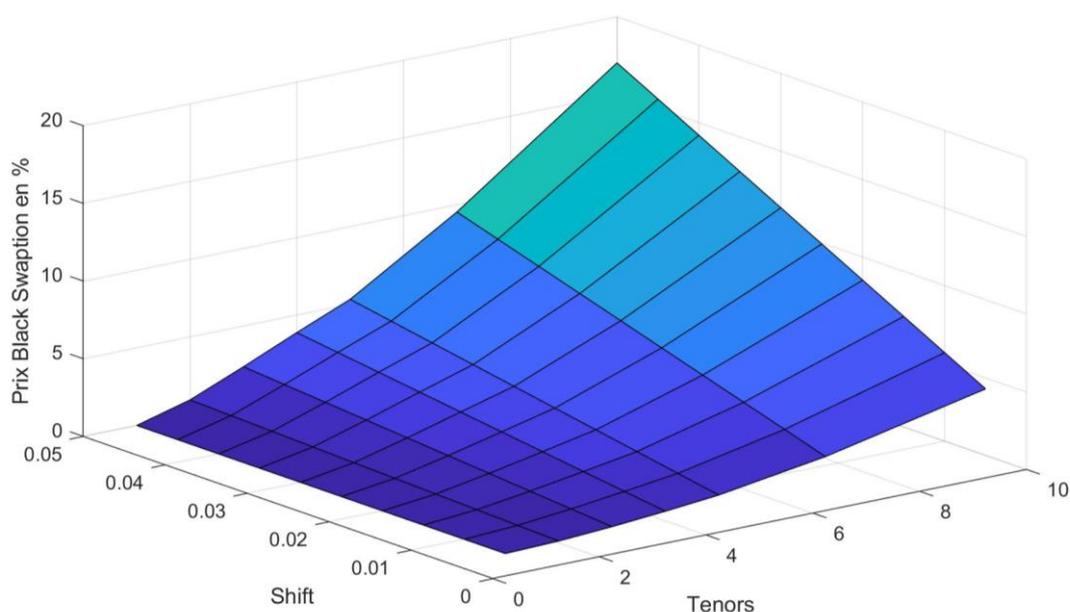


Figure III.11 : évolution des prix de swaptions ATM évalués par le modèle de Black en fonction du facteur de décalage pour la maturité 1 an



Nous avons réalisé plusieurs tests sur d'autres maturités et le constat est le même : lorsque que l'on fait varier uniquement le facteur de décalage, sans faire varier les volatilités implicites, les prix recalculés par le modèle de Black sont croissants en fonction du facteur de décalage. Nous n'avons pas développé dans ce papier une analyse quantitative pour appuyer ce constat.

L'introduction d'un facteur de décalage dans le modèle de Black implique une surestimation du prix de marché du produit dérivé. Cela implique que le calibrage des modèles de taux sur des prix recalculés par le modèle de Black décalé (à volatilité non-décalée) introduit une surestimation de la volatilité de ces modèles de taux. Les modèles

ont logiquement tendance à « compenser » la surestimation du prix par une augmentation de la volatilité.

III.5.2 Modèle Hull & White

Le *Tableau III.1* présente les résultats du calibrage du modèle Hull & White sur les données de caps et de swaptions présentées ci-dessus.

Nous notons que le paramètre de volatilité augmente avec la valeur du facteur de décalage utilisé pour reproduire les prix de marché par le modèle de Black.

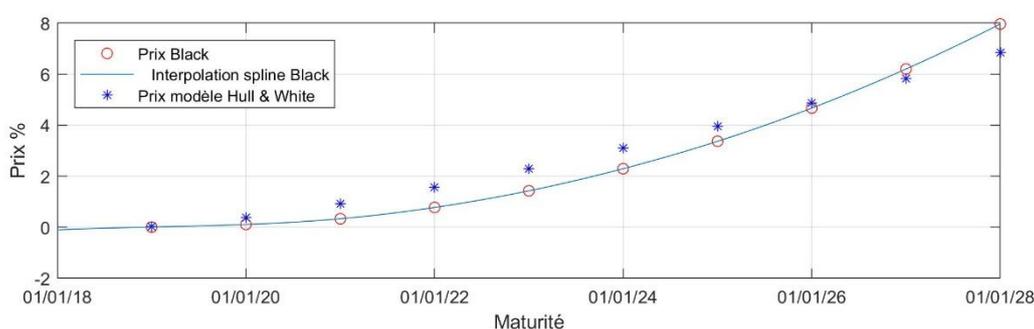
Tableau III.1 : résultats du calibrage du modèle Hull & White

Indice	Décalage du modèle Black	a	σ	Erreur totale au carré relative
HW 1 (Caps)	0,40%	0,97%	0,53%	2,71%
HW 2 (Caps)	1,00%	1,00%	0,80%	2,98%
HW 3 (Caps)	2,00%	1,04%	1,25%	2,92%
HW 4 (Swaption)	0,40%	0,07%	1,27%	7,32%
HW 5 (Swaption)	1,00%	0,10%	1,62%	8,48%
HW 6 (Swaption)	2,00%	0,01%	2,20%	10,43%

L'erreur totale est calculée comme la somme des erreurs au carré (fonction objectif) divisée par la somme des prix de Black au carré.

La *Figure III.12* présente la qualité du calibrage du modèle de Hull & White aux prix de marché évalués par le modèle de Black décalé pour un facteur de décalage égal à 1 %. Nous notons que la qualité de reproduction des prix de caps est moins bonne que le modèle G2++ dont les résultats de calibrages sont présentés dans la suite.

Figure III.12 : qualité de reproduction des prix de caps par le modèle de Hull & White

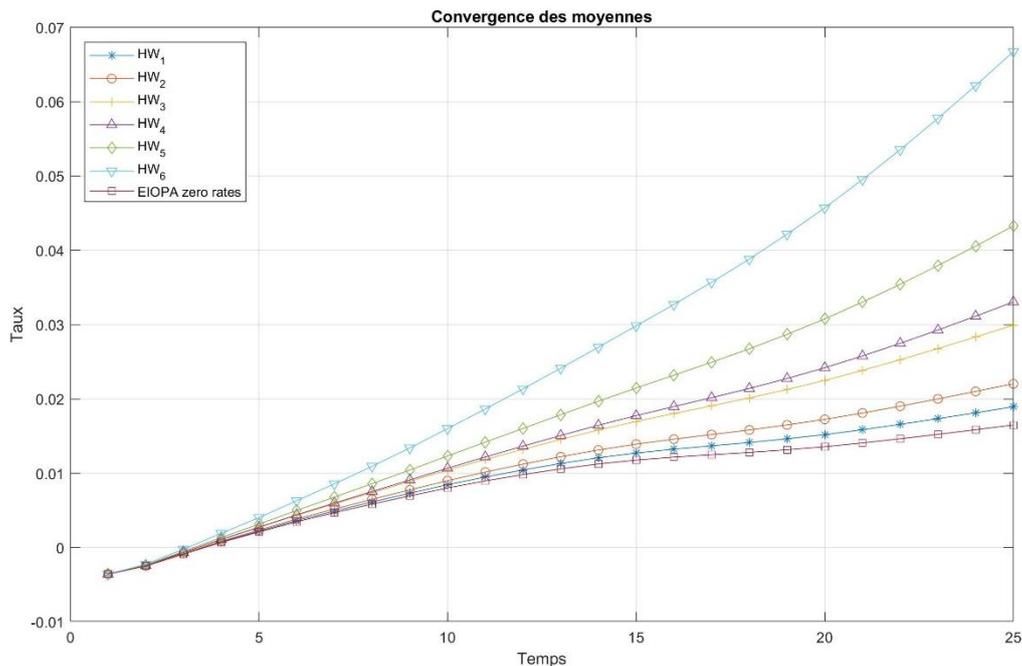


La *Figure III.13* présente les dynamiques des espérances des taux à terme diffusées par le modèle Hull & White pour les différents calibrages présentés dans le *Tableau III.1*. Ces espérances sont calculées comme les moyennes, à chaque pas de temps, de 10 000 simulations. Nous n'avons pas besoin de simulations pour calculer ces espérances, l'idée est de présenter des indicateurs déduits des trajectoires destinées aux simulations du *best-estimate* épargne en €.

Nous observons que les espérances peuvent s'écarter significativement de la courbe de taux sans risque centrale. Ce constat est cohérent avec l'expression du taux à terme

présenté dans la section III.3.1.2. Rappelons que, par construction, le modèle reproduit bien les prix de marché des obligations zéro-coupons.

Figure III.13 : convergence des moyennes des différents calibrages du modèle Hull & White

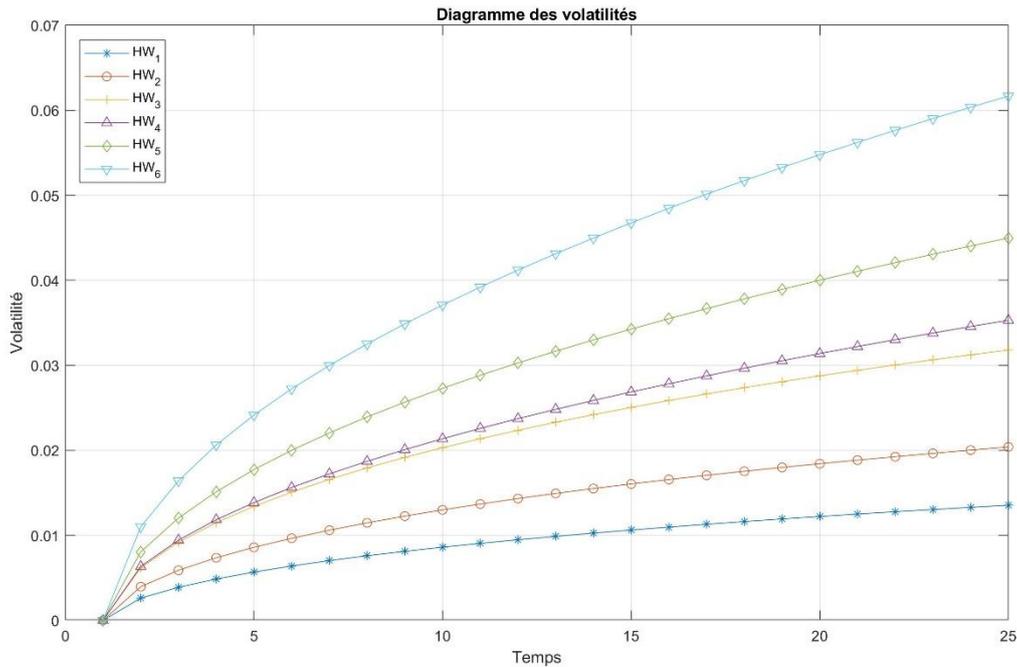


La Figure III.14 présente l'évolution des volatilités des taux à terme simulés à chaque pas de temps. Nous constatons que :

- Les écarts entre les espérances et les taux sans risque EIOPA sont d'autant plus importants que les volatilités sont importantes ;
- Les volatilités sont croissantes en fonction de la maturité. La monotonie de la volatilité anticipée du modèle en fonction de la maturité est donc différente de celle de la volatilité historique (cf. section III.4.1).

Pour chaque type de produit (*caps* et *swaptions*), nous notons que la volatilité est croissante en fonction du facteur de décalage. En effet, le prix de Black étant croissant en fonction du facteur de décalage, le modèle de Hull & White « compense » cette hausse de prix par une hausse de la volatilité.

Figure III.14 : courbes de volatilité des différents calibrages du modèle Hull & White



III.5.3 Modèle G2++

Le *Tableau III.2* présente les résultats du calibrage du modèle G2++ sur les données de caps et de swaptions présentées ci-dessus.

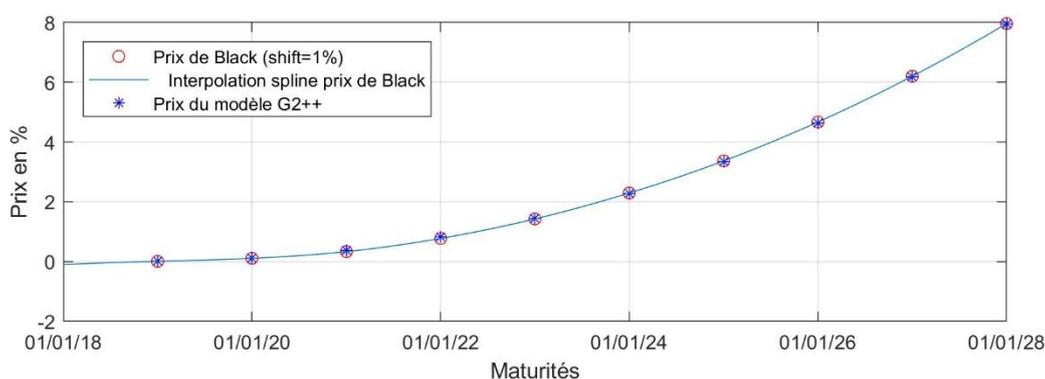
Tableau III.2 : résultats du calibrage du modèle G2++

Indice	Décalage du modèle Black	a	b	σ	η	ρ	Erreur totale au carré relative
G2 1 (Caps)	0,40%	1,48%	0,50%	26,02%	25,64%	-99,99%	0,009%
G2 2 (Caps)	1,00%	5,14%	0,03%	7,50%	7,07%	-100,00%	0,005%
G2 3 (Caps)	2,00%	8,39%	4,36%	17,46%	16,76%	-99,99%	0,012%
G2 4 (Swaption)	0,40%	11,47%	9,04%	24,20%	23,22%	-99,99%	0,17%
G2 5 (Swaption)	1,00%	11,49%	8,90%	26,50%	25,67%	-99,80%	0,21%
G2 6 (Swaption)	2,00%	11,71%	8,38%	25,59%	24,97%	-99,97%	0,29%

Nous notons que les paramètres de convergence et de volatilité des modèles calibrés sur les caps sont significativement hétérogènes. Ce qui ne permet pas une interprétation de la variation de ces paramètres en fonction du facteur de décalage.

Ces paramètres sont cependant cohérents avec la fonction objectif du calibrage consistant à minimiser la distance euclidienne entre les prix de marché et les prix du modèle G2++. Les erreurs quadratiques sont d'ailleurs assez faibles. La *Figure III.15* illustre par ailleurs la bonne qualité du calibrage du modèle 2.

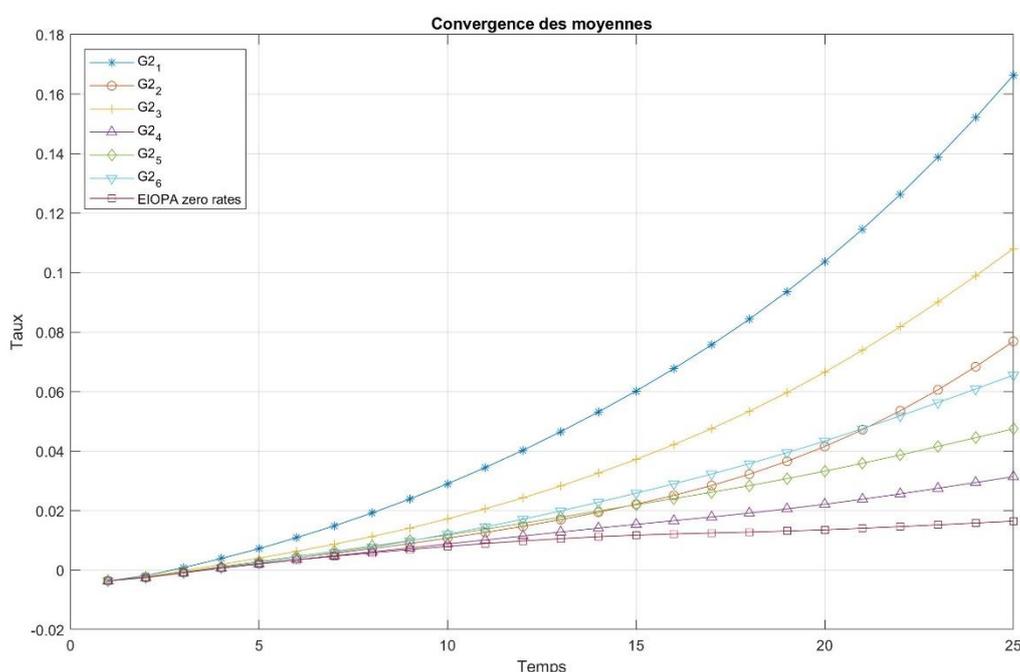
Figure III.15 : qualité de reproduction des prix de caps par le modèle de G2++ (G2 2, décalage=1%)



La [Figure III.16](#) présente les dynamiques des espérances des taux à terme diffusées par le modèle G2++ pour les différents calibrages présentés dans le [Tableau III.2](#) (10 000 simulations sont générées).

Nous observons que les espérances peuvent s'écarter significativement de la courbe de taux sans risque centrale. Comme pour le modèle Hull & White, la convergence de l'espérance des taux à terme vers les taux sans risque dépend des paramètres du modèle.

Figure III.16 : convergence des moyennes des différents calibrages du modèle G2++

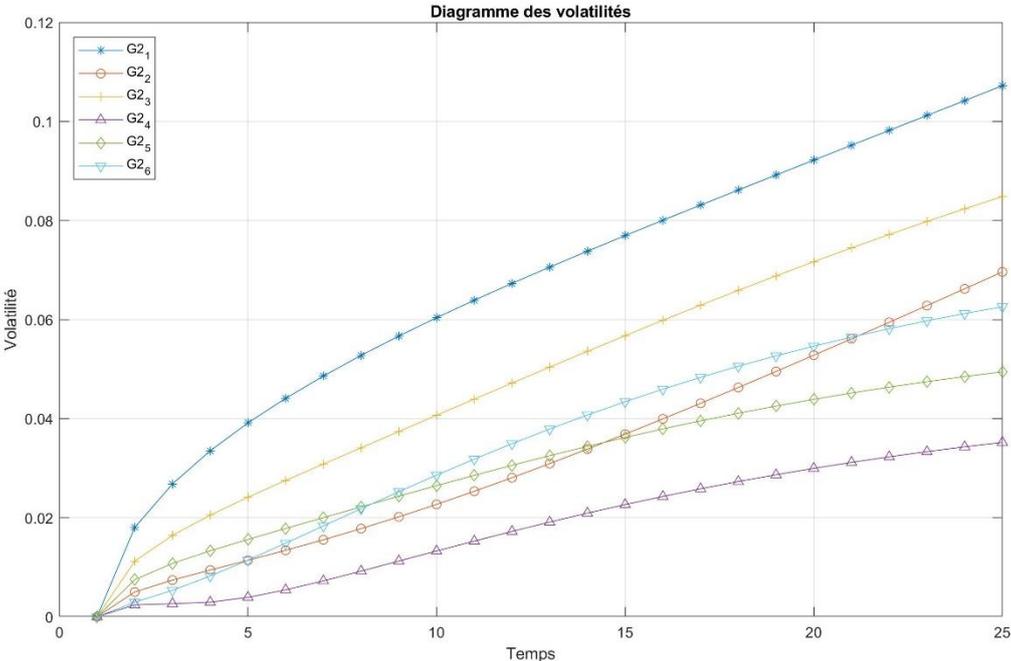


La [Figure III.17](#) présente l'évolution des volatilités des taux à terme simulés à chaque pas de temps. Nous constatons que :

- Les écarts entre les espérances et les taux sans risque EIOPA sont d'autant plus importants que les volatilités sont importantes ;
- Les volatilités sont croissantes en fonction de la maturité. La monotonie de la volatilité anticipée du modèle en fonction de la maturité est donc différente de celle de la volatilité historique (cf. section III.4.1).

Pour les modèles G2++ calibrés sur les *swaptions*, nous notons que la volatilité est croissante en fonction du facteur de décalage. Pour les courbes de volatilités des modèles G2++ calibrés sur les *caps* nous notons que la courbe du modèle 2 est inférieure à celle du modèle 3. Cependant, la courbe de volatilité du modèle 1 domine toutes les autres courbes ce qui limite l'interprétation. Les courbes de volatilité sont en effet difficilement comparables car les paramètres de calibrage sont assez hétérogènes comme expliqué ci-dessus.

Figure III.17 : courbes de volatilité des différents calibrages du modèle G2++



III.5.4 Modèle LMM

III.5.4.1 Étude du modèle LMM dans un cadre market-consistent

Le *Tableau III.3* présente les résultats du calibrage du modèle LMM sur les données de *swaptions* présentées ci-dessus.

Tableau III.3 : résultats du calibrage du modèle LMM

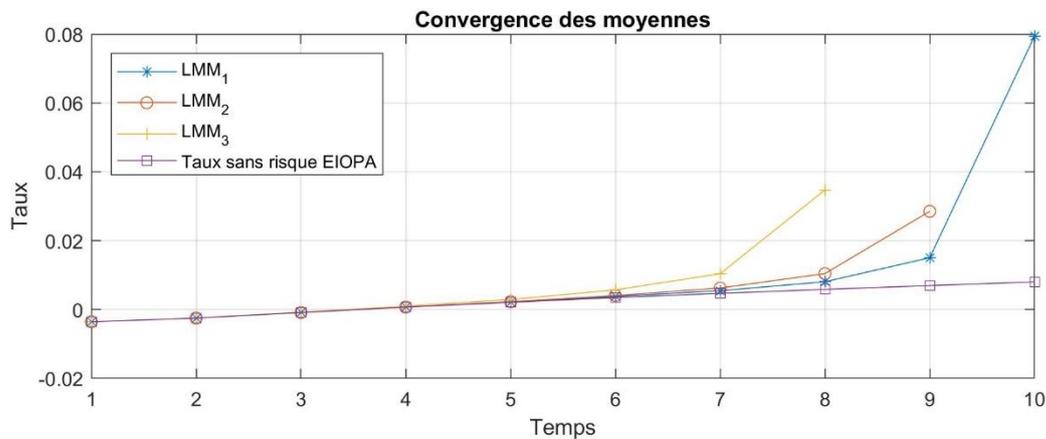
Facteur de décalage	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>Beta</i>	Erreur totale au carré relative
0,00%	18,85%	0,19%	7,45%	0,01%	0,10%	1,19%

Le calibrage est réalisé sans introduire de facteur de décalage en ne retenant que les volatilités de marché correspondant aux taux positifs.

Sur la base de ce calibrage, nous avons diffusé le modèle LMM en introduisant trois niveaux de décalage : le facteur de décalage du modèle LMM 1 est 0,4 %, le facteur de décalage du modèle LMM 2 est 1 % et le facteur de décalage du modèle LMM 3 est 2 %.

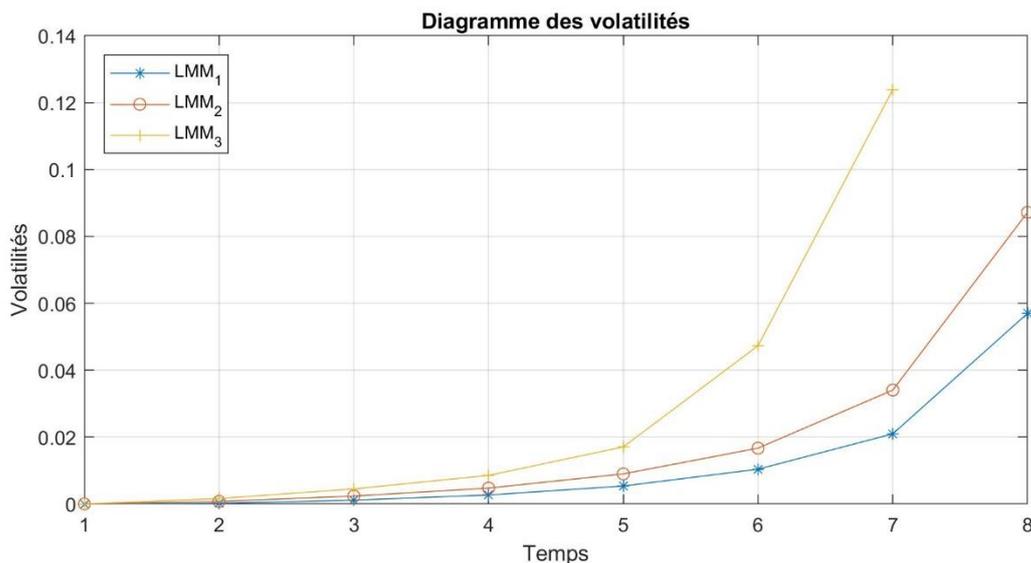
La [Figure III.18](#) présente les dynamiques des espérances des taux à terme diffusés (10 000 simulations sont générées). Sur cette figure, les dynamiques des modèles LMM 2 et LMM 3 sont tronquées et l'horizon de projection est de 10 ans pour le modèle LMM 1 car les espérances de ces modèles commencent à diverger significativement sur les maturités non-représentées.

Figure III.18 : convergence des moyennes des modèles LMM décalés market-consistent



Les courbes de volatilités des modèles LMM décalés sont également divergentes. La [Figure III.19](#) présente ces courbes sur les maturités où celles-ci restent comparables.

Figure III.19 : courbes de volatilité des modèles LMM décalés market-consistent



Le modèle LMM calibré sur les *swaptions* diverge, et ce, même avec le plus petit facteur de décalage admissible pour contourner la contrainte des taux négatifs. Ce calibrage, bien que *market consistent*, ne peut être retenu dans l'état pour la valorisation des passifs des contrats d'épargne en euro.

Notons que la vitesse de divergence des modèles LMM présentés est croissante en fonction du facteur de décalage.

La divergence du modèle LMM (et des modèles log-normaux en général) est discutée par exemple dans GERHOLD [2011] et dans BRIGO et MERCURIO [2007].

III.5.4.2 Etude du modèle LMM dans un cadre non market-consistent

Nous nous sommes appuyés sur le calibrage *market-consistent* réalisé dans la section III.5.4.1 pour proposer un paramétrage du modèle LMM convergent. Ce paramétrage n’est de fait pas *market-consistent*.

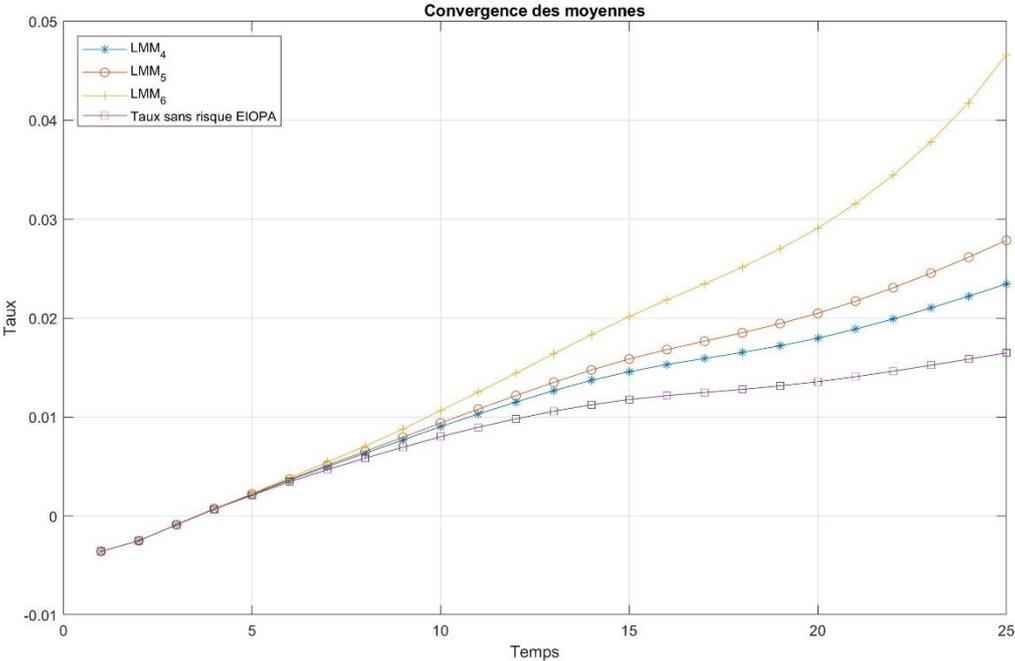
Comme présenté dans le *Tableau III.4*, nous avons augmenté la vitesse de convergence de la volatilité de Rebonato et le niveau de la limite asymptotique (cf. section III.3.1.4.4).

Tableau III.4 : paramétrage convergent du modèle LMM

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>Beta</i>
18,85%	0,19%	20,00%	1,00%	0,10%

Sur la base de ce paramétrage, nous avons diffusé le modèle LMM en introduisant trois niveaux de décalage : le facteur de décalage du modèle LMM 4 est 0,4 %, le facteur de décalage du modèle LMM 5 est 1 % et le facteur de décalage du modèle LMM 6 est 2 %.

Figure III.20 : convergence des moyennes des modèles LMM décalés et reparamétrés

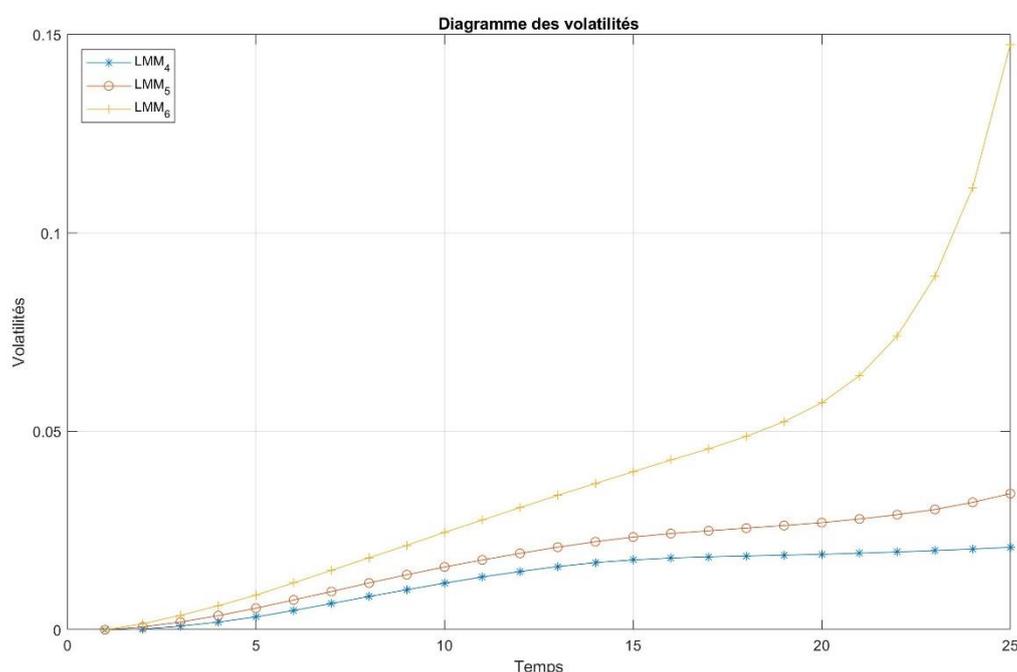


Nous observons que :

- Les espérances restent dans des niveaux comparables à ceux observés pour les modèles Hull & White et G2++ ;
- Certains écarts entre les courbes de taux espérées et la courbe de taux sans risque EIOPA sont significatifs ;

- Ces écarts sont plus importants quand le facteur de décalage est plus significatif. Cela se confirme d'ailleurs dans la *Figure III.21* : les volatilités sont croissantes en fonction du facteur de décalage ;
- Les volatilités sont croissantes en fonction de la maturité. La monotonie de la volatilité anticipée du modèle en fonction de la maturité est donc différente de celle de la volatilité historique (cf. section III.4.1).

Figure III.21 : courbes de volatilité des modèles LMM décalés et re-paramétrés



III.5.5 Structure de dépendance et modèles actions et immobilier

Nous avons proposé dans la section III.3.3 une approche de simulation de l'indice actions et de l'indice immobilier conditionnellement aux trajectoires du taux *forward* un an avec des matrices de corrélations historiques. Deux matrices ont été estimées : une matrice cohérente avec les modèles Hull & White et G2 ++ et une matrice cohérente avec le modèle LMM. Les taux historiques utilisés pour construire ces matrices sont les taux Euribor 12 mois.

Tableau III.5 : matrices de corrélations

Matrice 1 : H & W et G2++	Taux	Action-Taux	Immobilier-Taux
Taux	100,0%	-53,7%	-3,9%
Action-Taux	-53,7%	100,0%	11,2%
Immobilier-Taux	-3,9%	11,2%	100,0%

Matrice 2 : LMM	Taux	Action-Taux	Immobilier-Taux
Taux	100,0%	-50,4%	3,9%
Action-Taux	-50,4%	100,0%	11,2%
Immobilier-Taux	3,9%	11,2%	100,0%

La volatilité de l'indice immobilier correspond à la volatilité historique des rendements de l'indice des prix de vente des logements anciens publiés par l'INSEE⁴⁸ de décembre 2006 à décembre 2016. Cette volatilité est de 3,5 %.

La volatilité du modèle actions est supposée indépendante du temps et a été calibrée sur le prix d'un call ATM de maturité 3 ans sur l'indice CAC 40. Une approche Monte-Carlo a été retenue en intégrant les corrélations présentées ci-dessus pour extraire cette volatilité. Les résultats sont présentés dans le *Tableau III.6* (le facteur de décalage sous-jacent à chaque modèle de taux est égal à 1 %).

Tableau III.6 : volatilités implicites d'un investissement en actions

Modèle de taux	Volatilité
HW 2	10,5%
G2++ 2	10,6%
LMM 2	10,0%

La *Figure III.22* et la *Figure III.23* illustrent la diffusion du modèle actions avec le modèle Hull & White. La courbe de volatilité du logarithme du prix du modèle actions est cohérente avec l'évolution de la volatilité totale en racine carrée du temps.

Figure III.22 : moyenne et quantiles du modèle actions diffusé avec le modèle HW 2

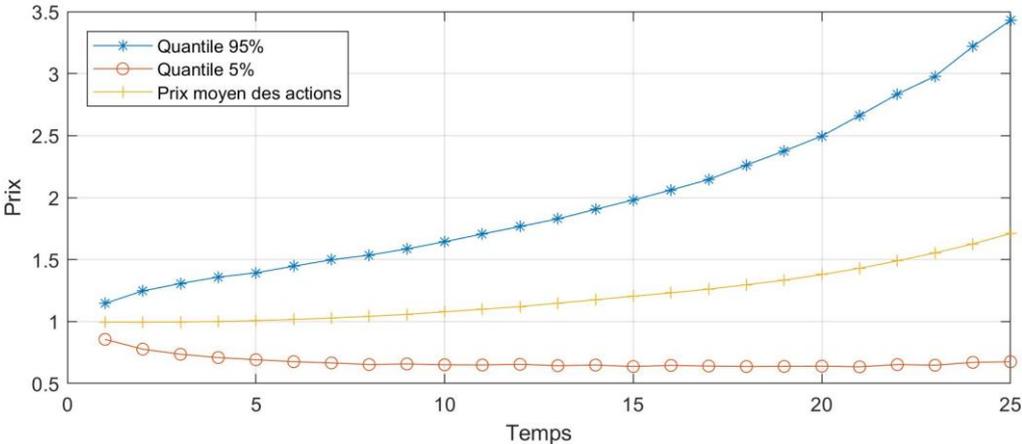
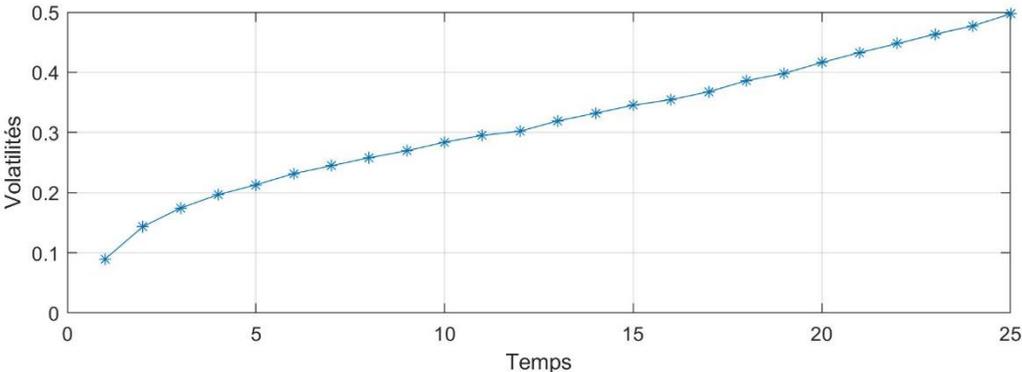


Figure III.23 : courbe de volatilités du modèle actions diffusé avec le modèle HW 2



⁴⁸ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/series/102770558>

III.6 Impact du choix du modèle de taux et des données de calibrage sur le best-estimate

Les sections précédentes de ce chapitre présentent une démarche de génération de scénarios économiques permettant de produire des scénarios cohérents avec un environnement économique caractérisé par des taux négatifs.

Dans cette section, cette démarche sera appliquée pour générer des scénarios économiques destinés à la valorisation des passifs d'épargne en euro dans le référentiel solvabilité 2 pour étudier la sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et de leurs calibrages.

Pour rappel, trois modèles de taux sont testés ici :

- Un modèle mono-factoriel : Hull & White calibré sur des *caps* et sur des *swaptions* ;
- Un modèle à deux facteurs : modèle gaussien G2++ calibré sur des *caps* et sur des *swaptions* ;
- Un modèle de marché : *Libor Market Model* (LMM) calibré sur des *swaptions*.

Au total, 3 modèles combinés à 2 types de produits financiers (*caps* et *swaptions*) sont proposés dans la suite. Ces modèles respectent les contraintes du régulateur et sont utilisés par le marché.

Le modèle LMM+ calibré sur les données du marché présente des divergences et est de ce fait exclue des tests de sensibilité. Le paramétrage retenu est celui présenté dans la section III.5.4.2 et n'est de fait pas *market-consistent*.

III.6.1 Modèle de calcul du best-estimate

Afin d'évaluer le *best-estimate* le package R SimBEL⁴⁹ a été utilisé. Cette évaluation intègre les tables de scénarios économiques générés et s'appuie sur des données réelles modifiées d'un assureur. L'outil SimBEL permet de calculer les provisions *best-estimate* et les SCR de la formule standard.

III.6.2 Paramètres et résultats

Le *Tableau III.7* présente quelques données de paramétrage du modèle de valorisation du *best-estimate*. L'actif est composé d'actions, d'investissement en immobilier et d'obligations. La plus-value latente est de 6 M€. La provision mathématique est par ailleurs de 70 M€ et l'horizon de projection est de 20 ans.

Tableau III.7 : description de l'actif

Actifs	Valeur de marché	Valeur comptable	Allocation stratégique
Actions	20,00	18,54	20%
Immobilier	10,00	9,88	10%
Obligations sans risque	63,00	58,85	63%
Cash	7,00	7,00	7%
Total	100,00	94,26	100%

⁴⁹ Voir <http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/C5542E1CF549F21FC12581680046FD2E>

Les [Tableau III.8](#) et [Tableau III.9](#) présentent la sensibilité du *best-estimate* aux choix et aux calibrages des modèles de taux sans risque *market-consistent* Hull et White et G2++.

Nous constatons que :

- Les *best-estimates*, évalués en utilisant le modèle de taux Hull & White, sont insensibles aux facteurs de décalage et aux choix des produits dérivés pour le calibrage ;
- Les *best-estimates*, évalués en utilisant le modèle de taux G2++, sont plus sensibles aux facteurs de décalage (impact maximal de 4 %) et aux choix des produits dérivés pour le calibrage (impact maximal de 4,4 %) ;
- L'impact du choix de modèles de taux Hull & White et G2++ est au maximum 4,3 % de la moyenne des *best-estimate*.

Tableau III.8 : best-estimate par le modèle Hull & White market-consistent

Montants en M€	HW 1	HW 2	HW 3	HW 4	HW 5	HW 6
Best-estimate net de frais	82,92	82,92	82,64	82,89	82,63	82,45
Frais	7,95	7,94	7,85	7,86	7,76	7,60
Best-estimate	90,88	90,86	90,49	90,75	90,39	90,05

Tableau III.9 : best-estimate par le modèle G2++ market-consistent

Montants en M€	G2 1	G2 2	G2 3	G2 4	G2 5	G2 6
Best-estimate net de frais	80,58	83,18	81,42	82,75	82,84	83,60
Frais	6,90	7,79	7,40	7,88	7,77	7,76
Best-estimate	87,48	90,97	88,82	90,63	90,61	91,36

Le [Tableau III.10](#) présente les *best-estimates* évalués en utilisant le modèle LMM non *market-consistent* dérivé du modèle LMM *market-consistent* par ajustement des paramètres de volatilité (cf. section III.5.4). Nous constatons que les *best-estimates* sont insensibles aux facteurs de décalage et sont comparables aux grandeurs présentées dans [Tableau III.8](#) et [Tableau III.9](#).

Tableau III.10 : best-estimate par le modèle LMM non market-consistent

Montants en M€	LMM 1	LMM 2	LMM 3
Best-estimate net de frais	82,87	82,62	82,78
Frais	7,94	7,92	7,94
Best-estimate	90,81	90,54	90,72

Tableau III.11 : comparaison des best-estimates

Best-estimate	Ecart-type	Min	Max	Ecart (Max-Min)/Moyenne
Uniquement les modèles <i>market-consistent</i> (HW & G2 ++)	1,20%	87,48	91,36	4,30%
Tous les modèles	1,08%	87,48	91,36	4,29%

Par ailleurs, les ratios entre la provision mathématique et les *best-estimates* varient entre 77 % et 80 %. Ces ratios sont inférieurs aux ratios observés des entreprises BNP Paribas Cardif⁵⁰ (88 %) et AXA France Vie⁵¹ (83 %) par exemple mais restent dans les mêmes ordres de grandeur. Aussi, en 2019, on peut noter dans ACPR [2019] que sur le marché français :

⁵⁰ Les données sont extraites du rapport SFCR disponible sur le site institutionnel de BNP Paribas Cardif : [lien](#).

⁵¹ Les données sont extraites du rapport SFCR disponible sur le site institutionnel d'AXA France : [lien](#).

- La PM total des contrats en euro est de 1307 Mds€ ;
- Le *best-estimate* total vie hors UC et hors santé est de 1717 Mds€.

Ce qui fait un ratio PM/BE de 76 %.

La différence entre le *best-estimate* et la provision mathématique peut s'expliquer notamment par une richesse initiale à la discrétion de l'assureur (cf. section II.3.1.1).

Bien que les modèles utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* présentent des caractéristiques différentes, l'impact sur la valeur de ce dernier reste assez contenu. La différence entre la valeur minimale et maximale est de 4,30 %. Cet impact est cependant substantiel s'il est comparé aux fonds propres. En effet, ces derniers représentent en France en moyenne 6,1 % des encours des contrats d'épargne avec clause de participation aux bénéficiaires à fin 2018 (FFA [2019]).

Une attention particulière doit être néanmoins accordée au modèle LMM. Ce modèle, calibré sur les données observées au 02/01/2018, ne peut être retenu pour l'évaluation du *best-estimate* du fait de sa divergence.

III.7 Conclusions

La démarche présentée dans ce chapitre permet de produire des scénarios économiques *market-consistent* cohérents avec un environnement économique caractérisé par des taux négatifs.

La construction d'un générateur de scénarios économiques est un processus où plusieurs choix sont formulés. Chaque choix a un impact sur les dynamiques simulées des variables d'intérêt.

Aussi, les choix de modélisation et de calibrage doivent, en principe, dépendre de la destination (ou l'usage) du modèle et les hypothèses formulées doivent être confrontées aux réalisations observées.

L'objectivation de ces choix dans le cadre de l'évaluation du *best-estimate* est limitée car ce dernier n'est pas observable. La démarche de modélisation présentée à la section III.3.1 est donc conventionnelle dans la mesure où elle ne peut être validée par une approche statistique basée sur des observations.

Par ailleurs, la *market-consistency* du GSE destinés à l'évaluation du *best-estimate* est limitée. Les volatilités de marché dépendent en effet d'une courbe de taux de marché, d'un prix d'exercice et d'un facteur de décalage. Elles ne sont pas systématiquement cohérentes avec la courbe des taux EIOPA et les options et garanties du passif.

Le choix des modèles mathématiques et des instruments financiers servant à leur calibrage a un impact significatif sur la dynamique des trajectoires simulées et la convergence des moyennes (cf. section III.5).

Le modèle LMM calibré sur des données de marché au 02/01/2018 présente des divergences significatives des espérances et des écart-types. Il ne peut être utilisé en l'état dans le

processus d'évaluation du *best-estimate*. Cette divergence dépend du paramétrage et peut être pilotée, entre autres, par la vitesse de convergence de la volatilité de Rebonato (cf. section III.5.4.2).

Une attention particulière doit être accordée à l'introduction des facteurs de décalage dans les processus de calibrage et de simulation des modèles de taux. Quand les volatilités de marché sont non-décalées, ces modèles ont tendance à produire des volatilités croissantes en fonction du facteur de décalage.

Enfin, il ressort de l'analyse des sensibilités du *best-estimate* aux choix de modèles de taux et aux choix des données que l'impact sur la valeur de ce dernier reste assez contenu. La différence entre la valeur minimale et maximale est de 4,30 %. Cet impact est cependant substantiel s'il est comparé aux fonds propres. En effet, ces derniers représentent en France en moyenne 6,1 % des encours des contrats d'épargne avec clause de participation aux bénéficiaires à fin 2018 (FFA [2019]).

Le chapitre IV étend les travaux réalisés au chapitre III et introduit des modèles de taux de type CIR. Il s'agit des modèles CIR++ et CIR2++. Des sensibilités du *best-estimate* aux modèles de taux et aux données ont été également réalisées.

IV. Utilisation des modèles de taux de type CIR pour valoriser les contrats d'épargne participatifs

Cet chapitre s'intéresse à la problématique de choix de modèles de taux d'intérêt destinés à évaluer la valeur économique de contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs. Il s'inscrit dans la continuité du chapitre III. Dans ce chapitre, une construction d'un générateur de scénarios économiques (GSE) risque-neutre utilisé pour évaluer la sensibilité des passifs aux modèles de taux Hull & White, G2++ et LMM ainsi qu'à leur calibrage est proposée.

Nous introduisons ici une troisième famille de modèles de taux. Il s'agit des modèles de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross), dont la dynamique intègre une composante en racine carrée du taux court instantané. L'objectif est de :

- Proposer des méthodes de construction de générateurs de scénarios économiques risque-neutres cohérentes avec la norme Solvabilité 2, dont les modèles de taux sont des modèles CIR++ ou CIR2++ ;
- Evaluer, en application, les sensibilités des passifs des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français, aux modèles de taux CIR++ et CIR2++ et à leurs calibrages ;
- Dresser une comparaison des modèles CIR++, CIR2++, Hull & White, G2++ et LMM destinés à valoriser les passifs d'assurance vie.

IV.1 Préambule

IV.1.1 Rappel de la convention de calibrage des modèles de taux sans risque

Comme discuté dans les chapitres précédents, le choix du modèle de diffusion de la structure par termes des taux d'intérêt est un élément central de la construction d'un GSE « risque neutre ». Face aux contraintes réglementaires et en l'absence de prix observables des passifs des contrats d'épargne en euros, une convention de calibrage des taux sans risque s'est établie⁵². Cette convention peut se synthétiser en quatre étapes :

1. **Les modèles et les instruments financiers dérivés** : choix du modèle de taux et choix des produits dérivés pour son calibrage : *caps, floors, swaptions...*
2. **Les prix d'exercice et les volatilités implicites** : choix d'un prix d'exercice et extraction des volatilités de marché⁵³. Celles-ci correspondent aux volatilités implicites des produits dérivés choisis à l'étape 1. Elles sont cohérentes avec la courbe de taux sans risque du marché.
3. **La valorisation des produits dérivés** en utilisant la courbe publiée par l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) : utilisation du modèle de Black (si les volatilités sont implicites à un modèle log-normal) ou du modèle de Bachelier (si les volatilités sont implicites à un modèle normal) pour l'évaluation d'un prix des instruments dérivés en utilisant la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA. Ce sont ces prix qui vont jouer le rôle de « prix de marché » pour calibrer le modèle de taux destiné à la valorisation des passifs sous la norme Solvabilité 2.
4. **Le calibrage du modèle de taux retenu** en minimisant une distance entre : (1) les prix réestimés à partir de la courbe de taux EIOPA et les volatilités de marché, et (2) les prix théoriques du modèle de taux.

IV.1.2 Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de proposer deux générateurs de scénarios économiques sous la probabilité risque neutre, permettant de diffuser les taux d'intérêt et les prix d'investissements risqués (en actions et en immobilier)⁵⁴, adapté au processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne avec participation aux bénéfices :

- **GSE1** : composé d'un modèle CIR++ pour modéliser les taux d'intérêt sans risque instantanés, un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix du portefeuille d'actions et un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix d'un investissement en immobilier ;
- **GSE2** : composé d'un modèle CIR2++ pour modéliser les taux d'intérêt sans risque instantanés, un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix du

⁵² Cf. le Q&A du QIS 5, publié par l'EIOPA, question 76 du document

<https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/CEIOPS-Q-and-A-document-20101104.pdf>

⁵³ Les surfaces de volatilité ne résultent pas forcément d'une mesure de prix directe, mais d'une reconstruction par le fournisseur de prix (par exemple via un modèle SABR pour Bloomberg).

⁵⁴ Un générateur de scénarios économiques permettant de valoriser des obligations, des actions, des investissements en immobilier et des titres monétaires couvre 98 % de l'actif des entreprises d'assurance en France en 2016 et permet de diffuser les taux d'intérêt sans risque (cf. chapitre I).

portefeuille d'actions et un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix d'un investissement en immobilier.

Les modèles de taux d'intérêt CIR, CIR++ et CIR2++ ont été largement étudiés dans la littérature financière. Les propriétés mathématiques des modèles CIR, CIR++ et CIR2++ ne sont donc pas détaillées ici. Le lecteur désirant approfondir sa connaissance de ces modèles peut se référer à l'annexe VIII.3, à BRIGO et MERCURIO [2007] ou à COX, INGERSOLL et ROSS [1985].

Par ailleurs, la littérature sur les GSE destinés à la valorisation des contrats d'épargne participatifs dont les modèle de taux sont des modèles CIR++ ou des CIR2++ est très limitée. Les rares références existantes (comme AASA & al. [2018], CASTELLANI & al. [2005], SOA [2016], GERSTNER & al. [2008], DASSIOS & al. [2019] ou DASTARAC & SAUVEPLANE [2010]) ne présentent pas de démarches cohérentes avec le cadre réglementaire Solvency 2 et avec les contraintes opérationnelles en assurance (par ex. la diffusion à long termes rend l'utilisation de discrétisations non-exactes peu pertinentes compte tenu des erreurs de convergence).

Ce chapitre s'intègre dans la suite du chapitre III où trois modèles de taux ont été étudiés (Hull-White, G2++ et LMM). Il permet de :

- Proposer des GSE risque-neutres dont les modèles de taux sont les modèles CIR++ et CIR2++ qui prennent nativement en compte les taux négatifs ;
- Proposer une démarche de calibrage conforme aux exigences de la norme Solvabilité 2 ;
- Proposer des méthodes de simulation avec des discrétisations exactes pour contenir les problèmes de convergence sur des horizons de projection à long termes (plus de 20 ans pour les contrats d'épargne) ;
- Réaliser des études d'impact du choix de modèles CIR++ et CIR2++ sur la valeur des passifs sur la base de données modifiées d'un assureur ;
- Dresser une comparaison des modèles CIR++, CIR2++, Hull & White, G2++ et LMM destinés à valoriser le *best-estimate*.

Ce papier s'organise en trois sections principales :

- La section IV.2 définit les modèles composant les GSE1 et GSE2 et décrit les méthodes de calibrage et de simulation de ces modèles ;
- La section IV.3 décrit la modélisation de la structure de dépendance ;
- La section IV.4 présente :
 - o Les résultats et les analyses des calibrages des modèles ;
 - o Une étude des sensibilités du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français aux choix de modèles de taux CIR++ et CIR2++ et de leurs calibrages.

IV.2 Modèles univariés : définition, calibrage et simulation

IV.2.1 Modèles de taux⁵⁵

La dynamique du modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985] classique sous la mesure risque-neutre s'écrit :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t)$$

où : $r(0) = r_0$ et r_0, k, θ, σ sont des constantes positives et le processus W est un mouvement Brownien.

Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller suivante : $2k\theta > \sigma^2$.

Le processus de taux court $r(t)$ conditionnellement à $r(s)$ suit la loi $\chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$:

$$r(t)|r(s) = \chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$$

où :

- $\chi^2(v, \lambda_{t,s})$ est une loi du Khi-deux non-centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est $\lambda_{t,s}$;
- $c_{t-s} = \frac{4k}{\sigma^2(1-\exp(-k(t-s)))}$;
- $v = 4k\theta/\sigma^2$;
- $\lambda_{t,s} = c_{t-s}r_s \exp(-k(t-s))$.

Bien qu'il soit intéressant d'un point de vue analytique, le modèle CIR classique ne reproduit pas la structure par termes des taux d'intérêt observée sur le marché, et ce, quel que soit le choix des paramètres. L'extension à un facteur de ce modèle, notée CIR++ et à deux facteurs, notée CIR2++ permettent la reproduction des courbes de taux anticipées et peuvent reproduire donc les taux négatifs.

IV.2.1.1 Modèle CIR++

Le modèle CIR++ décrit le processus du taux court instantané r à partir d'une fonction déterministe notée φ et d'un processus CIR noté x , dont le vecteur de paramètres est noté $\beta = (k, \theta, \sigma)$, défini comme suit :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t) ; x(0) = x_0$$

et on a :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

où x_0, k, θ et σ sont des constantes positives telles que $2k\theta > \sigma^2$, garantissant ainsi que l'origine est inaccessible pour la variable x , et donc que ce processus reste positif. Le processus W est un mouvement Brownien.

⁵⁵ Les propriétés mathématiques des modèles CIR, CIR++ et CIR2++ ne sont pas détaillées ici. Le lecteur peut se référer à la synthèse réalisée en annexe VIII.3 ou dans ARMEL et PLANCHET [2021b].

Le modèle CIR++ permet de valoriser les prix des obligations zéro-coupons, des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées.

Rappelons que le taux d'intérêt composé $R(t, T)$ est une fonction affine de $x(t)$ dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine d'une loi du Khi-deux non-centrée.

La méthode de calibrage retenue ici consiste à (1) extraire les volatilités implicites log-normales des produits dérivés retenus (*caps* et *swaptions*), (2) réestimer le prix, dit du marché, de ces dérivés en utilisant le modèle de Black décalé⁵⁶ avec la courbe de taux publiée par l'EIOPA et (3) évaluer les paramètres du modèle en minimisant la distance euclidienne entre les prix du marché et les prix donnés par les formules fermées des *caps* ou des *swaptions*.

Notons :

- $\beta = (k, \theta, \sigma)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix du produit dérivé i valorisé par le marché via la formule de Black⁵⁷ (*caps* ou *swaptions*) ;
- $f_i^{CIR++}(\beta)$: le prix du produit dérivé i valorisé par le modèle CIR++.

Les paramètres du modèle CIR++ sont calculés par l'optimisation suivante sur l'ensemble des produits dérivés retenus pour le calibrage (d est une distance euclidienne) :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (f_i^{CIR++}(\beta))_i \right) \right)$$

Cette méthode de calibrage est cohérente avec les exigences de la norme Solvabilité 2.

La simulation du processus CIR x permet, via des formules analytiques de simuler les prix des obligations zéro-coupons et les taux d'intérêt composés. La méthode de simulation du processus x retenue ici pour les applications numériques d'évaluation d'impact sur la valeur du *best-estimate*, est une méthode avec une discrétisation exacte consistant à simuler des lois du khi-deux non-centrées. Cette méthode est présentée en détail dans ARMEL et PLANCHET [2021b].

IV.2.1.2 Modèle CIR2++

Le modèle CIR2++ est un modèle de taux court instantané à deux facteurs qui consiste à ajouter une fonction déterministe à la somme de deux processus CIR indépendants. Ce modèle peut être considéré comme la généralisation naturelle à deux facteurs du modèle CIR++.

Le modèle CIR2++ est de la forme : $r_t = x_t + y_t + \varphi(t)$, où φ est une fonction déterministe permettant de reproduire la courbe des taux initiale observée et x et y sont deux processus CIR indépendants :

⁵⁶ Le modèle de Black ne supporte pas nativement les taux négatifs d'où la nécessité d'introduire un facteur de décalage. La sensibilité des calibrages et des valeurs des passifs aux facteurs de décalage du modèle de Black sont présentés dans la section IV.4.2.

⁵⁷ ARMEL & PLANCHET [2018] détaillent la méthode de valorisation de *caps*, *floors* et *swaptions* par le modèle de Black et présente un processus de calibrage et de simulation d'un GSE destiné à la valorisation du *best-estimate* d'un contrat d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

$$dx(t) = k_1(\theta_1 - x(t))dt + \sigma_1\sqrt{x(t)}dW_1(t)$$

$$dy(t) = k_2(\theta_2 - y(t))dt + \sigma_2\sqrt{y(t)}dW_2(t)$$

où W_1 et W_2 sont des mouvements browniens indépendants sous la mesure risque neutre, et $k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2$ et σ_2 sont des constantes positives telles que $2k_1\theta_1 > \sigma_1^2$ et $2k_2\theta_2 > \sigma_2^2$.

Les réels positifs $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ sont respectivement les valeurs initiales des processus x et y .

Le modèle CIR2++ permet de valoriser les prix des obligations zéro-coupons par des formules fermées.

Rappelons que le taux d'intérêt composé $R(t, T)$ est une fonction affine de $x(t)$ et $y(t)$ dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine de deux lois du Khi-deux non-centrées.

Le modèle CIR2++ ne permettant pas de valoriser les *caps* et les *swaptions* par des formules fermées, nous avons fait ici le choix de les valoriser par des méthodes de Monte-Carlo.

Notons :

- $\beta = (k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2, \sigma_2)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix du produit dérivé i valorisé par le marché via la formule de Black (*caps* ou *swaptions*) ;
- $f_i^{CIR2++}(\beta)$: le prix du produit dérivé i valorisé par le modèle CIR2++ par des techniques Monte-Carlo (*caps* ou *swaptions*).

Les paramètres du modèle CIR2++ sont calculés par l'optimisation suivante sur l'ensemble des produits dérivés retenus pour le calibrage (d est une distance euclidienne) :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (f_i^{CIR2++}(\beta))_i \right) \right)$$

La simulation des deux processus CIR, x et y , permet, via des formules analytiques de simuler les prix des obligations zéro-coupons et les taux d'intérêt composés. La méthode de simulation retenue ici est une méthode avec une discrétisation exacte consistant à simuler des lois du khi-deux non-centrées. Cette méthode est présentée en détail dans ARMEL et PLANCHET [2021b].

IV.2.2 Modèles actions et immobilier

Nous reprenons ici la même approche de modélisation et de calibrage, de l'indice actions et de l'indice immobilier, que nous avons proposée dans la section III.3.2. Ces deux indices sont supposés suivre un modèle de type Black-Scholes dont la forme discrétisée de la solution exacte de l'EDS s'écrit sous la forme suivante (ce qui peut être vérifié directement par l'application du lemme d'Itô) :

$$S_T = S_t \exp \left(\int_t^T r(u)du - \int_t^T \frac{\sigma_u^2}{2} du + \int_t^T \sigma_u dW_u \right)$$

La section III.3.2 propose une approche de calibrage des volatilités implicites à partir des prix des *calls* observés sur le marché. Cette démarche est retenue ici pour le calibrage de la volatilité de l'indice actions. La volatilité d'un investissement en immobilier est calibrée sur les prix historiques.

IV.3 Modélisation de la structure de dépendance

IV.3.1 Problématique

Le taux d'intérêt composé $R(t, T)$ dont la dynamique est décrite par un modèle CIR++ ou un modèle CIR2++ est une écriture affine de variables aléatoires suivant des lois de Khi-deux non centrées. L'espace généré par les taux d'intérêt, l'indice actions et les investissements en immobilier n'est, de fait, pas gaussien. La description de la structure de dépendance par des corrélations n'est donc pas adaptée.

Aussi, la rationalisation des corrélations entre les bruits browniens des indices actions et immobiliers et des modèles CIR++ et CIR2++ reste complexe. En effet :

- Le processus de taux court instantané n'est pas observable sur le marché et la chronique anticipée du mouvement brownien implicite au modèle n'est pas accessible, et ce, même dans le cas d'une discrétisation d'Euler ;
- Le marché n'offre pas d'information sur le prix futur du sous-jacent action mais donne accès uniquement à une information sur sa variabilité (volatilité implicite). La chronique du mouvement brownien sous-jacent n'est pas accessible ;
- Les investissements en immobilier sont calibrés sur des données historiques et non pas sur des données anticipées ;
- L'estimation de la corrélation implicite en utilisant des produits dérivés (comme pour le modèle BSHW - cf. LAURENT et al. [2016] et HAASTRECHT [2010]) est difficile en pratique dans un cadre multivarié gaussien. En effet, il faudra trouver au moins un produit dérivé liquide dont les sous-jacents sont l'indice actions et l'investissement en immobilier pour estimer leur corrélation.

La démarche consistant à (1) construire les observations des aléas browniens pour (2) déduire leurs corrélations que (3) l'on utilise ensuite pour les simulations, n'est pas adaptée à notre problématique.

La section III.3.3 présente par ailleurs une démarche de modélisation de la structure de dépendance pour la génération de scénarios économiques risque-neutres. Cette démarche n'est néanmoins adaptée que pour des modèles de taux normaux ou log-normaux.

A ce jour, nous ne connaissons pas de publications traitant la problématique de la modélisation et du calibrage d'une structure de dépendance non linéaire dans le cadre d'un modèle de génération de scénarios économiques multivariés sous la probabilité risque neutre. Une étude détaillée de l'introduction de structures de dépendance non-linéaires (copules) dans un modèle multivarié calibré sur des données historiques est proposée dans ARMEL et al. [2011].

Par ailleurs, la génération de scénarios économiques risque-neutres dont la structure de dépendance n'est pas gaussienne pose deux problématiques :

- Le choix du modèle de la structure de dépendance ;
- Le calibrage de ce modèle.

Afin de contourner la complexité que pourrait générer une modélisation non linéaire de la structure de dépendance et afin de pouvoir calibrer notre modèle sur les seules observations dont on dispose (historique des taux, la courbe des taux anticipée, l'historique des prix des sous-jacents et les prix des dérivés), nous avons pensé à construire des transformations, par des fonctions, des facteurs de risque telles que les lois de probabilité des variables transformées uni-variées soient assimilables à des variables gaussiennes. La dépendance de ces variables transformées sera supposée linéaire. Notre démarche est présentée dans la section suivante.

IV.3.2 Démarche de construction de la structure de dépendance

La démarche proposée ici pour modéliser la structure de dépendance s'appuie sur l'idée de trouver des transformations des variables économiques de sorte que les variables transformées soit observables et assimilables à des variables gaussiennes. Cela permettra de calibrer une corrélation historique et de diffuser les variables transformées. Par inversion des fonctions nous aurons ainsi une diffusion cohérente de nos variables économiques et financières.

Notons d'abord que la variable Λ_t définie ci-dessous est gaussienne. Ses caractéristiques sont accessibles et observables. Ils ne dépendent en effet que de la volatilité (historique pour l'immobilier et implicite pour les actions) :

$$\Lambda_{t,T} = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) + \ln(D(t,T)) = - \int_t^T \frac{\sigma_u^2}{2} du + \int_t^T \sigma_u dW_u$$

$D(t,T) = \exp\left(- \int_t^T r(u)du\right)$ désigne le noyau d'actualisation stochastique.

Soit $R(t,T)$ le taux d'intérêt composé et supposons maintenant qu'il existe deux fonctions bijectives H_{CIR++} et H_{CIR2++} telles que $H_{CIR++}(R(t,T))$ et $H_{CIR2++}(R(t,T))$ soient assimilables à des variables gaussiennes (cf. section IV.3.3).

Notre démarche propose d'injecter, dans les GSE risque-neutres, les corrélations historiques observées entre les variables suivantes :

- $H_{CIR++}(R_1^{(t)})$ la transformation des taux sans risque historiques sur un an observés à la date t avec l'hypothèse que leur dynamique suit le modèle CIR++ ;
- $H_{CIR2++}(R_1^{(t)})$ la transformation des taux sans risque historiques sur un an observés à la date t avec l'hypothèse que leur dynamique suit le modèle CIR2++ ;
- $\Lambda_{t,t+1}^{action}$ le taux de rendement logarithmique annuel observé à la date $t + 1$ de l'historique de l'indice actions diminué du taux sans risque un an ;
- $\Lambda_{t,t+1}^{immobilier}$ le taux de rendement logarithmique annuel observé à la date $t + 1$ de l'historique de l'indice immobilier diminué du taux sans risque un an.

Deux matrices de corrélation sont calculées :

- $M_1 = \text{corrélation} \left(H_{CIR++} \left(R_1^{(t)} \right), \Lambda_{t+1}^{action}, \Lambda_{t+1}^{immobilier} \right)$ la matrice de corrélation utilisée pour le GSE 1 ;
- $M_2 = \text{corrélation} \left(H_{CIR2++} \left(R_1^{(t)} \right), \Lambda_{t+1}^{action}, \Lambda_{t+1}^{immobilier} \right)$ la matrice de corrélation utilisée pour le GSE 2.

Nous supposons que ces deux matrices ne dépendent pas du temps, de la maturité et des variables modélisées.

Le processus de simulation des variables corrélées est le suivant :

1. Simulation des taux d'intérêt composés indépendamment des autres variables économiques ;
2. À chaque pas de projection t , calcul de la distribution du bruit gaussien, centré et réduit, sous-jacent à la transformée des taux composés : $H_{CIR++} \left(R(t, t+1) \right)$ pour le GSE 1 et $H_{CIR2++} \left(R(t, t+1) \right)$ pour le GSE 2 ;
3. Simulation de deux bruits gaussiens corrélés au bruit gaussien calculé dans l'étape 2 suivant la matrice de corrélation M_i ($i=1$ ou 2) par la méthode de Cholesky ;
4. Utilisation de ces bruits gaussiens pour la diffusion des deux variables intermédiaires $\Lambda_{t,t+1}^{action}$ et $\Lambda_{t,t+1}^{immobilier}$;
5. Simulations des indices actions et immobilier en ajoutant $\ln(D(t, t+1))$ aux variables $\Lambda_{t,t+1}^{action}$ et $\Lambda_{t,t+1}^{immobilier}$.

Cette approche de simulation de l'indice actions et de l'indice immobilier conditionnellement aux trajectoires du taux par termes permet de construire un modèle de génération de scénarios économiques risque-neutre dont la structure de dépendance est cohérente avec les structures de dépendance historiques observées.

La mise en place de cette démarche repose sur l'existence de deux fonctions bijectives H_{CIR++} et H_{CIR2++} telles que $H_{CIR++} \left(R(t, T) \right)$ et $H_{CIR2++} \left(R(t, T) \right)$ soient assimilables à des variables gaussiennes. La section suivante présente la méthode de construction de telles fonctions.

IV.3.3 Approximation de la distribution du taux d'intérêt par une distribution gaussienne

Le taux d'intérêt $R(t, T)$ dont la dynamique est le modèle CIR++ ou le modèle CIR2++ s'écrit comme une fonction affine de lois de Khi-deux non centrées (cf. ARMEL et PLANCHET [2021b]).

- Pour le modèle CIR++, il existe deux fonctions déterministes $\alpha(t, T)$ et $\beta(t, T)$ telles que :

$$R_{CIR++}(t, T) = \alpha(t, T) \chi^2(v, \lambda_t) + \beta(t, T)$$

- Pour le modèle CIR2++, il existe trois fonctions déterministes $\alpha_x(t, T)$, $\alpha_y(t, T)$ et $\beta_{xy}(t, T)$ telles que :

$$R_{CIR2++}(t, T) = \alpha_x(t, T) \chi^2 \left(v^{(x)}, \lambda_t^{(x)} \right) + \alpha_y(t, T) \chi^2 \left(v^{(y)}, \lambda_t^{(y)} \right) + \beta_{xy}(t, T)$$

Nous examinons dans la suite deux transformations des lois du Khi-deux non-centrées permettant d'assimiler les taux d'intérêt à des variables gaussiennes : une transformation linéaire et une transformation non-linéaire. Ces deux transformations ont été retenues suite à l'étude d'un ensemble d'approximations des lois du Khi-deux par des lois normales présenté dans PATEL et READ [1982] et synthétisé dans l'annexe 0.

IV.3.3.1 Transformation linéaire

Cette transformation permet d'exprimer une loi du Khi-deux non-centrée en fonction d'une loi normale. En effet, la variable aléatoire

$$G_1(\chi^2(v, \lambda)) = \frac{\chi^2(v, \lambda) - v - \lambda}{\sqrt{2(v + 2\lambda)}}$$

a, approximativement, la même distribution qu'une distribution normale centrée et réduite. Et donc : $\chi^2(v, \lambda) \approx \sqrt{2(v + 2\lambda)}N(0,1) + v + \lambda$.

La qualité de cette transformation est meilleure quand v ou λ sont significatifs⁵⁸.

Nous avons étudié la pertinence de cette approximation sur la base des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ présentés dans la section IV.4. Les graphiques et les résultats qui suivent s'appuient sur le calibrage du modèle CIR++ sur les caps avec un décalage du modèle de Black de 1 % et une valeur initiale du modèle CIR++ de 1 %.

Nous avons également validé la qualité de cette approximation sur tout l'horizon de projection. Les graphiques, résultats et analyses présentés dans la suite sont réalisés pour deux dates, une date de projection à un an et une autre, à plus long terme, de vingt ans.

Les paramètres calibrés du modèle CIR++, pour un décalage du modèle de Black de 1% et une valeur initiale du modèle CIR++ de 1%, sont : $k = 0,03$; $\theta = 1$ et $\sigma = 0,03$. Dans ce cas :

- Les paramètres de la loi du Khi-deux non-centrée pour la première année de projection sont : $v = 133,26$ et $\lambda = 42,06$;
- Les paramètres de la loi du Khi-deux non-centrée pour la 20^{ème} année de projection sont : $v = 133,26$ et $\lambda = 1,54$.

Posons : $X_t = \chi^2(v, \lambda_t)$ et $Y_t = \sqrt{2(v + 2\lambda_t)}N(0,1) + v + \lambda_t$.

Dans la suite nous présentons les diagrammes Quantile à Quantile (QQ plot) des variables X_t et Y_t (pour t=1 an et t=20 ans) ainsi que les écarts relatifs de ces quantiles⁵⁹.

⁵⁸ Dans JOHNSON et al [1970] on peut noter que l'erreur relative décroît en fonction du degré de liberté et du facteur de décentralisation. Lorsque $v = 7$ et $\lambda = 25$, l'erreur relative sur les quantiles 95% et 5% est faible (<1% en valeur absolue). Aussi, l'erreur d'approximation évolue en $O(1/\sqrt{\lambda})$ et l'augmentation du degré de liberté accélère la convergence vers une distribution normale.

⁵⁹ Les quantiles sont évalués sur 990 points allant de l'ordre 0,1% à l'ordre 99% avec un pas de 0,1%. Les écarts relatifs sont calculés comme $\frac{(Q_X(p) - Q_Y(p))}{Q_X(p)}$ où $Q_X(p)$ (resp. $Q_Y(p)$) désigne le quantile d'ordre p de X (resp. Y).

Figure IV.1 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $\nu = 133,26$ et $\lambda = 42,06$

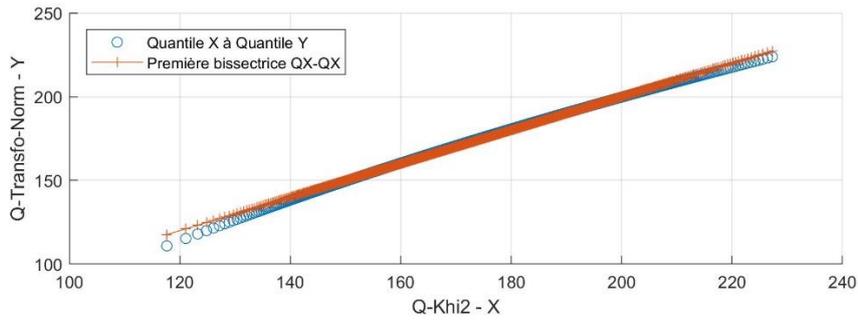
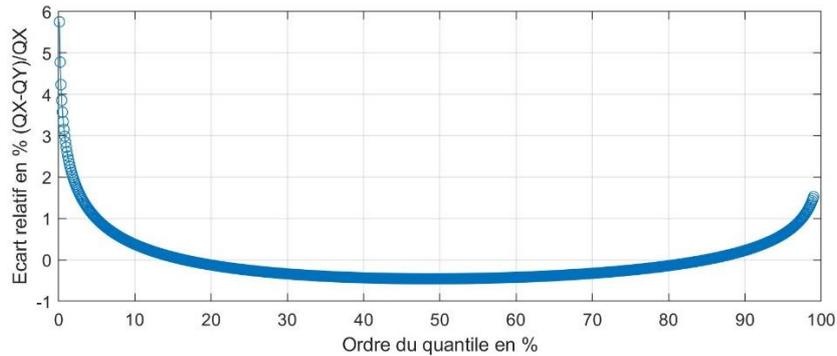


Figure IV.2 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $\nu = 133,26$ et $\lambda = 42,06$



Nous observons que la qualité de l'approximation de X_1 par Y_1 est bonne. On peut noter en effet que le diagramme quantile à quantile est quasiment aligné sur la première bissectrice. L'erreur d'approximation de X_1 par Y_1 est inférieure à 1% sur tous les ordres de probabilité entre 5% et 95%. Sa valeur maximale est inférieure à 6%.

Figure IV.3 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=20$; $\nu = 133,26$ et $\lambda = 1,54$

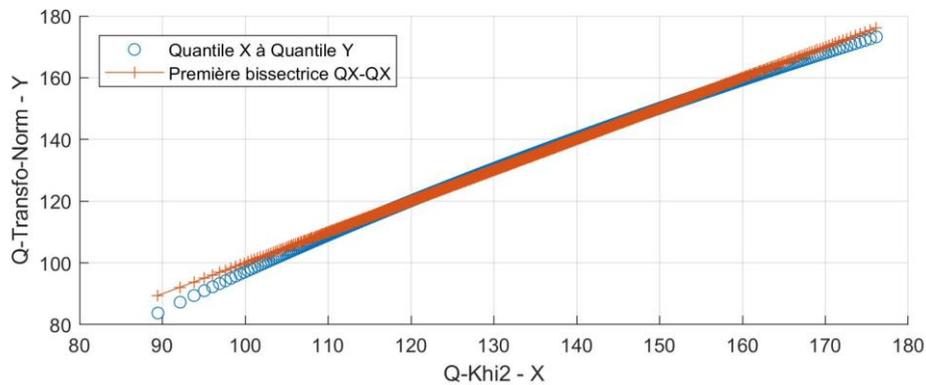
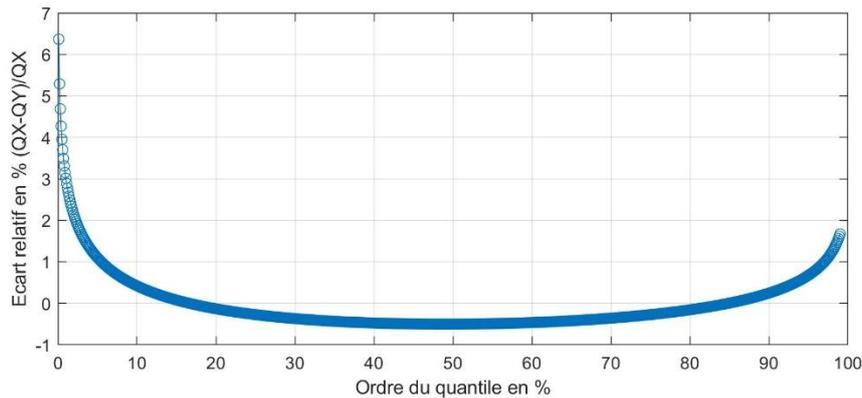


Figure IV.4 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t , pour : $t=20$; $\nu = 133.26$ et $\lambda = 1.54$



Comme pour le cas de l'horizon de projection de un an, nous observons que la qualité de l'approximation de X_{20} par Y_{20} est bonne. On peut noter en effet que le diagramme quantile à quantile est quasiment aligné sur la première bissectrice. L'erreur d'approximation de X_{20} par Y_{20} est inférieure à 1% sur tous les ordres de probabilité entre 5% et 95%. Sa valeur maximale est inférieure à 7%.

La qualité de l'approximation est bonne quand le degré de liberté ou le paramètre de décentralisation sont significatifs (cf. PATEL et READ [1982]). Les résultats des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ présentés dans la section IV.4 montrent que les degrés de liberté ou les paramètres de décentralisation des lois du Khi-deux implicites à ces modèles sont assez significatifs. Les erreurs d'approximation restent donc faibles et comparables aux erreurs présentées ci-dessus.

Aussi, le taux d'intérêt (CIR++ ou CIR2++) est une fonction affine de lois du Khi-deux. L'écriture de ces lois sous une forme gaussienne, permet l'approximation des taux d'intérêt par des lois gaussiennes.

Pour le modèle CIR++, il existe donc deux fonctions déterministes $\alpha'(t, T)$ et $\beta'(t, T)$ telles que : $R_{CIR++}(t, T) \approx \alpha'(t, T) \times N(0,1) + \beta'(t, T)$ et $N(0,1)$ est une loi normale centrée et réduite.

Pour le modèle CIR2++, il existe ainsi trois fonctions déterministes $\alpha'_x(t, T)$, $\alpha'_y(t, T)$ et $\beta'_{xy}(t, T)$ telles que : $R_{CIR2++}(t, T) \approx \alpha'_x(t, T) \times N_1(0,1) + \alpha'_y(t, T) \times N_2(0,1) + \beta'_{xy}(t, T)$ avec $N_1(0,1)$ et $N_2(0,1)$ sont des lois normales centrées, réduites et indépendantes.

L'intérêt majeur de cette approximation est la possibilité d'assimiler le taux d'intérêt à une variable gaussienne ce qui nous permet de nous placer dans un univers gaussien pour calibrer les matrices de corrélation et pour diffuser les indices actions et immobilier conditionnellement aux taux d'intérêt comme précisé dans la section IV.3.2.

Rappelons que les taux d'intérêt sont diffusés en discrétisation exacte. L'approximation linéaire n'est retenue que pour calibrer et prendre en compte le co-mouvement des indices modélisés.

IV.3.3.2 Transformation non linéaire

Soit G_2 une fonction définie pour tout $0 \leq z$ par :

$$G_2(z) = \frac{\left(\left(\frac{z}{v+\lambda}\right)^h - a\right)}{b}$$

avec :

- $h = 1 - \frac{2(v+\lambda)(v+3\lambda)}{3(v+2\lambda)^2}$
- $a = 1 + \frac{h(h-1)(v+2\lambda)}{(v+\lambda)^2} - \frac{h(h-1)(2-h)(1-3h)(v+2\lambda)^2}{2(v+\lambda)^4}$
- $b = \frac{h\sqrt{2(v+2\lambda)}}{v+\lambda} \left(1 - \frac{(1-h)(1-3h)(v+2\lambda)}{2(v+\lambda)^2}\right)$

Notons que G_2 est continue et strictement monotone. Elle est donc bijective de \mathbb{R}^+ vers $G_2(\mathbb{R}^+)$.

La variable aléatoire $G_2(\chi^2(v, \lambda))$ a, approximativement, la même distribution qu'une distribution normale centrée et réduite. Aucune contrainte n'est formulée sur les paramètres v et λ (cf. PATEL et READ [1982]).

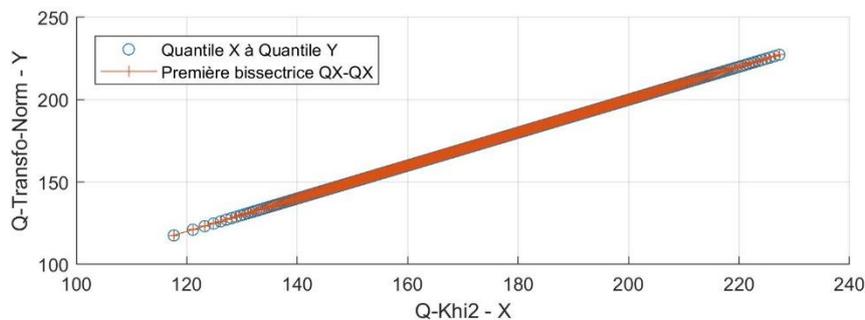
Cette transformation permet d'exprimer une loi du Khi-deux non-centrée en fonction d'une loi normale centrée et réduite : $\chi^2(v, \lambda) \approx G_2^{-1}(N(0,1))$.

Comme dans la section IV.3.3.1, nous avons étudié la pertinence de cette approximation sur la base des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ présentés dans la section IV.4. Les graphiques et résultats qui suivent s'appuient sur les mêmes paramètres présentés dans la section IV.3.3.1.

Posons : $X_t = \chi^2(v, \lambda_t)$ et $Y_t = G_2^{-1}(N(0,1))$.

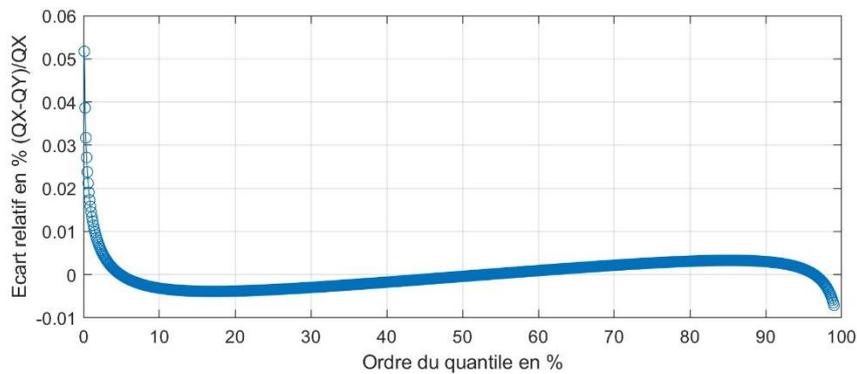
Dans la suite nous présentons les diagrammes Quantile à Quantile (QQ plot) des variables X_t et Y_t (pour $t=1$ ans et $t=20$ ans) ainsi que les écarts relatifs de ces quantiles⁶⁰.

Figure IV.5 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $v = 133,26$ et $\lambda = 42,06$



⁶⁰ Les quantiles sont évalués sur 990 points allant de l'ordre 0,1% à l'ordre 99% avec un pas de 0,1%. Les écarts relatifs sont calculés comme $\frac{(Q_X(p) - Q_Y(p))}{Q_X(p)}$ où $Q_X(p)$ (resp. $Q_Y(p)$) désigne le quantile d'ordre p de X (resp. Y).

Figure IV.6 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $\nu = 133,26$ et $\lambda = 42,06$



Nous observons que la qualité de l'approximation de X_1 par Y_1 est très bonne. On peut noter en effet que le diagramme quantile à quantile est parfaitement aligné sur la première bissectrice. L'erreur d'approximation de X_1 par Y_1 est inférieure à 0,01% sur tous les ordres de probabilité entre 2 % et 100 %. Sa valeur maximale est inférieure à 0,06 %.

Figure IV.7 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=20$; $\nu = 133,26$ et $\lambda = 1,54$

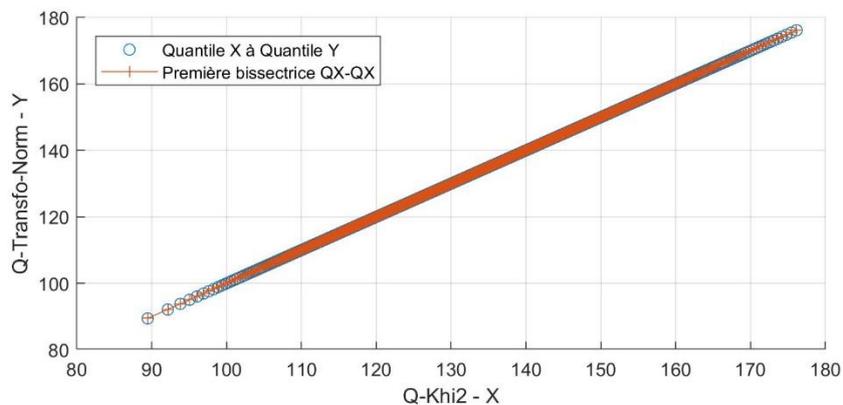
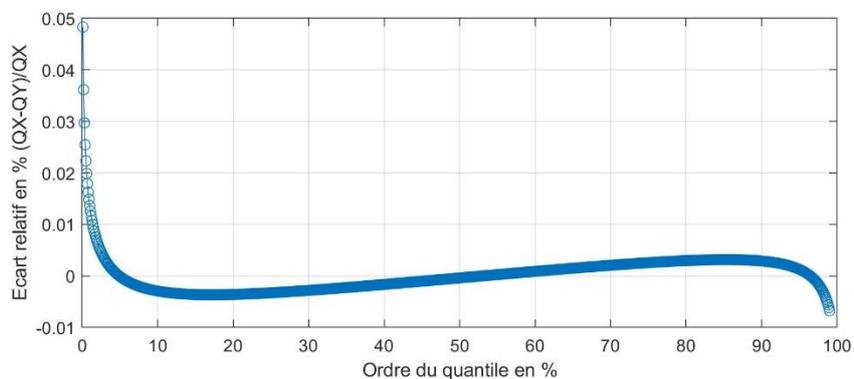


Figure IV.8 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t pour : $t=20$; $\nu = 133,26$ et $\lambda = 1,54$



Nous observons que la qualité de l'approximation de X_{20} par Y_{20} est très bonne. On peut noter en effet que le diagramme quantile à quantile est quasiment aligné sur la première bissectrice. L'erreur d'approximation de X_{20} par Y_{20} est inférieure à 0,01% sur tous les ordres de probabilité entre 2 % et 100 %. Sa valeur maximale est inférieure à 0,05 %.

L'approximation présentée dans cette section est meilleure que l'approximation linéaire. Cependant elle est non-linéaire, ce qui limite son utilisation au seul modèle CIR++.

En effet, si la dynamique implicite au taux d'intérêt composé est le modèle CIR++, alors on peut écrire, en loi :

$$G_2 \left(\frac{(R_{CIR++}(t, T) - \beta(t, T))}{\alpha(t, T)} \right) = G_2(\chi^2(v, \lambda_t)) \approx N(0, 1)$$

Dans ce cas, on peut trouver une bijection transformant le taux d'intérêt composé en variable normale et appliquer l'algorithme présenté dans la section IV.3.2 pour calibrer la structure de dépendance et diffuser les indices actions et immobilier.

Dans le cas du modèle CIR2++, le taux d'intérêt composé est une fonction affine de deux variables aléatoires Khi-deux non-centrées. L'utilisation de la transformation G_2 n'est donc pas adaptée car elle est non linéaire.

Compte tenu de la qualité de l'approximation linéaire présentée à la section IV.3.3.1 et de la simplicité de sa mise en œuvre, nous avons retenu celle-ci pour calibrer la structure de dépendance et diffuser les indices actions et immobilier des deux générateurs GSE1 et GSE2.

Dans les sections IV.2 et IV.3 nous avons présenté notre démarche pour calibrer et diffuser les variables économiques et financières dans le cadre de la génération de scénarios économiques risque-neutres où les taux d'intérêt suivent des modèles CIR++ ou CIR2++.

La section suivante présente le résultat des calibrages de ces modèles et se focalise essentiellement sur l'étude des modèles de taux. Une étude de sensibilité du *best-estimate* aux choix de modèles de taux et des données de calibrage y est présentée également.

IV.4 Analyse des résultats et des sensibilités du *best-estimate*

Nous examinons dans cette section les résultats de la mise en œuvre pratique des développements présentés dans les sections IV.2 et IV.3. L'objectif est de présenter notamment :

- Les données et la démarche retenues pour calibrer les générateurs de scénarios économiques étudiés ici (GSE1 et GSE2) ;
- Les résultats des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ et une analyse de leur qualité ;
- Une étude des sensibilités du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français aux choix de modèles de taux CIR++ et CIR2++ et de leurs calibrages.

IV.4.1 Démarche et données

Les données et la démarche retenues pour calibrer les générateurs de scénarios économiques étudiés ici sont similaires à ceux présentés dans le chapitre III. Les données et les choix de modélisation sont synthétisés dans la figure suivante.

Figure IV.9 : données et choix de modélisation

1 Environnement de modélisation			
Mesure	Risque neutre		
Variables économiques	Taux d'intérêt sans risque	Action	Immobilier
2 Modèles mathématiques			
Modèles univariés	CIR++	CIR2++	Black-Scholes
Structure de dépendance	Matrice de corrélation extraite de données historiques		
3 Paramètres			
Instruments	Caps & Swaptions sur Euribor	Calls sur CAC40	Données historiques
Données : périodicité & profondeur	Données annuelles sur 10 ans Données observées le 02 Jan 2018	3 ans	12 ans
Méthode d'optimisation	Distance Euclidienne (distance L2)		Volatilité historique

Les sections suivantes présentent les résultats de calibrage et les études de sensibilités du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

IV.4.2 Modèle CIR++

IV.4.2.1 Résultats du calibrage

Le [Tableau IV.1](#) présente les résultats du calibrage du modèle CIR++ (noté aussi CIR1F dans la suite) sur les prix de *caps* ATM et le [Tableau IV.2](#) présente les résultats du calibrage sur les prix de *swaptions* ATM.

Le méta-paramètre x_0 du modèle CIR++ représentant la valeur initiale du processus CIR doit être fixé en amont du processus de calibrage. Ce paramètre n'a aucun impact sur la reproduction de la courbe de taux d'intérêt initiale mais peut avoir un impact sur la dynamique du taux d'intérêt diffusé. Comme pour le facteur de décalage du modèle de Black, trois niveaux du méta-paramètre x_0 sont testés : 0,4 %, 1 % et 2 %.

Par la notation $CIR1F(i, j)$ nous désignons le modèle CIR++ calibré sur des *caps* ou des *swaptions* avec le $i^{\text{ème}}$ facteur de décalage de Black et le $j^{\text{ème}}$ méta-paramètre du modèle CIR++, tous les deux appartenant à (0,4 % ; 1 % ; 2 % ; 0,4 % ; 1 % ; 2 %).

Tableau IV.1 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Caps

Paramètres	CIR1F(1,1)	CIR1F(1,2)	CIR1F(1,3)	CIR1F(2,1)	CIR1F(2,2)	CIR1F(2,3)	CIR1F(3,1)	CIR1F(3,2)	CIR1F(3,3)
k	1,95%	2,91%	3,89%	2,20%	3,12%	4,09%	2,62%	3,45%	4,37%
θ	99,39%	99,22%	99,16%	98,77%	99,98%	99,24%	99,05%	99,34%	99,24%
σ	2,57%	2,10%	1,81%	3,68%	3,06%	2,68%	5,45%	4,69%	4,14%
Erreur totale au carré relative	1,05%	1,19%	1,35%	1,00%	1,15%	1,34%	0,88%	1,03%	1,21%

Tableau IV.2 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Swaptions

Paramètres	CIR1F(4,1)	CIR1F(4,2)	CIR1F(4,3)	CIR1F(5,1)	CIR1F(5,2)	CIR1F(5,3)	CIR1F(6,1)	CIR1F(6,2)	CIR1F(6,3)
k	2,63%	2,99%	3,45%	3,52%	3,85%	4,31%	4,95%	5,19%	5,50%
θ	99,95%	99,99%	100,00%	99,97%	99,99%	100,00%	99,90%	99,96%	99,98%
σ	5,76%	5,31%	4,87%	7,05%	6,65%	6,20%	9,53%	9,16%	8,70%
Erreur totale au carré relative	2,92%	3,19%	3,60%	3,45%	3,73%	4,15%	4,89%	5,16%	5,60%

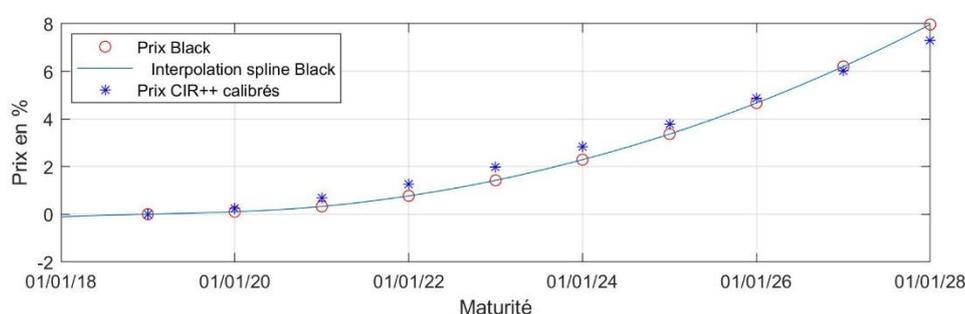
L'erreur totale est calculée comme la somme des erreurs au carré (fonction objectif) divisée par la somme des prix de Black au carré.

Les paramètres calibrés respectent la contrainte de Feller.

En reprenant les résultats de calibrage du modèle de Hull-White et du modèle G2++ présentés dans la section III.5, on peut noter que la qualité de reproduction des prix de caps et de swaptions par le modèle CIR++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White mais moins bonne que celle du modèle G2++. Cela s'explique essentiellement par le nombre de paramètres des modèles : le modèle Hull-White a deux paramètres, le modèle CIR++ a trois paramètres contraints par la relation de Feller et le modèle G2++ a cinq paramètres avec une meilleure capacité à reproduire les volatilités du marché (cf. section IV.4.3.1). Des conclusions similaires sont présentées dans BRIGO et MERCURIO [2007].

La Figure IV.10 présente la qualité du calibrage du modèle CIR++ sur les prix de marché des caps évalués par le modèle de Black décalé de 1 % et un méta-paramètre CIR de 1 %. Nous observons que le modèle CIR++ reproduit assez bien les prix.

Figure IV.10 : qualité de reproduction des prix de caps par le modèle CIR++



IV.4.2.2 Analyse de l'impact de la valeur initiale du modèle CIR++

Le méta-paramètre x_0 du modèle CIR++ représente la valeur initiale du processus CIR. Il doit être fixé en amont du processus de calibrage. Nous étudions ici l'impact du choix de ce paramètre.

Rappelons que, par construction, le choix du méta-paramètre x_0 n'a aucun impact sur la reproduction des prix de marché des obligations zéro-coupon observées.

Par ailleurs, la volatilité des taux courts instantanés d'un processus CIR s'écrit⁶¹ :

$$\text{Var}\{x(t)|F_s\} = \frac{x(s)\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2$$

L'augmentation de x_0 augmente donc systématiquement les volatilités des taux d'intérêt composés⁶². L'effet est beaucoup plus prononcé pour les volatilités à court terme. En effet, x_0 n'affecte pas la variance asymptotique du taux court instantané puisque, pour un k positif :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Var}\{x(t)\} = \theta \frac{\sigma^2}{2k}$$

Donc, les volatilités à long terme sont théoriquement moins sensibles aux variations de x_0 et l'augmentation de x_0 a pour effet de réduire la pente initiale de la courbe de volatilité.

Aussi, lors du processus de calibrage, l'augmentation de la valeur initiale x_0 devrait être contrebalancée par la baisse de la dispersion σ ou la hausse de la vitesse de retour à la moyenne k afin de maintenir un niveau de volatilité permettant de reproduire les prix du marché fixés en amont. Ce constat théorique est validé par les résultats pratiques présentés dans le [Tableau IV.1](#) et le [Tableau IV.2](#). On notera que pour un facteur de décalage du modèle de Black donné, le paramètre σ est décroissant en fonction de x_0 et le paramètre k est croissant.

Par ailleurs, le modèle CIR++ a été calibré sur dix maturités allant de 1 an à 10 ans. Sur ces maturités, la volatilité des taux d'intérêt, dont les modèles sont calibrés sur les mêmes prix, devraient être sensiblement égales.

Le choix de la valeur initiale n'aura a priori que peu d'impact sur ces volatilités (maturités de 1 an à 10 ans) car le processus de calibrage compensera le niveau de x_0 par σ et k . La valeur initiale aura cependant un impact indirect sur la variance asymptotique via ces paramètres σ et k . Quand x_0 croît, la quantité $\frac{\sigma^2}{2k}$ décroît en effet. On peut donc s'attendre à une baisse de la variance asymptotique ($\theta \frac{\sigma^2}{2k}$) quand x_0 augmente et quand θ reste stable. Ce constat théorique est validé par l'analyse des variances des modèles CIR++ calibrés dont les paramètres sont présentés dans le [Tableau IV.1](#) et le [Tableau IV.2](#) et dont une illustration est présentée dans la [Figure IV.12](#).

Les figures suivantes illustrent l'impact du choix du méta-paramètre sur les caractéristiques distributionnelles du processus CIR++ pour un calibrage sur les prix de marché des *caps* évalués avec le modèle de Black décalé de 1 %.

⁶¹ Cf. annexe VIII.3.

⁶² Rappelons que les taux composés CIR++ sont des fonctions affines des taux courts instantanés. L'analyse de leur volatilité revient à l'analyse de la volatilité des taux courts instantanés dont la dynamique est un modèle CIR.

Figure IV.11 : impact du choix du méta-paramètre sur l'espérance des taux composés

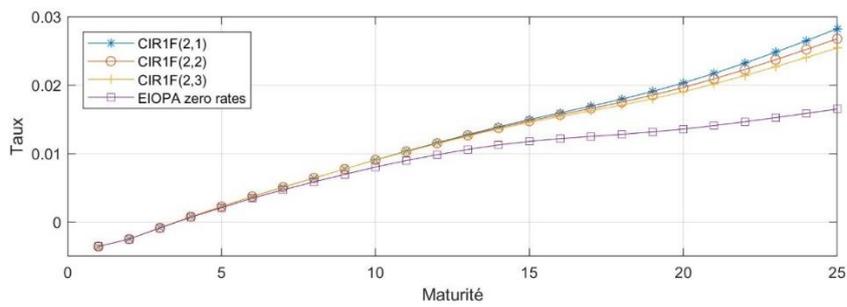


Figure IV.12 : impact du choix du méta-paramètre sur la volatilité des taux composés

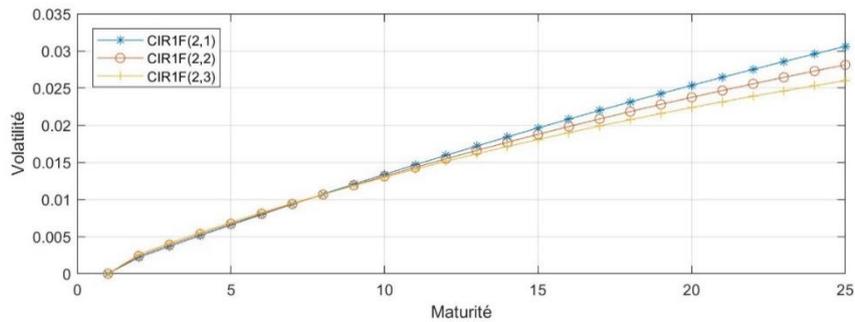
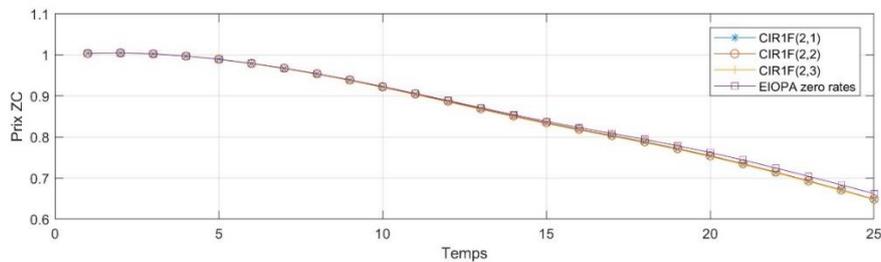


Figure IV.13 : impact du choix du méta-paramètre sur les noyaux d'actualisation



Nous observons que la moyenne et la dispersion du taux d'intérêt composé restent globalement stables pour les trois valeurs initiales étudiées (0,4 % ; 1 % ; 2 %). La moyenne et la dispersion des prix des zéro-coupons restent stables également. Ce constat est également valable pour un calibrage sur les prix de marché des *swaptions* et pour tous les facteurs de décalage du modèle de Black étudiés.

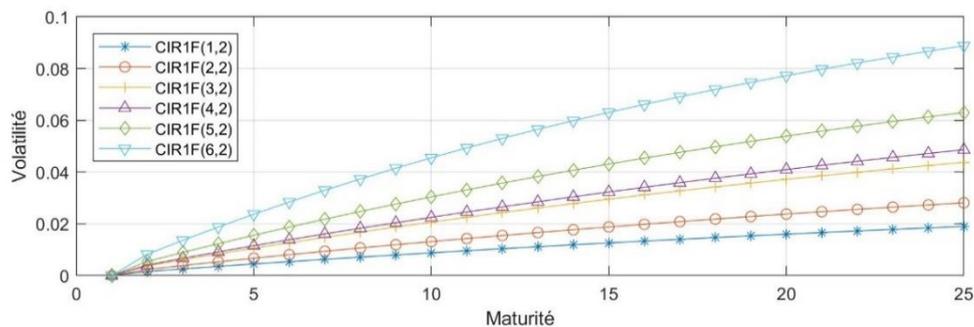
Compte tenu du faible impact de la valeur initiale du modèle CIR, nous nous contentons dans la suite du chapitre d'étudier l'impact du facteur de décalage du modèle de Black et nous fixons la valeur initiale des modèles CIR++ et CIR2++ à 1 %.

IV.4.2.3 Sensibilité de la moyenne et de la volatilité des taux d'intérêt au facteur de décalage de Black

Par construction, le modèle CIR++ reproduit les prix des zéro-coupons de la courbe des taux par termes anticipée et ce, quel que soit le facteur de décalage du modèle de Black utilisé lors du calibrage.

La *Figure IV.14* présente l'évolution des volatilités des taux par termes simulés en fonction des maturités. Pour chaque type de produit (*caps* et *swaptions*), nous notons que la volatilité est croissante en fonction du facteur de décalage. En effet, le prix de Black étant croissant en fonction du facteur de décalage, le modèle CIR++ « compense » cette hausse de prix par une hausse de la volatilité.

Figure IV.14 : courbes de volatilité - calibrages du modèle CIR++ sur les caps et swaptions, méta-paramètre à 1%



L'augmentation du paramètre de retour à la moyenne k s'accompagne d'une baisse de la volatilité des taux à terme. L'augmentation des paramètres θ et σ s'accompagne d'une augmentation de cette volatilité.

IV.4.3 Modèle CIR2++

IV.4.3.1 Résultats du calibrage

Le *Tableau IV.3* présente les résultats du calibrage du modèle CIR2++ (noté aussi CIR2F dans la suite) sur les prix de *caps* ATM et de *swaptions* ATM. Ce sont ces modèles CIR2++ qui vont être utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* présentée dans la section IV.4.5.

Les méta-paramètres x_0 et y_0 du modèle CIR2++ dont la somme représente la valeur initiale du processus CIR2++ sont fixés en amont du processus de calibrage à $x_0 = 0,5 \%$ et $y_0 = 0,5 \%$. La valeur initiale du processus CIR2++ est donc de 1 %.

Par la notation $CIR2F_i$ nous désignons le modèle CIR2++ calibré sur des *caps* ($i \leq 3$) ou des *swaptions* ($4 \leq i$) avec le $i^{\text{ème}}$ facteur de décalage de Black appartenant à (0,4 % ; 1 % ; 2 % ; 0,4 % ; 1 % ; 2 %).

Tableau IV.3 : résultats du calibrage du modèle CIR2++ sur des caps et des swaptions

Paramètres	Caps			Swaptions		
	CIR2F_1	CIR2F_2	CIR2F_3	CIR2F_4	CIR2F_5	CIR2F_6
k1	2,39%	2,38%	2,41%	3,00%	3,55%	2,93%
θ_1	101,05%	98,49%	100,00%	100,39%	92,51%	97,08%
σ_1	1,58%	1,62%	3,20%	3,99%	4,89%	7,72%
k2	2,41%	2,65%	2,41%	3,00%	3,51%	2,96%
θ_2	101,05%	97,14%	100,00%	100,63%	98,29%	101,20%
σ_2	1,58%	2,49%	3,20%	4,00%	5,01%	6,68%
Erreur totale au carré relative	0,83%	0,94%	0,76%	3,25%	3,71%	5,47%

L'erreur totale est calculée comme la somme des erreurs au carré (fonction objectif) divisée par la somme des prix de Black au carré.

Les paramètres estimés respectent la contrainte de Feller.

En reprenant les résultats de calibrage du modèle de Hull-White et du modèle G2++ présentés dans ARMEL et PLANCHET [2018], la qualité de reproduction des prix de caps et de swaptions par le modèle CIR2++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White et du modèle CIR++.

Le nombre de paramètres du modèle CIR2++ est de six, contraints par la formule de Feller. De fait, la reproduction des prix de marché est en général meilleure que le modèle de Hull-White (deux paramètres) et le modèle CIR++ (trois paramètres contraints).

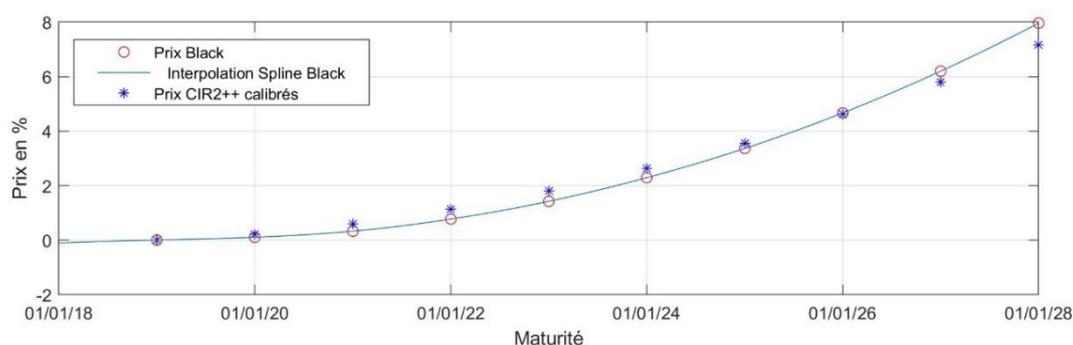
Cependant, on peut noter que le modèle G2++ (cinq paramètres) reproduit mieux les prix que le modèle CIR2++ (six paramètres contraints).

BRIGO et MERCURIO [2007] font le même constat. Ils le justifient par la présence d'un paramètre de corrélation ρ entre les bruits browniens des deux facteurs du modèle G2++ lui donnant plus de flexibilité. Quand ce facteur de corrélation est strictement négatif (ce qui est le cas dans ARMEL et PLANCHET [2018]) le modèle G2++ permet d'avoir une forme en bosse de la volatilité (*volatility hump*) du taux *forward* instantané et reproduit mieux les prix de marché. Cependant, la reproduction des prix est moins bonne quand le paramètre de corrélation est nul : $\rho = 0$ car le modèle ne peut reproduire la forme en bosse de la volatilité.

La situation est analogue dans le cas du modèle CIR2++. La corrélation entre les bruits gaussiens des deux facteurs CIR du modèle CIR2++ est nulle et ne permet pas d'avoir une forme en bosse de la volatilité (*volatility hump*) du taux *forward* instantané. Cette forme est une caractéristique souhaitable du modèle permettant de mieux refléter les prix du marché. Cependant un facteur de corrélation non-nul limiterait significativement les propriétés analytiques du modèle CIR2++.

La *Figure IV.15* présente la qualité du calibrage du modèle CIR2++ (valeur initiale de 1 %) aux prix de marché des caps évalués par le modèle de Black décalé par un facteur égal à 1 %. Nous observons que le modèle CIR2++ reproduit assez bien les prix.

Figure IV.15 : qualité de reproduction des prix de caps par le modèle CIR2++

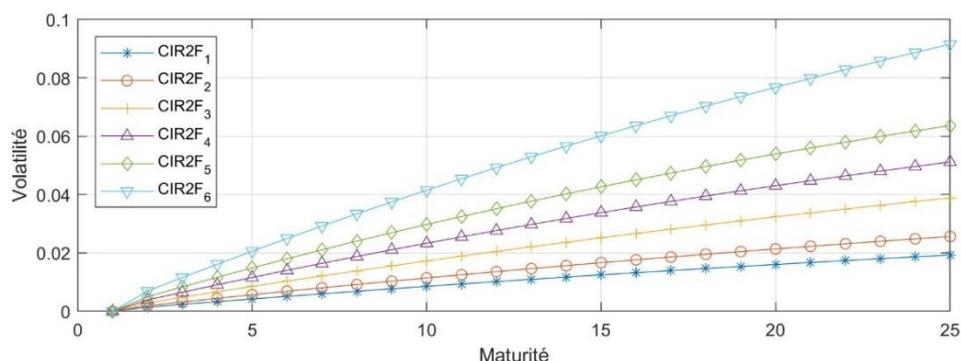


IV.4.3.2 Sensibilité de la moyenne et de la volatilité des taux d'intérêt au facteur de décalage de Black

Par construction, le modèle CIR2++ reproduit le prix des zéro-coupons de la courbe des taux par terme anticipée et ce, quel que soit le facteur de décalage du modèle de Black utilisé lors du calibrage.

La *Figure IV.16* présente l'évolution des volatilités des taux par termes en fonction des maturités. La volatilité est croissante en fonction du facteur de décalage. En effet, le prix de Black étant croissant en fonction du facteur de décalage, le modèle CIR2++ « compense » cette hausse de prix par une hausse de la volatilité.

Figure IV.16 : courbes de volatilité - calibrages du modèle CIR2++ sur les caps et swaptions



L'augmentation des paramètres de retour à la moyenne k_1 et k_2 s'accompagne d'une baisse de la volatilité des taux par termes. L'augmentation des paramètres θ_1 , θ_2 , σ_1 et σ_2 s'accompagne d'une augmentation de cette volatilité.

IV.4.4 Structure de dépendance et modèles actions et immobilier

Nous avons proposé dans la section IV.3.2 une approche de simulation de l'indice actions et de l'indice immobilier conditionnellement aux trajectoires du taux d'intérêt avec des matrices de corrélations historiques. Le tableau suivant présente la matrice de corrélation historique utilisée pour la diffusion des indices.

Tableau IV.4 : matrice de corrélations

Matrice de corrélation	Taux	Action-Taux	Immobilier-Taux
Taux	100,0%	-53,7%	-3,9%
Action-Taux	-53,7%	100,0%	11,2%
Immobilier-Taux	-3,9%	11,2%	100,0%

La volatilité de l'indice immobilier correspond à la volatilité historique des rendements de l'indice des prix de vente des logements anciens publiés par l'INSEE⁶³ de décembre 2006 à décembre 2016. Cette volatilité est de 3,5 %.

La volatilité du modèle actions est supposée indépendante du temps et a été calibrée sur le prix d'un call ATM de maturité 3 ans sur l'indice CAC 40. Les résultats sont présentés dans le *Tableau IV.5* (le facteur de décalage de Black sous-jacent à chaque modèle de taux est égal à 1 %).

Tableau IV.5 : volatilité implicite de l'indice actions

Modèle taux	Volatilité implicite actions
CIR++	10,34%
CIR2++	10,25%

Le calibrage des modèles de taux CIR++ et CIR2++ ainsi que le calibrage du modèle actions, du modèle immobilier et de la structure de dépendance, permet de générer les scénarios économiques et de réaliser ainsi des études de sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux CIR++ et CIR2++ et des données de calibrage. Ces études sont présentées dans la suite.

IV.4.5 Impact du choix du modèle de taux sur le *best-estimate*

Dans le chapitre III nous avons retenu trois modèles de taux (Hull & White, G2++ et LMM décalé) représentatifs des choix des acteurs du marché, calibrés sur deux types de produits financiers (*caps* et *swaptions*), pour réaliser des tests de sensibilité du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices. Ces modèles respectent notamment les contraintes du régulateur.

Le modèle LMM, calibré sur les données observées au 2 janvier 2018, n'a pu être retenu cependant du fait de sa divergence. La version retenue dans les tests de sensibilité est un modèle ajusté et convergent, qui n'est donc plus « *market consistent* ».

Nous complétons dans cette section ces tests de sensibilité en évaluant l'impact du choix des modèles de taux CIR++ et CIR2++ et des données de calibrage sur le *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

Afin d'évaluer ces impacts, nous avons repris ici les mêmes modèles et paramètres d'évaluation des passifs présentés dans le chapitre III. Nous avons donc utilisé le package R SimBEL⁶⁴ alimenté par des données réelles modifiées d'un assureur. La valeur de marché

⁶³ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/series/102770558>

⁶⁴ Voir <http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/C5542E1CF549F21FC12581680046FD2E>

de l'actif est de 100M€, la provision mathématique est de 70 M€ et l'horizon de projection est de 20 ans.

Le *Tableau IV.6* et *Tableau IV.7* présentent la sensibilité du *best-estimate* aux modèles CIR++ et CIR2++ ainsi qu'à leurs calibrages *market-consistent*.

Tableau IV.6 : best-estimate par le modèle CIR++ market-consistent

Montants en M€	Cap			Swaption		
	CIR1F(1,2)	CIR1F(2,2)	CIR1F(3,2)	CIR1F(4,2)	CIR1F(5,2)	CIR1F(6,2)
Best-estimate net de frais	82,62	82,66	83,03	83,58	83,94	84,67
Frais	7,92	7,89	7,85	7,89	7,83	7,70
Best-estimate	90,54	90,55	90,89	91,47	91,78	92,37

Tableau IV.7 : best-estimate par le modèle CIR2++ market-consistent

Montants en M€	Caps			Swaptions		
	CIR2F 1	CIR2F 2	CIR2F 3	CIR2F 4	CIR2F 5	CIR2F 6
Best-estimate net de frais	82,63	82,99	82,85	83,12	84,44	84,32
Frais	7,93	7,94	7,89	7,82	7,86	7,74
Best-estimate	90,56	90,94	90,74	90,94	92,30	92,05

Nous constatons que les *best-estimates* évalués sont peu sensibles aux choix du modèle de taux (CIR++ ou CIR2++), aux facteurs de décalage du modèle de valorisation de Black et aux choix des produits dérivés pour le calibrage. Le *Tableau IV.8* montre en effet que l'écart entre les valeurs minimale et maximale représente 2 % de la valeur moyenne des *best-estimates* évalués en utilisant les modèles CIR++ et CIR2++.

Tableau IV.8 : comparaison des best-estimates

Best-estimate en M€	Ecart-type	Min	Max	Ecart (Max-Min)/Moyenne
Modèle CIR++ et modèle CIR2++	0,77%	90,54	92,37	2,00%
Modèles market-consistant : CIR++, CIR2++, HW & G2++	1,13%	87,48	92,37	5,38%
Tous les modèles yc LMM ajusté	1,06%	87,48	92,37	5,38%

Si l'on reprend les résultats de sensibilités présentés dans la section III.6, il ressort du *Tableau IV.8* que l'impact sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître d'abord assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 5,4 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 7,0 % des provisions mathématiques. Cet impact est cependant substantiel s'il est comparé aux fonds propres. En effet, ces derniers représentent en France en moyenne 6,1 % des encours des contrats d'épargne avec clause de participation aux bénéfices à fin 2018 (FFA [2019]).

La sensibilité du *best-estimate* aux modèles de taux peut être comparable au niveau des fonds propres et aucun critère indiscutable ne permet à ce stade de préférer l'un ou l'autre des modèles ci-dessus, une fois le modèle LMM exclu du fait de son absence de convergence.

IV.5 Conclusion

Ce chapitre s'intéresse à la problématique de choix de modèles de taux d'intérêt destinés à évaluer le *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux

bénéfiques dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs. Il s'inscrit dans la continuité des travaux présentés aux chapitres II et III.

Nous avons introduit ici une troisième famille de modèles de taux. Il s'agit des modèles de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross), dont la dynamique intègre une composante en racine carrée du taux court instantané. Nous présentons dans cette section nos conclusions et une comparaison des modèles de taux : CIR++, CIR2++, Hull & White, G2++ et LMM suivant trois axes :

1. La simplicité du calibrage et de la diffusion ;
2. La capacité à reproduire les prix de marché des *caps* et des *swaptions* ;
3. La pertinence du choix du modèle de taux au regard de l'objectif de valorisation des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfiques.

La simplicité du calibrage et de la diffusion

Les modèles normaux Hull et White et G2++ permettent de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Cela rend le processus de calibrage de ces modèles plus performant. On peut en effet disposer d'une meilleure précision du calibrage et d'une meilleure optimisation des ressources informatiques contrairement à un processus de calibrage avec une valorisation par des méthodes de Monte-Carlo.

La diffusion des modèles normaux Hull et White et G2++ est relativement simple car les taux d'intérêt peuvent être discrétisés exactement et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.

Le modèle CIR++ permet également de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. La complexité du processus de calibrage est comparable à celle des modèles normaux et intègre en plus une contrainte sur les paramètres (contrainte de Feller). Le modèle CIR++ peut être diffusé par des formules exactes et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.

Cependant le modèle CIR2++ ne permet pas de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Le processus de calibrage utilise nécessairement des méthodes de valorisation alternatives comme les méthodes de Monte-Carlo ou de génération d'arbres ce qui le rend complexe. Aussi, si la diffusion est réalisée par des discrétisations d'Euler (ce qui n'est pas le cas dans ce papier), la complexité du calibrage augmente compte tenu des contraintes supplémentaires de convergence. Le modèle CIR2++ peut être diffusé par des formules exactes et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.

Le modèle LMM propose également des formules fermées pour la valorisation des dérivées, ce qui simplifie en partie le processus de calibrage. Ces formules peuvent découler d'approximations ou de la discrétisation d'Euler du modèle.

La capacité à reproduire les prix de marché des caps et swaptions

Il ressort des résultats de calibrage *market-consistent* que le modèle G2++ est le modèle qui reproduit le mieux les prix de marché des *caps* et des *swaptions*.

La qualité de reproduction des prix par le modèle CIR++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White mais moins bonne que celle du modèle G2++. Cela s'explique essentiellement par le nombre de paramètres des modèles.

La qualité de reproduction des prix de *caps* et de *swaptions* par le modèle CIR2++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White et du modèle CIR++ mais reste moins bonne que celle du modèle G2++. Le modèle G2++ permet en effet d'avoir une forme en bosse de la volatilité (*volatility hump*) du taux *forward* instantané et reproduit mieux les prix de marché. Cette propriété est souhaitable quand le marché présente de fortes volatilités (cf. BRIGO et MERCURIO [2007]).

Il ressort du calibrage du modèle LMM que ce modèle reproduit très bien les volatilités de marché. Les paramètres issus du calibrage *market-consistent* ne peuvent être retenus cependant du fait de la divergence du modèle.

La pertinence du choix du modèle de taux au regard de l'objectif de valorisation des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices

L'impact du choix de modèles de taux sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître d'abord assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 5,4 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 7,0 % des provisions mathématiques.

Cet impact est substantiel s'il est comparé aux fonds propres et aucun critère indiscutable ne permet à ce stade de préférer l'un ou l'autre des modèles ci-dessus, une fois le modèle LMM exclu du fait de son absence de convergence.

Par ailleurs, nous avons montré dans le chapitre II que la capacité d'un modèle de taux à reproduire les prix de *floorlets* et par extension, les prix de *caps*, peut être considérée comme un critère de choix des modèles de taux destinés à valoriser les passifs des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

Les modèles de taux de type CIR (CIR++ et CIR2++) et les modèles gaussiens (Hull et White et G2++) reproduisent avec une erreur acceptable les prix de marché des *caps*. Ils présentent également un cadre de modélisation répondant à l'ensemble des contraintes imposées par le superviseur et permettent de gérer des taux négatifs sans introduire des facteurs de décalage arbitraires comme dans les modèles log-normaux.

Enfin, le modèle G2++ est simple à calibrer et à diffuser. Il est le modèle qui reproduit le mieux les prix de marché des *caps*. Il présente également des propriétés analytiques plus étendues que le modèle CIR2++.

Les chapitres III et IV, se placent dans le cadre conventionnel du marché et proposent des démarches de construction de GSE risque-neutres destinés à la valorisation des passifs

d'assurance vie et présentent des études de sensibilités du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et des données de calibrage.

S'il semble délicat de remettre en cause à court terme la logique de calcul conventionnelle qui s'est imposée ces dernières années, dans le cadre du nouveau dispositif prudentiel, il peut cependant être utile de réfléchir à des approches alternatives, potentiellement utilisables dans le cadre de l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*).

On peut envisager l'utilisation des déflateurs comme solution technique, imparfaite, mais permettant de donner du sens à la notion de « valeur économique ». Si cette approche ne change rien d'un point de vue théorique (si les hypothèses d'AOA et de complétude sont vérifiées, cf. chapitre 1), elle présente toutefois plusieurs intérêts pratiques importants comme la justification des fonctions de réaction implémentées dans les modèles ALM.

Le chapitre suivant s'intéresse à ce sujet et propose une approche de construction d'un GSE sous la probabilité historique respectant les exigences de la norme Solvabilité 2.

V. Valoriser les contrats d'assurance vie avec des déflateurs stochastiques

Ce chapitre propose une démarche de construction d'un générateur de scénarios économiques (GSE) sous la probabilité historique, permettant de diffuser les taux d'intérêt et les prix d'investissements risqués, adapté au processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne avec des clauses de participation aux bénéfiques et cohérent avec les référentiels Solvabilité 2 et IFRS 17. Il intègre donc la construction du noyau d'actualisation (déflateur) permettant de calculer les prix.

Il propose des méthodes de calibrage des modèles et des primes de risques basées sur des formules fermées et présente des approches de diffusion avec des discrétisations exactes adaptés à des besoins de simulations à long terme.

Le chapitre propose également une étude des sensibilités de la valeur d'un passif d'épargne avec participation aux bénéfiques aux calibrages du générateur de scénarios économiques en probabilité historique.

Enfin, ce chapitre montre que les problèmes numériques, qui ont longtemps constitué un obstacle à l'utilisation pratique de déflateurs, peuvent être levés et que l'approche par les déflateurs est opérationnelle pour les assureurs et ne se limite pas à un exercice de style académique. Il montre aussi que passer d'un calcul « risque neutre » à une approche par les déflateurs ne nécessite que des travaux relativement marginaux pour adapter les modèles en place.

V.1 Introduction

Les contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices proposent une capitalisation de l'investissement avec un taux garanti augmenté éventuellement d'un bonus au titre de la participation de l'assuré aux résultats financiers du fonds général géré par l'assureur. Ces contrats offrent la possibilité de rachats de l'épargne qui peuvent être exercés à tout moment.

Comme évoqué au chapitre I les options incluses dans les contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices peuvent être synthétisées en trois catégories :

- Options financières : l'assureur s'engage sur une rémunération minimale de l'épargne en garantissant un taux minimal de revalorisation ou un bonus garanti.
- Options comportementales : l'assureur propose des options de rachat, d'arbitrage entre le fonds garanti et des actifs non-garantis, de versements libres ou programmés, bonus de fidélité... L'activation de ces options est à l'appréciation de l'assuré.
- Options biométriques : sont les options dépendant du risque de mortalité (ou de longévité) comme la proposition par l'assureur de rentes différées.

L'assuré bénéficie donc de trois options à caractère financier (cf. BRYs et de VARENNE [1994]) :

- L'option de taux technique ou de taux de participation aux bénéfices garantis, assimilable à une option vanille européenne ;
- L'option de rachat, assimilable à une option de vente américaine ;
- L'option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés, assimilable à une *swaption*.

Sous la norme Solvabilité 2, la valorisation « économique » du passif correspond au *best-estimate* (flux futurs actualisés) et est le cas échéant complétée d'une marge de risque compensant l'immobilisation du capital de solvabilité requis des risques non-couvrables (se traduisant par un coût du capital des risques non-financiers ou des imperfections de couverture pour les risques financiers)⁶⁵. Bien que les deux normes, Solvabilité 2 et IFRS 17, présentent des divergences sensibles, les conclusions présentées dans ce papier se généralisent naturellement à la norme IFRS 17.

Les travaux de mise en place des modèles d'évaluation de provisions *best-estimate* pour des contrats avec une clause de participation aux bénéfices ont abouti à une forme de consensus de place articulant un générateur de scénarios économiques risque-neutre avec un modèle de projection de flux. Le chapitre II met en évidence les défauts de conception du schéma standard de la valeur des contrats d'épargne en France.

Le chapitre I montre par ailleurs que l'utilisation d'une mesure de probabilité risque-neutre pour valoriser les passifs d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices est largement discutable. L'approche par les déflateurs, consistant à utiliser un générateur de scénarios économiques (GSE) sous la probabilité historique, paraît dans ce cadre

⁶⁵ Les questions liées aux calculs de la marge de risque ne seront pas abordées dans ce papier. Nous ne ferons donc pas la distinction dans la suite entre les termes *best-estimate* et « valeur du passif ».

pertinente. Elle permet d'avoir une meilleure rationalisation des valorisations économiques (notamment les comportements des agents) et supprime les interactions directes entre la construction des flux et le calcul des prix.

Le défaut d'une approche par les déflateurs réside dans la complexité de sa mise en œuvre opérationnelle. Une première étape a été franchie par la démarche proposée par CHENG et PLANCHET [2019]. Cette démarche est cependant inadaptée au cadre normatif Solvabilité 2 et est difficile à utiliser en pratique. En effet, CHENG et PLANCHET [2019] :

- Supposent que le processus du taux d'intérêt sans risque est un processus CIR simple. Cela implique que les taux d'intérêt ne peuvent être négatifs. Aussi, ce choix ne permet pas de prendre en compte la courbe de taux sans risque anticipée et en particulier, celle communiquée par l'EIOPA ce qui rend le générateur de scénarios économiques inadapté au référentiel Solvabilité 2.
- Ne proposent pas de démarche pour calibrer les paramètres des modèles ;
- Proposent, pour la diffusion, de retenir une discrétisation non exacte des équations différentielles stochastiques par la méthode d'Euler et la méthode de Milstein. Ces méthodes sont assez lourdes à mettre en place et peuvent générer des erreurs de convergence assez significatives quand elles sont utilisées en assurance vie, compte tenu de l'horizon de projection à long terme et du nombre réduit de trajectoires simulées retenu par les praticiens.

L'objectif de ce chapitre est de proposer un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique, permettant de diffuser les taux d'intérêt et les prix d'investissements risqués (en actions et en immobilier)⁶⁶, adapté au processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne avec participation aux bénéfices.

Pour ce faire, nous proposons notamment :

- De supposer que le modèle de taux d'intérêt suit un processus de type CIR++. Ce modèle prend en compte les taux négatifs et permet de reproduire la courbe de taux sans risque anticipée par le marché, et en particulier, celle proposée par l'EIOPA ; la pertinence de ce modèle dans ce contexte a été analysée dans le chapitre IV.
- Une méthode de calibrage du générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique adaptée au cadre normatif Solvabilité 2 ;
- Une méthode de simulation avec discrétisations exactes permettant ainsi une optimisation de la mise en œuvre opérationnelle et des écarts de convergence.

Nous proposons donc un modèle opérationnel et adapté à la norme Solvabilité 2, basé sur un modèle de taux CIR++, qui rend donc l'approche par les déflateurs applicable en pratique.

⁶⁶ Un générateur de scénarios économiques permettant de valoriser des obligations, des actions, des investissements en immobilier et des titres monétaires couvre 98 % de l'actif des entreprises d'assurance en France en 2016 et permet de diffuser les taux d'intérêt sans risque (cf. ARMEL et PLANCHET [2019]).

Les tests de sensibilité réalisés dans les chapitres III et IV sont complétés ici en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique.

V.2 Approche par les déflateurs avec un modèle de taux de type CIR++

Nous présentons dans cette section notre approche de construction d'un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique destiné à valoriser les contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéficiaires. Après un bref rappel du cadre général de modélisation nous présentons dans la suite :

- Le modèle de taux et le prix des obligations zéro-coupon ;
- La forme du déflateur et le processus de vraisemblance ;
- Le prix de l'actif risqué permettant de prendre en compte les investissements de type actions ou en immobilier ;
- Les méthodes de calibrage et de simulation des modèles.

V.2.1 Modèle général⁶⁷

Soit $\{r(t)\}_{0 \leq t}$ le taux court instantané sans risque et soit $\{S(t)\}_{0 \leq t}$ le prix de l'actif risqué (correspondant ici aux prix des investissements en actions et en immobilier).

Sous la probabilité historique P , supposons que les équations différentielles de $\{r(t)\}_{0 \leq t}$ et de $\{S(t)\}_{0 \leq t}$ s'écrivent comme suit :

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dW_{rate}^P(t)$$

$$dS(t) = \mu_{risk}(t).S(t).dt + \sigma_{risk}(t).S(t).dW_{risk}^P(t)$$

où $W_{rate}^P(t)$ et $W_{risk}^P(t)$ sont deux mouvements browniens standards dont le coefficient de corrélation est noté $\rho = Corr(dW_{rate}^P(t); dW_{risk}^P(t))$.

Soit $\{\lambda(t)\}_{0 \leq t}$ un processus adapté tel que le processus de vraisemblance L défini par : $dL(t) = -L(t).\lambda(t)dW_{rate}^P(t)$ soit intégrable.

Alors, le processus L est une P -martingale et on a :

$$L(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)dW_{rate}^P(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda(s)^2 ds\right)$$

La mesure de probabilité Q , dont le processus de vraisemblance est L , est une mesure martingale équivalente à P et le processus $\{W_{rate}^Q(t)\}_{0 \leq t}$ est un Q -mouvement brownien standard où :

$$dW_{rate}^Q(s) = dW_{rate}^P(s) + \lambda(s)ds$$

Dans la suite, on appelle la mesure Q , la mesure de probabilité risque-neutre.

⁶⁷ L'annexe VIII.4.1 rappelle sommairement le cadre théorique de changement de probabilité et de construction des déflateurs.

Par définition, le déflateur s'écrit (cf. annexe VIII.4.1) :

$$D(t) = L(t). \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

L'équation différentielle stochastique du déflateur $\{D(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ s'écrit :

$$dD(t) = -D(t).r(t)dt - D(t)\lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Par ailleurs, il faut choisir un drift et une volatilité de l'actif risqué tels que :

- Le processus $\left\{S(t). \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)\right\}_{0 \leq t}$ soit une martingale sous Q ;
- Le processus $\{D(t)S(t)\}_{0 \leq t}$ soit une martingale sous P .

On se place ici dans le même cadre de travail que CHENG et PLANCHET [2019] et on suppose que $\mu_{risk}(t) = r(t) + \lambda(s)\sigma_{risk}(s)\rho$. On peut prouver par le lemme d'Itô que :

$$\begin{aligned} D(t)S(t) = D(0)S(0) \exp\left(\int_0^t \left(\lambda(s)\sigma_{risk}(s)\rho - \frac{1}{2}\sigma_{risk}(s)^2 - \frac{1}{2}\lambda(s)^2\right) ds\right) \cdot \exp\left(\int_0^t (\sigma_{risk}(s)\rho - \lambda(s))dW_{rate}^P(s)\right) \\ + \int_0^t \sigma_{risk}(s)\sqrt{1-\rho^2}dW_{risk}^P(s) \end{aligned}$$

Si les processus $\{\sigma_s(s)\}_{0 \leq t}$ et $\{\lambda(s)\}_{0 \leq t}$ sont constants, il est alors évident que le processus $\{D(t)S(t)\}_{0 \leq t}$ est une martingale sous P .

Dans le cas où les deux processus $\{\sigma_s(s)\}_{0 \leq t}$ et $\{\lambda(s)\}_{0 \leq t}$ sont stochastiques, une condition suffisante pour que le processus $\{D(t)S(t)\}_{0 \leq t}$ soit une martingale sous P est de supposer que :

$$\lambda(s)\sigma_{risk}(s)\rho - \frac{1}{2}\sigma_{risk}(s)^2 - \frac{1}{2}\lambda(s)^2 = 0$$

Cette hypothèse a été retenue par CHENG et PLANCHET [2019].

Il en découle que :

$$\sigma_{risk}(s) = \lambda(s)\rho \pm \lambda(s)\sqrt{\rho^2 - 1}$$

Puisque $\rho \leq 1$ cette équation n'admet de solution réelle que si $|\rho| = 1$. Dans ce cas $\sigma_{risk}(s) = \lambda(s)\rho$ et $W_{risk}^P(t) = \rho W_{rate}^P(t)$.

On en déduit que $\sigma_{risk}(s).W_{risk}^P(t) = \lambda(s).W_{rate}^P(t)$ et $\mu_{risk}(t) = r(t) + \lambda(s)^2$.

La dynamique de l'actif risqué sous P s'écrit donc :

$$dS(t) = (r(t) + \lambda(s)^2).S(t).dt + \lambda(t).S(t).dW_{rate}^P(t)$$

Sous Q , la dynamique de l'actif risqué est une dynamique de type Black-Sholes s'écrivant :

$$dS(t) = r(t).S(t).dt + \lambda(t).S(t).dW_{rate}^Q(t)$$

On peut noter que la solution de cette équation différentielle s'écrit, en appliquant le lemme d'Itô :

$$S_T = S_t \exp \left(\int_t^T r(u) du - \int_t^T \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_t^T \lambda(u) dW_{rate}^Q(u) \right)$$

Donc :

$$E^Q \left(S_t \cdot \int_0^t -r(u) du \right) = S_0 E^Q \left(\exp \left(- \int_0^t \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_0^t \lambda(u) dW_{rate}^Q(u) \right) \right)$$

Or par construction :

$$\begin{aligned} E^Q \left(\exp \left(- \int_0^t \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_0^t \lambda(u) dW_{rate}^Q(u) \right) \right) \\ = E^P \left(L(t) \cdot \exp \left(\int_0^t \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_0^t \lambda(u) dW_{rate}^P(u) \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

Donc le processus $\left\{ S(t) \cdot \exp \left(- \int_0^t r(s) ds \right) \right\}_{0 \leq t}$ est une Q -martingale.

Nous avons décrit ici le modèle général d'un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique en supposant que les taux d'intérêt courts instantanés suivent la dynamique générale :

$$dr(t) = \alpha(t, r(t)) dt + \beta(t, r(t)) dW_{rate}^P(t)$$

Nous présentons dans les sections suivantes une application de ce cadre général en supposant que les taux d'intérêt courts instantanés suivent un modèle de type CIR++.

V.2.2 Modèle de taux et prix des obligations zéro-coupons

V.2.2.1 Sous la mesure de probabilité risque neutre

Le modèle CIR++ décrit le processus du taux court instantané r à partir d'une fonction déterministe notée φ et d'un processus CIR noté x , dont le vecteur de paramètres est noté $\alpha = (k, \theta, \sigma)$, défini sous Q comme suit :

$$dx(t) = k(\theta - x(t)) dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^Q(t)$$

où : $x(0) = x_0$ et x_0, k, θ, σ sont des constantes positives et on a :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

La fonction φ permet de reproduire la courbe de taux anticipée par le marché. Soit $f^M(0, t)$ le taux forward instantané du marché observé à la date 0 pour la maturité t :

$$f^M(0, t) = - \frac{\partial \ln(P^M(0, t))}{\partial t}$$

En notant $\varphi(t) = \varphi^{CIR}(t; \alpha)$ on a :

$$\varphi^{CIR}(t; \alpha) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t; \alpha)$$

où

$$f^{CIR}(0, t; \alpha) = \frac{2k\theta(\exp\{th\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)} + x_0 \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)]^2}$$

avec $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma_x^2}$.

Aussi, l'intégrale de φ s'écrit :

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}$$

avec :

- $P^M(0, T)$ est le prix de marché de l'obligation zéro-coupon sans risque observée à l'instant 0 pour la maturité T .
- $A(t, T)$ et $B(t, T)$ sont définis par :

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp\left\{\frac{(k + h)(T - t)}{2}\right\}}{2h + (k + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma_x^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)}$$

avec $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma_x^2}$

Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller suivante :

$$2k\theta > \sigma_x^2$$

Comme précisé dans la section IV.2.1, le processus $x(t)$ conditionnellement à $x(s)$ suit la loi $\chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$:

$$x(t)|x(s) = \chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$$

où :

- $\chi^2(v, \lambda_{t,s})$ est une loi du Khi-deux non-centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est $\lambda_{t,s}$;
- $c_{t-s} = \frac{4k}{\sigma_x^2(1 - \exp(-k(t-s)))}$;
- $v = 4k\theta/\sigma_x^2$;
- $\lambda_{t,s} = c_{t-s}x_s \exp(-k(t-s))$.

La moyenne et la variance de $x(t)$ conditionnellement à F_s sont données par :

$$E^Q\{x(t)|F_s\} = x(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)})$$

$$Var\{x(t)|F_s\} = \frac{x(s)\sigma_x^2}{k}(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma_x^2}{2k}(1 - e^{-k(t-s)})^2$$

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro coupon de maturité T peut être écrit sous la forme (cf. BRIGO et MERCURIO [2007]) :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

$$\text{où } \bar{A}'(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T)$$

Le taux d'intérêt composés à l'instant t pour l'échéance T est donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\ln \left(\frac{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

Le prix $P(t, T)$ et le taux $R(t, T)$ sont des fonctions des paramètres du modèle CIR à un facteur x et de la valeur initiale x_0 . Nous pouvons donc caractériser la dynamique de $R(t, T)$ sans avoir à calculer la fonction $\varphi(t)$.

Par ailleurs, la diffusion des taux d'intérêt composés revient à diffuser le processus x . Celui-ci peut être simulé à partir de la diffusion d'une loi du Khi-deux non-centrée (cf. section VIII.3.2.2.7).

V.2.2.2 Sous la mesure de probabilité historique

Comme présenté dans la section précédente, le taux d'intérêt instantané est supposé s'écrire sous la forme $r(t) = x(t) + \varphi(t)$, où φ est une fonction déterministe et x est un processus CIR dont la dynamique sous Q est la suivante :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^Q(t); x(0) = x_0$$

et :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

Définissons la prime de risque par : $\lambda(t) = \lambda \sqrt{x(t)}/\sigma_x$ où λ est un nombre réel. Et posons : $dW_{rate}^Q(t) = dW_{rate}^P(t) + \lambda(t)dt$.

Cette prime de risque dépend directement du processus CIR. Elle dépend donc des variables modélisées et ne suit pas un processus indépendant de ces variables comme le proposent CHENG et PLANCHET [2019].

La forme retenue pour la prime de risque permet de garder les principales propriétés analytiques du modèle lors du changement de probabilité. Un cadre général adapté aux modèles affines, et permettant de garder leurs propriétés analytique sous P et sous Q , est présenté et analysé dans DUFFEE [2002].

Le processus W_{rate}^P est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité historique et le taux d'intérêt court instantané s'écrit sous P comme $r(t) = x(t) + \varphi(t)$, avec :

$$dx(t) = (k - \lambda) \left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^P(t); x(0) = x_0$$

Le processus r suit donc un processus CIR++ sous la probabilité historique. Il permet de prendre en compte des taux négatifs et de reproduire la courbe de taux anticipée. On peut évaluer les prix des obligations zéro-coupons par des formules fermées et diffuser, en

discrétisation exacte, le processus r en diffusant des lois Khi-deux non centrées comme présenté dans ARMEL et PLANCHET [2020a].

Par ailleurs, la contrainte de Feller est vérifiée sous la mesure Q si elle l'est sous la mesure P : $2(k - \lambda) \frac{k\theta}{k-\lambda} = 2k\theta > \sigma_x^2$.

Sous la mesure de probabilité historique, le prix à l'instant t d'une obligation zéro coupon de maturité T s'écrit sous la forme (cf. démonstration en annexe VIII.4.2) :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T) e^{-B(t, T)x(t)}$$

Le taux d'intérêt composés à l'instant t pour l'échéance T est donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\ln \left(\frac{P^M(0, t) A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T) P^M(0, T) A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

Le taux $R(t, T)$ est une fonction affine de $x(t)$ dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine d'une loi du Khi-deux non-centrée.

V.2.3 Déflateur et processus de vraisemblance

L'équation différentielle stochastique du déflateur sous la mesure de probabilité historique est :

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = -r(t) - \lambda(t) dW_{rate}^P(t)$$

Le déflateur stochastique s'écrit (cf. démonstration en annexe VIII.4.3) :

$$D(T) = D(t) \exp\left(\frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2} (T-t)\right) \exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x(t))\right) \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right)$$

Rappelons par ailleurs que : $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0, T) A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t) A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}$.

Le processus de vraisemblance de Q par rapport à P s'écrit :

$$L(t) = \frac{D(t)}{D(0)} \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$$

Soit :

$$L(t) = \exp\left(\frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2} t\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(t) - x(0))\right) \exp\left(-\left(\frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda(k-\lambda)}{\sigma_x^2}\right) \int_0^t x(s) ds\right)$$

V.2.4 Prix de l'actif risqué et prime de risque

V.2.4.1 Prix de l'actif risqué

Comme présenté dans la section V.2.1, le processus de l'actif risqué s'écrit sous la mesure de probabilité historique P :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) + \lambda(t)^2)dt + \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Le prix de l'actif risqué s'écrit (cf. annexe VIII.4.4 pour une démonstration de ce résultat) :

$$S(T) = S(t) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta(T-t)\right) \cdot \exp\left(\int_t^T \varphi(s)ds\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T) - x(t))\right) \cdot \exp\left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s)ds\right)$$

Rappelons par ailleurs que : $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s)ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$.

V.2.4.2 Rendement espéré de l'actif risqué

Notons s_t le rendement logarithmique de l'actif risqué à la date t sur un horizon d'un an. Par définition :

$$s_{t+1} = \ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right)$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire s_{t+1} sous la probabilité historique P s'écrit (cf. annexe VIII.4.5 pour une démonstration de ce résultat) :

$$E^P(s_{t+1}) = R^M(t, t+1) - \left(\ln\left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)}\right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t))\right) + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)$$

Avec :

- $R^M(t, t+1)$: le taux observé du marché entre la date t et $t+1$;
- $A(t, T)$ et $B(t, T)$ sont des fonctions déterministes définies dans la section V.2.2.1 ;
- x_0 est la valeur initiale du processus x_t .

L'espérance de l'excès de rendement, noté e_t , par rapport au taux observé du marché s'écrit donc :

$$E^P(e_{t+1}) = -\left(\ln\left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)}\right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t))\right) + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)$$

Cette écriture permet de faire le lien entre le facteur λ de la prime de risque et le surplus de rendement qu'offre l'actif risqué par rapport aux taux sans risque.

V.2.4.3 L'espérance de l'excès de rendement en régime permanent

À long terme, en régime permanent ($t \gg 0$), l'excès de rendement ne dépend que du facteur de risque λ et des paramètres du modèle CIR (k, θ et σ_x) et s'écrit (cf. annexe VIII.4.6) :

$$E^p(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2} (k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

Cette formule décrit explicitement le facteur λ de la prime de risque en fonction de l'excès de rendement de l'actif risqué par rapport au taux sans risque observé à long terme.

Le calibrage du modèle de taux permet de disposer des paramètres : k, θ et σ_x . L'estimation de l'excès de rendement espéré permet donc de construire un estimateur de λ .

V.2.5 Calibrage

Le calibrage du générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique nécessite de définir les paramètres suivants :

- Les paramètres du modèle de taux : k, θ et σ_x ;
- Le facteur de la prime de risque λ .

Pour ce faire, nous proposons de retenir la démarche en deux étapes suivantes :

- Calibrer des paramètres k, θ et σ_x en s'aidant des caractéristiques analytiques qu'offre le modèle CIR++ sous la probabilité risque-neutre. On peut en effet valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées (cf. chapitre IV). Ce point est discuté dans la section V.2.5.1.
- Calibrer λ sur des données historiques. Ce point est discuté dans la section V.2.5.2.

V.2.5.1 Calibrage du modèle de taux

Le calibrage d'un modèle peut être réalisé soit en utilisant une estimation basée sur des données historiques, soit par une évaluation implicite des paramètres basée sur les prix du marché observés à date.

Avec l'approche historique, les paramètres du modèle sont déterminés sur la base d'une analyse statistique de séries chronologiques des grandeurs de marché pertinentes. Avec l'approche implicite, les paramètres sont évalués dans l'objectif de reproduire les prix de marché observés des produits dérivés retenus pour le calibrage.

Bien que le modèle théorique suppose que les paramètres historiques et les paramètres implicites soient égaux, ils sont différents en pratique.

L'exemple classique est le modèle de Black-Scholes impliquant que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité

historique du sous-jacent. Or on peut observer des phénomènes de *smile* et de *skew* et un aplatissement de la volatilité implicite en fonction du *strike* pour les grandes maturités. Ce point est discuté par exemple dans TANKOV [2015].

Pour les modèles de taux, les paramètres calibrés sur des données historiques dépendent des choix de ces données (indice, taille, fréquence, etc.). Les paramètres implicites dépendent eux du prix des instruments financiers, du prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque et éventuellement des facteurs de décalage utilisés pour permettre aux modèles de prendre en compte des taux négatifs. Aussi, les surfaces de volatilité implicites ne résultent pas forcément d'une mesure de prix directe mais d'une reconstruction par le fournisseur de prix (par exemple *via* un modèle SABR pour Bloomberg).

Dans le cadre de l'évaluation des produits dérivés, on observe que les universitaires et les praticiens ont tendance à retenir une approche de calibrage implicite qui semble plus adaptée pour produire des prix cohérents avec les observations du marché. Ce point est discuté dans REBONATO [2004].

Par ailleurs, dans le référentiel Solvabilité 2, les scénarios économiques utilisés pour l'évaluation du *best-estimate* doivent être cohérents avec les prix du marché (*Market-Consistent*). Une évaluation en valeur de marché consiste à valoriser des grandeurs d'intérêt en se référant aux valeurs des actifs et des passifs réellement échangés.

Appliquer une démarche *Mark to Market* pour évaluer le passif en juste valeur implique de disposer *a priori* des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est donc mené dans un cadre *Marked-to-Model*.

Les spécifications techniques QIS [2010] encadrent ce cadre de valorisation en imposant la prise en compte de la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA et en faisant référence à un calibrage des modèles en prenant en compte les volatilités implicites⁶⁸.

Nous proposons donc ici une approche de calibrage (1) implicite pour les paramètres du modèle de taux et (2) historique pour la prime de risque. Dans un cadre de valorisation largement normatif, cette démarche conduit à séparer de manière nette la détermination du coût des options, incluses dans le déflateur et la production des flux du contrat. Elle respecte également les exigences réglementaires.

Le chapitre IV présente par ailleurs les propriétés analytiques du modèle CIR++ et proposent une démarche de calibrage de ce modèle sur les *caps* et les *swaption* cohérente avec le cadre normatif Solvabilité 2.

V.2.5.2 Calibrage de la prime de risque

La démarche que nous proposons pour estimer le facteur λ se base sur l'excès de rendement historique moyen que génère l'actif risqué par rapport au taux sans risque. L'idée est d'injecter en espérance dans le modèle de l'actif risqué un surplus de rendement égal à l'excès de rendement historique à long terme.

⁶⁸ Cf. le Q&A du QIS 5, publié par l'EIOPA, question 76 du document : <https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/CEIOPS-Q-and-A-document-20101104.pdf>

Soit $\llbracket 1, d \rrbracket$ un intervalle de données historiques d'intérêt de d points et notons $\{e_i^M\}_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ l'historique de l'excès de rendement annuel de l'actif risqué.

D'après la section V.2.4.3, l'espérance mathématique de l'excès de rendement à long terme s'écrit :

$$E^P(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Nous proposons d'estimer le facteur de risque λ par la résolution de l'équation :

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d e_i^M \approx E^P(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Cette équation est équivalente à une équation polynomiale de second ordre et peut admettre des solutions complexes. Si tel est le cas, nous proposons de retenir la solution réelle suivante :

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmin}_{\lambda} \left(\left| \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d s_i^M \right| \right)$$

V.2.6 Simulation sous la probabilité historique

La diffusion des taux d'intérêt, du prix de l'actif risqué et du déflateur repose essentiellement sur la diffusion d'un processus CIR simple. L'annexe VIII.3.2.2.7 explique comment diffuser exactement un processus CIR en diffusant des lois du Khi-deux non-centrée.

La dynamique du taux court instantané suit le modèle CIR++ comme défini dans la section V.2.2.2. La diffusion de $\{x(t)\}_{0 \leq t}$ permet de diffuser les prix des obligations zéro-coupons et les taux d'intérêt composés. Rappelons en effet que :

$$P(t, T) = \exp(-(T - t)R(t, T)) = \bar{A}'(t, T) e^{-B(t, T)x(t)}$$

Par ailleurs, nous proposons d'évaluer la quantité $\int_0^T x(s) ds$ en s'appuyant sur l'intégration de Riemann. On peut écrire en effet pour un entier N adapté :

$$\int_t^T x(s) ds \approx \frac{T - t}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x\left(t + \frac{i}{N}(T - t)\right)$$

La diffusion de $\{x(t)\}_{0 \leq t}$ et l'évaluation de $\int_t^T x(s) ds$ permettent de simuler le prix de l'actif risqué et le déflateur dont les dynamiques s'écrivent, pour rappel, comme suit :

$$S(T) = S(0) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k \theta T\right) \cdot \exp\left(\int_0^T \varphi(s) ds\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x_0)\right) \cdot \exp\left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_0^T x(s) ds\right)$$

$$D(T) = D(0) \exp\left(\frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2} T\right) \exp\left(-\int_0^T \varphi(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x_0)\right) \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_0^T x(s) ds\right)$$

Dans cette section nous avons présenté une approche de construction, de calibrage et de simulation d'un modèle de génération de scénarios économiques, en probabilité

historique, adapté au processus de valorisation des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices et cohérents avec la norme Solvabilité 2.

Nous présentons dans la section suivante (section IV.4) une application de cette approche comprenant notamment des études de sensibilités du *best-estimate* aux choix des modèles et des données.

V.3 Application : calibrage du modèle et sensibilités du *best-estimate*

Nous complétons dans cette section les tests de sensibilité réalisés dans ARMEL et PLANCHET ([2018], [2019] et [2020a]) en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique, dont le modèle de taux est le modèle CIR++, sur le *best-estimate* des contrats d'épargne. Des sensibilités aux choix des données et du facteur de décalage du modèle de Black, utilisé dans le processus de calibrage, ont été réalisées également.

Nous avons repris ici les mêmes modèles et paramètres d'évaluation des passifs présentés dans ARMEL et PLANCHET [2019]. Les taux d'intérêt sont calibrés sur les prix du marché, comme présenté dans ARMEL et PLANCHET [2020a] et la prime de risque est calibrée sur les données historiques.

V.3.1 Données

Les données retenues pour calibrer les générateurs de scénarios économiques étudiés ici sont celles présentées dans la section III.4.

Pour les modèles de taux, nous retenons la convention de calibrage présentée dans la section III.2.1.

Pour le calibrage de la prime de risque, nous avons retenu un historique des rendements des actions et des investissements en immobilier de 2011 à 2018 afin de prendre en compte une situation économique proche de celle qui se présente à la date de projection et de calibrage retenue ici (fin 2018). Nous avons ainsi exclu la crise de 2007 et pris en compte la politique d'assouplissement monétaire suite à la crise de la dette grecque en 2011.

En supposant que les actions représentent 67 % de l'actif risqué et que l'immobilier représente 33 %, l'excès de rendement moyen est de 2,7 %.

V.3.2 Résultats du calibrage des modèles

V.3.2.1 Calibrage du modèle de taux sur les prix des caps et des swaptions

Nous reprenons ici les résultats de calibrage du modèle CIR++ présentés dans la section IV.4.2.1. Pour plus de matière sur le processus de calibrage et sur l'analyse des résultats, le lecteur peut se référer à cette section.

Le [Tableau V.1](#) présente les résultats du calibrage du modèle CIR++ (noté aussi CIR1F dans la suite) sur les prix de caps ATM et le [Tableau V.2](#) présente les résultats du calibrage sur les prix de swaptions ATM.

Le méta-paramètre x_0 du modèle CIR++ représentant la valeur initiale du processus CIR doit être fixé en amont du processus de calibrage. Ce paramètre n'a aucun impact sur la reproduction de la courbe de taux d'intérêt initiale mais peut avoir un impact sur la dynamique du taux d'intérêt diffusé. Trois niveaux du méta-paramètre x_0 sont testés : 0,4 %, 1 % et 2 %.

Par la notation $CIR1F(i, j)$ nous désignons le modèle CIR++ calibré sur des caps ou des swaptions avec le $i^{\text{ème}}$ facteur de décalage de Black et le $j^{\text{ème}}$ méta-paramètre du modèle CIR++, tous les deux appartenant à (0,4 % ; 1 % ; 2 % ; 0,4 % ; 1 % ; 2 %).

Tableau V.1 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Caps

Paramètres	CIR1F(1,1)	CIR1F(1,2)	CIR1F(1,3)	CIR1F(2,1)	CIR1F(2,2)	CIR1F(2,3)	CIR1F(3,1)	CIR1F(3,2)	CIR1F(3,3)
k	1,95%	2,91%	3,89%	2,20%	3,12%	4,09%	2,62%	3,45%	4,37%
Θ	99,39%	99,22%	99,16%	98,77%	99,98%	99,24%	99,05%	99,34%	99,24%
σ	2,57%	2,10%	1,81%	3,68%	3,06%	2,68%	5,45%	4,69%	4,14%
Erreur totale au carré relative	1,05%	1,19%	1,35%	1,00%	1,15%	1,34%	0,88%	1,03%	1,21%

Tableau V.2 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Swaptions

Paramètres	CIR1F(4,1)	CIR1F(4,2)	CIR1F(4,3)	CIR1F(5,1)	CIR1F(5,2)	CIR1F(5,3)	CIR1F(6,1)	CIR1F(6,2)	CIR1F(6,3)
k	2,63%	2,99%	3,45%	3,52%	3,85%	4,31%	4,95%	5,19%	5,50%
Θ	99,95%	99,99%	100,00%	99,97%	99,99%	100,00%	99,90%	99,96%	99,98%
σ	5,76%	5,31%	4,87%	7,05%	6,65%	6,20%	9,53%	9,16%	8,70%
Erreur totale au carré relative	2,92%	3,19%	3,60%	3,45%	3,73%	4,15%	4,89%	5,16%	5,60%

L'erreur totale est calculée comme la somme des erreurs au carré (fonction objectif) divisée par la somme des prix de Black au carré.

Les paramètres calibrés respectent la contrainte de Feller.

Nous avons étudié l'impact de la valeur initiale du modèle CIR sur les caractéristiques distributionnelles du modèle CIR++ sous Q dans la section IV.4.2.2. Compte tenu du faible impact de la valeur initiale du modèle CIR, nous nous contentons dans la suite du chapitre d'étudier l'impact du facteur de décalage du modèle de Black et nous fixons la valeur initiale des modèles CIR++ à 1 %.

V.3.2.2 Estimation du facteur de la prime de risque

Le calibrage des modèles CIR++ sur les prix du marché permet de déduire le paramètre de la prime de risque à partir de l'excès de rendement historique comme expliqué dans la section V.2.5.2.

En synthèse le calibrage des modèles étudiés ici est présenté dans le [Tableau V.3](#).

Tableau V.3 : résultats du calibrage du modèle CIR++ pour $x_0 = 1\%$ et pour différents facteurs de décalage de Black

Paramètres	Cap			Swaption		
	CIR1F(1,2)	CIR1F(2,2)	CIR1F(3,2)	CIR1F(4,2)	CIR1F(5,2)	CIR1F(6,2)
k	2,91%	3,12%	3,45%	2,99%	3,85%	5,19%
Θ	99,22%	99,98%	99,34%	99,99%	99,99%	99,96%
σ	2,10%	3,06%	4,69%	5,31%	6,65%	9,16%
λ	-0,70%	-1,36%	-2,58%	-3,30%	-4,09%	-5,68%

V.3.2.3 Tests de martingalité

Nous présentons dans cette section des illustrations graphiques pour valider des tests de martingalité réalisés avec un nombre de trajectoires de 2000 et un pas de simulation pour l'intégration de Riemann présentée dans la section V.2.6 de 1/500 (N=500).

Nous avons retenu 2000 trajectoires pour la validation des tests car c'est le nombre de simulations que nous retenons pour l'évaluation du *best-estimate* dans la section V.3.3. Par ailleurs, le rapport publié par L'INSTITUT DES ACTUAIRES [2016] précise que, communément, le nombre de scénarios retenus par les praticiens est de l'ordre du millier pour valoriser les produits d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices par des méthodes de Monte-Carlo.

L'objectif ici est de vérifier que les prix déflatés des obligations zéro-coupons et de l'actif risqué sont martingales. Cela se traduit par la vérification des égalités suivantes pour des réels t et T avec $t \leq T$ et $D(0) = 1$:

$$E^P(D(t).P(t,T)) = P^M(0,T)$$

$$E^P(D(t).S(t)) = S(0)$$

Les prix des zéro-coupons de maturité T observés et construits à partir de la courbe de taux par termes EIOPA sont notés $P^M(0, T)$.

Nous présentons dans la suite les cinq tests de martingalité réalisés :

- Le test 1 consiste à poser $T = t$ et vise à vérifier que le déflateur converge vers les prix observés du marché : $E^P(D(t)) = P^M(0, t)$;
- Le test 2 consiste à poser $T = t + 5$ et vise à vérifier que les prix déflatés des zéro-coupons de maturité 5 ans sont martingales : $E^P(D(t) * P(t, t + 5)) = P^M(0, t + 5)$;
- Le test 3 consiste à poser $T = t + 10$ et vise à vérifier que les prix déflatés des zéro-coupons de maturité 10 ans sont martingales : $E^P(D(t) * P(t, t + 10)) = P^M(0, t + 10)$;
- Le test 4 consiste à poser $T = t + 20$ et vise à vérifier que les prix déflatés des zéro-coupons de maturité 20 ans sont martingales : $E^P(D(t) * P(t, t + 20)) = P^M(0, t + 20)$.
- Le test 5 consiste à vérifier la martingalité de l'actif risqué : $E^P(D(t).S(t)) = S(0)$

Nous observons dans les figures suivantes que les prix déflatés convergent bien vers les prix de marché observés initialement.

Figure V.1 : test 1 - convergence du déflateur vers les prix observés du marché : $E^P(D(t)) = P^M(0, t)$

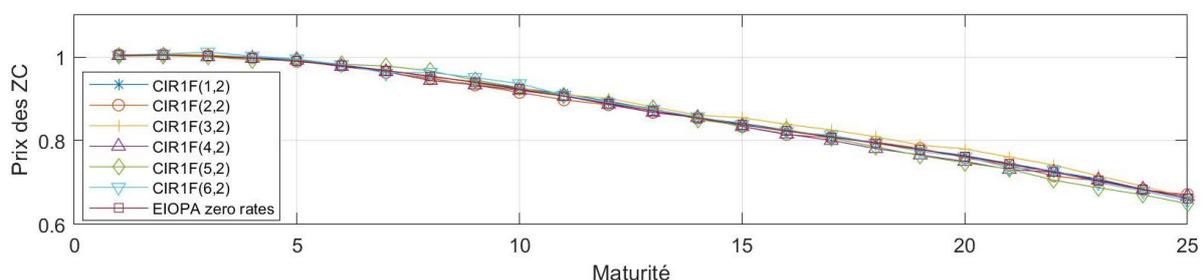


Figure V.2 : test 2 - convergence des ZC 5 ans déflatés vers les prix observés du marché : $E^P(D(t) * P(t, t + 5)) \equiv P^M(0, t + 5)$

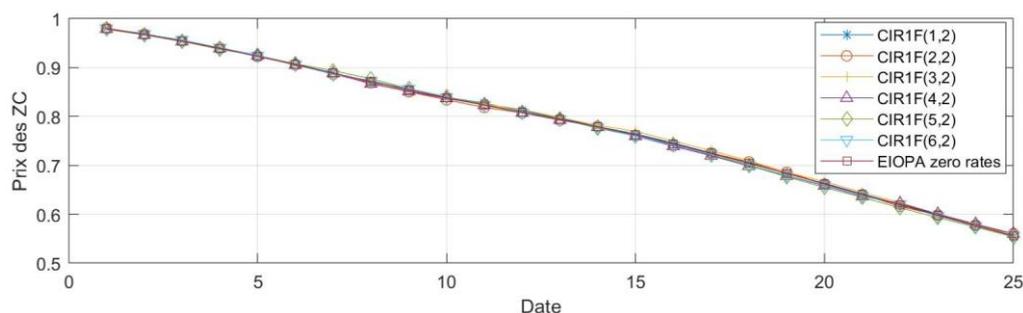


Figure V.3 : test 3 - convergence des ZC 10 ans déflatés vers les prix observés du marché : $E^P(D(t) * P(t, t + 10)) \equiv P^M(0, t + 10)$

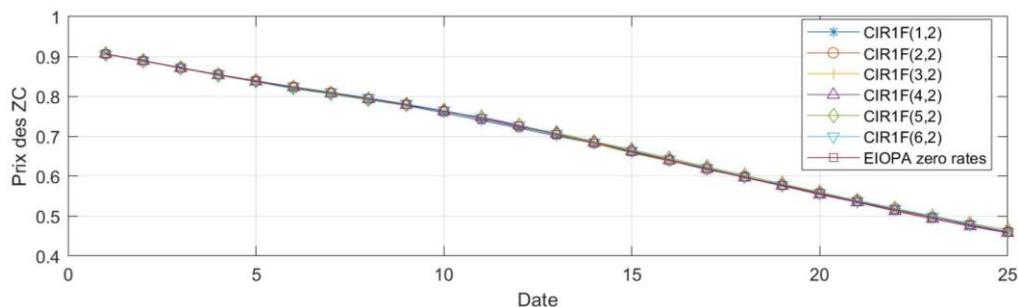


Figure V.4 : test 4 - convergence des ZC 20 ans déflatés vers les prix observés du marché : $E^P(D(t) * P(t, t + 20)) \equiv P^M(0, t + 20)$

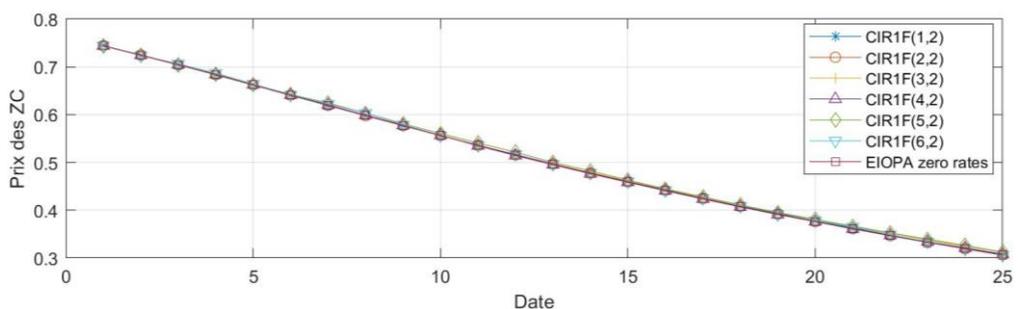
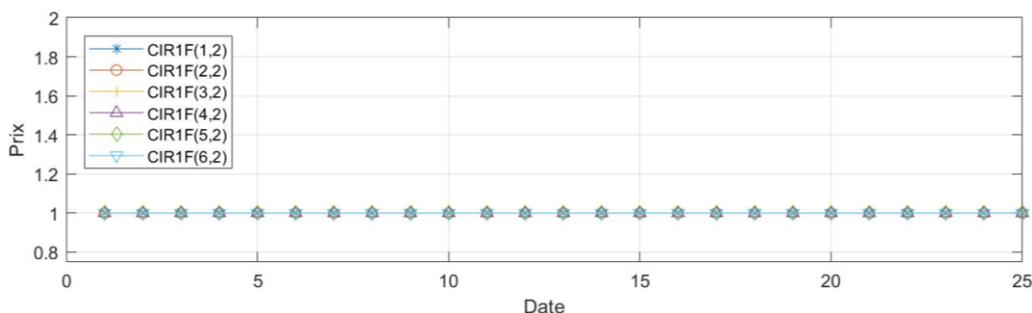


Figure V.5 : test 5 - martingalité de l'actif risqué : $E^P(D(t).S(t)) = S(0)$



V.3.3 Étude d'impact sur le best-estimate

Dans les chapitres III et IV nous avons étudié la sensibilité du *best-estimate* au choix de cinq modèles de génération de scénarios économiques sous la mesure risque neutre dont les modèles de taux sont les modèles : CIR++, CIR2++, Hull & White, G2++ et LMM décalé. Les

modèles de taux ont été calibrés sur deux types de produits financiers (*caps* et *swaptions*). Ces modèles respectent notamment les contraintes réglementaires.

Nous complétons dans cette section ces tests de sensibilité en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique dont le modèle de taux est le modèle CIR++ sur le *best-estimate* des contrats d'épargne avec participation aux bénéfices français (les contrats en euro).

Afin d'évaluer ces impacts, nous avons repris ici les mêmes modèles et paramètres d'évaluation des passifs présentés dans la section III.6. Nous avons donc utilisé le package R SimBEL⁶⁹ alimenté par des données réelles modifiées d'un assureur. La valeur de marché de l'actif est de 100M€, la provision mathématique est de 70 M€ et l'horizon de projection est de 20 ans.

Le *Tableau V.4* présente la sensibilité du *best-estimate* aux différents calibrages *market-consistent* du générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique.

Tableau V.4 : best-estimate par le modèle CIR++ market-consistent

Montants en M€	Cap			Swaption		
	CIR1F(1,2)	CIR1F(2,2)	CIR1F(3,2)	CIR1F(4,2)	CIR1F(5,2)	CIR1F(6,2)
Best-estimate net de frais	78,77	78,48	77,33	78,17	77,95	78,24
Frais	7,97	7,84	7,71	7,72	7,72	7,81
Best-estimate	86,74	86,32	85,03	85,89	85,67	86,05

Si l'on reprend les résultats de sensibilités présentés dans les chapitres III et IV, nous observons que l'impact sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market-consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 8,1 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 10,5 % des provisions mathématiques. Cet impact est cependant substantiel s'il est comparé aux fonds propres. En effet, ces derniers représentent en France en moyenne 6,1 % des encours des contrats d'épargne avec clause de participation aux bénéfices à fin 2018 (FFA [2019]).

Une analyse détaillée des écarts entre les valorisations des passifs sous les probabilités *P* et *Q* est présentée dans la suite.

V.3.4 Analyse des écarts entre les *best-estimates* en probabilités historique et « risque-neutre »

Nous présentons dans le *Tableau V.5* et *Tableau V.6* les *best-estimates* évalués par des GSE sous la probabilité historique (présenté dans la section V.2) et des GSE « risque-neutre » dont les modèles de taux sont des CIR++ (présentés dans la section IV.4.2).

Nous observons que les écarts entre les *best-estimates* varient entre 4 % et 7 % et sont expliqués essentiellement par les variations du *best-estimate* net de frais⁷⁰. Les *best-estimates* des frais (flux futurs actualisés des frais) sont, en effet, stables.

⁶⁹ Voir <http://www.ressources-actuarielles.net/simbel>

⁷⁰ La section V.3.4.2 définit le BEG et le FDB.

Tableau V.5 : best-estimates évalué sous la probabilité risque-neutre - GSE avec modèle de taux CIR++

GSE - CIR++ sous Q (M€)	Calibrage sur des Caps ATM			Calibrage sur des Swaptions ATM		
	0,4%	1,0%	2,0%	0,4%	1,0%	2,0%
Facteur de décalage Black au calibrage CIR++						
BE	91	91	91	91	92	92
BE net de frais	83	83	83	84	84	85
BEG net de frais	72	72	72	73	73	73
FDB	11	11	11	11	11	12
Frais	8	8	8	8	8	8

Tableau V.6 : best-estimates évalué sous la probabilité historique - GSE avec modèle de taux CIR++

GSE - CIR++ sous P (M€)	Calibrage sur des Caps ATM			Calibrage sur des Swaptions ATM		
	0,4%	1,0%	2,0%	0,4%	1,0%	2,0%
Facteur de décalage Black au calibrage CIR++						
BE	87	86	85	86	86	86
BE net de frais	79	78	77	78	78	78
BEG net de frais	71	70	69	70	69	70
FDB	8	8	8	9	8	9
Frais	8	8	8	8	8	8

Toute chose égale par ailleurs (taux de mortalité, rachats structurels, taux de frais, taux de chargements, etc.), l'utilisation de l'approche par les déflateurs peut avoir un impact sur la probabilité de sortie et sur le taux de revalorisation (cf. sections 1.2.2). En outre, les scénarios injectés dans le modèle ALM ne présentent pas les caractéristiques atypiques de certains scénarios « risque-neutre », qui viennent perturber les fonctions de réaction du modèle. Les écarts observés s'expliquent donc par les impacts sur les comportements des agents, modélisés dans le modèle de valorisation des passifs que sont :

- Les comportements des assurés se matérialisent par des rachats dynamiques supposés suivre, ici, une fonction affine par morceau de l'écart, entre un taux attendu et un taux de revalorisation servi ;
- Les comportements de l'assureur comprennent notamment sa politique d'investissement et sa politique de revalorisation, qui intègrent, entre autres, la fonction de réaction de l'assureur aux comportements des assurés et donc, pour notre cas, au risque de rachats dynamiques.

L'introduction d'une prime de risque dans l'approche par les déflateurs augmente la probabilité des scénarios favorables où l'assureur dispose de suffisamment de rendements comptables pour distribuer, a minima, les taux attendus par les assurés.

On s'attendra donc, dans l'approche par les déflateurs, à avoir des réactions moins importantes de la part des assurés. Les taux de rachats dynamiques seront donc moins importants et moins extrêmes, que dans le cas où l'on utilise des scénarios « risque-neutre ». L'exemple simplifié suivant illustre ce point.

V.3.4.1 Rachats dynamiques en probabilités historique et risque-neutre : illustration

Nous examinons, ici, sur un horizon d'un an, les distributions des taux de rachats dynamiques sous la probabilité historique et sous la probabilité « risque-neutre ».

Pour ce faire, supposons que la politique de revalorisation de l'assureur consiste à distribuer le rendement financier positif de son actif. Supposons également que le prix de l'actif suit un modèle de Black-Scholes et que le taux d'intérêt sur un an est constant.

Nous reprenons, par ailleurs, les mêmes caractéristiques de la fonction de rachats dynamiques utilisée dans le modèle d'évaluation du *best-estimate* retenu ici (cf. section 1.2.3 et ACPR [2013]).

Tableau V.7 : paramètres de la fonction de réaction des assurés

Alpha	Beta	Gamma	Delta	RcMIN	RcMAX
-5,0%	-1,0%	1,0%	3,0%	-5,0%	20,0%

Enfin, nous retenons les paramètres de modélisation présentés dans le *Tableau V.8*.

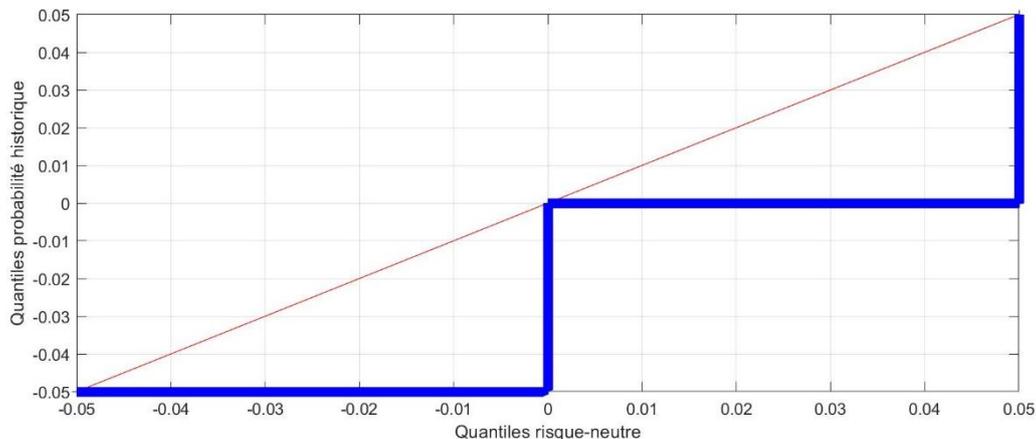
Tableau V.8 : paramètres de simulation ALM simplifié

Taux d'intérêt sans risque sur un an	Volatilité de l'actif de l'assureur	Drift de l'actif sous la probabilité historique	Taux attendu par les assurés
1,0%	10,0%	3,0%	2,0%

Le graphique ci-après (*Figure V.6*) présente le diagramme quantile à quantile (QQplot) des taux de rachats dynamiques évalués sous la probabilité historique et sous la probabilité « risque-neutre ». On observe que les taux de rachats dynamiques évalués sous la probabilité « risque neutre » sont supérieurs à ceux évalués sous la probabilité historique. Tous les points sont, en effet, en dessous de la première bissectrice du plan.

Les écarts observés entre les taux de rachats dynamiques sont substantiels et montrent que la réaction des assurés est plus marquée quand l'évaluation est réalisée sous une probabilité risque neutre.

Figure V.6 : diagramme Quantile à Quantile du rachat dynamique évalué sous la probabilité historique et sous la probabilité risque-neutre



V.3.4.2 Analyse des écarts

Afin d'analyser les écarts observés dans le *Tableau V.5* et le *Tableau V.6*, nous nous focaliserons sur le *best-estimate* net de frais et nous procédons en deux étapes :

- Isolation et analyse des comportements des assurés ;
- Identification de l'impact du comportement de l'assureur.

En reprenant les notations de la section 1.2, le flux sortant à la date t s'écrit comme une probabilité de sortie, multipliée par l'investissement initial qui est augmenté de la revalorisation cumulée :

$$F_t = \alpha_t \cdot PM_0 \cdot \exp\left(\sum_{i=0}^{t-1} c_{i+1}\right)$$

On peut décomposer ce flux en deux flux : $F_t = F_t^{gar} + F_t^{discr}$ avec :

- F_t^{gar} intègre la rémunération minimale garantie contractuellement. Si $(tmg_i)_{i \in [1, T]}$ désignent les rendements garantis (y compris la PPB initiale arrivée à échéance), alors :

$$F_t^{gar} = \alpha_t \cdot PM_0 \cdot \exp\left(\sum_{i=0}^{t-1} tmg_{i+1}\right)$$

- F_t^{discr} représente le flux de la revalorisation supplémentaire correspondant au surplus que l'assureur distribue à sa discrétion au titre de la participation aux bénéfices :

$$F_t^{discr} = F_t - F_t^{gar} = \alpha_t \cdot PM_0 \cdot \left(\exp\left(\sum_{i=0}^{t-1} c_{i+1}\right) - \exp\left(\sum_{i=0}^{t-1} tmg_{i+1}\right) \right)$$

Le *best-estimate* garanti (BEG) est l'espérance des flux F_t^{gar} actualisés et l'espérance des flux F_t^{discr} actualisés s'appelle la *Future Discretionary Benefits* (FDB).

La baisse du *best-estimate* net de frais, quand une approche par les déflateurs est retenue, s'explique par la baisse du BEG et de la FDB (cf. [Tableau V.5](#) et [Tableau V.6](#)).

On peut noter que la probabilité de sortie α_t est le seul facteur stochastique dépendant de l'économie du flux garanti F_t^{gar} car il intègre les rachats dynamiques. Retenir une approche par les déflateurs n'a d'impact sur F_t^{gar} qu'à travers le facteur α_t .

La baisse du BEG, évalué en probabilité historique, s'explique par l'étalement des rachats sur l'horizon de projection à la suite de la baisse des rachats dynamiques. Quand on retient une approche par les déflateurs, on constate en effet que l'espérance des flux F_t^{gar} est plus faible sur la quasi-totalité de l'horizon de projection et que leur durée est plus importante comme le montre le [Tableau V.9](#).

Tableau V.9 : durations des flux et étalement des rachats

Duration flux garantis en année	Calibrage sur des Caps ATM			Calibrage sur des Swaptions ATM		
	0,4%	1,0%	2,0%	0,4%	1,0%	2,0%
Facteur de décalage Black au calibrage CIR++	0,4%	1,0%	2,0%	0,4%	1,0%	2,0%
Evaluation sous Q	8,2	8,2	8,1	8,2	8,2	8,4
Evaluation sous P	9,0	9,1	9,3	9,2	9,2	9,0
Ecart	0,8	1,0	1,1	1,0	0,9	0,5

On en déduit que les comportements de rachats dynamiques sont plus marqués quand la valorisation des engagements est réalisée sous la probabilité « risque-neutre ». Ce constat est cohérent avec l'exemple simplifié de la section V.3.4.1.

Par ailleurs, l'analyse de la variation des flux FDB implique l'étude des variations des probabilités de sorties et des taux de revalorisation, notamment la partie discrétionnaire.

S'il est clair que la baisse des probabilités de sortie α_t implique naturellement la baisse des flux FDB, il est délicat de disposer d'une analyse plus fine des mouvements des taux de revalorisation discrétionnaires compte tenu du nombre important de paramètres entrant dans leur évaluation.

En plus, sous la mesure de probabilité historique, à chaque pas de projection, les produits financiers résultant de la gestion comptable de l'actif par l'assureur sont différents de ceux enregistrés sous la probabilité « risque neutre ». Les opérations d'achats-ventes de

l'assureur sont de fait différentes, l'actif résultant est différent et les provisions comptables liées à l'actif sont différentes (comme la réserve de capitalisation, la provision pour aléas financiers et la provision pour dépréciation durable).

Aussi, la baisse du nombre de scénarios, où la réaction des assurés est plus marquée sous la probabilité historique, fait que l'algorithme de revalorisation est moins contraint à distribuer un surplus de la richesse disponible pour tenter de baisser les rachats dynamiques. Enfin, la baisse des rachats permet à l'assureur d'améliorer sa marge (quand la *moneyness* lui est favorable), ayant moins de rachat, l'assiette des chargements sur encours est plus importante, ce qui se traduit par le transfert d'une partie de la richesse vers ses fonds propres.

En conclusion, lorsque les scénarios économiques sont générés en probabilité « risque-neutre », celle-ci reflétant l'aversion au risque des investisseurs, une proportion significative de trajectoires peut présenter des niveaux atypiques pour les facteurs de risque. Typiquement, depuis l'apparition de taux négatifs, les investisseurs étant adverses à une remontée (ou baisse) brutale des taux, on voit apparaître des trajectoires avec des niveaux de taux très élevés (en valeur absolue). Il est, dès lors, difficile de justifier le comportement des fonctions de réaction traduisant les actions des dirigeants et des assurés, sur des plages jamais observées. Des ajustements pragmatiques sont utilisés par les praticiens, parfois très rustiques et incorrects d'un point de vue théorique, comme l'introduction de seuils sur le niveau des taux spots ou plus subtils, comme le *freeze*, qui consiste à figer la courbe dès lors que le taux *forward* à un an dépasse un certain seuil (et ce sans détériorer les tests de martingalité). L'utilisation d'un déflateur permet de résoudre cette difficulté, le modèle ALM étant alimenté par des scénarios historiques, rendant ainsi plus simple la justification des fonctions de réaction.

Au surplus, dans un cadre de valorisation largement normatif, elle conduit à séparer de manière nette la détermination du coût des options, incluses dans le déflateur et la production des flux du contrat. L'utilisation de scénarios produits en probabilité historique rend également possible la production d'indicateurs requis par le superviseur, comme des chroniques de flux moyens.

Ces deux points confèrent à l'approche par les déflateurs un avantage majeur sur le schéma standard d'injection de scénarios « risque-neutre » dans le modèle ALM.

V.4 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une démarche de construction d'un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique, permettant de diffuser les taux d'intérêt et les prix d'investissements risqués (en actions et en immobilier). Ce GSE est adapté au processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne avec des clauses de participation aux bénéfices et est cohérent avec le cadre normatif du référentiel Solvabilité 2.

Ce papier propose des méthodes de calibrage des modèles et des primes de risques basées sur des formules fermées et présente des approches de diffusion avec des discrétisations exactes optimales et adaptées à des besoins de simulations à long terme.

Aussi, nous avons complété les tests de sensibilité réalisés dans les chapitres III et IV en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique, dont le modèle de taux est le modèle CIR++, sur le *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français.

Les écarts de *best-estimate* observés entre l'approche par les déflateurs et l'évaluation risque neutre s'expliquent par les fonctions de réaction implémentées dans le modèle traduisant les actions de l'assureur et des assurés.

La justification des comportements de ces fonctions est délicate sous la mesure de probabilité risque-neutre comme discuté dans le chapitre I et une approche par les déflateurs paraît plus adaptée.

Dans un cadre de valorisation largement normatif, l'approche par les déflateurs présentée dans ce chapitre conduit par ailleurs à séparer de manière nette la détermination du coût des options, incluses dans le déflateur et la production des flux du contrat. Elle permet également de répondre aux exigences réglementaires.

Enfin, les travaux présentés dans ce chapitre montrent que les problèmes numériques qui ont longtemps constitué un obstacle à l'utilisation pratique de déflateurs peuvent être levés et que donc l'approche par les déflateurs est opérationnelle pour les assureurs et ne se limite pas à un exercice de style académique. Ils montrent aussi que passer d'un calcul « risque neutre » à une approche par les déflateurs ne nécessite que des travaux relativement marginaux pour adapter les modèles en place.

VI. Conclusion

Les travaux de mise en place des modèles de calcul de provisions *best estimate* pour des contrats d'épargne en euros et, plus largement, des contrats avec une clause de participation aux bénéfices ont abouti à une forme de consensus de place articulant un générateur de scénarios économiques « risque-neutre » avec un modèle de projection de flux.

Cette structure de modèle présente l'avantage de permettre une prise en compte aisée de règles de gestion potentiellement complexes décrivant le pilotage du taux servi en fonction d'une part des conditions de marché et d'autre part de la situation propre de l'assureur (notamment en termes de volume de plus ou moins-values latentes).

Elle repose toutefois sur l'approximation discutable que les flux associés à ces contrats sont répliquables dans un marché sans opportunités d'arbitrage, ce qui implique des difficultés de mise en œuvre des modèles et induit une inadéquation forte entre le principe d'évaluation et la gestion des risques associée au contrat.

En effet, en présence d'opportunités d'arbitrage dans un marché incomplet, l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité « risque-neutre » ne sont plus assurées. L'utilisation de cette probabilité pour valoriser les passifs d'épargne en euros paraît donc inadaptée et l'évaluation devrait donc être réalisée sous la probabilité historique.

Il est donc utile de proposer des modèles mieux adaptés, qui permettent d'explicitier la composante non répliquable de ces contrats et de fournir ainsi un cadre plus approprié pour l'évaluation pertinente des engagements associés.

L'approche par les déflateurs paraît pertinente dans ce cadre. Elle permet d'avoir une meilleure rationalisation des valorisations économiques (notamment les comportements des agents) et supprime les interactions directes entre la construction des flux et le calcul des prix. Cette séparation entre les modèles de valorisation des options et la construction des flux du contrat permet de fournir, pour les contrats d'épargne, un cadre analogue à celui que l'on rencontre pour les contrats à annuités variables (pour la valorisation des options) et la meilleure qualité de construction des flux rend les valeurs de *best estimate* ainsi produites plus fiables.

En conclusion, les pistes de travail proposées pour construire un cadre de valorisation adapté aux contrats d'épargne en euros sont les suivantes :

- Utiliser des déflateurs pour faciliter la justification des fonctions de réaction dans les modèles ALM.
- Privilégier des modèles tenant compte de manière native de la réalité observée (taux négatifs) avec des choix guidés par une idée de parcimonie et de robustesse dans un cadre nécessairement normatif du fait de l'absence de prix directement observés.
- Assurer une forme de cohérence entre l'horizon de projection utilisé et les choix en termes de calibrage : peut-être est-il plus cohérent de ne pas calibrer sur les derniers prix observés un modèle utilisé pour valoriser des flux s'écoulant sur plus de 30 ans,

mais qu'il serait plus judicieux de le calibrer sur un ensemble de structures de prix à différentes dates passées (cf. LAÏDI et PLANCHET [2015] et EL KAROUI et al. [2017]).

- Réintégrer dans le processus de valorisation l'idée que, si le risque financier exogène est répliquable, le risque financier idiosyncratique ne l'est pas, du fait de la capacité de l'assureur à influencer sur les flux qu'il sert (BONNIN et al. [2014]).

VII. Références

- AASA K., NEEFA L.R., WILLIAMS L., RAABEB D. [2018] “[Interest rate model comparisons for participating products under Solvency II](#)”, *Scandinavian Actuarial Journal*, Volume 2018, 2018 - Issue 3.
- ACPR BANQUE DE FRANCE. [2019] « [Les chiffres du marché français de la banque et de l'assurance 2019](#) ». Document de travail.
- ACPR BANQUE DE FRANCE. [2018] « [Revalorisation 2017 des contrats d'assurance-vie et de capitalisation – engagements à dominante épargne et retraite individuelle](#) », *Analyses et Synthèses* n°94.
- ACPR BANQUE DE FRANCE. [2017] « [Assurance vie en France et environnement de taux bas](#) », Document de travail.
- ACPR BANQUE DE FRANCE. [2015] « [NOTICE Solvabilité II, Provisions techniques \(y compris mesures « branches longues »\)](#) », *Publication et textes de référence*.
- ACPR BANQUE DE FRANCE. [2013] « [Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II](#) », Document de travail.
- AHLIP R., RUTKOWSKI M. [2008] « [Forward start options under stochastic volatility and stochastic interest rates](#) », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* - March 2009.
- ALBRECHER H. [2016] « [Asymmetric Information and Insurance](#) », *Cahiers Louis Bachelier* n°20 (pp. 12-15).
- ARMEL K., PLANCHET F., [2021a] « [The economic evaluation of life insurance liabilities: pitfalls, best practices and recommendations for relevant implementation](#) » Institut Louis Bachelier, *Opinions & Débats* n20, janvier 2021.
- ARMEL K., PLANCHET F., [2021b] « [Les modèles de taux de type CIR pour une utilisation pertinente en assurance](#) », LSAF, Document de travail.
- ARMEL K., PLANCHET F. [2020a] « [Use of CIR-Type Interest Rate Models to Assess the Economic Value of Participating Savings Contracts](#) », LSAF, Document de travail.
- ARMEL ET PLANCHET [2020b] « [Assessing the economic value of life insurance contracts with stochastic deflators](#) », LSAF, Document de travail.
- ARMEL K., PLANCHET F. [2019a] « [How to Define the Quality of an Economic Scenario Generator to Assess the Best Estimate of a French Savings Contract in €?](#) », *Bankers Markets Investors*, n°157, June 2019.
- ARMEL K., PLANCHET F. [2019b] « [Valeur économique d'un contrat d'assurance-vie : quels scénarios économiques ?](#) », *Risques*, n°117.
- ARMEL K., PLANCHET F. [2018] « [Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ?](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 85 (1-2).

- ARMEL K., PLANCHET F., KAMEGA A. [2011] « [Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ?](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°22.
- BALLOTTA L. [2004] « [Alternative framework for the fair valuation of participating life insurance contracts](#) », *Cass Business School, Actuarial Research Paper* n°157.
- BALDVINSDÓTTIR E. K., PALMBORG L. [2011] « [On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator](#) », *Handelsbanken Liv*.
- BATIFOULIER P. (dir) [2001] « [Théorie des conventions](#) », *ECONOMICA*, ouvrage collectif.
- BAUER D., KLING A.; RUSS J. [2007] « [A Universal Pricing Framework for Guaranteed Minimum Benefits in Variable Annuities](#) », *Proceedings of the AFIR Colloquium*.
- BEINKER M., STAPPER G. [2012] « [New volatility conventions in negative interest environment](#) », *White Paper, d-fine Ltd*.
- BERNALES A., GUIDOLIN M. [2014] « [Can we forecast the implied volatility surface dynamics of equity options? Predictability and economic value tests](#) ». *JOURNAL OF BANKING & FINANCE* 46 (2014) 326–342.
- BLACK F., SCHOLES M. [1973] « [The Pricing of Options and Corporate Liabilities](#) », *Journal of Political Economy*, 81 (3), pp. 637-654.
- BLANCHARD O.J., ET WATSON M.W. [1984] « [Bulles, anticipations rationnelles et marchés financiers](#) », *Annales de l'INSEE*, n° 54, avril-juin, pp. 79-99.
- BONNIN F., COMBES F., PLANCHET F., TAMMAR M. [2015] « [Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l'ORSA](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 14, n°28.
- BONNIN F., JUILLARD M., PLANCHET F. [2014] « [Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA](#) », *European Actuarial Journal*, Vol. 4, Issue 1, Page 181-196. <http://dx.doi.org/10.1007/s13385-014-0086-z>.
- BOREL-MATHURIN F., DARPEIX P.E., GUIBERT Q., LOISEL S. [2018] « [Main determinants of profit sharing policy in the French life insurance industry](#) », *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice*.
- BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S. [1976] « [The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee](#) », *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 195-213.
- BRIGO D., MERCURIO F. [2007] « [Interest Rate Models - Theory and Practice](#) ». 2nd Edition. *Springer*.
- BRIYS E., de VARENNE F. [1994] « [Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications](#) », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 19, 53-72.
- CAJA A., PLANCHET F. [2010] « [La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol.78 (3-4).
- CASTELLANI, G., DE FELICE, M., MORICONI, F., AND PACATI, C. [2005] « [Embedded value in life insurance](#) ». Working paper.
- CHENG P.K., PLANCHET F. [2019] « [Stochastic Deflator for an Economic Scenario Generator with Five Factors](#) », *Bankers Markets Investors*, n°157, June 2019.

- CHRISTENSEN J.H.E.; DIEBOLD F.X.; RUDEBUSCH G.D. [2007] “[The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models](#)”, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- CHRISTOFFERSEN P., JACOBS K. [2002] « [The importance of the loss function in option valuation](#) », *Journal of Financial Economics*, Volume 72, Issue 2, May 2004, Pages 291-318.
- CISSE A. [2019] « [Le secteur européen de l’assurance, confronté aux taux d’intérêts négatifs et à Solvency 2, doit interpeller le marché africain](#) », *Financial Afrik*.
- COLEMAN T. F.; KIM Y.; LI Y.; Patron M. [2005] “[Robustly Hedging Variable Annuities with Guarantees under Jump and Volatility Risks](#)”, *Journal of Risk and Insurance*, Vol 74, pp 347-376.
- COMBES F., PLANCHET F. TAMMAR M. [2016] « [Pilotage de la participation aux bénéficiaires et calcul de l’option de revalorisation](#) », *Bulletin Français d’Actuariat*, vol. 16, n°31.
- CONT R., DA FONSECA J. [2001] « [Dynamics of implied volatility Surfaces](#) », *Quantitative finance* volume 2 (2002) 45–60.
- COX, J. C., INGERSOLL J. E., ROSS S. A. [1985] « [A theory of the term structure of interest rates](#) », *Econometrica* 53(2), 385–407.
- DA FONSECA J., GRASSELLI M., TEBALDI C. [2007] « [Option pricing when correlations are stochastic: an analytical framework](#) », *Review of Derivatives Research*, Volume 10, No 2, Mai (2007).
- DASTARAC H., SAUVEPLANE P. [2010] « [Les déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ?](#) », *Mémoire d'actuaire, ENSAE*.
- DASSIOS A., JANG J., ZHAO H. [2019] « [A generalised CIR process with externally-exciting and self-exciting jumps and its applications in insurance and finance](#) ». *Risks*, 7(4), 103.
- DEVROYE L. [1986] « [Non- Uni form Random Variate Generation](#) », Springer-Verlag New York Inc.
- DJEHICHE B., HÖRFELT P. [2005] « [Standard approaches to asset & liability risk](#) », Supported by the Swedish Insurance Federation. *Scandinavian Actuarial Journal*. 2005(5): 377–400.
- DRIESSEN J., MAENHOUT P., VILKOV G. [2005] « [Option-Implied Correlations and the Price of Correlation Risk](#) », *Advanced Risk & Portfolio Management Paper*.
- DUFFEE G.R. [2002] « [Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models](#) » *The Journal of Finance* 57(1):405-443.
- DUFFIE D. [2001] « [Dynamic Asset Pricing Theory](#) », Third version, Princeton University Press.
- EL KAROUI N. [2004] « [Couverture des risques dans les marchés financiers](#) », École Polytechnique, CMAP, 91128.
- EL KAROUI N., LOISEL S., PRIGENT JL., VEDANI J. [2017] « [Market inconsistencies of the market-consistent European life insurance economic valuations: pitfalls and practical solutions](#) ». *European Actuarial Journal*, Springer, 2017, 7 (1).
- ERRAIS E., MAURI G., MERCURIO F. [2004] « [Capturing the Skew in Interest Rate Derivatives: A Shifted Lognormal LIBOR Model with Uncertain Parameters](#) », Working paper.
- EYMARD-DUVERNAY F. (dir) [2006] « [L'économie des conventions, méthodes et résultats](#) », La Découverte (27 avril 2006), ISBN-10 : 2707144878.

- EYRAUD-LOISEL A. [2019] « [How Does Asymmetric Information Create Market Incompleteness?](#) », *Methodol Comput Appl Probab* 21, 531–538 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11009-018-9672-x>.
- FELIX J.P., PLANCHET F. [2015] « [Calcul des engagements en assurance-vie : quel calibrage 'cohérent avec des valeurs de marché' ?](#) », *L'Actuariel*, n°16 du 01/03/2015.
- FFA (Fédération Française de l'Assurance) [2019] « [Rapport 2018 - Cahier statistique](#) », Rapport annuel publié sur le site officiel de la FFA.
- FFA (Fédération Française de l'Assurance) [2017a] « [Rapport annuel 2016](#) », Rapport annuel publié sur le site officiel de la FFA.
- FFA (Fédération Française de l'Assurance) [2017b] « [Bilan de l'année 2016 et perspectives de l'année 2017](#) », conférence de presse.
- FRANTZ C.; CHENUT X.; WALHIN J.F. [2003] « [Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee](#) », *Proceedings of the AFIR Colloquium*.
- GEMAN H., EL KAROUI N., ROCHET J.C. [1995] « [Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing options](#) », *Journal of Applied Probability*, pp. 433-458.
- GERHOLD S. « [Moment explosion in the LIBOR market model](#) ». *Statistics and Probability Letters*, Elsevier, 2011, 81 (5), pp.560. 10.1016/j.spl.2011.01.009. hal-00725103.
- GERSTNER, T., GRIEBEL, M., HOLTZ, M., GOSCHNICK, R., HAEP, M. [2007] “[Numerical simulation for asset-liability management in life insurance](#)”. Springer.
- GONÇALVES S., GUIDOLIN M. [2006] « [Predictable Dynamics in the S&P 500 Index Options Implied Volatility Surface](#) », *EFMA 2003 Helsinki Meetings*.
- GOURIEROUX C. MONTFORT A. [2015] “[Economic Scenario Generators and Incomplete Markets](#)”, CREST, Document de travail.
- GROSSMAN S., STIGLITZ J. [1980] « [On the impossibility of informationally efficient markets](#) », *The American Economic Review*, pp. 393 – 408.
- HAASTRECHT A. [2010] « [Pricing Long-term Options with Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rates](#) », Phd Thesis, Published by Woermann Print Service, Zutphen, The Netherlands.
- HAINAUT D. [2009] « [Profit sharing: a stochastic control approach](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°18.
- HARRISSON J.M., KREPS D. [1979] « [Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets](#) », *Journal of Economic Theory*, 20.
- HARRISSON J.M., KREPS D.M. [1978] « [Speculative investor behavior in a stock market with heterogeneous expectations](#) », *The Quarterly Journal of Economics*
- HARRISSON J.M., PLISKA S. [1981] « [Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading](#) », *Stochastic Processes and their Applications*, 11.
- HILL J. [2009] « [A Note on Implementing LIBOR Market Model](#) », *The Numerical Algorithms Group Ltd, Wilkinson House*, working paper.

- HOMBERT J., LYONNET V. [2017] « [Intergenerational Risk Sharing in Life Insurance: Evidence from France](#) » Débats économiques et financiers 30, Banque de France.
- HULL J. [2007] « [Options, futures et autres actifs dérivés](#) », PEARSON EDUCATION, Edition 6.
- HULL J., WHITE A. [1994] « [Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models](#) ». *The Journal of Derivatives* 2, 7-16.
- HULL J., WHITE A. [1990] « [Pricing interest rate derivative securities](#) », *Review of Financial Studies* 3, 573–92.
- In LAURENT J.P., NORBERG R., PLANCHET F. (editors) [2016] « [Modelling in life insurance – a management perspective](#) », Chapter 4: Economic Scenario Generators (with T. MOUDIKI) and Chapter 5: From Internal to ORSA Models (with C. ROBERT) EAA Series, Springer.
- INSTITUT DES ACTUAIRES [2016] « [Exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français](#) », Groupe de travail « Best-estimate Liabilities Vie ».
- JAMSHIDIAN F. [1989] « [An Exact Bond Option Pricing Formula](#) », *The Journal of Finance* 44, 205-209.
- JOHNSON N.L., KOTZ S., BALAKRISHNAN N. [1970] « [Continuous Univariate Distributions - Volume 2](#) », John Wiley & Sons, Inc.
- JUILLARD M., PLANCHET F., THÉRON P.E. [2011] « [Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques - seconde édition revue et augmentée](#) », PARIS : ECONOMICA (PREMIERE EDITION : 2005).
- KAHNEMAN D., TVERSKY A. [1979] « [Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk](#) », *Econometrica*, Vol. 47, No. 2, pp. 263-292.
- KAHNEMAN D., TVERSKY A. [1974] « [Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases](#) », *Science*, New Series, Vol. 185, No. 4157. (Sep. 27, 1974), pp. 1124-1131.
- KJAER M. [2004] « [On the Pricing of Cliquet Options with Global Floor and Cap](#) », Thesis for the Degree of Licentiate of Engineering, Department of Mathematics Chalmers University of Technology and Goteborg University.
- KOIVU M., PENNANEN T., RANNE A. [2005] « [Modeling assets and liabilities of a Finnish pension insurance company: a VEqC approach](#) », *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(1): 46–76.
- LAÏDI Y., PLANCHET F. [2015] « [Calibrating LMN Model to Compute Best Estimates in Life Insurance](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 15, n°29.
- LAURENT J.P., NORBERG R., PLANCHET F. (editors) [2016] « [Modelling in life insurance – a management perspective](#) », EAA Series, Springer.
- LEROY G., PLANCHET F. [2013] « [Risque de taux, spread et garanties de long terme](#) », *la Tribune de l'Assurance* (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°178 du 01/03/2013.
- LES ECHOS [2020] « [L'assurance-vie en euros, alternative au Livret A ?](#) », publié le 16 janvier 2020 et consulté le 23 août 2020.
- LES ECHOS [2016] « [En Belgique, AXA veut racheter ses vieux contrats à taux garanti](#) », publié le 26 août 2016 et consulté le 23 août 2020.

- LOISEL, S. AND MILHAUD, X. [2011] « [From deterministic to stochastic surrender risk models: Impact of correlation crises on economic capital](#) », *European Journal of Operational Research*, 214(2), 348–357.
- MALHAM S.J.A., WIESE A. [2008] « [Chi-square simulation of the CIR process and the Heston model](#) », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 16(3).
- MERLUS S., PEQUEUX O. [2000] « [Les garanties plancher des contrats d'assurance vie en unités de compte : tarification et couverture](#) », mémoire d'actuaire ENSAE.
- MERTON R.C. [1976] « [Option pricing when underlying stock returns are discontinuous](#) », *Journal of Financial Economics* 3, 125-44.
- MILHAUD, X., GONON, M.-P., AND LOISEL, S. [2010] « [Les comportements de rachat en Assurance Vie en régime de croisière et en période de crise](#) ». *Risques*, 83(83), 76–81.
- MUNIESA, F. [2000] « [Un robot walrasien : Cotation électronique et justesse de la découverte des prix](#) », *Politix* 13 (52) : 121–54.
- NTEUKAM T. O., PLANCHET F., THÉRON P.E. [2011] « [Optimal strategies of hedging portfolio of unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee](#) », *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 48, Issue 2, pp. 161-175.
- ORLEAN A. [2004] « [Efficience, finance comportementale et convention : une synthèse théorique](#) », in Boyer Robert, Dehove Mario et Dominique Plihon (éds.), « Les crises financières », Rapport du Conseil d'Analyse Économique, octobre 2004, Complément A, 241-270.
- ORLEAN A. [2004] « [Les marchés financiers sont-ils rationnels ?](#) » in Philippe Askenazy et Daniel Cohen (éds.), « Vingt-sept questions d'économie contemporaine », Albin Michel, 2008, 63-85.
- PATEL J.K., READ C.B. [1982] « [Handbook of the normal distribution](#) », MARCEL DEKKER, INC.
- PLANCHET F., BONNIN F. [2013] « [Engagement best estimate d'un contrat d'épargne en Euro](#) », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°185 du 01/11/2013.
- PLANCHET F. [2015] « [Valorisation des assurances-vie : comment mesurer la volatilité ?](#) », *Risques*, n°104.
- PLANCHET F., KAMEGA A., THEROND P.E. [2009] « [Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation](#) », Paris : *Economica*.
- PRUDENT C. [1996] « [La clause de rachat anticipé évaluée comme une option](#) », Séminaire « utilisation des Méthode de la Théorie Financière Moderne en Assurance », FFSA, Paris 10-11 juin 1996.
- QIS5 [2010] « [Technical Specifications, Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5](#) », *European Commission*.
- RAKAH N. [2015] « [Modélisation des rachats dans les contrats d'épargne](#) », CEA, Mémoire d'actuariat.
- REBONATO R. [2004] « [Volatility and correlation the perfect hedger and the fox](#) », 2nd ed. *Chichester: John Wiley and Sons Ltd.*

- REBONATO R. [1999] « [On the Pricing Implications of the Joint Lognormal Assumption for the Swaption and Cap Market](#) », *The Journal of Computational Finance* 2, 57-76.
- SAKHO S. [2018] « [Analyse et modélisation des comportements de rachat d'un portefeuille d'épargne](#) », ISFA, Mémoire d'actuariat.
- SAVAGE L. [1954] « [The foundations of statistics](#) », Dover Publications, New York.
- SEARLE J. [1995] « [Collective intentions and actions](#) », dans « Intentions in Communication », COHEN P., MORGAN J. ET POLLACK M.E., (eds.), Cambridge University Press.
- SEJOURNE B. [2006] « [Pourquoi le comportement des épargnants français est-il si peu conforme à la théorie traditionnelle du portefeuille ?](#) » Les cahiers scientifiques 1, Autorité des Marchés Financiers.
- SHAO A. [2012] « [A fast and exact simulation for CIR process](#) », A dissertation presented to the Graduate School of the University of Florida in partial fulfilment of the requirements for the degree of doctor of philosophy.
- SHIU E., YAO Y. [1999] « [Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models](#) » Proceedings of AFIR Colloquim, Tokyo. 407-418 (1999).
- SIMON H. [1947] « [Administrative Behavior \(A study of the decision making processes in administrative organization\)](#) », MACMILLAN.
- SIMON H. [1976] « [From Substantive to Procedural Rationality](#) », dans LATSIS D. (sous la direction de), « Methode Appraisal in Economics », Cambridge University Press, pp. 129-148.
- SOA (SOCIETY OF ACTUARIES), [2016] « [Economic Scenario Generators - A Practical Guide](#) ».
- SOLVABILITÉ 2, RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ [2014] « [Commission Delegated Regulation \(EU\) 2015/35](#) », *Official Journal of the European Union*.
- SURU A. [2011] « [Le rachat : modélisations et préconisations](#) », Dauphine, Mémoire d'actuariat.
- TANKOV P. [2015] « [Surface de volatilité](#) », Université Paris-Diderot (Paris VII).
- TANKOV P. [2011] « [Calibration de Modèles et Couverture de Produits Dérivés](#) », Université Paris-Diderot (Paris VII).
- TIROLE J. [1982] « [On the Possibility of Speculation under Rational Expectations](#) », *Econometrica*, Vol. 50, No. 5 (Sep., 1982), pp. 1163-1181.
- TIROLE J. [1985] « [Asset Bubbles and Overlapping Generations](#) », *Econometrica*, Vol. 53, No. 6 (Nov., 1985), pp. 1499-1528.
- TOUZI N., TANKOV P. [2012] « [No-arbitrage theory for derivatives pricing](#) », Ecole Polytechnique Paris. Département de Mathématiques Appliquées.
- VASICEK O. [1977] « [An Equilibrium Characterization of the Term Structure](#) », *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.
- WALKER M.B. [2005] « [Risk-Neutral Correlations in the Pricing and Hedging of Basket Credit Derivatives](#) », *Journal of Credit Risk*.
- WALTER C. [1996] « [Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers](#) », *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, vol. 51, n° 4, p. 873-905.

- WALTER C. [2005] « [La martingalisation des marchés financiers : l'efficacité informationnelle comme convention stochastique](#) », Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
- WALTER C. [2005] « [Les quatre causes de l'efficacité informationnelle des marchés](#) », De Boeck Supérieur, « Finance & Bien Commun », 2005/3 No 23, pages 107 à 115.
- WALTER C. [2013] « [Le modèle de marche au hasard en finance](#) ». Paris : ECONOMICA.
- WALTER C., BRIAN E. [2008] « [Critique de la valeur fondamentale](#) », Springer-Verlag France.
- WILMOTT, P. [2002] « [Cliquet options and volatility models](#) », *Wilmott Magazine*, December, 78-83.
- WINDCLIFF H. A., FORSYTH P. A., VETZAL K. R. [2006] « [Numerical Methods and Volatility Models for Valuing Cliquet Options](#) », *Applied Mathematical Finance*, Volume 13, 2006 - Issue 4.
- WÜTRICH M.V. [2016] « [Market-Consistent Actuarial Valuation](#) », Springer.

VIII. Annexes

VIII.1 Le contexte des contrats d'épargne

Sur le marché français de l'assurance vie, on rencontre majoritairement deux types de contrats d'épargne : les contrats en euros et les contrats en unités de compte (y compris l'euro-croissance).

À fin 2018, les encours des contrats d'épargne représentent 1 692 Md€⁷¹, soit 70 % des placements du marché de l'assurance français (FFA [2019]). Les contrats d'épargne en euros représentent 1 297 Md€⁷², soit 54 % des placements et les contrats en unités de compte représentent 341 Md€, soit 14 % des placements.

Les contrats en unités de compte (UC) sont des contrats, où l'épargne est investie directement sur des supports financiers et n'offrent pas aux assurés de garanties sur le capital investi. Ils peuvent, néanmoins, être couverts par des garanties planchers permettant de limiter les pertes.

Les fonds euro-croissance comportent une garantie en capital (totale ou partielle) qui n'est acquise par l'assuré qu'au terme d'une durée de détention minimale. Cette durée minimale est fixée par le Code des Assurances à 8 ans à compter du premier versement. Leurs encours restent non significatifs comparés aux contrats en euros et en UC.

Les contrats d'épargne en euros proposent une capitalisation de l'investissement et la possibilité de racheter le contrat à tout moment (C. ass., Article R-132-5-3). Les primes perçues par les assureurs sont investies à leur discrétion. Pour l'assuré, la perte en capital ne peut survenir qu'en cas de faillite de l'assureur. Dans ce cas, le fonds de garantie des assurances de personnes (FGAP) peut être saisi. La perte est couverte à hauteur de 70 000 euros.

Les produits des contrats d'épargne sont soumis aux prélèvements sociaux lors de leur inscription en compte ou lors du rachat du contrat. Le taux global appliqué aux revenus versés en 2019 est de 17,2 %. Quand l'assuré opère un rachat partiel ou un rachat total de son épargne, les gains deviennent imposables à l'impôt sur le revenu. Le *Tableau VIII.1* présente une synthèse de la fiscalité des contrats d'épargne en cas de rachat⁷³.

⁷¹ Dont 54 Md€ de provisions pour participation aux bénéfices.

⁷² Hors provisions pour participation aux bénéfices.

⁷³ Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au site :

<https://www.impots.gouv.fr/portail/particulier/lassurance-vie-et-le-pea-o>

Tableau VIII.1 : fiscalité des contrats d'épargne

Ancienneté du contrat	Fiscalité pour versements / souscriptions avant le 27 septembre 2017	Fiscalité pour versements / souscriptions après le 27 septembre 2017
Entre 0 et 4 ans	Au choix :	12,8 % de prélèvements forfaitaires + Prélèvements sociaux
	<ul style="list-style-type: none"> ● Prélèvement forfaitaire libératoire de 35 % + prélèvements sociaux ● Impôt sur le revenu : intégration dans le revenu imposable 	
Entre 4 ans et 8 ans	Au choix :	12,8 % de prélèvements forfaitaires + Prélèvements sociaux
	<ul style="list-style-type: none"> ● Prélèvement forfaitaire libératoire de 15 % + prélèvements sociaux ● Impôt sur le revenu : intégration dans le revenu imposable 	
Au-delà de 8 ans	Au choix :	<ul style="list-style-type: none"> ● Pour les versements inférieurs ou égaux à 150 000 € : 7,5 % de prélèvements forfaitaires + prélèvements sociaux (CSG et CRDS)
	<ul style="list-style-type: none"> ● Prélèvement forfaitaire libératoire de 15 % + prélèvements sociaux ● Impôt sur le revenu : intégration dans le revenu imposable 	<ul style="list-style-type: none"> ● Pour les versements supérieurs à 12,8 % sur les plus-values + prélèvements sociaux ● L'abattement annuel de 4 600 € pour un célibataire ou de 9 200 € pour un couple est applicable à tous les contrats. Il est appliqué en priorité sur la part taxée à 7,5 %

Par ailleurs, le code des assurances prévoit un délai de deux mois au maximum pour la mise à disposition des fonds à la suite d'une demande de rachat. En cas de décès, l'assureur doit verser le capital dans un délai d'un mois. Ces délais peuvent être réduits contractuellement dans les conditions générales.

Dans cette annexe, nous nous intéressons aux contrats d'épargne classiques en euros.

VIII.1.1 Le cadre réglementaire de la revalorisation

Les intérêts techniques constituent une revalorisation contractuelle minimale des encours (C. ass., Article A-132-1). Cette revalorisation est complétée par une rémunération supplémentaire : la participation aux bénéfices (PB). Celle-ci représente le reliquat du compte de résultat technico-financier après la prise en compte des intérêts techniques. Elle ne donne aucun droit individuel à l'assuré et sa distribution est à la discrétion de l'assureur.

La revalorisation des contrats d'épargne en euros se compose

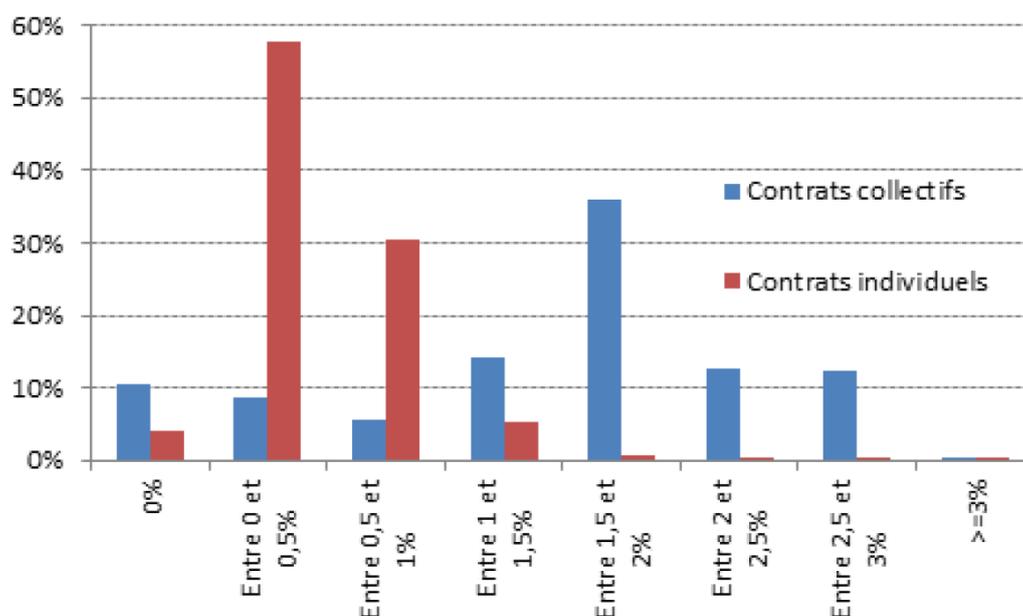
- D'une revalorisation minimale : taux technique ou taux minimum garanti s'il est applicable.
- D'une revalorisation discrétionnaire par la participation aux bénéfices.

VIII.1.1.1 Taux techniques

L'article A132-1 du Code des Assurances (en vigueur, dans sa substance actuelle, depuis 1995) fixe le taux maximal qu'un assureur peut garantir sur la durée du contrat d'épargne en euros à la date de souscription. Il dispose que ce taux technique maximal est fixé, en fonction de la durée de l'engagement, à 60% ou 75% des taux moyens des emprunts de l'État français (TME) calculés sur une base semestrielle.

En moyenne, les taux techniques s'élevaient à 0,51% sur l'ensemble des contrats d'assurance vie en 2015. Cette moyenne recouvre, cependant, des situations très variables. En effet, la moyenne des taux techniques sur les contrats individuels, qui représentent la majeure partie des provisions techniques des supports en euros (92%), est plus faible (0,42%) que celle des contrats collectifs (retraite type Madelin, articles 39, 82, 83 du code général des impôts, plan épargne retraite populaire, retraite professionnelle supplémentaire) qui est de 1,5 %⁷⁴.

Figure VIII.1 : Répartition des entités par taux technique moyen en 2015 (par poids des Provisions mathématiques)⁷⁵



Dans le contexte de taux négatifs observés actuellement sur le marché, le coût de l'option du taux technique est un sujet d'actualité. La question de garantir un taux technique (net de chargements) négatif pour les nouvelles souscriptions se pose naturellement.

Aucune interprétation de l'article A132-1 ne peut conduire à exclure la garantie d'un taux d'intérêt technique négatif pour les nouvelles souscriptions. Cependant, une telle garantie ne serait pas compatible avec l'objectif de prudence implicite à cet article, à savoir garantir au maximum un taux inférieur (60 % ou 75 %) au TME calculé sur une base semestrielle car, en situation de taux négatifs, ce maximum lui serait supérieur.

Aussi, l'article A132-1-1 CdA (en vigueur dans sa substance actuelle depuis 1998) stipule que le taux d'intérêt technique maximal applicable aux tarifs est fixé sur une échelle de taux

⁷⁴ Cf. ACPR [2017].

⁷⁵ Source ACPR [2017].

d'origine 0 et pas de 0,25 point, sans descendre en-dessous de 0. Il n'interdit, cependant, pas l'utilisation d'un taux inférieur au maximum autorisé.

VIII.1.1.2 Taux minimum garantis

Au-delà du taux technique, la capacité des assureurs à prendre des engagements supplémentaires sous forme d'un taux minimum garanti (TMG) est limitée à 2 ans et s'avère en pratique marginale chez les principaux assureurs (ACPR [2017]).

L'article A132-2 du Code des Assurances prévoit la possibilité pour un assureur de garantir annuellement des taux supérieurs aux intérêts techniques. Les TMG se composent donc du taux d'intérêt technique et d'une partie, plafonnée par la réglementation, de la participation aux bénéfices (PB).

L'article A132-3 du Code des Assurances fixe les modalités de calcul de ces TMG. Il dispose que :

- Il est possible de garantir annuellement une PB limitée à un plafond égal à la différence, lorsqu'elle est positive, entre 80% du rendement moyen des actifs sur deux ans et la somme des intérêts techniques attribués aux contrats.
- Le TMG ne peut excéder le minimum entre (1) 150% du taux technique maximal à 75% du TME calculé sur une base semestrielle, et (2) le maximum entre 120% du taux technique maximal et 110% de la moyenne des taux servis.

Si les TME calculés sur une base semestrielle sont négatifs, l'article A. 132-3 rend de fait impossible de garantir des TMG annuels positifs.

VIII.1.1.3 Participation aux bénéfices

Le montant minimal de participation aux bénéfices est égal au montant minimal de participation aux résultats, diminué du montant des intérêts techniques crédités aux provisions mathématiques. Le montant minimal de participation aux résultats est le solde créditeur du compte de participation aux résultats qui comprend⁷⁶ :

- 90 % du résultat technique de souscription s'il est créditeur et 100% s'il est débiteur.
- 85 % de la part des produits financiers affectables aux provisions techniques.
- Le solde débiteur du compte de participation aux résultats de l'exercice précédent.

Le Code des Assurances (CdA) n'autorise donc pas la possibilité de constater une participation aux bénéfices (PB) négative quel que soit l'état de l'économie.

Par ailleurs la PB ne donne aucun droit individuel à l'assuré. La PB est distribuée immédiatement ou affectée à la provision pour participation aux bénéfices (PPB), qui doit être distribuée sous huit ans à compter de son affectation au fonds.

Les assurés disposent donc de deux provisions acquises :

- Les provisions mathématiques qui sont déterminées individuellement et correspondent à l'épargne acquise.

⁷⁶ Cf articles A331-3 et suivants du Code des Assurances et Instruction n° 2016-I-15 de l'ACPR.

- La provision pour participation aux bénéficiaires, globale, dont la redistribution relève de la politique de l'assureur.

La PB permet ainsi de lisser la rémunération dans l'espace (entre les différents contrats) et dans le temps, et de piloter ainsi l'activité en fonction des contraintes commerciales et des conditions du marché financier. Outre la PB, d'autres provisions sont constituées par l'assureur impliquant un lissage de la performance comptable de l'actif dans le temps. On peut lister notamment la réserve de capitalisation, la provision pour aléas financiers et la provision pour risque d'exigibilité.

Enfin, l'assureur dispose également d'une richesse latente (différence entre l'actif en valeur de marché et en valeur comptable) lui procurant une marge de manœuvre dans la gestion de la revalorisation de l'épargne.

Dans cette sous-section, nous avons examiné le cadre réglementaire de la revalorisation des contrats d'épargne en euros. Les articles du CdA encadrant cette revalorisation vont probablement être amendés pour refléter la baisse structurelle des taux d'intérêt. La sous-section suivante présente un parallèle entre les mécanismes de revalorisation et les options financières classiques.

VIII.1.2 Options des contrats d'épargne et facteurs de risque

Les options incluses dans les contrats d'épargne classiques en euros peuvent être synthétisées en trois catégories :

- Options financières : l'assureur s'engage sur une rémunération minimale de l'épargne en garantissant un taux minimal de revalorisation ou une PB garantie.
- Options comportementales : l'assureur propose des options de rachat, d'arbitrage euros-UC, de versements libres ou programmés, bonus de fidélité... L'activation de ces options est à l'appréciation de l'assuré.
- Options biométriques : sont les options dépendant du risque de mortalité (ou de longévité) comme la proposition par l'assureur de rentes différées.

L'assuré bénéficie donc de trois options à caractère financier (cf. BRYN et DE VARENNE [1994]) :

- L'option de taux technique ou de taux de participation aux bénéficiaires garantis, assimilable à une option vanille européenne.
- L'option de rachat, assimilable à une option de vente américaine.
- L'option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés, assimilable à une *swaption*.

Ainsi, les facteurs de risques auxquels sont exposés les passifs des contrats d'épargne classiques en euros sont (cf. ARMEL et PLANCHET [2019] et LAURENT et al. [2016]) :

- Les risques biométriques et de rachats structurels qui sont non-répliquables. Ils sont néanmoins mutualisables.
- Les risques liés aux comportements conjoncturels (ou dynamiques) des assurés qui sont non-répliquables (cf. section I.2.4 et I.3). Ces comportements représentent la

réaction des assurés aux contextes économiques, financiers et aux taux de revalorisation (et donc aux décisions de l'assureur). Ils peuvent se traduire par des rachats, des arbitrages ou des versements.

- Les risques du marché financier et notamment le risque de taux qui peuvent être en partie répliqués.

La réaction de l'assureur aux taux de rendements de l'actif et aux anticipations des comportements des assurés prend la forme d'actions de gestion, sur la base d'un taux comptable, dont la résultante est le taux servi (cf. section 1.2.3 pour une présentation d'algorithme type de calcul du taux servi pratiqué par la place).

VIII.2 Liquidation de la richesse et moneyness

VIII.2.1 Best-estimate et liquidation de la richesse initiale

Soit :

$$B_{sto}(a) = PM(0) \left(\sum_{t=1}^T (f_t^a + \iota g_t^a) \cdot \psi_a(t) + g_T^a \cdot \psi_a(T) \right)$$

- $\psi_a(t) = \exp\{\sum_{i=1}^t c_i - \sum_{i=1}^t r_i + t \cdot a\}$ avec :
 - o c_i : le taux de revalorisation de l'épargne net de chargements à la date i . Ce taux doit être supérieur au taux minimum garanti ;
 - o r_i est le taux sans risque pour la période entre $i - 1$ et i ;
 - o a est un nombre réel.

Notons :

$$BE_a(0) = E^{Ph \otimes Q}(B_{sto}(a))$$

En particulier, pour $a = 0$ on retrouve le *best-estimate* $BE(0)$.

Proposition :

Soit x un réel positif tel que $BE(0) < x$. Alors il existe un nombre réel positif a tel que $BE_a(0) = x$.

En effet, la fonction $BE_a(0)$ est continue et sa limite quand a tend positivement vers l'infini est infinie.

Solution par approximation de l'équation $BE_a(0) = x$:

Mettons-nous au voisinage du $BE(0)$ et cherchons une approximation de a tel que $BE_a(0) = x$.

Supposons que la variabilité par rapport à a des f_t et g_t est négligeable quand la variation de a est faible :

$$dBE_a(0) = PM(0) E^{Ph \otimes Q} \left(\sum_{t=1}^T (f_t + \iota g_t) \cdot d\psi_a(t) + g_T \cdot d\psi_a(T) \right) da$$

Donc :

$$dBE_a(0) = PM(0) E^{Ph \otimes Q} \left(\sum_{t=1}^T t(f_t + \iota g_t) \cdot \psi_a(t) + T g_T \cdot \psi_a(T) \right) da$$

Ainsi :

$$\frac{dBE_a(0)}{BE_a(0)} = \frac{E^{Ph \otimes Q}(\sum_{t=1}^T t(f_t + \iota g_t) \cdot \psi_a(t) + T g_T \cdot \psi_a(T))}{E^{Ph \otimes Q}(\sum_{t=1}^T (f_t + \iota g_t) \cdot \psi_a(t) + g_T \cdot \psi_a(T))} da$$

La duration du *best-estimate* s'écrit :

$$D_{BE}(a) = \frac{E^{Ph \otimes Q}(\sum_{t=1}^T t(f_t + \iota g_t) \cdot \psi_a(t) + T g_T \cdot \psi_a(T))}{E^{Ph \otimes Q}(\sum_{t=1}^T (f_t + \iota g_t) \cdot \psi_a(t) + g_T \cdot \psi_a(T))}$$

Alors :

$$\frac{dBE_a(0)}{BE_a(0)} = D_{BE}(a) da$$

Si l'on suppose que la variabilité de la duration par rapport à a est faible au voisinage de $BE(0)$ alors :

$$\frac{dBE_a(0)}{BE_a(0)} \simeq D_{BE}(0) da$$

Et :

$$BE_a(0) \simeq BE_0(0) \exp(D_{BE}(0)a)$$

Ainsi pour de faibles variation de a on peut avoir une indication sur la solution de $x = BE_a(0)$:

$$a \simeq \frac{\ln(x) - \ln(BE(0))}{D_{BE}(0)}$$

Cette solution est notamment utile pour initier l'algorithme d'optimisation en cas de résolution numérique de l'équation : $x = BE_a(0)$.

Cette expression s'interprète comme suit : le taux de distribution a de la richesse A relative à la différence entre un *best-estimate* calculé $BE(0)$ et un *best-estimate* cible x correspond à cette richesse A , divisée par la duration du portefeuille.

VIII.2.2 Définition de la moneyness du passif d'un contrat d'épargne

Dans la littérature, les définitions de la *moneyness* s'accordent pour prendre en compte, dans son évaluation, le rapport entre le *strike* et le prix de marché du sous-jacent prévu à la maturité de l'option. Par exemple :

- Goncalves et GUIDOLIN [2006] et BERNALES et GUIDOLIN [2014] proposent la définition suivante de la *moneyness* notée M pour l'échéance T : $M = \frac{\ln(\frac{K_T}{S_T})}{\sqrt{T}}$ où S_T est le cours du sous-jacent à la date T .
- Dans d'autres références, la *moneyness* est tout simplement définie comme un rapport entre le *strike* et le prix du marché du sous-jacent (CONT et FONSECA [2001] et CHRISTOFFERSEN et JACOBS [2002]) : $M = \frac{K_T}{S_T}$.

Dans le cas où le sous-jacent verse des dividendes, on peut écrire :

$$S_T = \exp(r_T T) \cdot S_0 - FVD_T$$

Le terme FVD_T correspondant aux dividendes futurs jusqu'à l'expiration de l'option et correspond donc à la valeur capitalisée des dividendes versés entre 0 et T .

Si le sous-jacent ne verse pas de dividendes entre 0 et T alors : $S_T = \exp(r_T T) S_0$.

Notons que dans ce dernier cas :

$$\frac{K_T}{S_T} = \frac{K_T}{\exp(r_T T) S_0} = \frac{K_T \exp(-r_T T)}{S_0} = \frac{K_0}{S_0}$$

La *moneyness* peut se définir donc comme le ratio entre la valeur actuelle du *strike* et l'investissement initial.

Notons également qu'un contrat d'assurance est un contrat de capitalisation. Il ne verse pas de dividendes.

La somme des valeurs actuelles probables des flux futurs garantis (les *strikes* se matérialisant par les taux garantis) est le $BE_{contr}(0)$ (cf. section II.3.1.2).

Pour l'assuré, la valeur initiale de l'investissement est la $PM(0)$. Nous définissons la *moneyness* d'un contrat d'assurance comme le ratio entre le *best-estimate* contractuel et la provision mathématique à $t=0$:

$$Moneyness_{assurés}(0) = \frac{BE_{contr}(0)}{PM(0)}$$

L'assureur doit distribuer une richesse initiale à sa discrétion. Cette richesse peut s'ajouter à la $PM(0)$ et jouer le rôle de l'investissement initial. La *moneyness* s'écrit dans ce cas :

$$Moneyness_{assureur}(0) = \frac{BE_{contr}(0)}{PM(0) + richesse_{init}}$$

VIII.3 Les modèles de type CIR pour une utilisation pertinente en assurance

Ce document présente :

- Quelques généralités sur la famille des modèles de taux à structure par termes affine et leur extension par des fonctions déterministes afin de prendre en compte la courbe de taux anticipée par le marché ;
- La dynamique et les propriétés analytiques (1) des modèles CIR à un facteur de référence et généralisé (modèle CIR++) ainsi que (2) des modèles CIR à deux facteurs de référence et généralisé (modèle CIR2++);
- La définition et les propriétés des lois Khi-deux non-centrées.

VIII.3.1 Modèles de taux à structure par termes affine

Le succès de modèles tels que celui de VASICEK [1977] et celui de COX, INGERSOLL et ROSS [1985] est principalement dû à leur capacité à évaluer analytiquement les obligations et les options sur des obligations.

La dynamique du modèle de Vasicek ($dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$) est intéressante d'un point de vue analytique. L'équation est linéaire et peut être résolue explicitement. La distribution du taux court est gaussienne et les prix d'obligations et de certaines options peuvent être exprimés sous une forme analytique.

Par ailleurs, l'approche d'équilibre général proposée par COX, INGERSOLL et ROSS [1985] a introduit un terme en « racine carrée » dans le coefficient de diffusion de la dynamique du taux court instantané proposé par VASICEK [1977].

Le modèle résultant est une référence depuis de nombreuses années en raison de sa facilité d'analyse et du fait que, contrairement au modèle de VASICEK [1977], le taux court instantané est toujours positif. La dynamique du modèle sous la mesure risque-neutre s'écrit :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t)$$

où $r(0) = r_0$ et r_0, k, θ, σ sont des constantes positives.

Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller :

$$2k\theta > \sigma^2$$

Bien qu'ils soient intéressants d'un point de vue analytique, la structure par termes initiale des taux produite par ces modèles ne correspond pas nécessairement à celle observée sur le marché, et ce, quel que soit le choix des paramètres.

Afin que ces modèles reproduisent la structure par termes des taux d'intérêt, la littérature financière propose au moins deux possibilités :

- Rendre les paramètres dépendants du temps (extension de type Hull & White, cf. section VIII.3.2.1.8.1);
- Introduire additivement une fonction déterministe (cf. section VIII.3.2.1.8.2).

Notons par ailleurs que les modèles de VASICEK [1977] et CIR sont des modèles dont la structure par termes est affine. Nous présentons dans la suite quelques généralités sur la famille des modèles de taux à structure par termes affine et leur extension par des fonctions déterministes afin de prendre en compte la courbe de taux initiale.

Nous nous sommes appuyés essentiellement sur BRIGO et MERCURIO [2007] pour la rédaction de cette section.

VIII.3.1.1 Modèles affines : définition et généralités

Le taux d'intérêt au comptant composé continu évalué à la date t pour la maturité T , noté $R(t, T)$ correspond au taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unités monétaires à la date t s'accumule de manière continue pour atteindre une unité de monnaie à la date T . Si $P(t, T)$ désigne le prix d'une obligation zéro-coupon évaluée à la date t arrivant à maturité à la date T , alors : $P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$.

Les modèles de taux dont la structure par termes est affine sont des modèles où le taux d'intérêt composé continu au comptant évalué à la date t pour la maturité T est une fonction affine du taux court instantané au comptant, noté $r(t)$:

$$R(t, T) = \alpha(t, T) + \beta(t, T)r(t)$$

où α et β sont des fonctions déterministes.

Cette condition est toujours satisfaite quand le prix de l'obligation zéro-coupon évaluée à la date t arrivant à maturité à la date T s'écrit :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

où A et B sont des fonctions déterministes.

Il suffit en effet de prendre :

- $\alpha(t, T) = -\ln(A(t, T))/(T - t)$;
- $\beta(t, T) = B(t, T)/(T - t)$.

Supposons que le taux court instantané suit la dynamique suivante :

$$dr(t) = b(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

Pour que le modèle caractérisé par cette dynamique soit affine, il suffit que les fonctions déterministes b et σ^2 soient affines.

Si les coefficients b et σ^2 sont de la forme :

$$\begin{cases} b(t, x) = \lambda(t) \times x + \eta(t) \\ \sigma^2(t, x) = \gamma(t) \times x + \delta(t) \end{cases}$$

où λ, η, γ et δ sont des fonctions déterministes appropriées, alors le modèle a une structure par termes affine.

Les fonctions A et B (respectivement α et β) peuvent être obtenues à partir des coefficients λ, η, γ et δ par la résolution des équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t, T) + \lambda(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B(t, T)^2 + 1 = 0 \text{ et } B(T, T) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\ln(A(t, T))] - \eta(t)B(t, T) + \frac{1}{2} \delta(t)B(t, T)^2 = 0 \text{ et } A(T, T) = 1$$

Dans le cas particulier du modèle CIR les équations ci-dessus admettent une solution et il suffit de prendre :

$$\begin{cases} \lambda(t) = -k \\ \eta(t) = k\theta \\ \gamma(t) = \sigma^2 \\ \delta(t) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, l'affinité dans les coefficients se traduit par l'affinité de la structure par termes. L'inverse est également vrai dans le cas où les fonctions b et σ^2 sont homogènes : $b(t, x) = b(x)$ et $\sigma(t, x) = \sigma(x)$.

En effet, il est possible de prouver que si un modèle a une structure par termes affine et des coefficients homogènes ($b(t, x) = b(x)$ et $\sigma(t, x) = \sigma(x)$), alors ces coefficients sont nécessairement affines en fonction de x :

$$\begin{cases} b(x) = \lambda x + \eta \\ \sigma^2(x) = \gamma x + \delta \end{cases}$$

pour des constantes appropriées λ, η, γ et δ .

VIII.3.1.2 Extension des modèles de taux à structure par termes affine par des fonctions déterministes

Cette section présente une méthode d'extension des modèles de taux court instantanés à structure par termes affine permettant de reproduire la courbe de taux observée tout en préservant les caractéristiques analytiques du modèle de référence.

VIII.3.1.2.1 Notations et hypothèses

Soit x^α un processus stochastique dont les coefficients sont homogènes et dont la dynamique sous une mesure donnée Q^x s'écrit :

$$dx_t^\alpha = \mu(x_t^\alpha; \alpha)dt + \sigma(x_t^\alpha; \alpha)dW_t^x$$

où W^x est un mouvement brownien standard, x_0^α est un nombre réel donné, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in IR^n, n \geq 1$, est un vecteur de paramètres, et μ et σ sont des fonctions réelles appropriées.

Nous supposons que le processus x^α décrit l'évolution du taux d'intérêt spot instantané sous la mesure Q^x . Soit F_t^x la sigma-algèbre générée par $\{x_s^\alpha\}_{s \leq t}$.

Le prix à l'instant t , noté $P^x(t, T)$, d'une obligation zéro coupon de maturité T est :

$$P^x(t, T) = E^{Q^x} \left(\exp \left[- \int_t^T x_s^\alpha ds \right] \middle| F_t^x \right)$$

Nous supposons également qu'il existe une forme analytique, une fonction réelle notée Π_x , définie sur un sous-ensemble approprié de IR^{n+3} , telle que $P^x(t, T) = \Pi^x(t, T, x_t^\alpha; \alpha)$.

Les modèles de VASICEK [1977] et de COX-INGERSOLL-ROSS [1985] sont des exemples de modèles de taux pour lesquels une telle fonction existe.

Soit r_t le taux court instantané sous la mesure risque-neutre Q défini par :

$$r_t = x_t + \varphi(t; \alpha), t \geq 0$$

où x est un processus stochastique qui a sous Q la même dynamique que x^α sous Q^x et φ est une fonction déterministe, dépendant du vecteur de paramètres (α, x_0) , intégrable sur des intervalles fermés.

Le processus r dépend des paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_0$ et la fonction φ peut être choisie de manière à produire la structure par termes des taux d'intérêt.

Notons F_t la sigma-algèbre générée par $\{x_t^\alpha\}_{t \leq t}$.

Si φ est différentiable, l'équation différentielle stochastique du taux court instantané s'écrit :

$$dr_t = \left[\frac{d\varphi(t; \alpha)}{dt} + \mu(r_t - \varphi(t; \alpha); \alpha) \right] dt + \sigma(r_t - \varphi(t; \alpha); \alpha) dW_t$$

Comme nous l'avons vu dans la section VIII.3.1.1, dans le cas de coefficients homogènes, une structure par termes affine des taux à court terme est équivalente à une structure affine des coefficients de dérive et de diffusion au carré. Il s'ensuit que si le modèle de référence a une structure par termes affine, le modèle étendu l'est également. Nous pouvons alors anticiper que les modèles décalés de Vasicek (équivalent au modèle de Hull et White) et de CIR (CIR++) sont des modèles affines.

VIII.3.1.2.2 Reproduction de la courbe des taux initiale

En remplaçant x_t par $r_t - \varphi(t; \alpha)$ on peut prouver que le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit :

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T \varphi(s; \alpha) ds \right) \Pi^x(t, T, r_t - \varphi(t; \alpha); \alpha)$$

Soit $f^x(0, t; \alpha)$ le taux *forward* instantané à l'instant 0 pour une échéance t associée au prix de l'obligation $P^x(0, t)$, alors :

$$f^x(0, t; \alpha) = - \frac{\partial \ln(P^x(0, t))}{\partial t} = - \frac{\partial \ln(\Pi^x(0, t, x_0; \alpha))}{\partial t}$$

Soit $f^M(0, t)$ le taux *forward* instantané du marché observé à la date 0 pour la maturité t :

$$f^M(0, t) = - \frac{\partial \ln(P^M(0, t))}{\partial t}$$

alors, le modèle reproduit la structure par terme observée des taux d'intérêt si et seulement si :

$$\varphi(t; \alpha) = \varphi^*(t; \alpha) = f^M(0, t) - f^x(0, t; \alpha)$$

C'est-à-dire :

$$\exp \left(- \int_t^T \varphi(s; \alpha) ds \right) = \Phi^*(t, T, x_0; \alpha) = \frac{P^M(0, T)}{\Pi^x(0, T, x_0; \alpha)} \cdot \frac{\Pi^x(0, t, x_0; \alpha)}{P^M(0, t)}$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon à l'instant t est donné par :

$$P(t, T) = \Pi(t, T, r_t; \alpha)$$

où $\Pi(t, T, r_t; \alpha) = \Phi^*(t, T, x_0; \alpha) \Pi^x(t, T, r_t - \varphi^*(t; \alpha); \alpha)$.

VIII.3.1.2.3 Formules explicites pour valoriser les options européennes

L'extension proposée dans la section VIII.3.1.2 est encore plus intéressante lorsque le modèle de référence propose des formules analytiques pour valoriser les options européennes sur des obligations zéro-coupons. Le modèle généralisé peut préserver la possibilité d'évaluer les prix des options par des formules fermées au moyen de facteurs de correction analytiques fonctions de φ .

Le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne de maturité T , de prix d'exercice K sur une obligation zéro-coupon de maturité τ est :

$$V^x(t, T, \tau, K) = E^x \left\{ \exp \left[- \int_t^T x_s^\alpha ds \right] (P^x(T, \tau) - K)^+ \middle| F_t^x \right\}$$

Supposons qu'il existe une forme analytique, une fonction réelle explicite notée Ψ^x , définie sur un sous-ensemble approprié de IR^{n+5} , telle que

$$V^x(t, T, \tau, K) = \Psi^x(t, T, \tau, K, x_t^\alpha; \alpha)$$

Les modèles de VASICEK [1977] et de COX-INGERSOLL-ROSS [1985] sont des exemples de modèles de taux court pour lesquels une telle fonction existe.

Dans le cadre du modèle étendu décrit dans la section VIII.3.1.2, le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne de maturité T , de prix d'exercice K sur une obligation zéro-coupon de maturité τ est :

$$\begin{aligned} ZBC(t, T, \tau, K) \\ = \exp \left(- \int_t^\tau \varphi(s; \alpha) ds \right) \\ \cdot \Psi^x \left(t, T, \tau, K \exp \left[\int_T^\tau \varphi(s; \alpha) ds \right], r_t - \varphi(t; \alpha); \alpha \right) \end{aligned}$$

Le prix d'une option de vente européenne peut être obtenu via la parité *call-put*.

Le prix des *caps* et des *floors* peuvent également être évalués analytiquement.

Par ailleurs, si la décomposition de JAMSHIDIAN [1989] pour évaluer les *swaptions*, peut être appliquée au modèle de référence, la même décomposition est également applicable au modèle étendu. Les *swaptions* peuvent donc être évaluées par des formules analytiques.

VIII.3.2 Modèles CIR : définition, propriétés et extensions

Cette section présente la dynamique et les propriétés analytiques :

- Des modèles CIR à un facteur de référence et généralisé (modèle CIR++);
- Des modèles CIR à deux facteurs de référence et généralisé (modèle CIR2++).

Nous nous sommes appuyés essentiellement sur COX, INGERSOLL et ROSS [1985] et BRIGO et MERCURIO [2007] pour la rédaction de cette section.

VIII.3.2.1 Modèle CIR de référence

VIII.3.2.1.1 Dynamique du modèle

Le modèle CIR généralise le modèle de VASICEK [1977] et introduit un terme en racine carrée du taux court instantané dans la dynamique permettant au modèle de produire des taux d'intérêt positifs.

L'équation différentielle du modèle sous la mesure risque-neutre Q est :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t)$$

avec $r(0) = r_0$ et k, θ et σ sont des constantes positives.

Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller :

$$2k\theta > \sigma^2$$

VIII.3.2.1.2 Solution de l'équation différentielle

Notons p_Y la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Y , alors la densité de $r(t)$ conditionnellement à $r(s)$ s'écrit :

$$p_{r(t)|r(s)}(x) = c_{t-s} \times p_{\chi^2(v, \lambda_{t,s})}(c_{t-s}x) = p_{\chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}}(x)$$

où :

- $c_{t-s} = \frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-k(t-s)))}$;
- $v = 4k\theta/\sigma^2$;
- $\lambda_{t,s} = c_{t-s}r_s \exp(-k(t-s))$.

Le processus de taux court $r(t)$ conditionnellement à $r(s)$ suit la loi $\chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$:

$$r(t)|r(s) = \chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$$

où $\chi^2(v, \lambda_{t,s})$ est une loi du Khi-deux non-centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est $\lambda_{t,s}$;

La densité de probabilité d'une loi Khi-deux non centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ est :

$$p_{\chi^2(v, \lambda)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!} p_{\Gamma(i + v/2, 1/2)}(z)$$

où

$$p_{\Gamma(i + \frac{v}{2}, \frac{1}{2})}(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{i + \frac{v}{2}}}{\Gamma\left(i + \frac{v}{2}\right)} \times z^{i-1 + \frac{v}{2}} \times e^{-\frac{z}{2}} = p_{\chi^2(v+2i)}(z)$$

La fonction $p_{\chi^2(v+2i)}(z)$ est la densité de probabilité d'une loi Khi-deux centrée avec $v + 2i$ degrés de liberté.

La moyenne et la variance de $r(t)$ conditionnellement à F_s sont données par :

$$E\{r(t)|F_s\} = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)})$$

$$\text{Var}\{r(t)|F_s\} = \frac{r(s)\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2$$

VIII.3.2.1.3 Densité conditionnelle du taux court instantané et dynamique du taux forward composé

Soit Q^T la mesure T -forward⁷⁷ et soit W^T la variable définie par : $dW^T(t) = dW(t) + \sigma B(t, T)\sqrt{r(t)}dt$. W^T est un mouvement brownien standard sous Q^T .

Il est possible de montrer que, sous Q^T , la distribution du taux court $r(t)$ conditionnellement au taux $r(s)$, $s \leq t \leq T$, est donnée par :

$$p^T(r(t)|r(s))(x) = q(t, s)p_{\chi^2(v, \delta(t, s))}(q(t, s)x)$$

où :

- $q(t, s) = 2[\rho(t - s) + \psi + B(t, T)]$;
- $\delta(t, s) = \frac{4\rho(t-s)^2 r(s)e^{h(t-s)}}{q(t, s)}$.

Soit par ailleurs $F(t; T, S)$, le taux forward composé simplement, observé à la date t dont le terme est T et la maturité est S , défini par :

$$F(t; T, S) = \frac{1}{\gamma(T, S)} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right)$$

où $\gamma(T, S)$ est la fraction d'année entre T et S .

Sous la mesure forward Q^S , le taux forward s'écrit :

$$dF(t; T, S) = \sigma \times \left(F(t; T, S) + \frac{1}{\gamma(T, S)} \right) \times \sqrt{(B(t, S) - B(t, T)) \ln \left[\frac{(\gamma(T, S)F(t; T, S) + 1)A(t, S)}{A(t, T)} \right]} dW^S(t)$$

Notons que cette équation différentielle est assez différente de la dynamique log-normale du taux forward dans le modèle LMM, où typiquement $dF(t; T, S) = \sigma(t)F(t; T, S)dW^S(t)$ pour une fonction déterministe σ .

VIII.3.2.1.4 Prix d'une obligation zéro-coupon

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T est :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

où

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp \left\{ \frac{(k+h)(T-t)}{2} \right\}}{2h + (k+h)(\exp \{(T-t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

⁷⁷ Q^T est la mesure de probabilité définie par la dérivée de Radon-Nikodym : $\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{\exp(-\int_0^T r(u)du)}{P(0, T)}$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

La formule d'Itô permet d'écrire :

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt - B(t, T)P(t, T)\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

En inversant la formule du prix $P(t, T)$, déduisant ainsi r de P , on peut écrire :

$$d \ln(P(t, T)) = \left(\frac{1}{B(t, T)} - \frac{1}{2}\sigma^2 B(t, T) \right) [\ln(A(t, T)) - \ln(P(t, T))] dt$$

$$- \sigma \sqrt{B(t, T)[\ln(A(t, T)) - \ln(P(t, T))] dW(t)}$$

Nous remarquons que la volatilité rapportée au prix de l'obligation zéro-coupon n'est pas une fonction déterministe, mais dépend du niveau actuel des prix.

VIII.3.2.1.5 Prix d'une option européenne sur une obligation zéro-coupon

Le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne, de maturité $T > t$ et de prix d'exercice X , émise sur une obligation zéro-coupon de maturité $S > T$ et dont le taux cours instantané à l'instant t est noté $r(t)$, s'écrit (cf. COX, INGERSOLL et ROSS [1985] et BRIGO et MERCURIO [2007])⁷⁸ :

$$ZBC(t, T, S, X)$$

$$= P(t, S)F_{\chi^2} \left(2\bar{r} [\rho + \psi + B(T, S)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t) \exp\{h(T-t)\}}{\rho + \psi + B(T, S)} \right)$$

$$- XP(t, T)F_{\chi^2} \left(2\bar{r} [\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t) \exp\{h(T-t)\}}{\rho + \psi} \right)$$

où

$$- \rho = \rho(T-t) = \frac{2h}{\sigma^2(\exp[h(T-t)]-1)} ;$$

$$- \psi = \frac{k+h}{\sigma^2} ;$$

$$- \bar{r} = \bar{r}(S-T) = \frac{\ln\left(\frac{A(T,S)}{X}\right)}{B(T,S)} .$$

Le prix de l'option de vente est obtenu par la parité put-call et est noté ZBP :

$$ZBP(t, T, \tau, K) = ZBC(t, T, \tau, K) - P(t, \tau) + KP(t, T)$$

VIII.3.2.1.6 Prix de caps et de floors

Le prix à la date t d'un capelet dont la date d'échéance est notée T , la date de paiement est notée $T + \tau$, le prix d'exercice est noté X et le montant nominal noté N s'écrit :

$$Cpl(t, T, T + \tau, N, X) = N(1 + X\tau) \times ZBP \left(t, T, T + \tau, \frac{1}{1 + X\tau} \right)$$

⁷⁸ $F_{\chi^2}(\cdot; u, v)$ est la fonction de répartition d'une loi Khi-deux non centrée avec u degrés de liberté et un paramètre de décentralisation v .

Notons $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des maturités de paiements des *caps* ou des *floors* augmenté de la date d'initialisation t_0 . Soit τ_i la différence entre t_{i-1} et t_i .

Le prix à l'instant $t < t_0$ du *cap* de prix d'exercice X , de valeur nominale N et défini sur l'ensemble $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ est donné par :

$$Cap(t, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) \times ZBP\left(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i}\right)$$

Le prix du *floor* est donné par :

$$Flr(t, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) \times ZBC\left(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i}\right)$$

VIII.3.2.1.7 Prix de swaptions

La forme analytique du prix d'une *swaptions* européennes évaluée en utilisant le modèle CIR peut être explicitement formulée en utilisant la décomposition de JAMSHIDIAN [1989] (cf. BRIGO et MERCURIO [2007]).

Considérons une *swaption* payeuse avec un taux d'exercice noté X , une échéance T et une valeur nominale N . Elle donne à son titulaire le droit de contracter à un instant $t_0 = T$ un *swap* de taux d'intérêt avec des dates de paiements $\zeta = \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_1 > T$, où il paye un taux fixe X et reçoit le taux variable.

On note τ_i la fraction d'année de t_{i-1} à t_i , $i = 1, \dots, n$ et soit $c_i = X\tau_i$ pour $i = 1, \dots, n - 1$ et $c_n = 1 + X\tau_n$.

Soit r^* le taux *spot* à la date T pour lequel $\sum_{i=1}^n c_i \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*} = 1$ et soit $X_i = \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*}$.

Le prix de la *swaption* payeuse à l'instant $t < T$ est alors donné par :

$$PS(t, T, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n c_i \times ZBP(t, T, t_i, X_i)$$

Par symétrie, le prix de la *swaption* receveuse est :

$$RS(t, T, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n c_i \times ZBC(t, T, t_i, X_i)$$

VIII.3.2.1.8 Quelle extension du modèle CIR ?

Le modèle CIR de référence ne peut reproduire la structure par termes des taux d'intérêt observés sur le marché. La littérature financière propose notamment deux méthodes d'extension de ce modèle pour reproduire la courbe de taux initiale du marché :

- Rendre tous les paramètres du modèle dépendants du temps (extension de type Hull & White) ;
- Introduire additivement une fonction déterministe.

D'autres extensions, que nous ne détaillerons pas ici, sont proposées par la littérature. On peut citer, par exemple, celle présentée dans SHIU et YAO [1999] qui proposent des

formules fermées pour valoriser des zéro-coupons en supposant que le taux d'intérêt instantané est décrit par les EDS suivantes :

$$dr(t) = \varphi(t)dt + k[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t)$$

$$d\theta(t) = \beta(r(t) - \theta(t))dt$$

La fonction déterministe $\varphi(t)$ permettant de répliquer la courbe de taux initiale.

VIII.3.2.1.8.1 Extension du modèle CIR par Hull & White

Outre l'extension du modèle de VASICEK [1977], HULL & WHITE [1990] ont proposé une extension du modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985] qui repose sur le même principe : rendre les coefficients dépendants du temps. La dynamique du taux court est alors donnée par :

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t)$$

où a , ϑ et σ sont des fonctions déterministes.

Les caractéristiques analytiques d'une telle extension sont cependant limitées.

En effet, on peut montrer que, pour $t < T$, le prix d'une obligation zéro-coupon peut s'écrire sous la forme

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

La fonction B est une solution d'une équation de Riccati et A est la solution d'une équation différentielle linéaire soumise à certaines conditions.

On observe les mêmes limites analytiques pour la dynamique simplifiée ou le paramètre de volatilité est constant :

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a \times r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

où a et σ sont des constantes positives et seule la fonction ϑ est supposée dépendre du temps afin de reproduire la structure par termes des taux d'intérêt.

À notre connaissance, aucune expression analytique générale de $\vartheta(t)$ n'est proposée par la littérature financière. Quand on suppose que le rapport $\vartheta(t)/\sigma^2(t)$ est égal à une constante positive δ supérieure à $\frac{1}{2}$ pour que l'origine soit inaccessible, le modèle CIR généralisé par HULL & WHITE [1990] présente des caractéristiques analytiques plus étendues. Ces propriétés analytiques ne font pas l'objet de développements dans ce papier, le lecteur intéressé peut se référer à BRIGO et MERCURIO [2007].

La section suivante présente une extension du modèle CIR plus intéressante d'un point de vue analytique. Elle permet notamment de reproduire la courbe de taux observée et prendre en compte des taux négatifs.

VIII.3.2.1.8.2 Extension par une fonction déterministe : modèle CIR++

L'application des développements de la section IV.2 permet d'étendre le modèle CIR de référence au modèle appelé CIR++. Le processus du taux court instantané r est ainsi la somme d'une fonction déterministe et d'un processus CIR de référence.

La section suivante présente la dynamique du modèle CIR++ ainsi que les formules analytiques pour valoriser les obligations zéro-coupons, les caps, les floors et les swaptions.

VIII.3.2.2 Le modèle CIR à un facteur décalé

VIII.3.2.2.1 Extension du modèle CIR de référence par une fonction déterministe : modèle CIR++

L'application des développements de la section VIII.3.1.2 permet d'étendre le modèle CIR au modèle CIR++. Le processus du taux court instantané r est ainsi décrit à partir d'une fonction déterministe φ et du processus x dont le vecteur de paramètre est noté $\alpha = (k, \theta, \sigma)$ et qui est défini comme suit :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t); x(0) = x_0$$

et on a :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

où x_0, k, θ et σ sont des constantes positives telles que $2k\theta > \sigma^2$, garantissant ainsi que l'origine est inaccessible pour la variable x , et donc que ce processus reste positif.

Les formules analytiques présentées dans la suite sont une traduction directe des développements présentés dans la section VIII.3.1.2.

VIII.3.2.2.2 Prix d'une obligation zéro-coupon

En notant $\varphi(t) = \varphi^{CIR}(t; \alpha)$ on a donc :

$$\varphi^{CIR}(t; \alpha) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t; \alpha)$$

où

$$f^{CIR}(0, t; \alpha) = \frac{2k\theta(\exp\{th\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)} + x_0 \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)]^2}$$

avec $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$.

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T est :

$$P(t, T) = \bar{A}(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

où

$$\bar{A}(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}A(t, T)e^{B(t, T)\varphi^{CIR}(t, \alpha)}$$

- $A(t, T)$ et $B(t, T)$ sont définis dans la section VIII.3.2.1.4.
- $P^M(0, T)$ est le prix de marché de l'obligation zéro-coupon sans risque observée à l'instant 0.

Le taux d'intérêt à l'instant t pour l'échéance T est donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \left(\ln \left(\frac{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, t)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) - B(t, T)\varphi^{CIR}(t; \alpha) + B(t, T)r(t) \right)$$

On peut noter que le taux $R(t, T)$ est affine en $r(t)$.

Notons que le prix à l'instant t d'une obligation zéro coupon de maturité T peut être écrit sous la forme :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

où

$$\bar{A}'(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}A(t, T)$$

Le taux d'intérêt composés à l'instant t pour l'échéance T est donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\ln \left(\frac{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

Le prix $P(t, T)$ et le taux $R(t, T)$ sont des fonctions des paramètres du modèle CIR à un facteur x et de la valeur initiale x_0 . Nous pouvons donc caractériser la dynamique de $R(t, T)$ sans calculer la fonction $\varphi(t)$.

Par ailleurs, la diffusion des taux d'intérêt composés revient à diffuser le processus x . Celui-ci peut être simulé à partir de la diffusion d'une loi du Khi-deux non-centrée (cf. section VIII.3.3.2).

Aussi, le taux $R(t, T)$ est une fonction affine de $x(t)$ dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine d'une loi du Khi-deux non-centrée.

VIII.3.2.2.3 Prix d'une option européenne sur une obligation zéro-coupon

Le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne, à échéance $T > t$ et de prix d'exercice K , sur une obligation zéro coupon de maturité $\tau > T$ est égal à :

$$\begin{aligned} ZBC(t, T, \tau, K) &= \frac{P^M(0, \tau)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, \tau)\exp\{-B(0, \tau)x_0\}} \\ &\times \Psi^{CIR} \left(t, T, \tau, K \frac{P^M(0, T)A(0, \tau)\exp\{-B(0, \tau)x_0\}}{P^M(0, \tau)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}, r(t) - \varphi^{CIR}(t; \alpha); \alpha \right) \end{aligned}$$

où $\Psi^{CIR}(t, T, \tau, X, x; \alpha)$ est le prix de l'option valorisée par le modèle CIR tel que défini dans la section VIII.3.2.1.5.

En simplifiant davantage cette formule, on peut écrire :

$$\begin{aligned} ZBC(t, T, \tau, K) &= P(t, \tau)F_{\chi^2} \left(2\hat{r}[\rho + \psi \right. \\ &\quad \left. + B(T, \tau)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2[r(t) - \varphi^{CIR}(t; \alpha)]\exp\{h(T-t)\}}{\rho + \psi + B(T, \tau)} \right) \\ &\quad - KP(t, T)F_{\chi^2} \left(2\hat{r}[\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2[r(t) - \varphi^{CIR}(t; \alpha)]\exp\{h(T-t)\}}{\rho + \psi} \right) \end{aligned}$$

Avec

- $\hat{r} = \frac{1}{B(T, \tau)} \left[\ln \left(\frac{A(T, \tau)}{K} \right) - \ln \left(\frac{P^M(0, T)A(0, \tau)\exp\{-B(0, \tau)x_0\}}{P^M(0, \tau)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}} \right) \right]$;
- $F_{\chi^2}(\cdot; \nu, \lambda)$ est la fonction de répartition d'une loi Khi-deux non-centrée à ν degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ .

Le prix de l'option de vente est obtenu par la parité put-call et est noté ZBP :

$$ZBP(t, T, \tau, K) = ZBC(t, T, \tau, K) - P(t, \tau) + KP(t, T)$$

On peut noter que le prix à l'instant $t = 0$ d'une option d'achat européenne, à échéance $T > t$ et de prix d'exercice K , sur une obligation zéro coupon de maturité $\tau > T$ est égal à :

$$\begin{aligned} ZBC(t = 0, T, \tau, K) &= P(0, \tau) F_{\chi^2} \left(2\hat{r}[\rho + \psi + B(T, \tau)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 x_0 \exp\{hT\}}{\rho + \psi + B(T, \tau)} \right) \\ &\quad - KP(0, T) F_{\chi^2} \left(2\hat{r}[\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 x_0 \exp\{hT\}}{\rho + \psi} \right) \end{aligned}$$

Le prix $ZBC(t = 0, T, \tau, K)$ est une fonction des paramètres du modèle CIR à un facteur x et de la valeur initiale x_0 . Nous pouvons donc le caractériser sans calculer la fonction $\varphi(t)$.

VIII.3.2.2.4 Prix de caps et de floors

Les *caps* et les *floors* peuvent être considérés comme des portefeuilles d'options sur des obligations zéro-coupons. Le prix à la date t d'un capelet dont la date d'échéance est notée T , la date de paiement est notée $T + \tau$, le prix d'exercice noté X et le montant nominal noté N s'écrit :

$$Cpl(t, T, T + \tau, N, X) = N(1 + X\tau) \times ZBP \left(t, T, T + \tau, \frac{1}{1 + X\tau} \right)$$

Notons $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des maturités de paiements des *caps* ou des *floors* augmenté de t_0 correspondant à l'instant d'initialisation. Soit τ_i la différence entre t_{i-1} et t_i .

Le prix à l'instant $t < t_0$ du *cap* de prix d'exercice X , de valeur nominale N et défini sur l'ensemble $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ est donné par :

$$Cap(t, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) \times ZBP \left(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i} \right)$$

Le prix du *floor* est donné par :

$$Flr(t, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) \times ZBC \left(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i} \right)$$

VIII.3.2.2.5 Prix de swaptions

Comme pour le modèle CIR, la forme analytique du prix d'une *swaptions* européennes évaluée en utilisant le modèle CIR++ peut être explicitement formulée en utilisant la décomposition de JAMSHIDIAN [1989] (cf. BRIGO et MERCURIO [2007]).

Considérons une *swaption* payeuse avec un taux d'exercice noté X , une échéance T et une valeur nominale N . Elle donne à son titulaire le droit de contracter à un instant $t_0 = T$ un *swap* de taux d'intérêt avec des dates de paiements $= \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_1 > T$, où il paye un taux fixe X et reçoit le taux variable.

On note τ_i la fraction d'année de t_{i-1} à t_i , $i = 1, \dots, n$ et soit $c_i = X\tau_i$ pour $i = 1, \dots, n - 1$ et $c_n = 1 + X\tau_n$.

Soit r^* le taux spot à la date T pour lequel $\sum_{i=1}^n c_i \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*} = 1$ et soit $X_i = \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*}$.

Le prix de la swaption payeuse à l'instant $t < T$ est alors donné par :

$$PS(t, T, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n c_i \times ZBP(t, T, t_i, X_i)$$

Par symétrie, le prix de la swaption receveuse est :

$$RS(t, T, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n c_i \times ZBC(t, T, t_i, X_i)$$

La valorisation de la swaption nécessite l'évaluation de la suite déterministe :

$$X_i = \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*}$$

où r^* est le taux à la date T solution de l'équation : $\sum_{i=1}^n c_i \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*} = 1$.

Si on note : $x^* = r^* - \varphi^{CIR}(T; \alpha)$, alors x^* est solution de l'équation $\sum_{i=1}^n c_i \bar{A}'(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)x^*} = 1$ et $X_i = \bar{A}'(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)x^*}$.

Dans la mesure ou le calcul de r^* ne sert qu'à évaluer les X_i l'introduction de x^* permet d'éviter l'évaluation de $\varphi^{CIR}(T)$.

VIII.3.2.2.6 Calibrage du modèle CIR++ sur les prix de caps, de floors ou de swaptions

Si l'on dispose des prix directement observables des caps, des floors ou des swaptions, le modèle CIR++ peut être calibré directement sur ces prix de marché en utilisant les formules fermées présentées ci-dessus.

Notons :

- $\beta = (a, \theta, \sigma)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{market}$: le prix du produit dérivé i valorisé par le marché (caps, floors ou swaptions) ;
- $f_i^{CIR++}(\beta)$: le prix du produit dérivé i valorisé par le modèle CIR++ (caps, floors ou swaptions).

Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des dérivés retenus pour le calibrage (d est une distance, classiquement les praticiens retiennent une distance euclidienne) :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (f_i^{CIR++}(\beta))_i \right) \right)$$

Notons par ailleurs que le modèle CIR++ permet de générer des taux négatifs et de reproduire la courbe de taux anticipée sans introduire de facteur de décalage arbitraire comme dans les modèles log-normaux.

VIII.3.2.2.7 Simulation du modèle CIR++

La méthode de simulation du modèle CIR++ que nous présentons dans la suite est une méthode de diffusion exacte. Elle permet d'éviter donc des processus de discrétisation d'Euler et les problématiques liées à leur convergence.

La méthode de simulation se présente comme un processus itératif. Ce processus est présenté dans la suite avec une fréquence annuelle et peut être adapté à d'autres fréquences.

Rappelons que si x suit un processus CIR, alors pour tout $t \geq 1$ la variable aléatoire $x(t)$ conditionnellement à $x(t-1)$ a la même loi que la variable $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})/c_1$ où $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})$ suit une loi du Khi-deux non-centrée de paramètres $(v, \lambda_{t,t-1})$ tels que :

- $c_1 = \frac{4k}{\sigma^2(1-\exp(-k))}$;
- $v = 4k\theta/\sigma^2$;
- $\lambda_{t,t-1} = c_1 x_{t-1} \exp(-k)$.

Afin de simuler des réalisations du taux d'intérêt à terme continu $R(t, T)$ vu en $t \geq 1$ pour la maturité T nous avons retenu l'algorithme suivant (cf. SHAO [2012] et MALHAM et WIESE [2013]) :

- Définition d'une valeur initiale x_0 . Ce choix est arbitraire mais n'a aucun impact sur la reproduction de la courbe des taux par termes observée ;
- Simulation d'une loi du $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})$ en suivant la méthode présentée dans la section VIII.3.3.2 ;
- Simulation de $x(t)$ correspondant aux réalisations de $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})$ divisées par c_1 ;
- Simulation de $R(t, T)$ à partir de $x(t)$, des prix des zéro-coupons observés et des paramètres du modèle en utilisant la formule suivante :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\ln \left(\frac{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

VIII.3.2.3 Modèle CIR décalé à deux facteurs

Le modèle CIR2++ est un modèle de taux court instantané à deux facteurs qui consiste à ajouter un décalage déterministe à la somme de deux processus CIR indépendants. Ce modèle peut être considéré comme la généralisation naturelle à deux facteurs du modèle CIR++ présenté dans la section VIII.3.2.2.

Le modèle CIR2++ est de la forme : $r_t = x_t + y_t + \varphi(t)$, où φ est une fonction déterministe permettant de reproduire la courbe de taux initiale observée et x et y sont deux processus CIR indépendants.

Dans la suite, nous présentons d'abord le modèle CIR à deux facteurs de référence (non décalé) et nous présentons ensuite le modèle CIR2++.

VIII.3.2.3.1 Le modèle CIR à deux facteurs de référence

VIII.3.2.3.1.1 Dynamique du modèle

Le modèle CIR à deux facteurs de référence définit le taux d'intérêt instantané comme la somme de deux processus CIR indépendants sous la mesure risque-neutre.

Soit x et y deux processus définis par :

$$dx(t) = k_1(\theta_1 - x(t))dt + \sigma_1\sqrt{x(t)}dW_1(t)$$

$$dy(t) = k_2(\theta_2 - y(t))dt + \sigma_2\sqrt{y(t)}dW_2(t)$$

où W_1 et W_2 sont des mouvements browniens indépendants sous la mesure risque neutre, et $k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2$ et σ_2 sont des constantes positives telles que $2k_1\theta_1 > \sigma_1^2$ et $2k_2\theta_2 > \sigma_2^2$.

Les réels positifs $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ sont respectivement les valeurs initiales des processus x et y .

Le taux court instantané est alors défini comme suit :

$$\xi_t^\alpha = x(t) + y(t)$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 = (k_1, \theta_1, \sigma_1)$ et $\alpha_2 = (k_2, \theta_2, \sigma_2)$.

Le taux court est donc la somme linéaire de deux variables indépendantes de lois de Khi-deux non centrées et indépendantes.

VIII.3.2.3.1.2 Prix d'une obligation zéro-coupon

En raison de l'indépendance des facteurs, le prix d'une obligation zéro-coupon est directement déduit de la formule analytique du prix du modèle CIR à un facteur de référence. Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit :

$$P^\xi(t, T; x(t), y(t), \alpha) = P^1(t, T; x(t), \alpha_1) \times P^1(t, T; y(t), \alpha_2)$$

où P^1 désigne le prix d'une obligation zéro-coupon valorisée par le modèle CIR à un facteur (cf. section VIII.3.2.1.4). Rappelons que si z est un processus CIR à un facteur de paramètres $(k_i, \theta_i, \sigma_i)$, le prix d'un zéro-coupon est donné par :

$$P^1(t, T; z(t), k_i, \theta_i, \sigma_i) = A_z(t, T)e^{-B_z(t, T)z(t)}$$

où

$$- A_z(t, T) = \left[\frac{2h_i \exp\left\{\frac{(k_i + h_i)(T-t)}{2}\right\}}{2h_i + (k_i + h_i)(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)} \right]^{\frac{2k_i\theta_i}{\sigma_i^2}} ;$$

$$- B_z(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)}{2h_i + (k_i + h_i)(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)} ;$$

$$- h = \sqrt{k_i^2 + 2\sigma_i^2} ;$$

- $z \in \{x, y\}$ et $i = 1$ si $z = x$, $i = 2$ sinon.

Le taux d'intérêt à terme vu en t pour la maturité T est donné par :

$$R^\xi(t, T; x(t), y(t), \alpha) = R^1(t, T; x(t), \alpha_1) + R^1(t, T; y(t), \alpha_2)$$

où R^1 désigne le taux d'intérêt à terme valorisé par le modèle CIR à un facteur obtenu à partir de P^1 .

Sous la mesure risque neutre, la dynamique du prix des obligations s'écrit :

$$dP^\xi(t, T; \alpha) = P^\xi(t, T; \alpha) \left[\xi_t^\alpha dt - B(t, T; \alpha_1)\sigma_1\sqrt{x(t)} dW_1(t) - B(t, T; \alpha_2)\sigma_2\sqrt{y(t)}dW_2(t) \right]$$

où la fonction déterministe B est définie comme dans la section VIII.3.2.1.4.

VIII.3.2.3.1.3 Prix d'une option européenne sur une obligation zéro-coupon

Le prix d'une option d'achat évaluée à la date t dont la maturité est notée $T > t$ et le prix d'exercice noté K sur une obligation zéro-coupon dont la maturité est $S > T$ et dont le nominal est noté N , est donné par :

$$C^\xi(t, T, S, N, K; x(t), y(t), \alpha) = P^\xi(t, T; x(t), y(t), \alpha) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [N \times P^1(T, S; x_1, \alpha_1) \times P^1(T, S; x_2, \alpha_2) - K]^+ \times p_{x(T)|x(t)}^T(x_1) p_{y(T)|y(t)}^T(x_2) dx_1 dx_2$$

On notera la présence dans cette expression d'une intégrale double sur le produit de deux densités de Khi-deux non centrées. Les expressions analytiques de ces densités conditionnelles sous la mesure T -forward ont été présentées dans la section VIII.3.2.1.3.

VIII.3.2.3.2 Dynamique du modèle CIR décalé à deux facteurs

En parfaite analogie avec les développements présentés dans la section VIII.3.1.2, utilisés dans la section VIII.3.2.2 pour le cas à un facteur, le taux cours instantané du modèle CIR2++, sous la mesure risque neutre est défini par :

$$r_t = \varphi(t; \alpha) + \xi_t^\alpha = \varphi(t; \alpha) + x(t) + y(t)$$

où $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et où $\varphi(t; \alpha)$ est une fonction déterministe fonction du vecteur de paramètre $\alpha = (x_0, y_0, k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2, \sigma_2)$.

Afin de reproduire exactement la courbe des taux par termes observée sur le marché, il suffit que :

$$\varphi(t; \alpha) = f^M(0, t) - f^1(0, t; x_0, \alpha_1) - f^1(0, t; y_0, \alpha_2)$$

où f^1 est le taux *forward* instantané évalué par le modèle CIR à un facteur de référence, tel qu'indiqué dans la section VIII.3.2.2.2 et f^M est le taux *forward* instantané du marché.

Dans ce qui suit, il est utile de définir la fonction :

$$\begin{aligned} \Phi^\xi(u, v; \alpha) &= \exp \left[- \int_u^v \varphi(t; \alpha) ds \right] = \frac{P^M(0, v) P^\xi(0, u; \alpha)}{P^M(0, u) P^\xi(0, v; \alpha)} \\ &= \exp \{ [R^\xi(0, v; \alpha) - R^M(0, v)] v - [R^\xi(0, u; \alpha) - R^M(0, u)] u \} \end{aligned}$$

qui est entièrement définie à partir des prix observés ($P^M(0, T)$) et de l'expression analytique de P^ξ .

VIII.3.2.3.3 Valorisation d'une obligation zéro-coupon par le modèle CIR décalé à deux facteurs

Le processus CIR à deux facteurs ξ^α permet de valoriser les prix d'obligations zéro-coupons par des formules fermées. Cette propriété analytique est conservée dans le modèle CIR2++.

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit comme le produit de l'exponentielle de la primitive de la fonction de décalage φ et le prix d'une obligation zéro-coupon valorisée par le modèle CIR à deux facteurs non décalé (cf. section VIII.3.2.3.1). Ce prix s'écrit :

$$P(t, T; x(t), y(t), \alpha) = \Phi^\xi(t, T; \alpha) \times P^\xi(t, T; x(t), y(t), \alpha)$$

Le taux d'intérêt composé $R(t, T)$ s'écrit :

$$R(t, T) = \frac{-\ln(P(t, T; x(t), y(t), \alpha))}{T - t}$$

donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \left(B_x(t, T)x(t) + B_y(t, T)y(t) - \ln \left(\Phi^\xi(t, T; \alpha) \times A_x(t, T) \times A_y(t, T) \right) \right)$$

Notons que $R(t, T)$ est une fonction affine de $x(t)$ et $y(t)$ dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine de deux variables de lois Khi-deux non-centrées et indépendantes.

VIII.3.2.3.4 Valorisation des caps et des floors par le modèle CIR décalé à deux facteurs

Le prix à la date t d'une option d'achat européenne dont la maturité est notée $T > t$ et le prix d'exercice noté K sur une obligation zéro-coupon dont le nominal est noté N et de maturité notée $S > T$ s'écrit :

$$\begin{aligned} ZBC(t, T, S, N, K; x(t), y(t), \alpha) \\ = N \times \Phi^\xi(t, S; \alpha) \times C^\xi \left(t, T, S, N, \frac{K}{\Phi^\xi(T, S; \alpha)}; x(t), y(t), \alpha \right) \end{aligned}$$

où C^ξ est la fonction de prix d'une option d'achat valorisée par le modèle CIR à deux facteurs (cf. section VIII.3.2.3.1.3).

Le prix d'une option de vente est obtenu à partir de la parité *put-call* et s'écrit :

$$\begin{aligned} ZBP(t, T, S, N, K; x(t), y(t), \alpha) \\ = ZBC(t, T, S, N, K; x(t), y(t), \alpha) - N \times P(t, S; x(t), y(t), \alpha) + K \\ \times P(t, T; x(t), y(t), \alpha) \end{aligned}$$

Comme pour le modèle CIR à deux facteurs non-décalé, la valorisation d'une option sur une obligation zéro-coupon nécessite la résolution d'une intégrale double.

Les *caps* et les *floors* s'écrivent comme une série d'options sur des obligations zéro-coupons (cf. par exemple la section VIII.3.2.1.6). La valorisation de ces instruments peut donc être réalisée par la formule semi-fermée présentée dans la section VIII.3.2.3.1.3 ou par d'autres méthodes comme la simulation de Monte Carlo.

VIII.3.2.3.5 Valorisation des swaptions par le modèle CIR à deux facteurs décalé CIR2++

Contrairement au modèle CIR à un facteur, la décomposition de JAMSHIDIAN [1989] pour valoriser les *swaptions* n'est pas applicable pour le cas du modèle CIR à deux facteurs. A notre connaissance, nous ne disposons pas d'une formule fermée permettant de valoriser les *swaptions*.

Le prix des *swaptions* peut être évalué par d'autres méthodes, comme la simulation de Monte Carlo.

VIII.3.2.3.6 Calibrage du modèle CIR2++ sur des caps, des floors ou des swaptions

Le modèle CIR à deux facteurs décalé ne permet pas la valorisation des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Nous disposons néanmoins d'une formule semi-fermée permettant de valoriser les *caps* et les *floors* en calculant numériquement une intégrale-double sous la mesure *T-forward*.

La valorisation des *caps*, des *floors* et des *swaptions* peut être réalisée par des méthodes de Monte-Carlo classiques. Cela consiste à simuler les taux d'intérêt, évaluer les *pay-offs* et calculer l'espérance de ces *pay-offs* actualisés⁷⁹ pour disposer des prix. Le processus de simulation des taux d'intérêt composés est expliqué dans la section VIII.3.2.3.7.

Notons :

- $\beta = (k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2, \sigma_2)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{market}$: le prix du produit dérivé i valorisé par le marché (*caps*, *floors* ou *swaptions*) ;
- $f_i^{CIR2++}(\beta)$: le prix du produit dérivé i valorisé par le modèle CIR2++ par des techniques Monte-Carlo (*caps*, *floors* ou *swaptions*).

Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des dérivés retenus pour le calibrage (d est une distance, classiquement les praticiens retiennent une distance euclidienne) :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (f_i^{CIR2++}(\beta))_i \right) \right)$$

Notons par ailleurs que le modèle CIR2++ permet de générer des taux négatifs et de reproduire la courbe de taux anticipée sans introduire de facteur de décalage arbitraire comme dans les modèles log-normaux.

VIII.3.2.3.7 Simulation du modèle CIR2++

Comme pour le modèle CIR++, nous présentons ici une méthode qui diffuse exactement le modèle sans passer par des discrétisations d'Euler et permet d'éviter ainsi les problématiques liées à la convergence.

Les variables indépendantes x et y suivent un processus CIR (non-décalé). Alors pour tout $t \geq 1$ les variables aléatoire $x(t)$ conditionnellement à $x(t-1)$ et $y(t)$ conditionnellement à $y(t-1)$ ont respectivement les mêmes lois que les variables $\chi^2(v^{(x)}, \lambda_{t,t-1}^{(x)})/c_1^{(x)}$ et $\chi^2(v^{(y)}, \lambda_{t,t-1}^{(y)})/c_1^{(y)}$ où $\chi^2(v^{(z)}, \lambda_{t,t-1}^{(z)})$ suit une loi du khi-deux non-centrée de paramètres $(v^{(z)}, \lambda_{t,t-1}^{(z)})$ tels que :

- $c_1^{(z)} = \frac{4k_i}{\sigma_i^2(1-\exp(-k_i))}$;
- $v^{(z)} = 4k_i\theta_i/\sigma_i^2$;
- $\lambda_{t,t-1}^{(z)} = c_1^{(z)}z_{t-1}\exp(-k_i)$;
- $z \in \{x, y\}$ et $i = 1$ si $z = x$, $i = 2$ sinon.

Afin de simuler des réalisations du taux d'intérêt composé continu $R(t, T)$ vu en $t \geq 1$ pour la maturité T nous avons retenu l'algorithme suivant (cf. SHAO [2012] et MALHAM et WIESE [2013]) :

⁷⁹ Le lecteur peut se référer au chapitre 1 de BRIGO et MERCURIO [2007] qui présente l'écriture des *caps*, *floors* et *swaptions* sous forme de *pay-offs* actualisés.

- Définition des valeurs initiales x_0 et y_0 . Ces choix sont arbitraires mais n'ont aucun impact sur la reproduction de la courbe des taux par termes observée ;
- Simulation des lois du $\chi^2(v^z, \lambda_{t,t-1}^z)$, $z \in \{x, y\}$, en suivant la méthode présentée dans la section VIII.3.3.2 ;
- Simulation de $x(t)$ et $y(t)$ correspondant, respectivement, aux réalisations de $\chi^2(v^x, \lambda_{t,t-1}^x)$ divisées par c_1^x et $\chi^2(v^y, \lambda_{t,t-1}^y)$ divisées par c_1^y ;
- Simulation du prix du zéro-coupon $P(t, T; x(t), y(t), \alpha)$ à partir de $x(t)$ et $y(t)$, des prix des zéro-coupons observés et des paramètres du modèle (cf. section VIII.3.2.3.3).
- Simulation de $R(t, T)$ en utilisant la formule suivante :

$$R(t, T) = \frac{-\ln(P(t, T; x(t), y(t), \alpha))}{T - t}$$

VIII.3.3 Loi du Khi-deux non centrée : définition et propriétés

Cette section a pour objectif de :

- Définir la famille des lois du Khi-deux non-centrées et présenter leurs caractéristiques ;
- Présenter une méthode de simulation des lois du Khi-deux non-centrées ;
- Présenter quelques approximations normales aux lois Khi-deux non-centrées.

Nous nous sommes appuyés sur les trois références suivantes pour rédiger cette section : JOHNSON et al [1970], DEVROYE [1986] et PATEL et READ [1982].

VIII.3.3.1 Définition et propriétés

Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité χ^2 centrée avec $v > 0$ degrés de liberté si la densité de probabilité de X est donnée par :

$$p_{\chi^2(v)}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{v}{2}-1} ; x > 0$$

où Γ est la fonction Gamma.

Quand $v = 0$ alors $p_{\chi^2(0)}(x) = 0$ et la fonction de répartition $F_{\chi^2(0)}(x) = 1$ pour tout $x > 0$.

La loi du χ^2 centrée est un cas particulier de la loi Gamma. En effet, si X suit une loi Gamma de paramètres (a, b) alors sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}}{b^a \Gamma(a)} ; x > 0$$

Pour $a = v/2$ et $b = 2$, nous retrouvons exactement la densité de probabilité d'une loi du χ^2 centrée à v degrés de liberté.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi du χ^2 non-centrée de degrés de liberté $\nu \geq 0$ et de paramètre de décentralisation λ si sa fonction de répartition s'écrit :

$$F_{\chi^2(\nu, \lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} F_{\chi^2(\nu+2k)}(x)$$

La densité s'écrit donc :

$$p_{\chi^2(\nu, \lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} p_{\chi^2(\nu+2k)}(x)$$

Notons que la fonction $p_{\chi^2(\nu, \lambda)}$ s'écrit comme la somme de densités de lois χ^2 centrées pondérées par des probabilités de la loi de Poisson.

Quand ν est un entier positif, la fonction de répartition d'une loi du χ^2 non-centrée à ν degrés de liberté et de paramètre de décentralisation λ s'écrit naturellement comme la fonction de répartition de la somme quadratique de variables aléatoires normales. Plus précisément, soit X_1, \dots, X_ν des variables aléatoires normales indépendantes de moyennes μ_k , $k = 1, \dots, \nu$ et de variances unitaires. Alors la densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{\nu} X_k^2$ est $p_{\chi^2(\nu, \lambda)}$ avec : $\lambda = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k^2$.

Les propriétés distributionnelles d'une loi du χ^2 non-centrée peuvent être difficiles à obtenir car la densité n'est pas sous une forme fermée. Une autre expression de la densité $p_{\chi^2(\nu, \lambda)}$, qui n'est pas nécessairement plus simple, est :

$$p_{\chi^2(\nu, \lambda)}(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x + \lambda}{2}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} I_{\frac{\nu-2}{2}}(\sqrt{\lambda x})$$

La fonction $I_\nu(x)$ désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce définie par :

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$$

Par ailleurs, si N est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de moyenne $\lambda/2$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(k) = \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} ; k = 0, 1, \dots$$

Alors la variable aléatoire χ^2 centrée à $\nu + 2N$ degrés de liberté suit une loi du χ^2 non-centrée à ν degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ .

Notons en effet que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) P(\chi^2(\nu + 2N) < x | N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} F_{\chi^2(\nu+2k)}(x) = F_{\chi^2(\nu, \lambda)}(x)$$

VIII.3.3.2 Simulation d'une loi du χ^2 non-centrée

Soit $X_{(v,\lambda)}$ une variable aléatoire χ^2 non-centrée. Alors la variable $X_{(v,\lambda)}$ peut s'écrire comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes X_v et X_λ : $X_{(v,\lambda)} = X_v + X_\lambda$ avec (JOHNSON et al [1970]) :

- La variable X_v suit une loi du χ^2 centrée à v degrés de liberté ;
- La variable X_λ suit une loi du χ^2 non-centrée à 0 degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ . C'est la part purement excentrique de la variable $X_{(v,\lambda)}$. La variable X_λ suit donc une loi χ^2 centrée à $2N$ degrés de liberté, où N est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de moyenne $\lambda/2$. Sa fonction de répartition s'écrit :

$$F_{\chi^2(0,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k F_{\chi^2(2k)}(x)$$

Cette décomposition d'une variable aléatoire χ^2 non-centrée en deux variables, isolant le degré de liberté dans une variable de loi χ^2 centrée et le paramètre de décentralisation dans une variable de loi χ^2 non-centrée mais à 0 degrés de liberté, permet de simuler la loi du χ^2 non-centrée à partir de variables de lois Gamma et de Poisson. Les générateurs de lois Gamma ou de Poisson sont en général disponibles dans les outils et logiciels statistiques classiques.

En effet :

- La variable X_v suit une loi Gamma de paramètres $(v/2, 2)$ et peut être générée directement en simulant une loi Gamma ;
- La variable X_λ suit une loi χ^2 centrée à $2N$ degrés de liberté, où N suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda/2$. Elle peut être générée en tirant d'abord un nombre aléatoire K suivant la loi de Poisson et tirer ensuite une loi Gamma de paramètres $(K, 2)$.

VIII.3.3.3 Approximation d'une loi du χ^2 non-centrée par des lois normales

Les propriétés distributionnelles d'une loi du χ^2 non-centrée peuvent être difficiles à obtenir car la densité n'est pas sous une forme fermée. L'approximation d'une loi du χ^2 non-centrée par des variables normales peut être intéressantes. PATEL et READ [1982] synthétisent un ensemble d'approximations que nous présentons dans la suite.

Désignons par $y \rightarrow F(y; v, \lambda)$ la fonction de répartition d'une loi χ^2 non-centrée de paramètres (v, λ) . La liste suivante présente quelques méthodes d'approximation de la fonction de répartition F par la fonction de répartition normales centrées et réduites notées Φ .

1. Approximations linéaires : deux approximations normales simples, ayant une erreur de l'ordre de $O(1/\sqrt{\lambda})$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

- a. $F(y; v, \lambda) \approx \Phi\left(\frac{y-v-\lambda}{\sqrt{2(v+2\lambda)}}\right)$;

b. $F(y; v, \lambda) \approx \Phi\left(\frac{y-v-\lambda+1}{\sqrt{2(v+2\lambda)}}\right)$.

2. Approximations non linéaires :

- a. Approximation plus adaptée quand le paramètre de décentralisation est petit (et donc quand la distribution ressemble plus à celle du χ^2 centrée) et se détériore à mesure que le paramètre λ augmente : $F(y; v, \lambda) \approx \Phi(u)$ avec :

$$u = \frac{\left(\left\{\frac{y}{v+\lambda}\right\}^{\frac{1}{3}} - 1 + \frac{2(v+2\lambda)}{9(v+\lambda)^2}\right)}{\left(\frac{2(v+2\lambda)}{9(v+\lambda)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

- b. Approximation dont l'erreur est comparable à celles des approximations linéaires : $F(y; v, \lambda) \approx \Phi(u)$ avec :

$$u = \sqrt{\frac{2y(v+\lambda)}{v+2\lambda} - \left(\frac{2(v+\lambda)^2}{v+2\lambda} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

- c. Approximation sans contraintes sur le degré de liberté et le paramètre de décentralisation. Elle reste adaptée même quand le degré de liberté est faible. L'erreur est de l'ordre de $O(1/\lambda^2)$. Bien que compliquée, cette approximation est la meilleure de toutes les approximations listées ici. ARMEL et PLANCHET [2020a] illustrent sa qualité pour un ensemble de paramètres. La

fonction de répartition s'écrit : $F(y; v, \lambda) \approx \Phi\left(\frac{\left(\left(\frac{y}{v+\lambda}\right)^h - a\right)}{b}\right)$ avec :

$$h = 1 - \frac{2(v+\lambda)(v+3\lambda)}{3(v+2\lambda)^2}$$

$$a = 1 + \frac{h(h-1)(v+2\lambda)}{(v+\lambda)^2} - \frac{h(h-1)(2-h)(1-3h)(v+2\lambda)^2}{2(v+\lambda)^4}$$

$$b = \frac{h\sqrt{2(v+2\lambda)}}{v+\lambda} \left(1 - \frac{(1-h)(1-3h)(v+2\lambda)}{2(v+\lambda)^2}\right)$$

- d. Approximation similaire à celle du point 2.c mais l'erreur est de l'ordre de $O(1/\lambda)$. En effet la fonction de répartition s'écrit : $F(y; v, \lambda) \approx \Phi\left(\frac{\left(\left(\frac{y}{v+\lambda}\right)^h - a'\right)}{b'}\right)$ avec :

$$h = 1 - \frac{2(v+\lambda)(v+3\lambda)}{3(v+2\lambda)^2}$$

$$a' = 1 + \frac{h(h-1)(v+2\lambda)}{(v+\lambda)^2}$$

$$b' = \frac{h\sqrt{2(v+2\lambda)}}{v+\lambda}$$

3. Approximations des quantiles : soit y_p et z_p les quantiles d'ordre $1 - p$ tel que $F(y_p; v, \lambda) = 1 - p = \Phi(z_p)$. En reprenant les notations du point 2, on peut approximer y_p par z_p comme suit :

$$a. y_p \approx (v + \lambda)(z_p \sqrt{C} + 1 - C)^3 ; C = \frac{2(v+2\lambda)}{9(v+\lambda)^2} ;$$

$$b. y_p \approx (v + \lambda)(a + bz_p)^{\frac{1}{h}} ;$$

$$c. y_p \approx (v + \lambda)(a' + b'z_p)^{\frac{1}{h}} .$$

VIII.4 Approche par les déflateurs : démonstrations

VIII.4.1 Changement de probabilité - rappel théorique

L'objectif de cette section est de rappeler sommairement le cadre théorique de changement de probabilité et de construction des déflateurs. Nous nous sommes appuyés sur DUFFIE [2001] et EL KAROUI [2004] pour la réalisation de cette synthèse.

Soit F un sigma algèbre et soit P et Q deux mesures de probabilité F -mesurables. On dit que P et Q sont équivalentes si et seulement si pour tout $A \in F$ on a : $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$.

Si P et Q sont deux mesures de probabilité équivalentes sur F alors il existe une unique variable aléatoire L^F sur F , strictement positive et dont l'espérance sous P est égale à 1, vérifiant pour tout $A \in F$: $Q(A) = \int_A L^F dP$.

La variable aléatoire s'écrit alors : $L^F = dQ/dP$ sur F et est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P (appelée également la densité ou vraisemblance de Q par rapport à P).

Si $G \subseteq F$ alors on a, pour toute variable aléatoire X F -mesurable :

$$E^Q(X|G) = \frac{E^P(L^F \cdot X|G)}{E^P(L^F|G)}$$

En particulier : $E^Q(X) = E^P(L^F \cdot X)$.

Par ailleurs, si $G \subseteq F$ est un sous sigma-algèbre de F , alors Q et P sont équivalentes sur G et la densité de Q par rapport à P sur G noté L^G s'écrit : $L^G = E^P(L^F|G) = E^P(dQ/dP|G)$.

Soient maintenant $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ une filtration et P et Q deux mesures de probabilité équivalentes sur F_T . On définit le processus $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ par :

$$L(t) = E^P(L(T)|F_t) = E^P\left(\frac{dQ}{dP} \middle| F_t\right)$$

Par définition, le processus de densité (ou de vraisemblance) $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale sous P .

Pour tous instants $(t, s) \in [0, T]^2$ et $t \leq s$, et toute variable aléatoire F_s -mesurable X telle que $E^Q(|X|) < +\infty$:

$$E^Q(X|F_t) = \frac{E^P(L(s)X|F_t)}{L(t)}$$

Ainsi, un processus $\{X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -martingale sous Q si et seulement si le processus $\{L(t)X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -martingale sous P .

Une mesure de probabilité Q équivalente à P est une mesure martingale équivalente pour le processus de prix X de N titres si X est une martingale par rapport à Q et si la dérivé Radon-Nikodym dQ/dP a une variance finie⁸⁰. Une mesure martingale équivalente est communément qualifiée de mesure « risque neutre ».

Supposons qu'il existe un processus de taux court instantané noté $\{r(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ et soit $\{\delta(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ un processus défini par :

$$\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

Supposons, après actualisation par $\{\delta(t)\}_{0 \leq t \leq T}$, qu'il existe une mesure martingale Q équivalente à P avec le processus de densité $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$. Alors un déflateur $\{D(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est défini par :

$$D(t) = L(t) \cdot \delta(t)$$

à condition que $var(D(t)) < +\infty$ pour tout t .

Inversement, supposons que $\{D(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ soit un déflateur pour le processus $\{X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$, i.e le processus $\{D(t) \cdot X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une P -martingale.

Soit le processus $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$L(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \cdot \frac{D(t)}{D(0)}$$

Alors, pourvu que $var(L(T)) < +\infty$, $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est le processus de densité permettant de définir une mesure martingale équivalente à P .

Soit $\{W^P(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ un processus P -Wiener et supposons que la filtration $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ est la filtration naturelle complétée ($F_t = Vect(W(s), 0 \leq s \leq t)$).

Alors, pour chaque processus X (P, F_t)-martingale, il existe un nombre réel x et un processus adapté h (vérifiant la condition de Novikov) tels que :

$$X(t) = x + \int_0^t h_s dW^P(t)$$

et donc :

$$dX(t) = h_t dW^P(t)$$

Ce théorème est connu sous le nom du théorème de représentation. Il garantit l'existence d'un processus h vérifiant l'équation ci-dessus mais ne nous dit cependant pas comment trouver ou construire ce processus h . C'est ce que nous proposons dans le paragraphe suivant.

⁸⁰ La condition de variance finie est une propriété technique qui n'est pas uniformément adoptée dans la littérature.

Supposons que nous voulions changer la mesure de P à Q sur F_T . Pour ce faire, nous avons besoin d'une P -martingale L avec $L_0 = 1$ à utiliser comme processus de vraisemblance. Afin de garantir la stricte positivité du processus L et donc l'équivalence entre P et Q , on peut choisir un processus adapté θ et supposer que le processus L s'écrit :

$$dL(t) = L(t) \cdot \theta(t) dW^P(t)$$

Le processus L est une P -martingale et on a par le lemme d'Itô :

$$L(t) = \exp\left(\int_0^t \theta(s) dW^P(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds\right)$$

Maintenant que nous avons défini le processus de vraisemblance de Q , la question qui se pose naturellement est de savoir quelles sont les propriétés de $\{W^P(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ sous la nouvelle mesure Q . Ce problème est résolu par le théorème de Girsanov que nous rappelons dans la suite.

Soit W^P un processus P -Wiener et soit T un horizon d'intérêt.

Soit θ un processus adapté et définissons le processus L par : $dL(t) = L(t)\theta(t)dW^P(t)$ et $L(0) = 1$.

Supposons que $E^P(L(T)) = 1$ et soit Q une mesure de probabilité vérifiant :

$$dQ = L(t)dP | F_t$$

Alors Q est équivalente à P et le processus W^Q , défini par :

$$W^Q(t) = W^P(t) - \int_0^t \theta(s) ds$$

est Q -Wiener et on peut écrire : $dW^Q(s) = dW^P(s) - \theta(s)ds$.

Enfin, notons que si le processus des flux actualisés par le taux sans risque, $\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$, est une martingale sous Q , alors le processus des flux actualisés par le déflateur, $\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)L(t)$, est martingale sous P .

Sous les hypothèses de complétude du marché et d'absence d'opportunité d'arbitrage, les travaux de HARRISSON et KREPS [1979] et HARRISON et PLISKA [1981] ont montré qu'il existe une unique mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique telle que les prix actualisés aux taux sans risque soient, sous cette probabilité, des martingales. Cette probabilité est connue sous la dénomination de « mesure de probabilité risque-neutre ».

VIII.4.2 Le prix d'une obligation zéro coupon sous P

Nous présentons dans cette annexe la démonstration de l'écriture en formule fermée du prix d'une obligation zéro-coupon.

Soit $r(t)$ le taux court instantané à la date t défini par $r(t) = x(t) + \varphi(t)$ où x est un processus CIR à un facteur dont l'équation différentielle stochastique sous la probabilité historique P s'écrit :

$$dx(t) = (k - \lambda) \left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^P(t); x(0) = x_0$$

Et φ est une fonction déterministe permettant au modèle de reproduire la structure par termes des taux d'intérêt.

Supposons que la prime de risque s'écrit : $\lambda(t) = \lambda\sqrt{x(t)}/\sigma_x$.

Alors le prix du zéro coupon à la date t et de maturité T s'écrit :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

où

- $\bar{A}'(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T)$;
- $P^M(0, T)$ est le prix de marché de l'obligation zéro-coupon sans risque observée à l'instant 0 pour la maturité T ;
- $A(t, T)$ et $B(t, T)$ sont définis dans la suite :

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

et

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}$$

Démonstration

Sous la probabilité risque neutre Q , le taux court instantané à la date t est défini par $r(t) = x(t) + \varphi(t)$ où x est un processus CIR à un facteur dont l'équation différentielle stochastique sous la probabilité Q s'écrit :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma_x\sqrt{x(t)}dW_{rate}^Q(t); x(0) = x_0$$

Le prix d'une obligation zéro coupon à la date t de maturité T s'écrit sous la probabilité Q (BRIGO et MERCURIO [2007]) :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

Notons que :

- $B(t, T)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$1 - \frac{1}{2}B(t, T)^2\sigma_x^2 - k \cdot B(t, T) + \frac{dB(t, T)}{dt} = 0$$

- $a(t, T) = \ln(A(t, T))$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{da(t, T)}{dt} - B(t, T)k\theta = 0$$

En utilisant le lemme d'Itô on peut montrer que l'équation différentielle de $P(t, T)$ sous Q s'écrit :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = (x(t) + \varphi(t))dt - B(t, T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^Q(t)$$

On a alors sous la mesure de probabilité historique P :

$$\lambda(t) = \lambda\sqrt{x(t)}/\sigma_x$$

$$dW_{rate}^Q(t) = dW_{rate}^P(t) + \lambda(t)dt$$

et donc :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \varphi(t)dt + x(t)(1 - \lambda B(t, T))dt - B(t, T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t)$$

En appliquant le Lemme d'Itô sur $\ln(P(t, T))$ on obtient :

$$d\ln(P(t, T)) = 0 \cdot dt + \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{P(t, T)^2} \left(B(t, T)P(t, T)\sigma_x \sqrt{x(t)} \right)^2 dt$$

Donc :

$$d\ln(P(t, T)) = \varphi(t)dt + x(t)(1 - \lambda B(t, T))dt - B(t, T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t) - \frac{1}{2} B(t, T)^2 \sigma_x^2 x(t)dt$$

$$d\ln(P(t, T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left(1 - \lambda B(t, T) - \frac{1}{2} B(t, T)^2 \sigma_x^2 \right) dt - B(t, T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t)$$

Or

$$B(t, T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t) = B(t, T) \left(dx(t) - (k - \lambda) \left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt \right)$$

Donc

$$d\ln(P(t, T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left(1 - \lambda B(t, T) - \frac{1}{2} B(t, T)^2 \sigma_x^2 \right) dt - B(t, T) \left(dx(t) - (k - \lambda) \left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt \right)$$

Ainsi

$$d\ln(P(t, T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left(1 - \frac{1}{2} B(t, T)^2 \sigma_x^2 - k \cdot B(t, T) \right) dt - B(t, T)dx(t) + B(t, T)k\theta dt$$

En utilisant le lemme d'Itô on peut écrire :

$$B(t, T)dx(t) = d(B(t, T)x(t)) - x(t) \cdot \frac{dB(t, T)}{dt} \cdot dt$$

Donc :

$$d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left(1 - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 - k \cdot B(t,T) \right) dt - d(B(t,T)x(t)) \\ + x(t) \cdot \frac{dB(t,T)}{dt} \cdot dt + B(t,T)k\theta dt$$

Or :

$$1 - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 - k \cdot B(t,T) + \frac{dB(t,T)}{dt} = 0 \\ \frac{da(t,T)}{dt} - B(t,T)k\theta = 0 \\ d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt - d(B(t,T)x(t)) + B(t,T)k\theta dt$$

Sachant que $P(T,T) = 1$ et $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s)ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$ on peut écrire la dynamique de $P(t,T)$ sous P comme :

$$P(t,T) = \bar{A}'(t,T)e^{-B(t,T)x(t)}$$

VIII.4.3 La forme du déflateur

L'équation différentielle stochastique du déflateur sous la mesure de probabilité historique est :

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = -r(t) - \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Le déflateur stochastique s'écrit en utilisant le lemme d'Itô :

$$D(T) = D(t)\exp\left(-\int_t^T r(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda(s)^2 ds - \int_t^T \lambda(s)dW_{rate}^P(s)\right)$$

et on a :

- $\int_t^T r(s)ds = \int_t^T \varphi(s)ds + \int_t^T x(s)ds$;
- $\lambda(s) = \lambda\sqrt{x(t)}/\sigma_x$ donc $\frac{1}{2}\int_t^T \lambda(s)^2 ds = \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\int_t^T x(t)ds$;
- En utilisant l'EDS des taux d'intérêt :

$$\lambda(s)dW_{rate}^P(t) = \frac{\lambda}{\sigma_x}\sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t) = \frac{\lambda}{\sigma_x^2}\left(dx(t) - (k - \lambda)\left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t)\right)dt\right)$$

donc :

$$\int_t^T \lambda(s)dW_{rate}^P(t) = \frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T) - x(t)) - \frac{\lambda k\theta}{\sigma_x^2}(T - t) + \frac{\lambda(k-\lambda)}{\sigma_x^2}\int_t^T x(s)ds.$$

Ainsi :

$$D(T) = D(t) \exp\left(\frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2}(T-t)\right) \exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T)-x(t))\right) \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right)$$

avec : $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$

VIII.4.4 Le prix de l'actif risqué sous P

Comme présenté dans la section V.2.1, le processus de l'actif risqué s'écrit sous la mesure de probabilité historique P :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) + \lambda(t)^2)dt + \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Le prix de l'actif risqué s'écrit :

$$S(T) = S(t) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2}k\theta(T-t)\right) \cdot \exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T)-x(t))\right) \cdot \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right)$$

Rappelons par ailleurs que :

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$$

Démonstration

Comme présenté dans la section V.2.1, le processus de l'actif risqué s'écrit sous la mesure de probabilité historique P :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) + \lambda(t)^2)dt + \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Donc :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\varphi(t) + x(t)\left(1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2}\right)\right)dt + \lambda\sqrt{x(t)}/\sigma_x dW_{rate}^P(t)$$

Or :

$$\sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t) = \frac{1}{\sigma_x}\left(dx(t) - (k - \lambda)\left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t)\right)dt\right)$$

Et on a donc :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\varphi(t) + x(t)\left(1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2}\right)\right)dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2}\left(dx(t) - (k - \lambda)\left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t)\right)dt\right)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\varphi(t) - \frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta \right) dt + x(t) \left(1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (k - \lambda) \right) dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} dx(t)$$

En appliquant le Lemme d'Itô sur $\ln(S(t))$ on obtient :

$$d\ln(S(t)) = 0 \cdot dt + \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S(t)^2} \lambda(t)^2 S(t)^2 dt$$

Ainsi :

$$d\ln(S(t)) = 0 \cdot dt + \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} x(t) dt$$

Donc :

$$d\ln(S(t)) = \left(\varphi(t) - \frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta \right) dt + x(t) \left(1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (k - \lambda) \right) dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} dx(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} x(t) dt$$

Ainsi :

$$d\ln(S(t)) = \left(\varphi(t) - \frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta \right) dt + x(t) \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (k - \lambda) \right) dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} dx(t)$$

Enfin :

$$S(T) = S(t) \exp \left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta(T - t) \right) \cdot \exp \left(\int_t^T \varphi(s) ds \right) \cdot \exp \left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x(t)) \right) \cdot \exp \left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^T x(s) ds \right)$$

$$\text{avec : } \exp \left(-\int_t^T \varphi(s) ds \right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$$

VIII.4.5 L'espérance des rendements de l'actif risqué

Notons s_t le rendement logarithmique de l'actif risqué à la date t sur un horizon d'un an. Par définition :

$$s_{t+1} = \ln \left(\frac{S(t+1)}{S(t)} \right)$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire s_{t+1} sous la probabilité historique P s'écrit :

$$E^p(s_{t+1}) = R^M(t, t+1) - \left(\ln \left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)} \right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t)) \right) \\ + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right)$$

Avec :

- $R^M(t, t+1)$: le taux observé du marché entre la date t et $t+1$;
- $A(t, T)$ et $B(t, T)$ sont des fonctions déterministes définie dans la section V.2.2.1 ;
- x_0 est la valeur initiale du processus x_t .

L'espérance de l'excès de rendement, noté e_t par rapport au taux observé du marché s'écrit donc :

$$E^p(e_{t+1}) = - \left(\ln \left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)} \right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t)) \right) \\ + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right)$$

Démonstration

D'après la section V.2.4.1, on a sous P :

$$S(T) = S(t) \exp \left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta(T-t) \right) \cdot \exp \left(\int_t^T \varphi(s) ds \right) \cdot \exp \left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x(t)) \right) \cdot \exp \left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^T x(s) ds \right)$$

Et

$$dx(t) = k_2(\theta_2 - x(t))dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^P(t) ; x(0) = x_0$$

Avec :

- $k_2 = k - \lambda$;
- $\theta_2 = \frac{k\theta}{k-\lambda}$.

On peut écrire :

$$s_{t+1} = -\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta + \int_t^{t+1} \varphi(s) ds + \left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(t+1) - x(t)) \right) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^{t+1} x(s) ds$$

Et donc

$$E^p(s_t) = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$$

Avec

- $\Lambda_0 = -\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta$
- $\Lambda_1 = E^p \left(\int_t^{t+1} \varphi(s) ds \right)$

$$\begin{aligned}
- \Lambda_2 &= E^p \left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(t+1) - x(t)) \right) \\
- \Lambda_3 &= E^p \left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^{t+1} x(s) ds \right)
\end{aligned}$$

On a :

$$\exp \left(- \int_t^{t+1} \varphi(s) ds \right) = \frac{P^M(0, t+1)}{P^x(0, t+1)} \cdot \frac{P^x(0, t)}{P^M(0, t)} = \frac{\exp(-R^M(t, t+1))}{\exp(-U^x(t, t+1))}$$

Où :

$$\begin{aligned}
U^x(t, t+1) &= \ln(P^x(0, t)) - \ln(P^x(0, t+1)) \\
&= \ln \left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)} \right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t))
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\Lambda_1 = E^p \left(\int_t^{t+1} \varphi(s) ds \right) = R^M(t, t+1) - U^x(t, t+1)$$

Aussi, l'espérance de x s'écrit sous P :

$$E^p\{x(t)|F_s\} = x(s)e^{-k_2(t-s)} + \theta_2(1 - e^{-k_2(t-s)})$$

Donc

$$E^p(x(t)) = x(0)e^{-k_2 t} + \theta_2(1 - e^{-k_2 t})$$

et :

$$E^p(x(t)) = x_0 e^{-k_2 t} + \theta_2(1 - e^{-k_2 t})$$

Et donc :

$$\Lambda_2 = E^p \left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(t+1) - x(t)) \right) = \frac{\lambda}{\sigma_x^2} e^{-k_2 t} (\theta_2 - x_0) (1 - e^{-k_2})$$

Par ailleurs :

$$E^p \left(\int_t^{t+1} x(s) ds \right) = \int_t^{t+1} E^p(x(s)) ds = \int_t^{t+1} (x(0)e^{-k_2 s} + \theta_2(1 - e^{-k_2 s})) ds$$

Ainsi :

$$E^p \left(\int_t^{t+1} x(s) ds \right) = e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2$$

Donc :

$$\Lambda_3 = E^p \left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^{t+1} x(s) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_3 &= \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) \\
\Lambda_3 &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k_2}{\sigma_x^2}\right) \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) \\
\Lambda_3 &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) \\
&\quad + \frac{\lambda k_2}{\sigma_x^2} \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) \\
\Lambda_3 &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) + \frac{\lambda k_2}{\sigma_x^2} \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1)\right) \\
&\quad + \frac{\lambda k_2 \theta_2}{\sigma_x^2} \\
\Lambda_3 &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) + e^{-k_2 t} \frac{\lambda(\theta_2 - x_0)}{\sigma_x^2} (e^{-k_2} - 1) + \frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2} \\
\Lambda_3 &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) - \Lambda_2 - \Lambda_0
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2\right) \\
&= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{\left(\frac{k\theta}{k-\lambda} - x_0\right)}{k-\lambda} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right) \\
&= \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$E^p(s_{t+1}) = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$$

donc :

$$\begin{aligned}
E^p(s_{t+1}) &= R^M(t, t+1) - \left(\ln\left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)}\right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t))\right) \\
&\quad + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
E^p(e_{t+1}) &= -\left(\ln\left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)}\right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t))\right) \\
&\quad + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

VIII.4.6 L'excès de rendement de l'actif risqué

A long terme, en régime permanent ($t \gg 0$), l'excès de rendement ne dépend que du facteur de risque λ et des paramètres du modèle CIR (k, θ et σ_x) et s'écrit :

$$E^p(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Démonstration

L'excès de rendement s'écrit en espérance :

$$\begin{aligned} E^p(e_{t+1}) &= - \left(\ln \left(\frac{A(0,t)}{A(0,t+1)} \right) + x_0(B(0,t+1) - B(0,t)) \right) \\ &\quad + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right) \\ E^p(e_{t+1}) &= F_1(t+1) + F_2(t+1) + F_3(t+1) \end{aligned}$$

où :

$$- F_1(t+1) = -\ln \left(\frac{A(0,t)}{A(0,t+1)} \right) \text{ et donc :}$$

$$F_1(t+1) = -\frac{2k\theta}{\sigma_x^2} \ln \left[\frac{\exp \left\{ \frac{(k+h)t}{2} \right\}}{\exp \left\{ \frac{(k+h)(t+1)}{2} \right\}} \times \frac{2h + (k+h)(\exp \{(t+1)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp \{th\} - 1)} \right]$$

$$F_1(t+1) = -\frac{2k\theta}{\sigma_x^2} \ln \left[\exp \left\{ \frac{-(k+h)}{2} \right\} \times \frac{2h + (k+h)(\exp \{(t+1)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp \{th\} - 1)} \right]$$

$$- F_2(t+1) = -x_0(B(0,t+1) - B(0,t)) \text{ et donc :}$$

$$F_2(t+1) = -x_0 \left(\frac{2(\exp \{(t+1)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp \{(t+1)h\} - 1)} - \frac{2(\exp \{th\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp \{th\} - 1)} \right)$$

$$- F_3(t+1) = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right)$$

En régime permanent, $t \gg 0$ on peut observer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t+1) = -\frac{2k\theta}{\sigma_x^2} \ln \left[\exp \left\{ \frac{-(k+h)}{2} \right\} \times \exp(h) \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t+1) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_2(t+1) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_3(t+1) = \frac{k\theta}{k-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

Donc, à long terme, en régime permanent, l'excès de rendement s'écrit :

$$E^p(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

