



Université de Paris-Est

**Synthèse des travaux de recherche pour l'habilitation  
à diriger des recherches**

Spécialité : Mathématiques

**Présentée par Aurélien ALFONSI**

**Discrétisation de processus et  
modélisation en finance**

Habilitation soutenue le 14 décembre 2012 devant le jury composé de :

Jim GATHERAL	<i>Rapporteur</i>
Emmanuel GOBET	<i>Rapporteur</i>
Benjamin JOURDAIN	<i>Examineur</i>
Damien LAMBERTON	<i>Président</i>
Philip PROTTER	<i>Rapporteur</i>
Alexander SCHIED	<i>Examineur</i>



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Damiano Brigo, Benjamin Jourdain et Alexander Schied. Ils ont accompagné mes débuts dans la recherche et m'ont chacun beaucoup appris. Travailler avec eux m'a été et m'est toujours très agréable.

Je suis très reconnaissant à Jim Gatheral, Emmanuel Gobet et Philip Protter de m'avoir consacré du temps en écrivant un rapport sur mes travaux. Je suis également très heureux que Damien Lambertson ait accepté de participer à mon jury.

J'ai la chance d'effectuer ma recherche dans un cadre agréable et stimulant. A ce titre, je tiens à remercier mes collaborateurs pour les nombreuses discussions de mathématiques, finance ou autre que j'ai pu avoir. Celles-ci enrichissent mon travail et le rendent plus intéressant. Je ne me risquerais pas à faire la longue liste des personnes avec qui j'ai eu le plaisir de travailler ou simplement d'échanger des idées, par crainte d'un impardonnable oubli. Si vous lisez ces lignes, vous en faites probablement partie! Je tiens néanmoins à saluer en particulier mes collègues, anciens et actuels, du CERMICS, du projet INRIA MathRisk (anciennement Mathfi) et de la chaire "Risques Financiers".

Enfin, je souhaite remercier mes proches et ma famille pour leur affection et leur soutien inconditionnel.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Discrétisation de processus en finance</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction et motivations . . . . .	7
1.2	Méthodes de Splitting . . . . .	10
1.3	Schémas d'ordre élevé pour le processus CIR . . . . .	15
1.3.1	Un schéma d'ordre deux . . . . .	15
1.3.2	Un schéma d'ordre trois . . . . .	17
1.3.3	Application aux modèles financiers (Heston et ATSM) . . . . .	18
1.4	Simulation des processus de Wishart . . . . .	20
1.4.1	Simulation exacte et schémas d'ordre élevé . . . . .	22
1.4.2	Processus de corrélation . . . . .	27
1.5	Bilan et perspectives . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Modélisation du risque de liquidité en finance</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Un modèle simple de carnet d'ordres . . . . .	38
2.3	Un modèle d'impact sur les prix . . . . .	41
2.4	Résolution du problème d'exécution optimale . . . . .	42
2.4.1	Exécution optimale pour des stratégies discrètes . . . . .	42
2.4.2	Manipulations de prix . . . . .	45
2.4.3	Exécution optimale en temps continu . . . . .	46
2.5	Etude d'autres formes de résilience du marché . . . . .	51
2.6	Perspectives . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Résumé des autres travaux de recherche</b>	<b>59</b>



# Chapitre 1

## Discrétisation de processus en finance

### 1.1 Introduction et motivations

La simulation du processus de Cox-Ingersoll-Ross a été le point de départ de mes travaux sur la discrétisation des processus. Ces processus ont été considérés pour la première fois dans un contexte financier en 1985 par Cox, Ingersoll et Ross [43, 42] afin de modéliser le taux d'intérêt court. Ils sont aujourd'hui très largement utilisés en finance pour modéliser d'autres quantités comme par exemple la volatilité d'un actif risqué dans le modèle de Heston [67]. Leur dynamique est décrite par l'Equation Différentielle Stochastique (EDS) suivante :

$$X_t = x_0 + \int_0^t (a - kX_s)ds + \int_0^t \sigma \sqrt{X_s}dW_s, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Ici,  $(W_t, t \geq 0)$  désigne un mouvement brownien standard, et nous supposons que  $x_0 \geq 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \geq 0$ . Il est bien connu qu'alors, l'EDS (1.1) admet une unique solution forte (voir par exemple Karatzas et Shreve [70]). Ce processus est à valeurs positives, et même strictement positives si on suppose en plus que  $x_0 > 0$  et  $2a \geq \sigma^2$ . Lorsque  $k = 0$ , ces processus sont également connus dans la littérature sous le nom de carré de Bessel. En finance, il est fréquent d'utiliser une paramétrisation légèrement différente de (1.1) en supposant  $k > 0$ , et  $a = k\theta$  avec  $\theta > 0$ . Dans ce cas,  $X$  est un processus de retour à la moyenne vers  $\theta$ , la vitesse de ce retour à la moyenne et le bruit sont respectivement paramétrés par  $k$  et  $\sigma$ . Outre cette interprétation claire des paramètres, la raison pour laquelle les processus CIR ont été largement utilisés en finance est qu'ils appartiennent à la classe des processus affines. En particulier, cela signifie que l'on peut calculer explicitement la fonction caractéristique des lois marginales (voir Lamberton et Lapeyre [72] ou Brigo et Mercurio [34] pour le CIR). Cela permet d'avoir certains calculs explicites et aussi d'utiliser certaines méthodes numériques d'inversion de Fourier (voir par exemple Carr et Madan [37]).

Avant de se pencher sur la discrétisation de l'EDS (1.1), rappelons qu'il est possible de simuler les incréments du processus CIR sans avoir recours à des approximations. En effet,

ils suivent une loi du chi-deux décentrée qui peut être simulée exactement (voir par exemple le livre de Glasserman [59]). Néanmoins, la simulation exacte est, comme nous le verrons, bien plus coûteuse en temps de calcul et les schémas de discrétisation s'avèrent être plus efficaces pour générer des trajectoires et faire du calcul par méthode de Monte-Carlo.

J'ai commencé à travailler sur la discrétisation du processus CIR lors d'un travail avec Damiano Brigo [33]. Dans cet article, nous considérons un modèle en risque de crédit où l'intensité de défaut et le taux d'intérêt sont modélisés à l'aide de ces processus. Il est alors naturel de vouloir simuler des trajectoires de ces processus, notamment pour calculer des prix d'options. La première idée est bien évidemment de considérer le schéma d'Euler-Maruyama :

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + (a - k\hat{X}_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{\hat{X}_{t_i}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad i \geq 0.$$

Ici,  $(t_i, i \in \mathbb{N})$  désigne une grille de discrétisation en temps. Par la suite, nous considérerons pour clarifier la présentation uniquement la discrétisation régulière

$$t_i = iT/n, \quad \text{avec } T > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cependant, le schéma d'Euler-Maruyama n'est pas bien défini puisque rien n'interdit  $\hat{X}_{t_{i+1}}$  de prendre des valeurs négatives, ce qui empêche de prendre la racine carrée à l'itération suivante. Lorsque j'ai commencé à travailler sur ce sujet en 2003, il y avait peu de littérature sur la discrétisation du processus CIR, principalement l'article de Deelstra et Delbaen [47] qui suggère de considérer le schéma d'Euler modifié suivant :

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + (a - k\hat{X}_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{(\hat{X}_{t_i})^+}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad i \geq 0.$$

Ce schéma ne conserve plus la positivité mais reste toujours bien défini. Nous avons proposé dans [33] le schéma implicite suivant :

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + \left(a - \frac{\sigma^2}{2} - k\hat{X}_{t_{i+1}}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{\hat{X}_{t_{i+1}}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad i \geq 0.$$

Les calculs se font néanmoins de manière explicite : sous la condition  $\sigma^2 \leq 2a$ ,  $\sqrt{\hat{X}_{t_{i+1}}}$  est l'unique racine positive d'un polynôme du second degré. J'ai étudié ce schéma ainsi que plusieurs variantes de ce schéma dans [3], dont certains sont bien définis jusqu'à  $\sigma^2 \leq 4a$ . Par souci de concision, je ne présente pas tous ces schémas ici. J'ai établi la convergence forte de la plupart de ces schémas et étudié la convergence faible en utilisant les arguments développés par Talay et Tubaro [86] pour le schéma d'Euler. Pour certains de ces schémas, j'ai obtenu un développement de l'erreur faible pour des fonctions  $f$  suffisamment régulières :

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}_{t_n})] = \mathbb{E}[f(X_T)] + \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_\nu}{n^\nu} + O\left(\frac{1}{n^{\nu+1}}\right),$$

ce qui permet notamment d'utiliser des techniques d'extrapolation de Romberg (ou Richardson) pour accélérer la convergence. Dans [3], j'ai également regardé numériquement la



vitesse de convergence forte de ces schémas (i.e. la vitesse de convergence de  $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq i \leq N} |\hat{X}_{t_i} - X_{t_i}|]$  vers 0) : pour tous les schémas considérés, cette vitesse semble liée au ratio  $\frac{a}{\sigma^2}$ , et se dégrade lorsque que ce ratio se rapproche de 0. Berkaoui, Bossy et Diop [25] ont étudié en détail la convergence forte du schéma d’Euler réfléchi et ont obtenu, sous des conditions assez restrictives sur les paramètres, une vitesse de convergence forte en  $O(1/\sqrt{n})$ . Lord, Koekoek et Van Dijk [74] ont comparé numériquement différentes modifications du schéma d’Euler (Schéma de Deelstra-Delbaen, schéma réfléchi ainsi que d’autres variantes). Plus récemment, Gyöngy et Rasonyi [66] ont étudié la vitesse de convergence forte pour le schéma d’Euler pour une diffusion unidimensionnelle avec des coefficients Hölderiens et décrivent cette vitesse en fonction des coefficients de Hölder. Dereich, Neuenkirch et Szpruch [48] ont prouvé que la vitesse de convergence forte d’un des schéma présenté dans [3] est en  $O(1/\sqrt{n})$  sous l’hypothèse  $\sigma^2 < 2a$ . Durant l’écriture de ce mémoire, j’ai complété ce résultat et établi dans [7] que la vitesse de convergence forte de ce schéma est en  $O(1/n)$  lorsque  $\sigma^2 < a$ , ce qui est conforme aux simulations numériques de [3].

Même si les schémas présentés jusqu’ici ont des comportements asymptotiques sensiblement différents, tous souffrent d’un défaut commun qui est pointé dans [3] : lorsque  $\sigma^2 > 4a$ , aucun de ces schémas ne converge de façon satisfaisante pour des applications numériques. Pourtant, le processus CIR (1.1) est lui toujours bien défini pour de tels paramètres. Ce problème est réellement ennuyeux pour des applications financières. En effet, dans le modèle de Heston [67], il est fréquent d’obtenir à partir des données de marché de telles valeurs pour  $a$  et  $\sigma$  (on pourra par exemple se référer à Andersen [21] pour des jeux de paramètres “réalistes”). La raison heuristique pour laquelle aucun des schémas ci-dessus n’est performant lorsque  $\sigma$  est grand est la suivante. Le point commun aux schémas ci-dessus est de chercher à exprimer les accroissements du CIR comme une fonction déterministe et régulière du pas de temps et de l’incrément Brownien. Autrement dit, l’approximation que l’on fait est “ $\omega$  par  $\omega$ ”. Cependant, pour des grandes valeurs de  $\sigma$ , les trajectoires du CIR sont amenées à passer plus de temps au voisinage de 0 où la racine carrée a une dérivée infinie. Par conséquent, il devient délicat d’approximer  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{X_s} dW_s$  pour une trajectoire du mouvement brownien donnée puisque  $\sqrt{X_s}$  peut varier significativement sur l’intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . Typiquement, l’approximation par  $\sqrt{X_{t_i}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$  est mauvaise. Pour remédier à ce problème, une bonne approche consiste à approcher la loi des incréments du CIR. Cette idée a été utilisée avec succès par Andersen [21] qui a proposé un schéma ad-hoc pour le modèle de Heston. Le schéma qu’il propose donne lieu à des convergences tout à fait satisfaisantes quels que soient les paramètres. Néanmoins, la construction de son schéma est assez heuristique et aucun résultat théorique de convergence n’est donné. Comme alternative, j’ai proposé dans [5] des schémas avec un ordre de convergence faible 2 et 3 pour le processus CIR. La construction de ces schémas repose sur des techniques de splitting que je vais présenter par la suite. Ces méthodes permettent assez facilement d’obtenir des convergences d’ordre 2 pour la vitesse faible. Le grand intérêt des méthodes de splitting est qu’elles permettent de construire de façon récursive des schémas

pour des EDS “complexes” à partir de schémas pour des EDS “élémentaires”. Ainsi, j’ai montré dans [5] et [1] que l’on peut obtenir des schémas de discrétisation d’ordre 2 pour de nombreuses diffusions affines (modèle de Heston, Affine Term Structure Models, processus de Wishart) à partir d’un schéma d’ordre 2 pour le processus CIR.

## 1.2 Méthodes de Splitting

Nous commençons par poser le cadre de notre étude en présentant un résultat important pour analyser l’erreur faible d’un schéma de discrétisation. On considère une équation différentielle stochastique :

$$t \geq 0, X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x) ds + \int_0^t \sigma(X_s^x) dW_s. \quad (1.2)$$

On suppose que cette équation est bien définie sur un domaine  $\mathbb{D}$  qui est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$ . Cela signifie que pour toute condition initiale  $x \in \mathbb{D}$ , il existe une unique solution faible  $(X_t^x, t \geq 0)$  telle que  $\mathbb{P}(X_t^x \in \mathbb{D}, t \geq 0) = 1$ . Nous supposons que  $(W_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien standard de dimension  $d_W$ . Les fonctions  $b : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{M}_{d \times d_W}(\mathbb{R})$  sont respectivement à valeurs vectorielles et matricielles et telles que pour tout  $1 \leq i, j \leq d$ , les fonctions  $x \in \mathbb{D} \mapsto b_i(x)$  et  $x \in \mathbb{D} \mapsto (\sigma\sigma^*)_{i,j}(x)$  appartiennent à  $\mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D})$  :

$$\mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_\alpha > 0, e_\alpha \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{D}, |\partial_\alpha f(x)| \leq C_\alpha(1 + \|x\|^{e_\alpha})\}.$$

Pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , on utilise ici la notation  $\partial_\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$ . On définit également le générateur infinitésimal associé à l’EDS (1.2)

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{D}, \mathbb{R}), Lf(x) = \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{d_W} \sigma_{i,k}(x) \sigma_{j,k}(x) \partial_i \partial_j f(x). \quad (1.3)$$

Typiquement, pour les processus affines que nous considérerons par la suite, les fonctions  $b_i(x)$  et  $(\sigma\sigma^*)_{i,j}(x)$  sont affines (et donc dans  $\mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D})$ ). Le domaine  $\mathbb{D}$  sera  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}$ , l’ensemble des matrices symétriques positives d’une dimension donnée, ou bien tout produit cartésien de ces trois types d’ensembles.

Pour approximer une EDS ou de manière générale un processus Markovien, il est naturel de chercher des schémas d’approximations dont la loi s’exprime en fonction de la valeur courante  $x \in \mathbb{D}$  et du pas de temps  $t > 0$ . Nous noterons ainsi  $\hat{p}_x(t)(dz)$  la loi d’un schéma d’approximation et  $\hat{X}_t^x$  une variable aléatoire qui suit cette loi. Par exemple, pour le schéma d’Euler-Maruyama,  $\hat{p}_x(t)(dz)$  est la mesure de probabilité d’un vecteur gaussien centré en  $x + b(x)t$  et de variance  $\sigma\sigma^*(x)$ , et  $\hat{X}_t^x = x + b(x)t + \sigma(x)W_t$ . Ensuite, sur une grille de discrétisation  $(t_i, i \in \mathbb{N})$ , le schéma  $(\hat{X}_{t_i}, i \in \mathbb{N})$  s’obtient de la façon suivante. On pose  $\hat{X}_{t_0} = X_{t_0}$  puis, conditionnellement à  $(\hat{X}_{t_l}, 0 \leq l \leq i)$ ,  $\hat{X}_{t_{i+1}}$  est généré selon la loi de

densité  $\hat{p}_{\hat{X}_{t_i}}(t)(dz)$ . Nous avons alors le résultat suivant pour contrôler l'erreur faible où nous considérons par commodité la grille de temps régulière  $t_i = iT/n$ .

**Théorème 1.2.1.** *Dans le cadre ci-dessus, on suppose que :*

1. le schéma  $\hat{X}_t^x$  est un schéma potentiellement d'ordre  $\nu$ , c'est à dire que :

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}_t^x)] = f(x) + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k!} t^k L^k f(x) + \text{Reste en } t^{\nu+1}, \quad (1.4)$$

et a des moments uniformément bornés (i.e. pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sup_{0 \leq i \leq n} \mathbb{E}[\|\hat{X}_{t_i}\|^q]$  est borné uniformément en  $n$ ).

2. la fonction  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_{T-t}^x)]$  est définie sur  $[0, T] \times \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ , résout l'EDP  $\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{D}, \partial_t u(t, x) = -Lu(t, x)$ , et satisfait les contrôles suivants :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_{l,\alpha}, e_{l,\alpha} > 0, \forall x \in \mathbb{D}, t \in [0, T], |\partial_t^l \partial_\alpha u(t, x)| \leq C_{l,\alpha} (1 + \|x\|^{e_{l,\alpha}}). \quad (1.5)$$

Alors, il existe une constante  $K > 0$ , telle que  $|\mathbb{E}[f(\hat{X}_{t_n}^x)] - \mathbb{E}[f(X_T^x)]| \leq K/n^\nu$  pour  $n$  assez grand.

Ce résultat a été énoncé à l'origine pour le schéma d'Euler-Maruyama (qui est d'ordre 1) dans l'article de Talay et Tubaro [86]. Ils considèrent le cas de coefficients  $b$  et  $\sigma$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont toutes les dérivées sont bornées, si bien que la propriété 2 sur les contrôles de  $u$  est automatiquement satisfaite. Cette même hypothèse est utilisée par Ninomiya et Victoir [76]. Néanmoins, elle n'est pas vérifiée par le coefficient de diffusion  $\sigma$  pour le processus CIR et plus généralement pour les processus affines. Cela a motivé l'introduction du cadre que je présente ici et qui est décrit plus en détail dans [5]. En particulier, une définition précise de ce que l'on entend par "Reste en  $t^{\nu+1}$ " y est donnée.

Faisons maintenant un commentaire sur les hypothèses du Théorème 1.2.1. La seconde hypothèse sur la régularité du problème de Cauchy porte uniquement sur la diffusion et la fonction  $f$ , mais ne fait en aucun cas intervenir le schéma. En utilisant des propriétés de la fonction caractéristique, il est possible de montrer que cette hypothèse est vérifiée pour le processus CIR et les processus de Wishart lorsque  $f \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D})$  (voir [3, 1]). La première hypothèse porte en revanche sur le schéma. Lorsque les coefficients  $b$  et  $\sigma$  sont à croissance au plus linéaire, il est bien connu que l'on peut contrôler de façon uniforme en temps les moments de la diffusion  $X$ . Puisqu'un schéma a vocation à approcher la diffusion, il est raisonnable de penser que l'on aura un contrôle des moments du schéma sous cette même hypothèse, même s'il faut bien évidemment le vérifier en pratique. Par conséquent, l'hypothèse principale à vérifier pour analyser l'erreur faible d'un schéma est le développement (1.4).

Les méthodes basées sur un découpage du générateur infinitésimal remontent aux travaux de Strang [85] dans le cadre des équations différentielles ordinaires. Elles permettent en particulier de construire des schémas d'ordre 2 de façon récursive dans un cadre très général. Considérons dans un premier temps deux EDS  $X^1$  et  $X^2$  qui rentrent dans le cadre présenté ci-dessus, et nous notons respectivement  $L_1$  et  $L_2$  leur générateur infinitésimal. On suppose que l'on dispose pour ces diffusions de schémas potentiellement d'ordre  $\nu$ , que l'on note respectivement  $\hat{X}_t^{1,x}$  et  $\hat{X}_t^{2,x}$ . Alors, on peut montrer aisément que pour  $f \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D})$  et  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ,

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}_{\lambda_2 t}^{2,\hat{X}_{\lambda_1 t}^{1,x}})] = \sum_{l_1+l_2 \leq \nu} \frac{\lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2}}{l_1! l_2!} t^{l_1+l_2} L_1^{l_1} L_2^{l_2} f(x) + \text{Reste en } t^{\nu+1}.$$

Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté,  $\hat{X}_{\lambda_2 t}^{2,\hat{X}_{\lambda_1 t}^{1,x}}$  désigne ici une variable aléatoire obtenue en utilisant d'abord le schéma 1 partant de  $x$  avec un pas de temps  $\lambda_1 t$ , puis le schéma 2 partant de cette nouvelle valeur avec un pas de temps  $\lambda_2 t$ . Ce que l'on observe, c'est qu'un schéma potentiellement d'ordre  $\nu$  agit sur  $f$  comme un opérateur  $I + tL + \dots + \frac{1}{\nu!} t^\nu L^\nu$ , et composer de la sorte les schémas de discrétisation revient à composer (dans l'ordre inverse) les opérateurs. Cela permet de faire du calcul formel sur les développements asymptotiques. On obtient en particulier le résultat suivant.

**Proposition 1.2.2.** *Nous nous plaçons dans le contexte ci-dessus où  $\hat{X}_t^{1,x}$  et  $\hat{X}_t^{2,x}$  sont respectivement des schémas potentiellement d'ordre  $\nu$  pour  $L_1$  et  $L_2$ .*

1. *Si les opérateurs  $L_1$  et  $L_2$  commutent,  $\hat{X}_t^{2,\hat{X}_t^{1,x}}$  est un schéma potentiellement d'ordre  $\nu$  pour  $L_1 + L_2$ .*
2. *Si  $\nu \geq 2$ , les schémas suivants*

$$(a) B\hat{X}_t^{2,\hat{X}_t^{1,x}} + (1-B)\hat{X}_t^{1,\hat{X}_t^{2,x}} \quad \text{and} \quad (b) \hat{X}_{t/2}^{2,\hat{X}_t^{1,\hat{X}_{t/2}^{2,x}}}$$

*sont des schémas potentiellement d'ordre 2, où  $B$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $1/2$  indépendante.*

Grâce à ce résultat, nous voyons que pour obtenir un schéma potentiellement d'ordre 2 pour une EDS de générateur infinitésimal  $L$ , il est suffisant de trouver une décomposition (splitting)  $L = L_1 + \dots + L_n$  telle que pour chaque opérateur  $L_i$ , nous savons construire un schéma potentiellement d'ordre 2. Bien évidemment, il existe une infinité de façons de découper l'opérateur  $L$ . Ninomiya et Victoir [76] ont néanmoins mis en évidence un splitting remarquable, qui permet de réduire le problème à la résolution d'équation différentielles ordinaires.

**Théorème 1.2.3.** *(Ninomiya-Victoir) Soit  $L$  l'opérateur défini par (1.3). On suppose que*

$\sigma(x)$  est assez régulière pour que les opérateurs

$$\begin{aligned} V_0 f(x) &= \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_i f(x) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^{d_W} \partial_j \sigma_{i,k} \sigma_{j,k} \partial_i f(x) \\ V_k f(x) &= \sum_{i=1}^d \sigma_{i,k}(x) \partial_i f(x) \text{ for } k = 1, \dots, d_W. \end{aligned}$$

soient bien définis sur  $\mathbb{D}$  et tels que  $V_0$  et  $\frac{1}{2}V_k^2$  satisfont les mêmes hypothèses que  $L$ . Alors, on a le découpage suivant de  $L$  :

$$L = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d_W} V_k^2.$$

On définit alors  $v_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$  t.q.  $V_k f(x) =: v_k(x) \cdot \nabla f$ ,  $k = 0, \dots, d_W$ . On suppose que les fonctions  $v_k$  ont une croissance sous-linéaire :  $\exists K > 0$ ,  $\|v_k(x)\| \leq K(1 + \|x\|)$  et que  $X_0(t, x)$  (resp.  $X_k(t, x)$ ,  $k = 1, \dots, d_W$ ) est une solution à valeurs dans  $\mathbb{D}$  de l'équation différentielle

$$\frac{dX_0(t, x)}{dt} = v_0(X_0(t, x)), \quad t \geq 0 \quad (\text{resp. } \frac{dX_k(t, x)}{dt} = v_k(X_k(t, x)), \quad t \in \mathbb{R})$$

de valeur initiale  $x \in \mathbb{D}$  à l'instant  $t = 0$ . Si  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $X_0(t, x)$  et  $X_k(\sqrt{t}N, x)$  sont respectivement des schémas de simulation exacts pour les opérateurs  $V_0$  et  $\frac{1}{2}V_k^2$ .

Faisons quelques commentaires sur ce résultat. Dans le cas où les équations différentielles  $X_k$ ,  $k = 0, \dots, d_W$  peuvent être résolues explicitement on dispose par composition (Proposition 1.2.2) d'un schéma d'ordre 2 pour l'EDS associée à  $L$ . Pour cela, il est en réalité suffisant d'avoir des schémas potentiellement d'ordre 2 pour  $V_0$  et  $\frac{1}{2}V_k^2$ . En particulier si  $Y$  est une variable aléatoire bornée telle que  $\mathbb{E}[Y^l] = \mathbb{E}[N^l]$  pour  $1 \leq l \leq 5$ , on peut montrer que  $X_k(\sqrt{t}Y, x)$  est un schéma potentiellement d'ordre 2 pour  $\frac{1}{2}V_k^2$ . Outre le gain de temps que cela permet (sur nos simulations, simuler une variable aléatoire discrète est 2, 5 fois plus rapide que simuler une gaussienne), cette remarque est importante pour la construction de schémas d'ordre élevé pour le processus CIR. Enfin, lorsque l'on ne sait pas résoudre les équations différentielles explicitement, il suffit de disposer d'un schéma numérique à l'ordre 3 pour  $X_0$  (i.e.  $\exists C, p > 0$ ,  $|\hat{X}_0(t, x) - \sum_{i=0}^2 \frac{t^i}{i!} V_0^i \hat{X}_0(t, x)| \leq Ct^3(1 + |x|^p)$ ) et à l'ordre 6 pour  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, d_W$  pour obtenir des schémas potentiellement d'ordre 2 pour  $V_0$  et  $\frac{1}{2}V_k^2$ .

Pour ce qui concerne les processus affines que nous allons considérer, l'hypothèse la plus contraignante est celle de la stabilité du domaine  $\mathbb{D}$  par les opérateurs  $V_0$  et  $\frac{1}{2}V_k^2$ , ce qui équivaut à avoir respectivement  $X_0(t, x) \in \mathbb{D}$  pour tout  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{D}$  et  $X_k(t, x) \in \mathbb{D}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{D}$ . Lorsque le domaine de la diffusion est  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^d$  et que les coefficients de l'EDS sont suffisamment réguliers, alors on a bien évidemment cette stabilité. Cela permet

de composer les schémas sans aucune difficulté. Dans le cas contraire, lorsque le domaine  $\mathbb{D}$  est plus complexe, il se peut que l'opérateur  $V_0$  (resp.  $\frac{1}{2}V_k^2$ ) ne soit pas associé à une équation différentielle ordinaire (resp. stochastique) à valeurs dans  $\mathbb{D}$ , et la composition des schémas n'est dans ce cas pas définie. Pour remédier à ce problème, au moins deux solutions sont envisageables. On peut soit conserver le découpage de Ninomiya et Victoir, étudier sur quel sous-ensemble de  $\mathbb{D}$  la composition des schémas est bien définie, et construire un schéma ad-hoc lorsque l'on part d'une valeur initiale n'appartient pas à ce sous-ensemble. Nous adopterons ce point de vue pour le processus CIR. On peut sinon choisir un autre découpage en somme d'opérateurs pour lesquels  $\mathbb{D}$  est stable. La difficulté est alors d'être capable de simuler l'EDS associée à chaque opérateur. Nous adopterons ce point de vue pour les processus de Wishart.

Avant de conclure ce paragraphe sur les méthodes de splitting, nous allons mentionner quelques résultats récents sur des schémas d'ordre élevé. Tout d'abord, il n'existe pas à ma connaissance de méthode générique (i.e. valable pour une large classe d'EDS) pour obtenir des schémas d'ordre faible strictement supérieur à 2 et qui soit effectivement implémentable sur un ordinateur. En particulier, je ne connais pas de constructions récursives analogues à la Proposition 1.2.2 pour des ordres supérieurs à 2. En revanche, il est possible d'accélérer la convergence faible par des méthodes d'extrapolations de type Romberg (ou Richardson). Par exemple, si un schéma  $\hat{X}^n$  de pas de discrétisation  $T/n$  satisfait le développement suivant :

$$\mathbb{E}(f(\hat{X}_T^n)) = \mathbb{E}(f(X_T)) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{n^i},$$

on voit que  $\mathbb{E}(2f(\hat{X}_T^{2n}) - f(\hat{X}_T^n)) = \mathbb{E}(f(X_T)) - \frac{c_2}{2n^2} + O(1/n^3)$ . En itérant cette idée, on peut ainsi de suite obtenir des estimateurs d'ordre supérieur de  $\mathbb{E}(f(X_T))$ . Fujiwara [54] a proposé une technique d'extrapolation dédiée au splitting de Ninomiya et Victoir qui permet d'avoir un estimateur à l'ordre 6 de  $\mathbb{E}(f(X_T))$ . Oshima, Teichmann et Velušček [79] ont généralisé l'approche de Fujiwara afin de construire des estimateurs de tout ordre, toujours à partir du splitting de Ninomiya et Victoir.

## 1.3 Schémas d'ordre élevé pour le processus CIR

### 1.3.1 Un schéma d'ordre deux

Nous allons commencer par écrire le splitting de Ninomiya et Victoir pour le processus CIR (1.1). Son générateur infinitésimal s'écrit

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad L^{\text{CIR}} f(x) = (a - kx)\partial_x f(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x \partial_x^2 f(x),$$

et rentre dans le cadre présenté au paragraphe 1.2. Le splitting de Ninomiya et Victoir s'écrit alors :

$$L^{\text{CIR}} = V_0 + \frac{1}{2}V_1^2, \quad \text{où } V_0 f(x) = (a - kx - \frac{\sigma^2}{4})f'(x) \text{ et } V_1 f(x) = \sigma\sqrt{x}f'(x).$$

Pour  $x \geq 0$ , les équations différentielles  $\frac{d}{dt}X_0(t, x) = a - kX_0(t, x) - \frac{\sigma^2}{4}$  et  $\frac{d}{dt}X_1(t, x) = \sigma\sqrt{X_1(t, x)}$  ont des solutions explicites pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$X_0(t, x) = xe^{-kt} + (a - \sigma^2/4)\psi_k(t), \quad X_1(t, x) = ((\sqrt{x} + \frac{\sigma}{2}t)^+)^2,$$

en posant  $\psi_k(t) = \frac{1-e^{-kt}}{k} = t, k \neq 0$  et  $\psi_0(t) = t$ . Clairement, on a  $X_1(t, x) \in \mathbb{R}_+$  pour tout  $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+$ . En revanche, on a  $X_0(t, x) \in \mathbb{R}_+$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}_+$  si, et seulement si  $\sigma^2 \leq 4a$ . Le schéma de Ninomiya-Victoir donné par le Théorème 1.2.3 et la Proposition 1.2.2

$$X_0(t/2, X_1(\sqrt{t}N, X_0(t/2, x)))$$

n'est donc bien défini pour le CIR que sous cette condition. Or, comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe 1.1, le processus CIR est défini pour tout  $\sigma \geq 0$ , et il n'est pas rare pour des applications financières d'avoir des paramètres pour le processus CIR tels que  $\sigma^2 > 4a$ .

Lorsque  $\sigma^2 > 4a$ , une idée assez naturelle est de se demander pour quelles valeurs de  $x$  la composition  $X_0(t/2, X_1(\sqrt{t}N, X_0(t/2, x)))$  est définie presque sûrement et reste à valeurs positives. La réponse est simple : aucune, puisque la gaussienne peut toujours ramener avec une faible probabilité autour de zéro, et  $X_0$  conduit alors dans des valeurs négatives. La réponse est en revanche différente si on remplace  $N$  par une variable aléatoire bornée telle que  $\mathbb{E}[Y^l] = \mathbb{E}[N^l]$  pour  $1 \leq l \leq 5$ . Comme nous l'avons déjà mentionné, cela suffit pour garantir que le schéma

$$X_0(t/2, X_1(\sqrt{t}Y, X_0(t/2, x))) \tag{1.6}$$

soit potentiellement d'ordre deux, pourvu bien évidemment que la composition ait un sens. Pour le choix suivant de  $Y$  :

$$\mathbb{P}(Y = \sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(Y = -\sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \quad \text{et } \mathbb{P}(Y = 0) = 2/3,$$

on peut montrer que la composition (1.6) est bien définie et reste positive dès que

$$x \geq \mathbf{K}_2(t), \text{ avec } \mathbf{K}_2(t) = \mathbf{1}_{\{\sigma^2 > 4a\}} e^{\frac{kt}{2}} \left( \left( \frac{\sigma^2}{4} - a \right) \psi_k(t/2) + \left[ \sqrt{e^{\frac{kt}{2}} \left[ \left( \frac{\sigma^2}{4} - a \right) \psi_k(t/2) \right] + \frac{\sigma}{2} \sqrt{3t}} \right]^2 \right).$$

Il reste à construire un schéma lorsque  $x \in [0, \mathbf{K}_2(t))$ . Pour cela, on commence par remarquer que  $\mathbf{K}_2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(t)$ . Ainsi, si  $X_t^x$  désigne la solution de 1.1, on peut montrer que  $\mathbb{E}[(X_t^x)^q] = O(t^q)$  pour tout  $q \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, un développement de Taylor d'une fonction test  $f \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{R}_+)$  au voisinage de 0 donne :

$$\mathbb{E}[f(X_t^x)] = f(0) + f'(0)\mathbb{E}[X_t^x] + \frac{f''(0)}{2}\mathbb{E}[(X_t^x)^2] + O(t^3).$$

Ainsi, si  $\hat{X}_t^x$  désigne un schéma positif tel que  $\mathbb{E}[(\hat{X}_t^x)^q] = \mathbb{E}[(X_t^x)^q]$  pour  $q \in \{1, 2\}$  et  $\mathbb{E}[(\hat{X}_t^x)^q] = O(t^q)$  pour  $q \geq 3$ , on aura

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}_t^x)] = \mathbb{E}[f(X_t^x)] + O(t^3) = f(x) + tL^{\text{CIR}}f(x) + \frac{t^2}{2}(L^{\text{CIR}})^2f(x) + O(t^3),$$

et donc un schéma potentiellement d'ordre 2. Bien évidemment, il faut contrôler le reste avec plus de rigueur ce qui est fait dans [5], mais l'argument principal est là. Le choix d'un schéma ayant les mêmes deux premiers moments que le processus CIR est libre, et nous considérons ici un schéma prenant deux valeurs possibles :

$$\mathbf{1}_{\{U \leq \pi(t,x)\}} \frac{\mathbb{E}[X_t^x]}{2\pi(t,x)} + \mathbf{1}_{\{U > \pi(t,x)\}} \frac{\mathbb{E}[X_t^x]}{2(1 - \pi(t,x))}, \quad (1.7)$$

où  $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$  et  $\pi(t, x) = \frac{1 - \sqrt{1 - \mathbb{E}[X_t^x]^2 / \mathbb{E}[(X_t^x)^2]}}{2}$ . Rappelons ici que le calcul des moments du processus CIR sont explicites :  $\mathbb{E}[X_t^x] = xe^{-kt} + a\psi_k(t)$  et  $\mathbb{E}[(X_t^x)^2] = \mathbb{E}[X_t^x]^2 + \sigma^2\psi_k(t)[a\psi_k(t)/2 + xe^{-kt}]$ .

Nous sommes désormais en mesure d'appliquer le Théorème 1.2.1. Vérifier la bornitude des moments est un exercice fastidieux mais élémentaire. La régularité du problème de Cauchy  $u(t, x)$  a été prouvée dans [3] pour le processus CIR, grâce à l'expression explicite de la densité. On obtient ainsi le résultat suivant.

**Théorème 1.3.1.** *Le schéma  $\hat{X}_t^x$  défini par (1.6) lorsque  $x \geq \mathbf{K}_2(t)$  et par (1.7) lorsque  $x \in [0, \mathbf{K}_2(t))$  est un schéma d'ordre 2 pour le processus CIR : si  $(\hat{X}_{t_i}, 0 \leq i \leq n)$  désigne la discrétisation associée sur la grille régulière  $t_i = iT/n$  tel que  $\hat{X}_{t_0} = x$ , on a :*

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{R}_+), \exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, |\mathbb{E}[f(\hat{X}_{t_n}^x)] - \mathbb{E}[f(X_T^x)]| \leq K/n^2.$$



### 1.3.2 Un schéma d'ordre trois

Une fois que l'on a compris la construction de schémas par composition, et la construction particulière du schéma d'ordre deux pour le processus CIR, on peut se demander si on ne peut pas obtenir des schémas d'ordre plus élevé. Nous allons maintenant construire un schéma d'ordre 3. Il s'agit bien ici d'un schéma d'ordre trois et non pas d'une technique d'extrapolation qui élimine a posteriori le terme d'ordre deux.

On commence par la remarque suivante. Si  $(X_t^x, t \geq 0)$  et  $(X_t^{x,k=0}, t \geq 0)$  désignent respectivement le processus CIR (1.1) et le processus CIR avec les mêmes paramètres sauf  $k = 0$ , nous avons l'identité en loi

$$(X_t^x, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (e^{-kt} X_{\psi_{-k}(t)}^{x,k=0}, t \geq 0).$$

Il est ainsi suffisant d'obtenir un schéma pour le processus CIR lorsque  $k = 0$ . On observe alors que :

$$\frac{1}{2} (V_0(V_1)^2 - (V_1)^2 V_0) = \frac{\sigma^2}{2} \left( a - \frac{\sigma^2}{4} \right) \partial_x^2 = \operatorname{sgn} \left( a - \frac{\sigma^2}{4} \right) L_3^2, \quad (1.8)$$

où  $L_3 = \sigma \sqrt{\frac{|a - \frac{\sigma^2}{4}|}{2}} \partial_x$ . En posant  $L_1 = V_0$ ,  $L_2 = \frac{1}{2} V_1^2$  lorsque  $\sigma^2 \leq 4a$  et  $L_1 = \frac{1}{2} V_1^2$ ,  $L_2 = V_0$  sinon, on a l'identité suivante

$$L_1 L_2 - L_2 L_1 = L_3^2.$$

On note  $S_i(t)$  la série formelle  $S_i(t) = I + tL_i + \frac{t^2}{2} L_i^2 + \frac{t^3}{6} L_i^3 + \dots$  : les pointillés désignent des termes d'ordre 4 ou plus, qui ne correspondent pas nécessairement au développement de Taylor. Alors, on peut vérifier aisément avec du calcul formel l'identité suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} [S_2(t)S_1(t)S_3(\varepsilon t) + S_2(t)S_3(\varepsilon t)S_1(t) + S_3(\varepsilon t)S_2(t)S_1(t)] \\ &= I + t(L_1 + L_2) + \frac{t^2}{2}(L_1 + L_2)^2 + \frac{t^3}{6}(L_1 + L_2)^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

qui permet de construire un schéma à l'ordre 3 pour  $L_1 + L_2$  à partir de schémas d'ordre 3 pour  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ .

Dans le cas du CIR, l'équation différentielle associée à  $L_3$  est triviale : sa solution est  $\tilde{X}(t, x) = x + t \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sqrt{|a - \frac{\sigma^2}{4}|}$ . Pour  $\frac{1}{2} V_1^2$ , on utilise le schéma  $X_1(\sqrt{t}Y, x)$  avec une variable aléatoire  $Y$  qui a les mêmes 7 premiers moments que la gaussienne centrée réduite. Voici un choix possible :

$$\mathbb{P}(Y = \pm \sqrt{3 + \sqrt{6}}) = \frac{\sqrt{6} - 2}{4\sqrt{6}}, \mathbb{P}(Y = \pm \sqrt{3 - \sqrt{6}}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6} - 2}{4\sqrt{6}}.$$

Comme pour le découpage de Ninomiya et Victoir, la composition de schémas donnée par (1.9) n'est pas définie partout, pour tous les paramètres. Elle l'est si  $x \geq \mathbf{K}_3(t)$ , et on

peut vérifier que  $\mathbf{K}_3(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(t)$ . Lorsque  $x \in [0, \mathbf{K}_3(t))$ , il est alors suffisant de construire un schéma qui a les mêmes 3 premiers moments que le processus CIR pour obtenir un schéma d'ordre 3, ce qui peut être fait à l'aide d'une variable aléatoire prenant deux valeurs. On obtient ainsi un schéma d'ordre 3. Les détails peuvent être trouvés dans [5].

### 1.3.3 Application aux modèles financiers (Heston et ATSM)

Dans cette partie nous allons utiliser le schéma d'ordre 2 que nous avons pour le processus CIR comme "brique élémentaire" pour construire, par composition de schémas (Proposition 1.2.2), des schémas d'ordre 2 pour d'autres diffusions affines largement utilisées en finance.

#### Modèles Affines de Structure par Terme (ATSM)

Nous considérons ici le cadre proposé par Dai et Singleton [46] pour des modèles affines servant, notamment, à modéliser la dynamique des courbes de taux d'intérêt. On considère le processus  $(X_t, t \geq 0)$  qui résout l'EDS suivante

$$dX_t = (A - KX_t)dt + \Sigma\sqrt{D_t}dW_t, \quad (1.10)$$

où  $A \in \mathbb{R}^d$ ,  $K, \Sigma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ,  $D_t$  est la matrice diagonale définie par  $(D_t)_{ii} = \gamma_{i0} + \sum_{j=1}^d \gamma_{ij}(X_t)_j$ , et  $(W_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien standard de dimension  $d$ . Nous faisons les hypothèses suivantes sur les paramètres pour garantir le fait que  $X$  est bien défini, à valeurs dans  $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+^{d'} \times \mathbb{R}^{d-d'}$  :

1.  $A, X_0 \in \mathbb{D}$ ,  $\Sigma = I_d$ ,
2.  $(K_{ij})_{1 \leq i \leq d', d'+1 \leq j \leq d} = 0$  et  $K_{ij} \leq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq d'$ ,  $i \neq j$ ,
3. pour  $1 \leq i \leq d'$ ,  $\gamma_{ii} \geq 0$  et  $\gamma_{ij} = 0$  si  $j \neq i$ ,
4. pour  $m+1 \leq i \leq d$ ,  $\gamma_{ij} \geq 0$  si  $0 \leq j \leq d'$  et  $\gamma_{ij} = 0$  si  $d'+1 \leq j \leq d$ .

On peut vérifier que le générateur infinitésimal de  $X$  s'écrit :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D}), Lf &= L_A f + L_B f + L_C f, \text{ with} & (1.11) \\ L_A f &= \sum_{i=1}^{d'} \left( (A_i - K_{ii}x_i)\partial_i + \frac{\gamma_{ii}}{2}x_i\partial_i^2 \right), L_B f = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \tilde{K}_{ij}x_j\partial_i f, \\ L_C f &= \sum_{i=d'+1}^d \left( A_i\partial_i f + \frac{1}{2}(\gamma_{i0} + \sum_{j=1}^{d'} \gamma_{ij}x_j)\partial_i^2 f \right), \end{aligned}$$

avec  $\tilde{K}_{ij} = 0$  si  $1 \leq i = j \leq d'$ , et  $\tilde{K}_{ij} = K_{ij}$  sinon. L'opérateur  $L_A$  est celui de  $d'$  processus CIR indépendants, l'opérateur  $L_B$  est celui d'une équation différentielle linéaire et l'opérateur  $L_C$  correspond à  $d - d'$  mouvements browniens indépendants (non standards),

puisque les  $d$  premières coordonnées sont gelées. Ainsi, on dispose pour chaque opérateur de schémas d'ordre 2, et par composition on obtient un schéma d'ordre 2 pour la diffusion (1.10).

### Le modèle de Heston

Nous nous penchons désormais sur le modèle de Heston [67] qui est un modèle à volatilité stochastique très répandu. Il suppose que le cours d'une action  $X^3$  et sa volatilité  $X^1$  suivent l'EDS suivante

$$\begin{cases} X_t^1 = X_0^1 + \int_0^t (a - kX_s^1) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s^1} dW_s \\ X_t^2 = \int_0^t X_s^1 ds \\ X_t^3 = X_0^3 + \int_0^t r X_s^3 ds + \int_0^t \sqrt{X_s^1} X_s^3 (\rho dW_s + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_s), \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $W$  et  $Z$  sont des mouvements browniens indépendants. Pour des raisons qui vont apparaître rapidement, nous avons rajouté la coordonnée  $X^2$ . On suppose ici que  $X_0^1 \geq 0$ ,  $X_0^3 > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in [-1, 1]$  et  $(a, k, \sigma) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . Il est aisé de vérifier que le générateur infinitésimal de (1.12) est la somme des opérateurs associés aux EDS suivantes :

$$\begin{cases} dX_t^1 = (a - kX_t^1) dt + \sigma \sqrt{X_t^1} dW_t \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \\ dX_t^3 = (r - \frac{1}{2}(1 - \rho^2)X_t^1) X_t^3 dt \\ \quad + \rho \sqrt{X_t^1} X_t^3 dW_t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} dX_t^1 = 0 \\ dX_t^2 = 0 \\ dX_t^3 = \frac{1}{2}(1 - \rho^2) X_t^1 X_t^3 dt \\ \quad + \sqrt{(1 - \rho^2) X_t^1} X_t^3 dZ_t \end{cases}$$

Grâce à la proposition 1.2.2, il est suffisant de disposer de schémas d'ordre deux pour chaque EDS pour obtenir un schéma d'ordre deux pour le modèle de Heston. La seconde EDS se résout explicitement tandis que dans la première,  $X^3$  s'intègre exactement à l'aide de  $X^1$  et  $X^2$

$$X_t^3 = X_0^3 \exp \left[ \left( r - \frac{\rho}{\sigma} a \right) t + \left[ \frac{\rho}{\sigma} k - \frac{1}{2} \right] (X_t^2 - X_0^2) + \frac{\rho}{\sigma} (X_t^1 - X_0^1) \right],$$

ce qui permet d'obtenir un schéma d'ordre 2 à partir de celui pour le CIR. En effet, la méthode des trapèzes appliquée au schéma d'ordre 2 pour le CIR donne un schéma d'ordre 2 pour  $(X^1, X^2)$  et puis pour  $(X^1, X^2, X^3)$  à l'aide de la formule ci-dessus.

Nous allons donner une illustration numérique de la convergence du schéma ci-dessus pour calculer le prix d'un Put Européen. Plus précisément nous allons considérer deux schémas. Le schéma 1 (resp. 2) est construit comme décrit ci-dessus en prenant pour le CIR le schéma d'ordre deux (resp. trois). Les deux schémas sont théoriquement d'ordre deux, mais on peut espérer une convergence légèrement meilleure en prenant le schéma d'ordre trois pour le CIR. A titre de comparaison, nous considérerons le schéma 3 suivant

$$\hat{X}_t^x = \begin{pmatrix} x_1 + (a - kx_1^+)t + \sigma \sqrt{x_1^+} W_t \\ x_2 + x_1 t \\ x_3 \exp \left( (r - x_1^+/2)t + \sqrt{x_1^+} (\rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t) \right) \end{pmatrix},$$

qui utilise pour la partie CIR la correction du schéma d'Euler proposée par Lord, Koekoek et Van Dijk [74]. Nous avons tracé sur la Figure 1.1 la convergence du prix en fonction du pas de discrétisation avec un jeu de paramètres "difficile" ( $\sigma^2 \gg 4a$ ). Nous avons également indiqué la valeur exacte du contrat donnée par la formule semi-fermée de [67]. Nous observons bien une vitesse de convergence compatible avec un ordre deux (parabole) pour les schémas 1 et 2. Le schéma d'Euler corrigé converge en revanche très lentement. Avec un pas de temps de 1/100, il donne encore un résultat très éloigné de la valeur exacte.

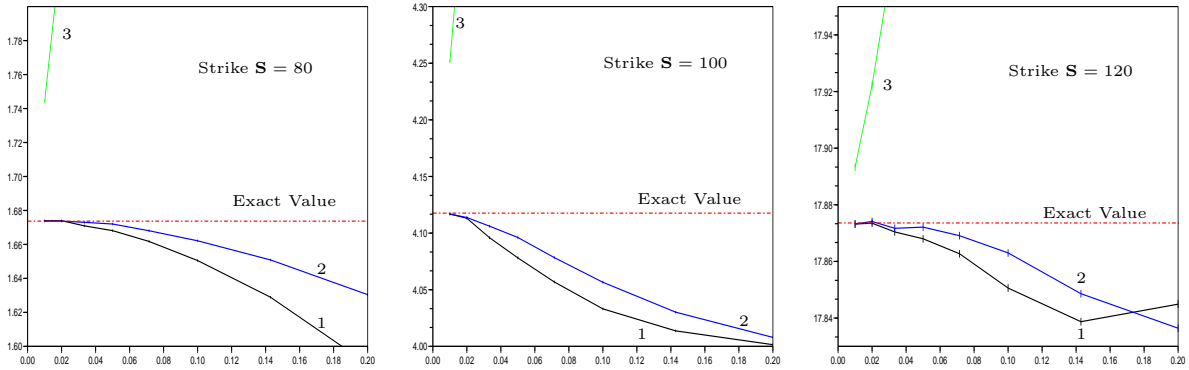


FIGURE 1.1 – Prix du Put  $\mathbb{E}[e^{-r}(\mathbf{S} - (\hat{X}_{t/n}^3)_3)^+]$  dans le modèle de Heston en fonction de  $1/n$ , avec  $X_0^1 = 0.04$ ,  $k = 0.5$ ,  $a = 0.02$ ,  $\sigma = 1$ ,  $r = 0.02$ ,  $X_0^3 = 100$  and  $\rho = -0.8$ . La largeur des points donne l'intervalle de confiance à 95%.

## 1.4 Simulation des processus de Wishart

Commençons tout d'abord par présenter les processus de Wishart ainsi que les processus affines à valeurs dans les matrices symétriques positives. Les processus de Wishart ont été introduits par Bru [35] et résolvent l'EDS suivante :

$$X_t^x = x + \int_0^t (\alpha a^T + bX_s^x + X_s^x b^T) ds + \int_0^t \left( \sqrt{X_s^x} dW_s a + a^T dW_s^T \sqrt{X_s^x} \right). \quad (1.13)$$

Ici, la condition initiale  $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique positive,  $a, b \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  sont des matrices carrées,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Le processus  $W$  est un mouvement brownien matriciel à valeurs dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  : ses éléments sont des mouvements browniens standards indépendants. Enfin, on note  $a^T$  la matrice transposée de  $a$ , et, pour  $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ ,  $\sqrt{x}$  désigne l'unique matrice symétrique positive telle que  $\sqrt{x}^2 = x$ . En dimension  $d = 1$ , l'EDS (1.13) est celle d'un processus CIR avec la paramétrisation suivante :

$$dX_t^x = (\alpha a^2 + 2bX_t^x)dt + a\sqrt{X_t^x}dW_t.$$

Nous avons le résultat suivant (Bru [35], Cuchiero et al. [44]) d'existence et d'unicité.

**Théorème 1.4.1.** *Lorsque  $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  et  $\alpha \geq d - 1$ , il existe une unique solution faible à l'EDS (1.13), et cette solution est à valeurs dans les matrices symétriques positives. Nous noterons  $WIS_d(x, \alpha, b, a)$  la loi du processus  $X^x$  et  $WIS_d(x, \alpha, b, a; t)$  la loi de  $X_t^x$ .*

*Lorsque  $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  est définie positive et  $\alpha \geq d + 1$ , l'EDS (1.13) admet une unique solution forte, qui reste alors dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives.*

Il est à noter que pour le processus CIR, il existe une unique solution forte pour tout  $\alpha \geq 0$  puisque l'EDS est unidimensionnelle et le coefficient de diffusion est 1/2-Hölderien. La condition  $\alpha \geq 2$  est celle qui garantit la stricte positivité du processus. Il en est de même ici : lorsque  $x$  est définie positive et  $\alpha \geq d + 1$ , on peut montrer que le processus reste dans les matrices définies positives, où la racine carrée est localement lipschitzienne ce qui donne l'unicité forte. En revanche, en dimension supérieure à 2, lorsque  $d - 1 \leq \alpha < d + 1$ , le problème de l'existence et l'unicité forte d'une solution de (1.13) reste ouvert. Récemment, Graczyk et Malecki [62] ont montré l'unicité forte pour l'EDS qui régit les vecteurs propres et les valeurs propres de  $X^x$ .

Les processus de Wishart appartiennent à la classe des processus affines, ce qui signifie que leur générateur infinitésimal s'écrit comme une fonction affine de  $x$ . La fonction caractéristique de  $X_t^x$  est connue explicitement. Nous donnons dans [1] de façon explicite le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $X_t^x$ .

**Proposition 1.4.2.** *Soient  $X_t^x \sim WIS_d(x, \alpha, b, a; t)$ ,  $q_t = \int_0^t \exp(sb)a^T a \exp(sb^T)ds$  et  $m_t = \exp(tb)$ . On note  $\mathcal{D}_{b,a;t} = \{v \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}), \mathbb{E}[\exp(\text{Tr}(vX_t^x))] < \infty\}$  l'ensemble de convergence de la transformée de Laplace de  $X_t^x$ . C'est l'ensemble convexe suivant :*

$$\mathcal{D}_{b,a;t} = \{v \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}), \forall s \in [0, t], I_d - 2q_s v \in \mathcal{G}_d(\mathbb{R})\}. \quad (1.14)$$

De plus, la transformée de Laplace de  $X_t^x$  est bien définie pour  $v = v_R + iv_I$  lorsque  $v_R \in \mathcal{D}_{b,a;t}$ ,  $v_I \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$  et vaut :

$$\mathbb{E}[\exp(\text{Tr}(vX_t^x))] = \frac{\exp(\text{Tr}[v(I_d - 2q_t v)^{-1}m_t x m_t^T])}{\det(I_d - 2q_t v)^{\frac{\alpha}{2}}}. \quad (1.15)$$

En particulier, nous remarquons que  $\rho I_d \in \mathcal{D}_{b,a;t}$  pour  $\rho > 0$  suffisamment petit. Cette propriété nous permet dans [1] d'étudier le problème de Cauchy associé au processus de Wishart et de prouver que  $u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_{T-t}^x)]$  satisfait (1.5) lorsque  $f \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}))$ .

L'utilisation des processus de Wishart pour la modélisation en finance est récente. Gourieroux et Sufana [61] ont proposé de s'en servir pour modéliser la covariance instantanée d'un panier d'actifs risqués. Plus précisément, si on note, pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $S_t^i$  la valeur à l'instant  $t$  du  $i$ ème actif, Gourieroux et Sufana considèrent l'EDS suivante

$$d \log(S_t^i) = \left( r - \frac{1}{2}(X_t^x)_{i,i} \right) dt + (\sqrt{X_t^x} dB_t)_i, \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.16)$$

où  $B$  est un mouvement standard  $d$ -dimensionnel indépendant de  $W$ . On peut alors facilement vérifier que la covariance instantanée entre les actifs vaut :  $\langle dS_t^i, dS_t^j \rangle = (X_t^x)_{i,j} S_t^i S_t^j dt$ . Le modèle de Gourieroux et Sufana est un modèle affine. En particulier, la fonction caractéristique des lois marginales de  $(\log(S), X)$  peut s'exprimer à l'aide de solutions d'équations différentielles de Riccati. Da Fonseca, Grasselli, et Tebaldi [45] ont étendu ce modèle, et donnent une structure de dépendance entre les mouvements browniens  $B$  et  $W$  qui permet de conserver le caractère affine du processus. Leur modèle peut être ainsi vu comme une extension du modèle de Heston pour un panier d'actifs risqués.

Avant de conclure cette courte introduction aux processus de Wishart, il faut mentionner que Cuchiero et al. [44] ont récemment introduit un cadre général pour les processus affines à valeurs dans les matrices symétriques positives. Si l'on se restreint aux processus affines continus, ceux-ci résolvent l'EDS suivante :

$$X_t^x = x + \int_0^t (\bar{\alpha} + B(X_s^x)) ds + \int_0^t \left( \sqrt{X_s^x} dW_s a + a^T dW_s^T \sqrt{X_s^x} \right), \quad (1.17)$$

où  $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$  vérifie  $\bar{\alpha} - (d-1)a^T a \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  et  $B : \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$  est une application linéaire telle que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(x_1 x_2) = 0 \implies \text{Tr}(B(x_1) x_2) \geq 0.$$

Les processus de Wishart apparaissent comme le cas particulier  $\bar{\alpha} = \alpha a^T a$  et  $B(x) = bx + xb^T$ . Il y a pour l'EDS (1.17) des résultats d'unicité forte et faible analogues à ceux présentés pour les processus de Wishart. Dans [1], nous présentons des schémas de discrétisation d'ordre 2 pour (1.17). Par souci de concision, nous nous limiterons ici à présenter les schémas de discrétisation obtenus pour les processus de Wishart.

### 1.4.1 Simulation exacte et schémas d'ordre élevé

Il existe peu de résultats dans la littérature concernant la simulation des processus de Wishart. Lorsque  $\alpha \in \mathbb{N}$ , Odell et Feiveson [78], Smith et Hocking [84] et Gleser [60] ont proposé des méthodes de simulation exactes. Benabid, Bensusan et El Karoui [24] et Gauthier et Possamai [57] ont proposé des schémas de discrétisation pour les processus de Wishart. Néanmoins, ces schémas ne sont définis que sous certaines restrictions sur les paramètres, et on ne dispose pas de résultats théoriques sur leur convergence.

#### Simulation exacte

Nous allons commencer par présenter une méthode de simulation exacte des lois marginales d'un processus de Wishart. On présente ici seulement les étapes clefs qui permettent d'arriver au résultats : les détails peuvent être trouvés dans [1]. Tout d'abord, nous allons donner une égalité en loi qui s'obtient facilement à partir de la fonction caractéristique (1.15). Pour  $t > 0$ , on pose  $m_t = \exp(tb)$ ,  $q_t = \int_0^t \exp(sb) a^T a \exp(sb^T) ds$  et on

appelle  $n$  le rang de la matrice  $q_t$ . On note, pour  $n \leq d$ ,  $I_d^n$  la matrice diagonale définie par

$$(I_d^n)_{i,j} = \mathbf{1}_{i=j \leq n}.$$

Alors, il existe une matrice inversible  $\theta_t \in \mathcal{G}_d(\mathbb{R})$  telle que  $q_t = t\theta_t I_d^n \theta_t^T$ , et on a :

$$WIS_d(x, \alpha, b, a; t) \stackrel{loi}{=} \theta_t WIS_d(\theta_t^{-1} m_t x m_t^T (\theta_t^{-1})^T, \alpha, 0, I_d^n; t) \theta_t^T. \quad (1.18)$$

Grâce à cette identité, nous voyons qu'il est suffisant de se pencher sur la simulation des processus de Wishart dans le cas où  $b = 0$  et  $a = I_d^n$ .

On s'intéresse désormais à la simulation du processus  $WIS_d(x, \alpha, 0, I_d^n)$ . Son générateur infinitésimal s'écrit de façon formelle  $L = \text{Tr}(\alpha I_d^n D) + 2\text{Tr}(x D I_d^n D)$ , où  $D$  désigne l'opérateur de dérivation  $D_{i,j} = \partial_{i,j}$ . Nous introduisons les matrices  $e_d^i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , définies par

$$(e_d^i)_{k,l} = \mathbf{1}_{k=l=i},$$

si bien que  $I_d^n = \sum_{i=1}^n e_d^i$ . En notant  $L_i$  le générateur infinitésimal du processus  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^i)$ , on obtient alors aisément que :

$$L = \sum_{i=1}^n L_i.$$

En soit, ce découpage est déjà très intéressant car il satisfait les deux propriétés suivantes.

- Chaque opérateur  $L_i$  est associé à une diffusion à valeurs dans  $\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  sous la même condition  $\alpha \geq d - 1$  que l'EDS associée à  $L$ . Cette propriété assure la stabilité du domaine et le fait que l'on puisse composer les schémas.
- Les opérateurs  $L_1$  et  $L_i$  sont identiques si l'on permute la première et la  $i$ ème coordonnée.

En outre, nous avons montré dans [1] la propriété de commutativité suivante.

**Théorème 1.4.3.** *Soit  $L$  (resp.  $L_i$ ) le générateur infinitésimal du processus  $WIS_d(x, \alpha, 0, I_d^n)$  (resp.  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^i)$ ). On a la propriété suivante :*

$$L = \sum_{i=1}^n L_i \text{ and } \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, L_i L_j = L_j L_i. \quad (1.19)$$

Grâce à ce résultat et la proposition 1.2.2 (formellement  $\nu = +\infty$ ), il suffit d'être capable de simuler exactement les lois marginales de  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1)$  pour obtenir une méthode de simulation exacte des lois marginales de  $WIS_d(x, \alpha, 0, I_d^n)$  par composition.

Ainsi, on se focalise désormais sur la simulation exacte du processus  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1)$ . Pour ce faire, on ne va pas directement regarder l'EDS matricielle (1.13) : on va introduire une EDS qui est associée au même générateur infinitésimal et qui peut se résoudre explicitement. Bien que cela ne soit pas nécessaire, nous allons supposer que la sous matrice  $(x)_{2 \leq i, j \leq d}$  est inversible afin de simplifier l'exposition des résultats. Le cas général est traité dans [1]. En utilisant une décomposition de Cholesky, il existe une matrice inversible triangulaire inférieure  $c$  telle que  $(x)_{2 \leq i, j \leq d} = cc^T$ .

**Théorème 1.4.4.** *On se place dans le cadre présenté et on considère  $Z$ , un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel. Alors, l'EDS suivante*

$$\begin{aligned} d(X_t^x)_{\{1,1\}} &= \alpha dt + 2\sqrt{(X_t^x)_{\{1,1\}} - \sum_{k=1}^{d-1} \left( \sum_{l=1}^d (c^{-1})_{k,l} (X_t^x)_{\{1,l+1\}} \right)^2} dZ_t^1 \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \sum_{l=1}^{d-1} (c^{-1})_{k,l} (X_t^x)_{\{1,l+1\}} dZ_t^{k+1} \\ d(X_t^x)_{\{1,i\}} &= \sum_{k=1}^{d-1} c_{i-1,k} dZ_t^{k+1}, \quad i = 2, \dots, d \\ d((X_t^x)_{\{l,k\}})_{2 \leq k, l \leq d} &= 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

a une unique solution forte issue de  $x$ . Elle est à valeurs dans  $\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  et est associée au générateur infinitésimal  $L_1$ . En outre, cette solution est donnée explicitement par :

$$X_t^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_t^u)_{\{1,1\}} + \sum_{k=1}^{d-1} ((U_t^u)_{\{1,k+1\}})^2 & ((U_t^u)_{\{1,l+1\}})_{1 \leq l \leq d-1}^T \\ ((U_t^u)_{\{1,l+1\}})_{1 \leq l \leq d-1} & I_{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^T \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

avec

$$\begin{aligned} d(U_t^u)_{\{1,1\}} &= (\alpha - (d-1))dt + 2\sqrt{(U_t^u)_{\{1,1\}}} dZ_t^1, \quad u_{\{1,1\}} = x_{\{1,1\}} - \sum_{k=1}^{d-1} (u_{\{1,k+1\}})^2 \geq 0, \\ d((U_t^u)_{\{1,l+1\}})_{1 \leq l \leq d-1} &= (dZ_t^{l+1})_{1 \leq l \leq d-1}, \quad (u_{\{1,l+1\}})_{1 \leq l \leq d-1} = c^{-1}(x_{\{1,l+1\}})_{1 \leq l \leq d-1}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ainsi, pour simuler exactement les lois marginales du processus  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1)$ , il est suffisant de simuler  $d-1$  gaussiennes et une loi de chi-deux décentrée indépendantes pour le processus CIR, ce qui est faisable (on se référera à Glasserman [59]).

Maintenant, nous allons brièvement discuter de la complexité de l'algorithme de simulation exacte en fonction de la dimension. Il est important de noter qu'en pratique, on n'effectue pas le produit matriciel (1.21) car la sous-matrice principale  $((X_t^x)_{\{l,k\}})_{2 \leq k, l \leq d}$  est inchangée : il est donc suffisant de calculer la première ligne de la matrice. Ainsi, l'opération la plus coûteuse est la décomposition de Cholesky de  $(x)_{2 \leq i, j \leq d}$  qui nécessite  $O(d^3)$  opérations. Avec la composition des schémas, il faut au plus  $O(d^4)$  opérations pour simuler de façon exacte une variable aléatoire de loi  $WIS_d(x, \alpha, b, a; t)$ .

### Schémas d'ordre élevé

Pour obtenir des schémas d'ordre élevé, on utilise le même cheminement que pour la simulation exacte. Ainsi, on se ramène à chercher un schéma de discrétisation pour le processus  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1)$ . On a alors le résultat suivant. En remplaçant dans la méthode de simulation exacte les variables gaussiennes par des variables aléatoires ayant les mêmes  $2\nu+1$  premiers moments et la simulation exacte du processus CIR par un schéma potentiellement d'ordre  $\nu$  pour le CIR, on obtient un schéma d'ordre  $\nu$  pour  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1)$ . Par composition (proposition 1.2.2) en utilisant le théorème 1.4.3, puis en utilisant la transformation donnée par (1.4.3), on obtient un schéma d'ordre  $\nu$  pour les processus de Wishart.



Comme nous disposons de schémas d'ordre 2 et 3 pour le processus CIR, nous disposons également de schémas d'ordre 2 et 3 pour les processus de Wishart.

La complexité de ces schémas de discrétisation par rapport à la dimension est en  $O(d^4)$ , comme pour le schéma exact. Si on fait l'hypothèse supplémentaire  $\alpha \geq d$ , on peut construire un schéma d'ordre 2 qui plus rapide qui nécessite au plus  $O(d^3)$  opérations. En effet, au lieu de simuler  $WIS_d(x, \alpha, 0, I_d^n)$  en composant les schémas avec le splitting (1.19), on considère le découpage suivant

$$L = \text{Tr}((\alpha - d)I_d^n) + \text{Tr}(dI_d^n D + 2xDI_d^n D).$$

La première partie correspond à l'opérateur d'une équation différentielle qui a pour solution  $(x + t(\alpha - d)I_d^n, t \geq 0)$  et reste bien à valeur dans  $\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  puisque  $\alpha \geq d$ . La seconde partie correspond à l'opérateur du processus  $WIS_d(x, d, 0, I_d^n)$ . On a alors l'identité en loi suivante

$$((c + W_t I_d^n)^T (c + W_t I_d^n), t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} WIS_d(x, d, 0, I_d^n),$$

où  $c$  est une matrice telle que  $cc = x$ . On peut aussi montrer que si  $\hat{G}$  est une matrice carrée dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes ayant les mêmes cinq premiers moments qu'une gaussienne centrée réduite,

$$\hat{X}_t^x = (c + \sqrt{t}\hat{G}I_d^n)^T (c + \sqrt{t}\hat{G}I_d^n)$$

est un schéma potentiellement d'ordre 2 pour  $WIS_d(x, d, 0, I_d^n)$ . Par composition, on obtient ainsi un schéma d'ordre 2 qui nécessite au plus  $O(d^3)$  opérations, puisqu'une seule décomposition de Cholesky et deux multiplications matricielles sont à faire.

## Résultats numériques

Nous allons maintenant comparer brièvement les différentes méthodes de simulation. Dans [1], nous avons illustré sur quelques exemples la convergence faible des différents schémas et vérifié qu'elle était en accord avec les résultats théoriques. A titre de comparaison, nous avons également simulé le schéma d'Euler corrigé suivant :

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + (\alpha a^T a + b \hat{X}_{t_i} + \hat{X}_{t_i} b^T) \frac{T}{n} + \sqrt{(\hat{X}_{t_i})^+} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) a + a^T (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^T \sqrt{(\hat{X}_{t_i})^+}, \quad (1.23)$$

où  $x^+$  désigne, pour  $x \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ , la matrice symétrique positive qui a les mêmes vecteurs propres que  $x$  avec, comme valeur propre, la partie positive de celle de  $x$ . Nous allons discuter ici du temps demandé par chaque méthode.

Dans le tableau 1.1, nous avons calculé par méthode de Monte-Carlo, avec  $10^6$  tirages et 10 ou 30 pas de discrétisation, une espérance qui est connue analytiquement. En dehors du schéma d'Euler corrigé, toutes les méthodes donnent des valeurs satisfaisantes. En terme de temps de calcul, la simulation exacte est de loin la plus rapide s'il s'agit comme

Schemas	$n = 10$			$n = 30$		
	valeur R.	valeur Im.	temps (s)	valeur R.	valeur Im.	temps (s)
Exact (1 pas)	0.062712	-0.063757	181			
2 <sup>nd</sup> ordre bis	0.064237	-0.063825	921	0.064573	-0.062747	2762
2 <sup>nd</sup> ordre	0.064922	-0.064103	1431	0.063534	-0.063280	4283
3 <sup>ème</sup> ordre	0.064620	-0.064543	1446	0.064120	-0.063122	4343
Exact ( $n$ pas)	0.063418	-0.064636	1806	0.063469	-0.064380	5408
Euler corrigé	0.068298*	-0.058491*	2312	0.061732*	-0.056882*	7113

$\alpha = 10.5, d = 10, \Delta_R = 1.4 \times 10^{-3}, \Delta_{Im} = 1.3 \times 10^{-3},$   
valeurs exactes R. = 0.063960 and Im. = -0.063544

Exact (1 pas)	-0.036869	-0.094156	177			
2 <sup>nd</sup> ordre	-0.036246	-0.094196	1430	-0.035944	-0.092770	4285
3 <sup>ème</sup> ordre	-0.035408	-0.093479	1441	-0.036277	-0.093178	4327
Exact ( $n$ pas)	-0.036478	-0.092860	1866	-0.036145	-0.093003	6385
Euler corrigé	-0.028685*	-0.094281*	2321	-0.030118*	-0.088988*	7144

$\alpha = 9.2, d = 10, \Delta_R = 1.4 \times 10^{-3}, \Delta_{Im} = 1.4 \times 10^{-3},$   
valeurs exactes R. = -0.036064 and Im. = -0.093275

Tableau 1.1 – Calcul de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $\mathbb{E}[\exp(-\text{Tr}(iv\hat{X}_T))]$  par méthode de Monte-Carlo avec  $10^6$  tirages, pour le processus de Wishart de paramètres  $a = I_d$ ,  $b = 0$ ,  $x = 10I_d$ , avec  $v = 0.09I_d$  et  $T = 1$ . Les étoiles signifient que la valeur exacte est en dehors de l'intervalle de confiance à 95%, et  $\Delta_R$  (resp.  $\Delta_I$ ) vaut deux écarts-types sur la partie réelle (resp. imaginaire).

ici de calculer une espérance qui dépend d'une seule date. En revanche, si l'on calcule l'espérance d'une fonctionnelle qui nécessite de simuler de toute la trajectoire, la méthode de simulation exacte devient significativement plus lente que les schémas de discrétisation. Parmi les schémas de discrétisations, c'est sans surprise le schéma d'ordre 2 "bis" (c'est à dire celui de complexité  $O(d^3)$ ) qui est le plus rapide lorsqu'il est bien défini.

### 1.4.2 Processus de corrélation

Nous avons vu, à travers le modèle de Gourieroux et Sufana (1.16), comment les processus de Wishart et plus généralement les processus à valeurs dans les matrices symétriques positives peuvent être utilisés pour décrire la covariance instantanée entre plusieurs actifs risqués. Néanmoins, cette approche "top-down" est assez rigide car elle suppose de modéliser d'emblée tous les actifs, et la dynamique individuelle de chaque actif en découle. En particulier, la calibration des paramètres du modèle doit se faire en une fois, à partir des données de marché portant sur tout le panier. En pratique, il est pourtant préférable d'avoir une approche "bottom-up", à savoir modéliser chaque actif un par un et ensuite rajouter une structure de dépendance entre les actifs. Cela permet de décomposer la calibration du modèle en plusieurs étapes distinctes qui sont a priori plus facilement réalisables. Cela donne aussi plus de flexibilité sur la modélisation de chaque actif.

Dans cette approche, il est naturel de vouloir utiliser un processus  $(X_t, t \geq 0)$  à valeurs dans les matrices de corrélation (on note  $\mathfrak{C}_d(\mathbb{R})$  cet ensemble). En effet, supposons que pour chaque actif  $S_t^i$  on ait calibré un processus de volatilité (locale et/ou stochastique)  $\sigma_t^i$  aux données de marché. Alors, en considérant la dynamique suivante

$$d \log(S_t^i) = \left( r - \frac{1}{2}(\sigma_t^i)^2 \right) dt + \sigma_t^i (\sqrt{X_t} dB_t)_i, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (1.24)$$

avec  $B$  mouvement brownien  $d$ -dimensionnel standard, on obtient que la covariance instantanée entre les actifs est donnée par  $\langle dS_t^i, dS_t^j \rangle = \sigma_t^i \sigma_t^j (X_t)_{i,j} dt$ .

Pour des applications financières, les choix les plus courants sont de prendre une corrélation constante ou bien une "corrélation locale"  $(X_t)_{i,j} = \mathbf{1}_{i=j} + \rho(t, I_t) \mathbf{1}_{i \neq j}$  comme dans l'article de Reghai [82]. Ici on prend  $\rho(t, I_t) \in [0, 1]$ , et  $I_t$  désigne un indice sur le panier, c'est à dire une moyenne pondérée des valeurs  $S_t^i$ . Lorsque l'on considère deux actifs, un autre choix usuel consiste à prendre pour  $\rho_t = (X_t)_{1,2}$  un processus de Wright-Fisher (ou Jacobi) :

$$d\rho_t = \kappa(\bar{\rho} - \rho_t)dt + \sigma\sqrt{1 - \rho_t^2}dW_t, \quad (1.25)$$

avec  $\kappa, \sigma > 0$  et  $\bar{\rho} \in [-1, 1]$ . En dimension supérieure, il y a peu de littérature sur des diffusions à valeurs dans les matrices de corrélations. Kaya [71] propose quelques exemples qui s'appuient sur une paramétrisation d'un sous-ensemble des matrices de corrélation.

Dans [2], nous proposons une famille de diffusion à valeurs dans les matrices de corrélation qui généralise naturellement les processus de Wright-Fisher. Il existe dans la littérature de

nombreuses extensions du processus de Wright-Fisher, notamment le modèle de Wright-Fisher multi-allèles défini sur  $\{x \in \mathbb{R}_+^d, \sum_{i=1}^d x_i = 1\}$  (voir Etheridge [52]). Mais à notre connaissance, aucune de ces généralisations ne porte sur les matrices de corrélation. Dans [2], nous introduisons ainsi l'EDS suivante :

$$X_t = x + \int_0^t (\kappa(c - X_s) + (c - X_s)\kappa) ds + \sum_{n=1}^d a_n \int_0^t \left( \sqrt{X_s - X_s e_d^n X_s} dW_s e_d^n + e_d^n dW_s^T \sqrt{X_s - X_s e_d^n X_s} \right). \quad (1.26)$$

Ici  $x, c$  sont des matrices de corrélation et  $\kappa = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_d)$ ,  $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$  sont des matrices diagonales positives. On montre dans [2] que cette EDS admet une unique solution faible si

$$\kappa c + c\kappa - (d-2)a^2 \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}) \text{ ou } d = 2, \quad (1.27)$$

et une unique solution forte si  $x \in \mathfrak{C}_d(\mathbb{R})$  est inversible et  $\kappa c + c\kappa - da^2 \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ . L'EDS (1.26) généralise naturellement (1.25), puisque il existe des mouvements browniens  $(\beta_t^{i,j}, t \geq 0)$  (corrélés entre eux) tels que :

$$d(X_t)_{i,j} = (\kappa_i + \kappa_j)(c_{i,j} - (X_t)_{i,j})dt + \sqrt{a_i^2 + a_j^2} \sqrt{1 - (X_t)_{i,j}^2} d\beta_t^{i,j}. \quad (1.28)$$

En outre, le processus (1.26) conserve de nombreuses propriétés satisfaites par les processus de Wright-Fisher, telles que l'ergodicité ou le calcul explicite des moments. Grâce à cette dernière, on obtient facilement l'unicité en loi de l'EDS (1.26), et on note  $MRC_d(x, \kappa, c, a)$  la loi de ce processus.

Le point de départ de notre étude a bien évidemment été les processus de Wishart : étant donné un processus  $Y_t$  à valeurs dans les matrices symétriques positives, il est naturel de regarder, s'il est bien défini, le processus de corrélation associé

$$X_t = \mathbf{p}(Y_t),$$

où  $\mathbf{p}(x)_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{\sqrt{x_{i,i}x_{j,j}}}$ , pour  $x \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  tel que  $x_{i,i} > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ . Cependant, si on considère directement le processus de corrélation associé à un processus de Wishart, on n'obtient pas en général une dynamique autonome de la corrélation, sauf dans le cas particulier des processus  $WIS_d(x, \alpha, 0, e_d^1)$  où on a le résultat suivant.

**Proposition 1.4.5.** *Soient  $\alpha \geq \max(1, d-2)$  et  $y \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$  tel que  $y_{i,i} > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ . On pose  $(Y_t^y)_{t \geq 0} \sim WIS_d(y, \alpha + 1, 0, e_d^1)$ . Alors,  $(Y_t^y)_{i,i} = y_{i,i}$  si  $2 \leq i \leq d$  et  $(Y_t^y)_{1,1}$  est un processus de carré de Bessel de dimension  $\alpha + 1$  qui est presque sûrement strictement positif. On définit*

$$X_t = \mathbf{p}(Y_t^y), \quad \phi(t) = \int_0^t \frac{1}{(Y_s^y)_{1,1}} ds.$$

La fonction  $\phi$  est p.s. bijective sur  $\mathbb{R}_+$  et induit un changement de temps tel que :

$$(X_{\phi^{-1}(t)}, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} MRC_d(\mathbf{p}(y), \frac{\alpha}{2}e_d^1, I_d, e_d^1).$$

En particulier, il existe une solution faible à  $MRC_d(\mathbf{p}(y), \frac{\alpha}{2}e_d^1, I_d, e_d^1)$ . Enfin, les processus  $(X_{\phi^{-1}(t)}, t \geq 0)$  et  $((Y_t^y)_{1,1}, t \geq 0)$  sont indépendants.

Ainsi, en dimension  $d \geq 3$ , on a l'existence d'une solution faible pour  $MRC_d(x, \frac{d-2}{2}e_d^1, I_d, e_d^1)$ , et donc aussi pour  $MRC_d(x, \frac{d-2}{2}e_d^i, I_d, e_d^i)$  en permutant la première et la  $i$ ème coordonnée. L'EDS (1.26) a été obtenue de la façon suivante. Si on note  $L_i$  le générateur infinitésimal de  $MRC_d(x, \frac{d-2}{2}e_d^i, I_d, e_d^i)$ , le générateur  $L$  de (1.26) satisfait

$$L = \sum_{i=1}^d a_i^2 L_i + L_\xi,$$

où  $L_\xi$  est l'opérateur associé à l'équation différentielle linéaire :

$$\xi'(t, x) = \kappa(c - x) + (c - x)\kappa - \frac{d-2}{2}[a^2(I_d - x) + (I_d - x)a^2], \quad \xi(0, x) = x \in \mathfrak{C}_d(\mathbb{R}). \quad (1.29)$$

On peut montrer que sous l'hypothèse (1.26), cette EDO reste à valeurs dans les matrices de corrélation. Cela permet par composition de construire une approximation de l'EDS (1.26) et, en prouvant la tension de ces approximations, on obtient ainsi l'existence d'une solution faible de (1.26).

Le splitting ci-dessus permet également d'obtenir facilement un schéma de discrétisation d'ordre 2 pour (1.26). En effet, grâce à la propriété d'indépendance entre  $X_{\phi^{-1}(t)}$  et  $\phi$  donnée par la proposition 1.4.5, on peut montrer qu'à partir d'un schéma potentiellement d'ordre 2 pour  $WIS_d(y, \alpha + 1, 0, e_d^1)$  et d'une fonction déterministe positive  $\psi$  telle que  $\psi(t) = t - (5-d)\frac{t^2}{2} + O(t^3)$ ,

$$\mathbf{p}(\hat{Y}_{\psi(t)}^{1,x}) \text{ est un schéma potentiel d'ordre 2 pour } MRC_d(x, \frac{d-2}{2}e_d^1, I_d, e_d^1). \quad (1.30)$$

Ainsi,  $\mathbf{p}(\hat{Y}_{\psi(a_1 t)}^{1,x})$  est un schéma potentiel d'ordre 2 pour l'opérateur  $a_1^2 L_1$ , et par composition on obtient un schéma potentiellement d'ordre 2 pour (1.26). Pour pouvoir ensuite effectivement en déduire une erreur faible d'ordre 2 par le Théorème 1.2.1, il faut en toute rigueur étudier le problème de Cauchy. Cela a été fait récemment par Epstein et Mazzeo [51] pour les processus de Wright-Fisher en dimension 1. Néanmoins, les résultats numériques sur l'erreur faible que nous obtenons dans [1] sont en accord avec une convergence d'ordre 2.

## 1.5 Bilan et perspectives

Nous avons présenté ici différents schémas de discrétisation construits à partir de méthodes de splitting. Nous avons vu que ces techniques étaient très intéressantes pour

décomposer le problème de l'approximation d'une EDS "compliquée" en plusieurs sous-problèmes d'approximation que l'on espère plus simples. Ainsi, pour tous les processus affines que nous avons étudiés, les décompositions d'opérateur que nous avons considérées nous ont permis à chaque fois de nous ramener à devoir approximer des variables aléatoires gaussiennes et du chi-deux décentrées (processus CIR). Sur ces exemples, le fil directeur qui nous a guidé pour trouver ces décompositions a été de chercher le générateur infinitésimal comme somme d'opérateurs qui préservent le domaine, c'est à dire associés à des EDS ou EDO à valeur dans le même domaine que la diffusion initiale. Cette propriété est bien évidemment essentielle ensuite pour pouvoir composer les schémas.

Une force, ou tout au moins une souplesse des schémas que l'on obtient par méthode de splitting est de chercher à approcher la loi du processus, et non pas le processus lui-même. Les schémas d'Euler, de Milstein, ou plus généralement tous les schémas obtenus en faisant des développements de Taylor itérés sur les intégrales stochastiques cherchent à expliciter une correspondance " $\omega$  par  $\omega$ " entre la diffusion et son approximation. Néanmoins, lorsque les coefficients sont irréguliers, comme la racine-carrée au voisinage de zéro pour le processus CIR, ces approches ne sont plus aussi pertinentes. Chercher une approximation en loi est moins exigeant. Cela nous a permis dans le cas du CIR d'obtenir un schéma qui converge sans aucune restriction sur les paramètres. La question naturelle qui se pose est alors de savoir si l'on perd quelque chose à avoir une approximation en loi de la solution d'une EDS et non plus une approximation forte, " $\omega$  par  $\omega$ ". Cela dépend bien évidemment de ce qu'on l'on fait ensuite. Par exemple, avoir une vitesse de convergence forte est important pour pouvoir utiliser la méthode de Monte-Carlo multilevel proposée par Giles [58]. En revanche, si on emploie une méthode de Monte-Carlo basique pour calculer une espérance, il est inutile d'avoir une approximation forte. Au plus, la vitesse de convergence forte peut donner une borne supérieure de l'erreur que l'on commet. Mais même dans ce cas, l'exemple de la vitesse faible du schéma d'Euler nous montre que cette borne supérieure peut être bien trop pessimiste.

Nous allons maintenant présenter, de façon non exhaustive, plusieurs pistes de recherche autour de la discrétisation de processus.

### Schémas d'ordre supérieur à 2

La proposition 1.2.2 montre avec quelle simplicité on peut construire de façon récursive des schémas d'ordre 2. Une question naturelle est alors de se demander si l'on peut obtenir des résultats de même nature pour des ordres supérieurs. Ici, nous avons par exemple construit un schémas d'ordre trois en exploitant une propriété particulière sur le CIR : pourrait-on généraliser ce type de construction ? A l'idéal même, serait-il possible de simuler exactement une EDS générique comme Beskos, Papaspiliopoulos et Roberts [27] l'ont proposé une méthode de simulation exacte pour des EDS uni-dimensionnelle ? A mon avis, ces questions sont très intéressantes à étudier d'un point de vue mathématique.

Néanmoins, je crois qu'il faut relativiser le gain de temps que de telles méthodes appor-

teraient. En effet, ces méthodes de simulation ont pour but d'être utilisées pour effectuer des calculs par Monte Carlo. Prenons l'exemple du calcul de  $\mathbb{E}[f(X_T)]$ . Si l'on a à notre disposition un schéma d'ordre  $\nu$  ( $\nu = +\infty$ ) pour un schéma exact, et que l'on souhaite avoir une précision d'ordre  $\varepsilon$ , il faut  $O(1/\varepsilon^2)$  tirages de Monte-Carlo et un pas de temps en  $O(1/\varepsilon^{1/\nu})$ , ce qui donne une complexité totale en  $O(1/\varepsilon^{2+1/\nu})$ . Autrement dit, il y a autant de gain en temps à espérer entre un schéma d'ordre 2 et un schéma exact que entre un schéma d'Euler (ordre 1) et un schéma d'ordre 2. Ce n'est certes pas négligeable, mais dans bien des cas, utiliser une méthode de réduction de variance peut déjà améliorer sensiblement la constante de convergence.

### Analyse de l'erreur faible dans des contextes moins réguliers

Même si le coefficient de diffusion en racine-carrée est irrégulier, le générateur infinitésimal du processus CIR est lui très régulier au sens suivant : si  $f \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D})$ , alors  $Lf \in \mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D})$ . Cette propriété est également satisfaite pour les processus affines et les processus de type Wright-Fisher que nous avons considérés. Cette propriété simplifie aussi grandement l'analyse de l'erreur faible, car il n'y a jamais à contrôler dans les développements de l'erreur des termes susceptibles d'exploser.

Cependant, certaines diffusions en finance ont des coefficients irréguliers, au sens où les fonctions  $\mathcal{C}_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{D})$  ne sont pas stable par le générateur. C'est par exemple le cas du modèle SABR :

$$dS_t = \sigma_t S_t^\beta dW_t^1, \quad d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_t^2, \quad \langle dW_t^1, dW_t^2 \rangle = \rho dt.$$

Lorsque  $\beta \neq 1/2$ , par exemple  $\beta \in (1/2, 1)$ , l'opérateur associé n'est pas régulier au sens indiqué ci-dessus : certaines dérivées peuvent exploser au voisinage de 0. Récemment, Chen, Oosterlee et van der Weide [40] ont proposé un schéma de discrétisation pour ce modèle. Ils ne donnent néanmoins pas de résultats théoriques sur la convergence de leur schéma. Il serait intéressant de proposer un schéma pour lequel on peut mener à bien l'analyse de l'erreur faible.

Dans une direction différente, une question naturelle et intéressante d'un point de vue théorique serait de généraliser l'étude de l'erreur faible pour des schémas obtenus par composition à des fonctions test  $f$  moins régulières. Cela a été étudié pour le schéma d'Euler, notamment par Bally et Talay [22] et Guyon [64]. Il n'existe pas à ma connaissance dans la littérature de travaux dans cette direction.

### Vitesse faible trajectorielle

Un thème de recherche très intéressant et encore finalement peu étudié est l'analyse de l'erreur faible des schémas de discrétisation pour des fonctionnelles dépendant de toute la trajectoire du processus. Cela consiste à étudier pour une fonctionnelle  $F : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ , la convergence de  $\mathbb{E}[F(\hat{X}_t, t \in [0, T])] - \mathbb{E}[F(X_t, t \in [0, T])]$  vers zéro. On parle d'erreur

faible trajectorielle car cette quantité mesure la proximité des lois des processus  $\hat{X}$  et  $X$ , et non des processus eux-mêmes.

Il existe à ma connaissance peu de résultats sur ce type de convergence, même pour des fonctionnelles  $F$  particulières. Un cas pour lequel on dispose de résultats théoriques est celui où  $F$  est une fonction régulière de  $(X_T, \int_0^T f_1(X_s)ds, \dots, \int_0^T f_l(X_s)ds)$ . En effet, lorsque les fonctions  $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sont assez régulières, on peut utiliser le cadre présenté au paragraphe 1.2 en rajoutant les coordonnées  $Y_t^i = \int_0^t f_i(X_s)ds$  et en considérant l'EDS satisfaite par  $(X, Y)$ . Si on dispose d'un schéma d'ordre 2 pour  $X$ , on peut facilement obtenir un schéma d'ordre 2 pour  $(X, Y)$  par composition, ce qui revient à utiliser la méthode des trapèzes. En revanche, il n'existe pas à ma connaissance de résultats généraux pour d'autres types de fonctionnelles  $F$  (par exemple  $F(X_t, t \in [0, T]) = \max_{t \in [0, T]} f_1(X_t)$ ), si ce n'est la borne donnée par la vitesse de convergence forte. Et ceci, même pour le schéma d'Euler-Maruyama. En finance, il arrive fréquemment d'avoir à calculer des espérances dépendant d'un maximum calculé sur la trajectoire, notamment pour calculer le prix des options lookback. Dans bien des cas, on observe des vitesses de convergence de l'erreur faible trajectorielle similaires à celles obtenues pour les lois marginales. Par exemple, la Figure 1.2 représente, pour les différents schémas présentés pour le processus de Wishart, le comportement de  $\mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} \text{Tr}(\hat{X}_{t_k})] - \mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} \text{Tr}(X_{t_k})]$  en fonction du pas de temps  $1/n$ . Il est frappant d'observer des convergences tout à fait compatibles avec l'ordre de convergence faible sur les lois marginales, aussi bien pour le schéma d'Euler (d'ordre 1) que pour les schémas d'ordre 2 et 3.

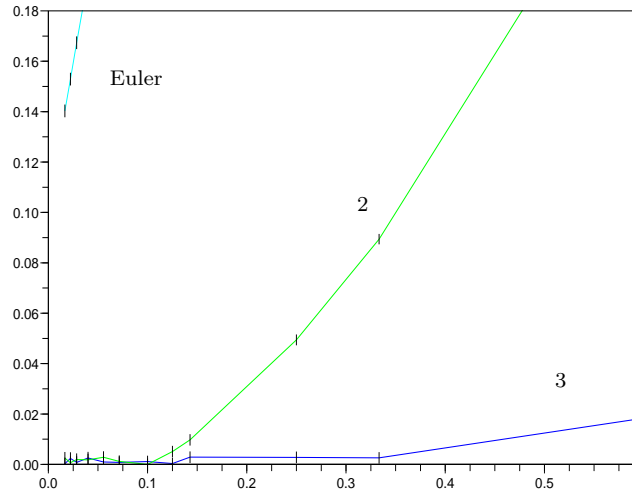


FIGURE 1.2 – Dimension  $d = 3$ ,  $10^7$  tirages,  $T = 1$ . Paramètres du processus de Wishart :  $x = 0.4I_d + 0.2q$  avec  $q_{i,j} = \mathbf{1}_{i \neq j}$ ,  $\alpha = 2.2$ ,  $b = 0$  et  $a = I_d$ .  $\mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} \text{Tr}(\hat{X}_{t_k})] - \mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} \text{Tr}(X_{t_k})]$  en fonction du pas de temps  $T/n$ . La largeur des points indique l'intervalle de confiance à 95%.



Ainsi, il serait intéressant d'étudier l'erreur faible trajectorielle, au moins pour des fonctionnelles particulières comme le maximum d'une certaine quantité sur la trajectoire. De façon plus ambitieuse, on aimerait obtenir des résultats de convergence généraux, valables pour toute une famille de fonctionnelles  $F$ . Par exemple, on peut s'intéresser aux fonctions lipschitziennes par rapport à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , i.e.

$$|F(x(t), t \in [0, T]) - F(y(t), t \in [0, T])| \leq [F]_{\text{lip}} \max_{t \in [0, T]} \|x(t) - y(t)\|,$$

et dans ce cas étudier le comportement asymptotique de

$$\sup_{F: \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}, [F]_{\text{lip}} \leq 1} \mathbb{E}[F(\hat{X}_t, t \in [0, T])] - \mathbb{E}[F(X_t, t \in [0, T])].$$

Il s'agit de la distance de Wasserstein  $\mathcal{W}_1(\mathcal{L}(\hat{X}), \mathcal{L}(X))$  entre les lois de  $(\hat{X}_t, t \in [0, T])$  et de  $(X_t, t \in [0, T])$ . De façon à peu près claire, la vitesse de convergence de cette quantité vers zéro ne peut pas être meilleure que la vitesse faible sur les lois marginales. Inversement, lorsque l'on dispose de la vitesse de convergence forte du schéma  $\hat{X}$  (c'est le cas pour le schéma d'Euler mais pas pour les schémas obtenus par composition), on peut majorer l'erreur faible trajectorielle par l'erreur forte grâce à la propriété de Lipschitz, si bien que la vitesse faible trajectorielle est au minimum meilleure que la vitesse de convergence forte.

Ainsi, pour le schéma d'Euler, la vitesse de convergence trajectorielle est comprise entre  $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$  (vitesse forte) et  $O(\frac{1}{n})$  (vitesse faible). Dans un travail récent [15], nous avons montré, en dimension  $d = 1$ , que la vitesse faible trajectorielle est meilleure que  $O(\frac{1}{n^{2/3-\varepsilon}})$ ,  $\varepsilon > 0$  étant arbitrairement petit, ce qui améliore la borne donnée par la vitesse de convergence forte. Pour obtenir ce résultat, nous utilisons un résultat de dualité provenant de la théorie du transport optimal :

$$\mathcal{W}_1(\mathcal{L}(\hat{X}), \mathcal{L}(X)) = \inf_{\pi \in \Pi(\mathcal{L}(\hat{X}), \mathcal{L}(X))} \int_{\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)^2} \max_{t \in [0, T]} \|\hat{x}(t) - x(t)\| \pi(d\hat{x}, dx),$$

où  $\Pi(\mathcal{L}(\hat{X}), \mathcal{L}(X))$  désigne l'ensemble des lois de probabilité sur  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)^2$  telles que la restriction à la première (resp. deuxième) composante  $\hat{x}$  (resp.  $x$ ) est égale à la loi de probabilité de  $(\hat{X}_t, t \in [0, T])$  (resp.  $(X_t, t \in [0, T])$ ). Ainsi, pour obtenir une borne supérieure de la vitesse faible trajectorielle, il suffit d'exhiber un couplage particulier entre  $\hat{X}$  et  $X$ .

De nombreuses questions sont en suspens et restent à investiguer. Tout d'abord, on aimerait bien évidemment connaître le plus précisément possible l'ordre de convergence de l'erreur trajectorielle faible pour le schéma d'Euler. On souhaiterait également que l'analyse soit valable en dimension quelconque. Enfin, il serait très intéressant de pouvoir mener l'analyse de l'erreur trajectorielle faible pour d'autres schémas de discrétisation, et notamment ceux obtenus par composition. Cela permettrait peut-être de relier, dans certains cas, l'erreur faible trajectorielle et l'erreur faible "usuelle" sur les lois marginales.



# Chapitre 2

## Modélisation du risque de liquidité en finance

### 2.1 Introduction

Commençons tout d'abord par préciser ce que l'on entend par "risque de liquidité". Il s'agit du surcoût subi lors de l'achat (resp. de la vente) d'actifs qui est dû à la raréfaction de l'offre (resp. de la demande). Dans le cas extrême, il s'agit même de l'impossibilité d'acheter ou de vendre un actif à cause de l'absence de contrepartie. Récemment, lors de la crise des subprimes, certains produits comme les CDO étaient devenus invendables. De même, il est impossible de convertir certaines devises très faibles en dollars ou en euros.

La plupart des actifs traités sur un marché sont assez liquides, et il est toujours possible d'acheter et vendre des petites quantités à un prix très proche du prix de cotation. Ainsi, pour un petit investisseur, le risque de liquidité peut souvent être négligé. En revanche, pour un investisseur qui souhaite acheter ou vendre des quantités significatives (i.e. non négligeable par rapport au volume traité quotidiennement sur l'actif), l'impact de ses transactions sur le prix de marché est manifeste et doit être pris en compte.

Afin de quantifier le risque de liquidité, il faut se pencher sur le mécanisme de cotation d'un actif. Celui-ci se fait généralement à travers un carnet d'ordres qui recense tous les ordres d'achat et de vente qui sont en attente. Ces ordres en attente, appelés ordres limites, ne peuvent être placés que sur une grille de prix déterminée. Le pas de cette grille est appelé le "tick size". Un ordre limite correspond ainsi au souhait d'acheter ou vendre une certaine quantité d'actif à un prix fixé. Les ordres limites qui sont au même prix sont ordonnés dans une file d'attente "FIFO", c'est à dire que les ordres les plus anciens ont priorité sur les plus récents. On appelle "bid" le prix de l'ordre limite d'achat le plus élevé, et "ask" le prix de l'ordre limite de vente le plus bas. Le premier est inférieur au second : si un ordre limite d'achat (resp. de vente) est placé à un prix supérieur (resp. inférieur) ou égal au prix ask (resp. bid), le marché effectue automatiquement toutes les transactions possibles. Le prix "mid", qui est la moyenne des prix ask et bid, est celui qui est usuellement reporté.

Pour acheter ou vendre une certaine quantité d'actif, on a la possibilité de placer, soit un ordre limite, soit un ordre de marché qui consomme les ordres limites en attente les moins chers. Ainsi, en achetant avec un ordre de marché, on commencera par consommer les ordres limites au prix ask, puis au prix ask plus un tick, et ainsi de suite jusqu'à obtenir la quantité voulue. Les ordres de marché présentent l'avantage d'être exécutés immédiatement, mais leur coût dépend de la structure du carnet d'ordre. En comparaison, le coût d'un ordre limite est déterminé à l'avance, mais son temps d'exécution est incertain. Ainsi, pour un acteur du marché, le choix entre ces deux alternatives est un compromis entre le prix et le temps d'exécution des ordres.

Le mécanisme des carnets d'ordres existe depuis l'origine des marchés financiers, et l'étude du risque de liquidité n'est pas une chose nouvelle en économie. Cependant, en 2007 est entrée en vigueur une directive européenne (MiFID, Markets in Financial Instruments Directive) dont l'objet était d'accroître la compétition entre les marchés financiers, qui correspondaient jusqu'alors aux grandes bourses européennes. Cela a permis l'émergence de nouveaux marchés financiers qui, pour attirer des transactions et se démarquer des marchés traditionnels, ont choisi des règles de cotation sensiblement différentes (absence de coût de transaction sur les ordres limites, information cachée ou non sur le carnet d'ordres, dark pools, etc.). Il est ainsi possible aujourd'hui d'acheter un même titre sur différentes places financières. Ces changements ont bien évidemment stimulé la recherche sur la modélisation des marchés. Ils l'ont orientée vers des questions plus quantitatives afin de déterminer, par rapport à un certain critère, la façon optimale de placer des ordres sur les marchés.

La modélisation du manque de liquidité dépend de la problématique sous-jacente. Par commodité, ce risque est très souvent ignoré comme dans le modèle de Black et Scholes [29]. On suppose alors une liquidité infinie, ce qui signifie que l'on peut acheter ou vendre n'importe quelle quantité d'actif au prix de marché. La prise en compte de la liquidité d'un actif dépend principalement de l'horizon de temps que l'on considère. Par exemple, si on souhaite déterminer son influence sur la gestion d'un portefeuille dont l'échéance est longue (poux fixer les idées un mois ou plus), il n'est pas forcément nécessaire de donner une description précise de l'impact de ce portefeuille sur les prix. On peut en général se contenter de modéliser le manque de liquidité comme un coût de transaction supplémentaire qui dépend du volume traité. Il existe de nombreux travaux allant dans ce sens. C'est notamment le point de vue de Cetin, Jarrow et Protter [38] qui cherchent à décrire comment le prix d'une stratégie de couverture d'un produit dérivé est modifiée par le manque de liquidité. En revanche, lorsque l'on se place à des échelles de temps courtes (de quelques heures à quelques jours), il est important de modéliser plus finement le marché. La première idée serait alors de modéliser le carnet d'ordres et sa dynamique au cours du temps. Cependant, les carnets d'ordres sont des objets relativement complexes et difficiles à modéliser entièrement. Une modélisation très générale est certes possible, mais il sera alors difficile d'utiliser concrètement le modèle pour déterminer comment placer des

ordres sur le marché. Il est ainsi souhaitable de faire des hypothèses simplificatrices par rapport aux marchés réels.

Une approche usuelle consiste à continuer de décrire le prix d'un actif par un seul nombre, et à modéliser l'impact des ordres d'achats ou de vente sur ce prix. Il n'y a en particulier plus de distinction entre les ordres limites et les ordres de marchés. Dans cette direction, un modèle de référence est celui d'Almgren et Chriss [20] qui peut être vu comme la version en temps continu du modèle de Bertsimas et Lo [26]. Ils considèrent le cas d'un grand investisseur qui souhaite liquider son portefeuille de  $X_0$  actifs sur une période de temps  $[0, T]$ . La question est de déterminer, par rapport à un certain critère, la stratégie optimale pour vendre ces actifs. Dans la littérature, on parle du problème d'exécution optimale pour faire référence à ce sujet. On note  $X_t$  le nombre d'actif détenu par l'investisseur à l'instant  $t \in [0, T]$ . Ainsi,  $(X_t, t \in [0, T])$  décrit la stratégie de vente de l'investisseur dont l'objectif est d'avoir  $X_T = 0$ , et on la suppose adaptée par rapport à l'information du marché. On suppose que  $t \mapsto X_t$  est absolument continue et est ainsi dérivable presque partout. Almgren et Chriss [20] supposent alors que le prix de l'actif risqué est donné par :

$$S_t = S_t^0 + \eta \dot{X}_t + \gamma(X_t - X_0), \quad (2.1)$$

où  $S_t^0$  représente le prix de l'actif en l'absence du grand investisseur. Ils postulent que  $S_t^0$  satisfait un modèle de Bachelier, c'est à dire que  $S_t^0 = S_0^0 + \sigma W_t$ , où  $W$  est un mouvement brownien standard. Ce choix peut sembler surprenant puisqu'il s'agit d'un modèle très rudimentaire qui présente le défaut de prendre des valeurs négatives. Il ne faut toutefois pas oublier que l'on considère ici des échéances  $T$  très courtes, de quelques heures à quelques jours. La probabilité d'obtenir des valeurs négatives est donc faible, et le principal phénomène dont on veut tenir compte est le bruit sur la valeur de l'actif. Les paramètres  $\eta$  et  $\gamma$  sont supposés positifs. Ils représentent respectivement l'impact instantané et temporaire de la stratégie  $X$ . Entre  $t$  et  $t + dt$  sont vendus  $-\dot{X}_t dt$  actifs, ce qui rapporte  $-S_t \dot{X}_t dt$  ou coûte  $S_t \dot{X}_t dt$ . Ainsi, le coût total de la stratégie  $X$  est donné par

$$\int_0^T S_t \dot{X}_t dt = -X_0 S_0^0 - \int_0^T X_t dS_t^0 + \eta \int_0^T (\dot{X}_t)^2 dt + \frac{\gamma}{2} X_0^2.$$

On peut alors chercher la stratégie qui minimise ce coût en espérance, c'est à dire qui minimise la fonction suivante :

$$\mathcal{C}(X) = -X_0 S_0^0 + \frac{\gamma}{2} X_0^2 + \eta \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\dot{X}_t)^2 dt \right].$$

Par l'inégalité de Jensen, il vient alors immédiatement que la stratégie optimale  $X^*$ , consiste à vendre à un taux constant, i.e.  $\dot{X}_t^* = -X_0/T$ . En pratique, cette stratégie est connue sous le nom de "stratégie VWAP" (Volume Weighted Average Price). Elle est utilisée avec un "temps boursier" qui est paramétrisé en fonction du volume, de telle sorte que le volume échangé par unité de temps est constant. Ainsi, la stratégie optimale  $X^*$  consiste à écouler

ses actifs de façon proportionnelle au volume échangé, ce qui rend notamment la stratégie de liquidation moins détectable. Bien évidemment, d'autres critères peuvent être choisis pour déterminer la stratégie optimale. Almgren et Chriss considèrent également le cas où l'investisseur minimise l'espérance de son coût [20], avec en plus une pénalisation sur la variance. Schied, Schöneborn et Tehranci [83] étudient la minimisation d'une fonction d'utilité de l'opposé du coût.

Différentes études empiriques ont été menées sur l'impact des ordres d'achat et de vente sur les prix. L'introduction faite par Bouchaud [31] donne un bon aperçu sur le sujet ainsi que de nombreuses références. Ces études montrent en particulier deux choses. Tout d'abord, les transactions ont également un impact temporaire sur les prix qui décroît en fonction du temps. Il faut attendre plusieurs minutes après un ordre pour ne plus en voir son effet. Si on place des ordres assez espacés dans le temps, il est raisonnable de ne considérer que les impacts instantanés et permanents comme dans le modèle d'Almgren et Chriss (2.1). En revanche, lorsque la fréquence de trading augmente, l'impact temporaire sur les prix doit être pris en compte. Par ailleurs, l'autre fait empirique, qui est relevé notamment par Potters et Bouchaud [80], est que l'impact sur les prix n'est pas proportionnel au volume échangé. L'impact semble plutôt être proportionnel à une puissance, comprise entre 0 et 1 du volume échangé. Cela contraste notamment avec le modèle d'Almgren et Chriss qui suppose un impact linéaire sur les prix.

Les travaux [17, 11, 10, 19, 12, 18] que nous allons présenter proposent un modèle d'impact de prix, qui est dérivé d'un modèle très élémentaire pour les carnets d'ordres. Ce modèle permet notamment de prendre en compte les deux aspects mentionnés ci-dessus, à savoir un impact temporaire sur les prix et une dépendance non linéaire entre l'impact et le volume échangé. Comme dans le modèle d'Almgren et Chriss, il est possible de caractériser la stratégie optimale qui minimise l'espérance du coût de la liquidation d'un portefeuille, et cette stratégie est déterministe. Nous allons également faire le lien entre le problème d'exécution optimale et l'existence de stratégies de manipulation de prix. Nous discuterons de la notion même de manipulation de prix, et nous chercherons à identifier les conditions qui excluent de telles stratégies.

## 2.2 Un modèle simple de carnet d'ordres

Nous considérons ici un grand investisseur qui souhaite liquider une position de  $X_0$  actifs sur le marché pendant une période de temps  $[0, T]$ . Pour décrire le carnet d'ordres de cet actif, on se donne deux processus,  $(B_t^0, t \geq 0)$  et  $(A_t^0, t \geq 0)$ , qui représentent respectivement le prix bid et le prix ask en l'absence de cet investisseur. Nous faisons l'hypothèse que  $(B_t^0, t \geq 0)$  est une martingale càdlàg sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et que  $B_t^0 \leq A_t^0$ . De façon symétrique, on supposerait également que  $(A_t^0, t \geq 0)$  est une martingale càdlàg pour une stratégie d'achat d'actifs. Toujours en l'absence de notre investisseur, on suppose que le carnet d'ordres est décrit par une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  :

à l'instant  $t \geq 0$ , pour  $x < 0$  (resp.  $x > 0$ ), le nombre d'ordres limites d'achat (resp. de vente) entre les prix  $B_t^0 + x$  et  $B_t^0 + x + dx$  (resp.  $A_t^0 + x$  et  $A_t^0 + x + dx$ ) est égal à  $f(x)dx$ . On définit

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy,$$

et nous supposons que  $F(\pm\infty) = \pm\infty$ , c'est à dire que le carnet d'ordres contient une infinité d'ordres limites d'achat et de vente. Cette hypothèse est en pratique acceptable tant que le grand investisseur n'épuise pas le carnet d'ordres.

Maintenant, nous allons décrire l'évolution du carnet d'ordres en présence de l'investisseur. Nous supposons que celui-ci place uniquement des ordres de marché, si bien qu'il consomme les ordres limites présents dans le carnet d'ordres. Nous notons respectivement  $B_t$  et  $A_t$  les prix bid et ask "effectifs" à l'instant  $t$ . On suppose que  $B_t \leq B_t^0$ ,  $A_t \leq A_t^0$  et que le carnet d'ordres est vide entre les prix  $B_t$  et  $A_t$ . Ainsi,

$$D_t^B = B_t - B_t^0 \text{ et } D_t^A = A_t - A_t^0$$

représentent l'impact du courtier sur les prix bid et ask. En dehors de l'intervalle de prix  $[B_t, A_t]$ , le carnet d'ordres conserve la même distribution qu'en l'absence de l'investisseur. Précisément, cela signifie que pour  $x \notin [D_t^B, D_t^A]$  et  $x < 0$  (resp.  $x > 0$ ), le nombre d'ordres limites d'achat (resp. de vente) entre les prix  $B_t^0 + x$  et  $B_t^0 + x + dx$  (resp.  $A_t^0 + x$  et  $A_t^0 + x + dx$ ) est égal à  $f(x)dx$ . A l'instant initial, on suppose que l'impact est nul, i.e.

$$D_0^B = D_0^A = 0.$$

Lorsque l'investisseur place un ordre de vente  $\xi_t < 0$  (resp. d'achat  $\xi_t > 0$ ) à l'instant  $t$ , il consommera les ordres limites au meilleur prix et déplacera le prix bid (resp. ask) de la façon suivante :

$$\int_{D_t^B}^{D_{t+}^B} f(x)dx = \xi_t, \text{ (resp. } \int_{D_t^A}^{D_{t+}^A} f(x)dx = \xi_t). \quad (2.2)$$

Cette transaction aura le coût

$$\pi_t(\xi_t) = \int_{D_t^B}^{D_{t+}^B} (B_t^0 + x)f(x)dx \text{ (resp. } \pi_t(\xi_t) = \int_{D_t^A}^{D_{t+}^A} (A_t^0 + x)f(x)dx), \quad (2.3)$$

puisque  $f(x)dx$  actifs sont vendus (resp. achetés) au prix  $B_t^0 + x$  (resp.  $A_t^0 + x$ ). On introduit également les quantités  $E_t^B = F(D_t^B)$  et  $E_t^A = F(D_t^A)$  :  $-E_t^B$  et  $E_t^A$  correspondent au volume des ordres limites d'achat et de vente qui ont été consommés dans le carnet d'ordres à l'instant  $t$ . On remarquera que (2.2) implique

$$E_{t+}^B = E_t^B + \xi_t \mathbf{1}_{\xi_t < 0}, \text{ (resp. } E_{t+}^A = E_t^A + \xi_t \mathbf{1}_{\xi_t > 0}). \quad (2.4)$$

Il reste à spécifier la résilience du carnet d'ordres, c'est à dire décrire comment les ordres limites réapparaissent dans le carnet d'ordres après qu'ils aient été consommés.

Nous considèrerons deux choix de modélisation possibles. Le modèle que nous appellerons “modèle P” ensuite suppose que les prix bid et ask reviennent avec une vitesse exponentielle vers  $B^0$  et  $A^0$ , c’est à dire

$$dD_t^B = -\rho_t D_t^B dt, \quad dD_t^A = -\rho_t D_t^A dt. \quad (2.5)$$

La fonction  $t \mapsto \rho_t$ , supposée positive est appelée par la suite résilience du carnet d’ordres. Avec la relation qui lie l’impact sur le prix et l’impact sur le volume, (2.5) équivaut à supposer

$$dE_t^B = -\rho_t f(F^{-1}(E_t^B)) F^{-1}(E_t^B) dt, \quad dE_t^A = -\rho_t f(F^{-1}(E_t^A)) F^{-1}(E_t^A) dt.$$

Nous pouvons maintenant décrire la dynamique globale du carnet d’ordres, en tenant compte de l’investisseur. Sa stratégie est donnée par un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  représentant le nombre d’actif dont il dispose à l’instant  $t$ . Nous supposons, comme dans Gatheral, Schied et Slynko [56] que  $X$  satisfait les propriétés suivantes :

- $X_{T+} = 0$ , ( $X_0 > 0$  pour une vente et  $X_0 < 0$  pour un achat)
  - $X$  est  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté et continu à gauche,
  - la fonction  $t \in [0, T+] \mapsto X_t$  a une variation totale finie et bornée presque sûrement.
- (2.6)

A partir de (2.2), on en déduit que la dynamique du “modèle P” en présence de l’investisseur s’écrit :

$$\begin{aligned} dE_t^B &= -\rho_t f(F^{-1}(E_t^B)) F^{-1}(E_t^B) dt + \mathbf{1}_{dX_t < 0} dX_t, \\ dE_t^A &= -\rho_t f(F^{-1}(E_t^A)) F^{-1}(E_t^A) dt + \mathbf{1}_{dX_t > 0} dX_t. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Un autre choix naturel pour la résilience du carnet d’ordres est de supposer que ce sont les volumes, et non pas les prix, qui retournent à l’équilibre avec une vitesse exponentielle lorsque l’investisseur n’effectue pas de transactions sur le marché. Cela revient à considérer la dynamique suivante :

$$dE_t^B = -\rho_t E_t^B dt + \mathbf{1}_{dX_t < 0} dX_t, \quad dE_t^A = -\rho_t E_t^A dt + \mathbf{1}_{dX_t > 0} dX_t. \quad (2.8)$$

Ce modèle sera appelé “modèle V” par la suite. Lorsque la fonction de forme du carnet d’ordres  $f$  est supposée constante, les processus  $D$  et  $E$  sont proportionnels entre eux, et les modèles V et P sont alors identiques. Ce cas particulier correspond aussi (lorsque  $\rho_t$  est constant) au modèle proposé par Obizhaeva et Wang [77].

Le problème qui nous intéresse, dans les deux modèles, est chercher à minimiser l’espérance du coût de la transaction de l’investisseur. Formellement, il s’agit donc de minimiser

$$\mathcal{C}^{CO}(X) = \mathbb{E} \left[ \int_{[0, T]} \pi_t(dX_t) \right], \quad (2.9)$$



où  $\pi_t$  est donné par (2.3). A priori, cette minimisation n'est pas si simple à mener, notamment à cause de la distinction à faire entre les ordres d'achat et les ordres de vente. Néanmoins, lorsque la stratégie est faite uniquement d'ordres de vente ou d'achat, il est suffisant de ne regarder qu'une seule partie du carnet d'ordres. Cela justifie l'introduction du modèle d'impact sur les prix simplifié que nous allons présenter.

## 2.3 Un modèle d'impact sur les prix

Nous présentons maintenant un modèle d'impact sur les prix, dont la construction suit point par point celle du modèle de carnet d'ordres. Lorsque le grand investisseur est absent du marché, nous supposons que le prix de l'actif est donné par une martingale càdlàg  $(S_t^0, t \geq 0)$ . Le prix "réel" qui tient compte de l'activité du courtier est déterminé par

$$S_t = S_t^0 + D_t.$$

Autrement dit,  $D_t$  désigne l'impact de l'investisseur sur le prix de l'actif et on suppose que  $D_0 = 0$ . On considère également le processus  $(E_t, t \geq 0)$  défini par  $E_t = F(D_t)$ , que l'on peut interpréter comme l'impact sur le volume. Lorsque l'investisseur place un ordre  $\xi_t$  à l'instant  $t$ , il modifie  $E$  de la façon suivante

$$E_{t+} = E_t + \xi_t.$$

Ceci est analogue à (2.4), mais il n'y a pas ici de distinction entre les ordres de vente et d'achat. Cette transaction a le coût suivant :

$$\pi_t(\xi_t) = \int_{D_t}^{D_{t+}} (S_t^0 + x)f(x)dx = \xi_t S_t^0 + \int_{D_t}^{D_{t+}} x f(x)dx. \quad (2.10)$$

Lorsque l'investisseur est inactif, on suppose, dans le "modèle V", que l'impact sur le volume décroît de façon exponentielle vers zéro, i.e.

$$dE_t = -\rho_t E_t dt.$$

Dans le "modèle P", nous faisons l'hypothèse que c'est l'impact sur les prix qui suit l'évolution

$$dD_t = -\rho_t D_t dt.$$

Au final, lorsque la stratégie de l'investisseur est donnée par  $(X_t, t \geq 0)$  et suit les hypothèses données au paragraphe 2.2, nous obtenons les dynamiques suivantes :

$$dE_t = dX_t - \rho_t E_t dt \quad (\text{modèle V}), \quad (2.11)$$

$$dE_t = dX_t - \rho_t f(F^{-1}(E_t))F^{-1}(E_t)dt \quad (\text{modèle P}). \quad (2.12)$$

On s'intéresse alors à la minimisation de l'espérance du coût de transaction

$$\mathcal{C}(X) = \mathbb{E} \left[ \int_{[0,T]} \pi_t(dX_t) \right], \quad (2.13)$$

avec  $\pi_t$  est donné par (2.10). Tout d'abord, on remarque que pour une stratégie de vente ( $X_0 > 0$ ), si l'on prend  $S_t^0 = B_t^0$ , on vérifie facilement que  $\mathcal{C}(X) \leq \mathcal{C}^{CO}(X)$ . Cette inégalité est claire intuitivement puisque l'on doit payer en plus la différence entre les prix bid et ask dans le modèle de carnet d'ordres. En outre, on observe que  $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^{CO}(X)$  pour les stratégies constituées uniquement d'ordres de vente, c'est à dire lorsque  $t \mapsto X_t$  est décroissante. Ainsi, si l'on obtient une stratégie optimale pour le modèle d'impact de prix, et que cette stratégie est constituée uniquement d'ordre de vente, alors cette stratégie est également optimale pour le modèle de carnet d'ordres. On a bien évidemment un résultat analogue pour les stratégies d'achat si l'on prend  $S_t^0 = A_t^0$ .

D'autre part, la minimisation de (2.13) se ramène facilement à un problème déterministe pour les modèles V et P. En effet, on observe à l'aide d'une intégration par parties et de la propriété de martingale sur  $S^0$  que  $\mathbb{E}[\int_{[0,T]} S_t^0 dX_t] = -X_0 S_0$ . On définit  $X_t^c = X_t - \sum_{0 \leq s < t} \Delta X_s$  la partie continue de  $X$ . On pose

$$x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{F}(x) = \int_0^x y f(y) dy, \quad G(x) = \tilde{F}(F^{-1}(x)).$$

L'espérance du coût de la stratégie  $X$  s'écrit alors

$$\mathcal{C}(X) = -X_0 S_0 + \mathbb{E}[C^M(X)],$$

avec

$$C^M(X) = \int_0^T F^{-1}(E_t) dX_t^c + \sum_{t \leq T} [G(E_t + \Delta X_t) - G(E_t)], \quad (2.14)$$

où  $M \in \{V, P\}$  indique le modèle qui décrit l'évolution de  $E_t$ . La fonction  $C^M$  est une fonction déterministe de la stratégie  $X$ . Dans le cas où  $C^M$  admet un unique minimum, la stratégie  $X^*$  qui réalise ce minimum est également l'unique minimiseur de  $\mathcal{C}(X)$ , et en outre,  $X^*$  est une stratégie déterministe.

## 2.4 Résolution du problème d'exécution optimale

### 2.4.1 Exécution optimale pour des stratégies discrètes

Nous sommes désormais en mesure de présenter les principaux résultats sur l'exécution optimale obtenus dans [11, 10, 17]. Nous commençons par considérer le cas de stratégies discrètes. Précisément, pour un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  donné, nous allons considérer les stratégies  $X$  de la forme suivante :

$$X_t = X_0 + \sum_{i=0}^N \xi_i \mathbf{1}_{\tau_i < t}. \quad (2.15)$$

Ici, les variables  $\tau_i$  sont des  $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêts que nous supposons, sans perte de généralité, ordonnés et tels que  $0 = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_N = T$ . Les variables  $\xi_i$  sont supposées  $(\mathcal{F}_{\tau_i})$ -mesurables et bornées inférieurement. Nous allons chercher à optimiser le coût  $C^M(X)$  parmi les stratégies discrètes pour un nombre de transactions  $N + 1$  fixé, pour les modèles  $M \in \{V, P\}$ . Dans les deux cas, nous verrons qu'il est optimal d'effectuer les transactions sur la grille de temps  $t^*$  qui est régulière par rapport à la résilience, i.e :

$$t_0^* = 0, \quad \int_{t_i^*}^{t_{i+1}^*} \rho_t dt = \frac{\int_0^T \rho_t dt}{N}, \quad 0 \leq i < N.$$

On pose aussi  $a^* = e^{-\frac{1}{N} \int_0^T \rho_u du}$ .

Nous allons commencer par énoncer les résultats pour le modèle V. Nous supposons que la fonction de forme  $f$  satisfait une des deux conditions suivantes

1.  $f$  croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
2.  $f(x) = \lambda|x|^\alpha$ , avec  $\lambda, \alpha > 0$ .

Les études empiriques montrent que l'hypothèse de monotonie faite dans le premier cas est valable pour  $|x|$  assez grand. En revanche, lorsque  $|x|$  est petit (c'est à dire au voisinage des prix bid et ask) on observe généralement des monotonies inverses, et la seconde hypothèse est alors plus raisonnable. De toutes façons, ces hypothèses sont des conditions suffisantes pour garantir l'existence de la stratégie optimale ci-dessous et ne sont en aucun cas nécessaires.

**Théorème 2.4.1.** *Sous l'hypothèse faite ci-dessus pour  $f$ , il existe pour tout  $X_0 \neq 0$  une unique stratégie discrète optimale  $X^*$ . Celle-ci consiste à placer des ordres de marché sur la grille de temps  $t^*$  de la façon suivante. L'ordre initial  $\xi_0$  est déterminé comme l'unique solution de l'équation*

$$F^{-1}(-X_0 - N\xi_0(1 - a^*)) = \frac{F^{-1}(\xi_0) - a^*F^{-1}(a^*\xi_0)}{1 - a^*}, \quad (2.16)$$

les ordres intermédiaires sont donnés par

$$\xi_1 = \dots = \xi_{N-1} = \xi_0(1 - a^*), \quad (2.17)$$

et le dernier ordre vaut

$$\xi_N = -X_0 - \xi_0 - (N - 1)\xi_0(1 - a^*).$$

Cette stratégie est déterministe et tous les  $\xi_i$  ont le même signe, ce qui signifie qu'elle est constituée uniquement d'ordres de vente pour  $X_0 > 0$  et d'ordres d'achat pour  $X_0 < 0$ .

On peut donner un interprétation assez intuitive de cette stratégie optimale. D'une part, le premier ordre doit être assez grand pour profiter de la résilience du marché et

attirer de nouveaux ordres moins chers. D'autre part, il ne doit pas être trop grand pour ne pas trop subir la convexité du coût due au carnet d'ordres. Il y a ainsi un compromis optimum entre ces deux effets, et les ordres intermédiaires permettent précisément de rester sur cet optimum. Enfin, le dernier ordre consiste à vendre ou acheter la quantité nécessaire restante. Dans le cas particulier où  $f$  est constante, la stratégie donnée par le Théorème 2.4.1 est explicite

$$\xi_0 = \xi_N = \frac{-X_0}{2 + (N-1)(1-a^*)}, \quad \xi_1 = \dots = \xi_{N-1} = \xi_0(1-a^*), \quad (2.18)$$

et ne dépend pas de la valeur de  $f$ . Comme indiqué dans [11], cette stratégie est également optimale si l'on rajoute un impact permanent proportionnel au volume échangé, ce qui correspond précisément au modèle d'Obizhaeva et Wang [77]. Cependant, [77] ne donne pas la forme explicite (2.18) et caractérise uniquement la stratégie optimale à l'aide d'un principe de programmation dynamique. Ici, nous utilisons un argument basé sur les multiplicateurs de Lagrange pour obtenir une expression explicite de la stratégie optimale.

Nous allons maintenant présenter les résultats sur la stratégie d'exécution optimale pour le modèle P. Nous supposons que  $f$  satisfait une des deux hypothèses suivantes.

1.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , et telle que  $x \mapsto xf'(x)/f(x)$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-$ , décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , et à valeurs dans  $(-1, 0]$ ,  

$$1 + x \frac{f'(x)}{f(x)} + 2x^2 \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 - x^2 \frac{f''(x)}{f(x)} \geq 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

2.  $f(x) = \lambda|x|^\alpha$ , avec  $\lambda, \alpha > 0$ .

**Théorème 2.4.2.** *Sous cette hypothèse, il existe pour tout  $X_0 \neq 0$  une unique stratégie discrète optimale  $X^*$ . Celle-ci consiste à placer des ordres de marché sur la grille de temps  $t^*$  de la façon suivante. L'ordre initial  $\xi_0$  est déterminé comme l'unique solution de l'équation*

$$F^{-1}(-X_0 - N[\xi_0 - F(a^*F^{-1}(\xi_0))]) = F^{-1}(\xi_0) \frac{f(F^{-1}(\xi_0)/a^*)/a^* - a^*f(F^{-1}(\xi_0))}{f(F^{-1}(\xi_0)/a^*) - a^*f(F^{-1}(\xi_0))}, \quad (2.19)$$

les ordres intermédiaires sont donnés par

$$\xi_1 = \dots = \xi_{N-1} = \xi_0 - F(a^*F^{-1}(\xi_0)), \quad (2.20)$$

et le dernier ordre vaut

$$\xi_N = -X_0 - N\xi_0 + (N-1)F(a^*F^{-1}(\xi_0)).$$

Cette stratégie est déterministe et tous les  $\xi_i$  ont le même signe, ce qui signifie qu'elle est constituée uniquement d'ordres de vente pour  $X_0 > 0$  et d'ordres d'achat pour  $X_0 < 0$ .

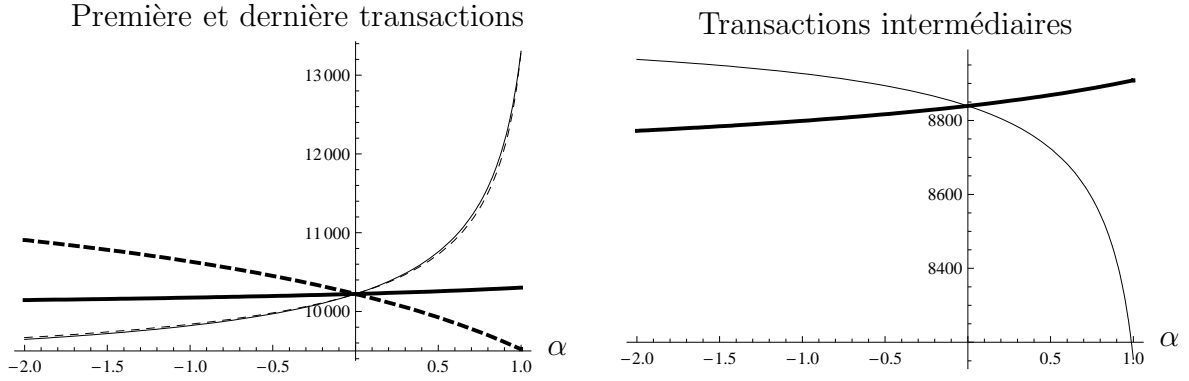


FIGURE 2.1 – Stratégie discrète optimale pour  $f(x) = \frac{q}{(|x|+1)^\alpha}$ ,  $X_0 = 100000$ ,  $q = 5000$ ,  $\rho = 20$ ,  $T = 1$  et  $N = 10$ , en fonction de  $\alpha$ . Les courbes en gras correspondent au modèle V, les autres au modèle P. A gauche sont tracés l'ordre initial (en pointillé) et le dernier ordre (en trait plein). Le graphique de droite montre les ordres intermédiaires.

Si les formules sont différentes entre les modèles V et P, on remarque que les stratégies optimales sont qualitativement très proches avec notamment des ordres intermédiaires de taille identique. Sur la figure 2.1, nous reprenons un graphique de [11] qui illustre les stratégies optimales dans les modèles V et P pour la fonction de forme  $f(x) = \frac{q}{(|x|+1)^\alpha}$ , en fonction de  $\alpha$ . On peut montrer que cette fonction satisfait les hypothèses requises pour  $\alpha \leq 1$ . Nous voyons alors que les stratégies données par les modèles V et P sont sensiblement différentes, et ne présentent pas les mêmes monotopies par rapport à  $\alpha$ , qui paramétrise en quelque sorte la pente de la fonction  $f$ .

Avant de terminer ce paragraphe, nous pouvons mentionner que les stratégies données par les théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 sont uniquement constituées d'ordres d'achat ou de vente. Elles sont par conséquent également optimales dans le modèle de carnet d'ordres présenté au paragraphe 2.2.

## 2.4.2 Manipulations de prix

Nous allons commencer par donner la définition de manipulation de prix proposée par Huberman et Stanzl [69]. On appelle stratégie “aller-retour” (round-trip en anglais) un portefeuille  $(X_t, t \in [0, T])$  tel que  $X_0 = X_{T+} = 0$ . Il s'agit donc d'une stratégie dont le but est d'avoir la même position sur le marché à la fin qu'au début. Pour Huberman et Stanzl [69], une *stratégie de manipulation de prix* est un aller-retour  $(X_t, t \in [0, T])$  dont l'espérance du coût est négative, i.e.  $\mathcal{C}(X) < 0$ . L'idée sous jacente est que si de telles stratégies existent, alors en les répétant à l'infini, on obtient, avec une loi des grands nombres, un arbitrage presque sûr au sens classique. On peut vérifier aisément à l'aide des Théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 que les modèles V et P excluent ce type de manipulation de prix. En effet, une stratégie d'achat optimale  $X^*$  est faite uniquement d'ordres d'achat et satisfait donc  $\mathcal{C}(X^*) \geq 0$ . Si une stratégie “aller-retour” existait, on pourrait au moins

acheter une quantité infime d'actif avec un coût d'espérance strictement négative, ce qui est contradictoire.

Néanmoins, exclure les stratégies de manipulation de prix peut s'avérer être insuffisant. En effet, dans certains cas où il n'y a pas de manipulation de prix au sens de Huberman et Stanzl, on observe que la stratégie optimale pour vendre est faite en partie d'ordres d'achat, qui parfois peuvent être significatifs. Cela ne semble pas souhaitable, dans la mesure où ce type de phénomène augmenterait artificiellement le volume. On peut aussi argumenter que l'existence de "market makers", dont l'objectif est d'avoir des stratégies de type aller-retour pour profiter de l'écart entre les prix bid et ask, exclut l'intérêt qu'aurait tout autre acteur du marché à acheter puis vendre le même actif. Ainsi, plusieurs articles traitant du problème de l'exécution optimale prennent le parti de se restreindre aux stratégies faites uniquement d'ordres d'achat ou de vente. C'est le cas notamment de Predoiu, Shaikhet et Shreve [81] ou bien de Forsyth, Kennedy, Tse et Windcliff [53]. Dans les travaux présentés ici, nous n'excluons pas a priori qu'une stratégie de liquidation d'actifs puisse contenir des ordres d'achat. Ainsi, nous dirons qu'un marché admet *une manipulation de prix induite par les transactions* si l'espérance du coût d'une stratégie de liquidation (resp. d'achat) peut être réduit par des ordres intermédiaires d'achat (resp. de vente). Cette notion de manipulation de prix est plus restrictive que celle proposée par Huberman et Stanzl. En effet, si un marché ne contient pas ce type de manipulation de prix, le coût optimal d'un programme de vente (resp. d'achat) est nécessairement strictement négatif (resp. positif), ce qui exclut l'existence d'une stratégie de manipulation de prix au sens de Huberman et Stanzl. Les modèles V et P que nous avons proposés ici ne contiennent pas de manipulation de prix induite par les transactions, puisque la stratégie optimale qui minimise l'espérance du coût de transaction est uniquement constituée d'ordres d'achat ou d'ordres de vente.

### 2.4.3 Exécution optimale en temps continu

Nous allons présenter les résultats d'exécution optimale pour les modèles V et P lorsque l'investisseur principal peut effectuer des ordres d'achat et de vente de façon continue dans le temps. Bien évidemment, en pratique, les stratégies d'achat et de vente sont toujours discrètes, mais elles sont exécutées à des fréquences telles que l'approximation continue est raisonnable. D'un point de vue mathématique, le formalisme en temps continu présente également des avantages et donne lieu à des formules plus synthétiques.

Nous profitons du cadre continu pour étendre légèrement les modèles V et P. Comme dans [12], nous supposons que la forme du carnet d'ordres évolue de façon déterministe dans le temps. Plus précisément, on se donne une fonction  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  de classe  $\mathcal{C}^2$  qui détermine la profondeur du carnet d'ordres, et la fonction  $x \mapsto \lambda(t)f(x)$  décrit la densité du nombre d'ordres limites à l'instant  $t$ . Cela traduit le fait que le carnet d'ordres est plus fourni à certaines heures de la journée qu'à d'autres. Typiquement, l'activité du marché est plus élevée à l'ouverture et à la clôture qu'en milieu de journée. Ainsi, l'impact de l'investisseur principal sur le volume  $E_t$  est désormais relié à l'impact sur le volume par

$E_t = \lambda(t)F(D_t)$ . Lorsqu'il place un ordre  $\xi_t$  à l'instant  $t$ , on pose  $E_{t+} = E_t + \xi_t$ , et cette transaction a le coût :

$$\pi_t(\xi_t) = \xi_t S_t^0 + \lambda(t) \int_{D_t}^{D_{t+}} x f(x) dx. \quad (2.21)$$

En l'absence de transaction de l'investisseur, nous faisons les mêmes hypothèses de résilience que précédemment pour les modèles V et P, à savoir respectivement  $dE_t = dX_t - \rho_t E_t dt$  et  $dD_t = dX_t - \rho_t D_t dt$ . Ainsi, on obtient les dynamiques suivantes pour une stratégie  $(X_t, t \geq 0)$  de l'investisseur :

$$\begin{aligned} dE_t &= dX_t - \rho_t E_t dt && \text{(modèle V),} \\ dE_t &= dX_t + \eta_t E_t dt - \rho_t \lambda(t) f(F^{-1}(E_t/\lambda(t))) F^{-1}(E_t/\lambda(t)) dt && \text{(modèle P),} \end{aligned}$$

où  $\eta_t = \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}$ . La fonction  $t \mapsto \eta_t$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et nous supposons de même que  $t \mapsto \rho_t$  est  $\mathcal{C}^1$ . Ces dynamiques généralisent (2.11) et (2.12). Le coût d'une stratégie de liquidation  $(X_t)_{t \geq 0}$  est alors donné par  $\mathcal{C}(X) = -X_0 S_0^0 + \mathbb{E}[C^M(X)]$ , où

$$C^M(X) = \int_0^T F^{-1}\left(\frac{E_t}{\lambda(t)}\right) dX_t^c + \sum_{t \leq T} \lambda(t) \left[ G\left(\frac{E_t + \Delta X_t}{\lambda(t)}\right) - G\left(\frac{E_t}{\lambda(t)}\right) \right].$$

est une fonction déterministe de  $X$ . Cette expression généralise (2.14) lorsque la profondeur du carnet d'ordre  $\lambda(t)$  n'est pas constante.

Nous commençons par donner la stratégie d'exécution optimale pour le modèle V. Nous introduisons la fonction suivante

$$h_{V,t}(x) = F^{-1}(x) + \frac{\eta_t + \rho_t}{\rho_t} \frac{x}{f(F^{-1}(x))}. \quad (2.22)$$

Nous allons montrer qu'il n'y a pas de manipulation de prix au sens d'Huberman et Stanzl, si cette fonction est bijective sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est strictement positive. Cette condition est en particulier vérifiée si

$$f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et décroissante sur } \mathbb{R}_+, \text{ et } \rho_t + \eta_t \geq 0 \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (2.23)$$

**Théorème 2.4.3.** *Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Nous supposons que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $h_{V,t}$  est une bijection sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $h'_{V,t} > 0$ . Alors, la fonction coût  $C^V(X)$  est positive, et il existe une unique stratégie admissible optimale  $X^*$  qui minimise  $C^V$ . Cette stratégie est déterminée de la façon suivante. L'équation*

$$\int_0^T \lambda(t) \rho_t h_{V,t}^{-1}(\nu) dt + \lambda(T) F(\nu) = -X_0 \quad (2.24)$$

admet une unique solution  $\nu \in \mathbb{R}$  et on pose  $\zeta_t = h_{V,t}^{-1}(\nu)$ . La stratégie  $dX_t^* = \xi_0^* \delta_0(dt) + \xi_t^* dt + \xi_T^* \delta_T(dt)$  avec

$$\xi_0^* = \lambda(0) \zeta_0, \quad \xi_t^* = \lambda(t) \left[ \frac{d\zeta_t}{dt} + (\rho_t + \eta_t) \zeta_t \right], \quad \xi_T^* = \lambda(T) (F(\nu) - \zeta_T),$$

est optimale, et la transaction initiale  $\xi_0^*$  a le même signe que  $-X_0$ .

Pour obtenir la stratégie optimale donnée par le théorème 2.4.3, nous avons commencé par déterminer la stratégie discrète optimale pour une grille de temps régulière en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ensuite, nous avons calculé la limite de cette stratégie en faisant tendre le pas de temps vers zéro. Enfin, nous avons prouvé que cette stratégie limite est bien optimale en utilisant un argument de vérification. En réalité, seule cette dernière étape est nécessaire pour prouver le théorème 2.4.3 : les deux premières servent seulement à “deviner” la stratégie optimale.

**Remarque 2.4.4.** Dans [81], Predoiu, Shaikhet et Shreve considèrent une variante des modèles  $V$  et  $P$  avec  $\lambda(t) \equiv 1$  et  $dE_t = dX_t - h(E_t)dt$ , où  $h$  est une fonction décrivant la résilience du marché. En supposant a priori que la stratégie est uniquement constituée d'ordres du même signe, ils obtiennent la stratégie d'exécution optimale à l'aide d'un argument de convexité.

Il est important de noter que le théorème 2.4.3 exclut toute manipulation de prix au sens d'Huberman et Stanzl, puisque la fonction coût  $C^V(X)$  est positive. Inversement, on peut facilement construire une stratégie de manipulation de prix lorsque  $h'_{V,t}(0) < 0$  pour un certain  $t \in [0, T]$ . En revanche, la stratégie optimale peut être composée d'ordres d'achat et de vente, ce qui diffère du cas où  $\lambda$  est constant. La figure 2.2 illustre un tel

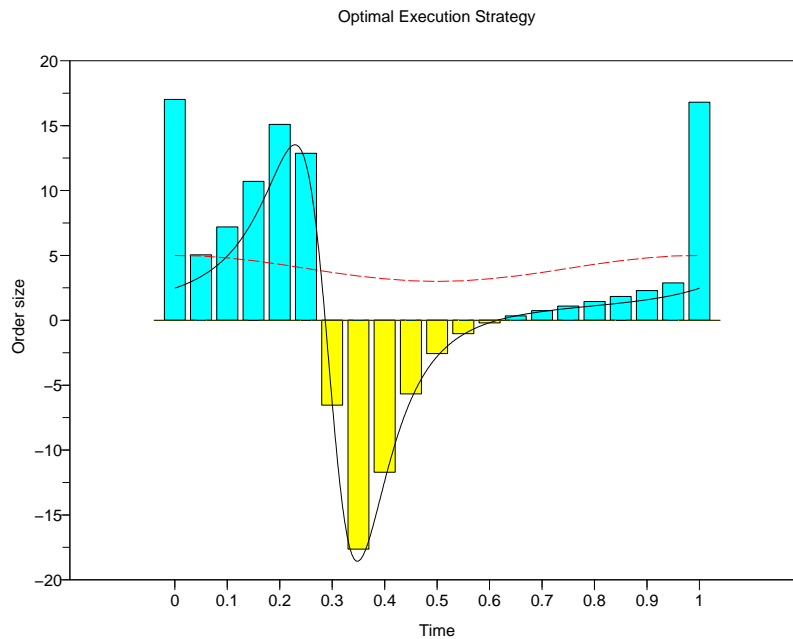


FIGURE 2.2 – Stratégie d’exécution optimale pour acheter 50 actifs sur une grille de temps régulière de pas  $1/N$ , avec  $N = 20$ ,  $\rho = 1$ ,  $\lambda(t) = 4 + \cos(2\pi t)$  (tracé en pointillé). La fonction  $t \mapsto \left(\frac{\rho t}{2\rho t + \eta t}\right)' + \rho t \left(\frac{\rho t + \eta t}{2\rho t + \eta t}\right)$  est également tracée en trait plein.



exemple pour une fonction  $f$  constante. Il s'agit d'un cas où il n'y a pas de manipulation de prix au sens d'Huberman et Stanzl mais où existe une manipulation de prix induite par les transactions. Grâce à la forme explicite de la stratégie optimale donnée par théorème 2.4.3, il est possible d'obtenir des conditions suffisantes pour exclure ce type de manipulations. Précisément, si les conditions (2.23) et

$$\forall t \geq 0, \left( \frac{\rho_t}{2\rho_t + \eta_t} \right)' + \rho_t \left( \frac{\rho_t + \eta_t}{2\rho_t + \eta_t} \right) \geq 0. \quad (2.25)$$

sont satisfaites, tous les ordres sont de même signe. Bien évidemment, ces conditions sont satisfaites lorsque la fonction  $\lambda(t)$  est constante (i.e.  $\eta_t \equiv 0$ ). On remarquera que ces conditions sont indépendantes de la forme  $f$  du carnet d'ordres. En outre, on peut montrer lorsque  $f$  est constante que cette condition est nécessaire et suffisante pour exclure toute manipulation de prix induite par les transactions. Dans ce cas, on obtient une expression explicite de la solution  $\nu$  de (2.24) et la stratégie optimale. Il en est de même lorsque  $f(x) = |x|^\alpha$ , et les formules sont données dans [12].

Avant de conclure, nous allons interpréter ces résultats non pas du point de vue de l'investisseur, mais de celui des "market makers" qui placent et annulent continuellement des ordres limites. En effet, même s'il s'agit d'une modélisation très rudimentaire, la résilience  $\rho_t$  décrit le nombre d'ordres qui apparaissent à un meilleur prix que ceux existant dans le carnet d'ordres tandis que  $\eta_t$  décrit le nombre d'ordres qui sont annulés ou ajoutés à des prix déjà proposés dans le carnet d'ordres. Une question naturelle est alors de savoir si l'on peut placer ou annuler des ordres dans le carnet d'ordres sans créer de manipulations de prix. La condition  $\rho_t + \eta_t \geq 0$  nous dit que dans le modèle V, on ne risque pas de créer de manipulations de prix lorsque l'on ajoute des ordres dans le carnet de quelque façon que ce soit. En revanche, des manipulations de prix peuvent apparaître lorsqu'on annule des ordres présents dans le carnet d'ordres. La condition (2.25) qui exclut les manipulations de prix induites par les transactions porte sur l'évolution de  $\rho$  et  $\eta$ , et ne peut pas s'interpréter aussi simplement.

Pour le modèle P de résilience sur les prix, on obtient des résultats de même nature. Nous introduisons la fonction suivante :

$$x \in \mathbb{R}, h_{P,t}(x) = x \left[ 1 + \frac{\rho_t}{\rho_t \left( 1 + \frac{xf'(x)}{f(x)} \right) - \eta_t} \right]. \quad (2.26)$$

**Théorème 2.4.5.** *Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ . On suppose qu'une des deux conditions suivantes est satisfaite.*

- (i) *Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\rho_t \left( 1 + \frac{xf'(x)}{f(x)} \right) - \eta_t > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $h_{P,t}$  est une bijection sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $h'_{P,t}(x) > 0$ ,  $dx$ -p.p.*
- (ii) *Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\rho_t \left( 1 + \frac{xf'(x)}{f(x)} \right) - \eta_t < 0$  et  $\rho_t \left( 2 + \frac{xf'(x)}{f(x)} \right) - \eta_t > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et  $h_{P,t}$  est une bijection sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $h'_{P,t}(x) < 0$ ,  $dx$ -p.p.*

Alors, la fonction coût  $C^P(X)$  est positive, et il existe une unique stratégie admissible optimale  $X^*$  qui minimise  $C^P$ . Cette stratégie est déterminée de la façon suivante. L'équation

$$\int_0^T \lambda(t) [\rho_t h_{P,t}^{-1}(\nu) f(h_{P,t}^{-1}(\nu)) - \eta_t F(h_{P,t}^{-1}(\nu))] dt + \lambda(T) F(\nu) = -X_0 \quad (2.27)$$

admet une unique solution  $\nu \in \mathbb{R}$ , et on pose  $\zeta_t = h_{P,t}^{-1}(\nu)$ . La stratégie  $dX_t^* = \xi_0^* \delta_0(dt) + \xi_t^* dt + \xi_T^* \delta_T(dt)$  avec

$$\xi_0^* = \lambda(0) F(\zeta_0), \quad \xi_t^* = \lambda(t) f(\zeta_t) \left[ \frac{d\zeta_t}{dt} + \rho_t \zeta_t \right], \quad \xi_T^* = \lambda(T) (F(\nu) - F(\zeta_T)),$$

est optimale, et le premier ordre  $\xi_0^*$  a le même signe que  $-X_0$ .

Ainsi, il n'y a pas de manipulations de prix au sens d'Huberman et Stanzl lorsque une des deux conditions (i) et (ii) est satisfaite. Nous pouvons montrer que la condition (i) est satisfaite si

$$\begin{cases} f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbb{R}_+, \forall t \geq 0, \rho_t - \eta_t > 0, \\ x \mapsto x \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et décroissante sur } \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (2.28)$$

En outre, il n'y a pas de manipulation de prix induite par les transactions si cette condition est satisfaite et si

$$\forall t \geq 0, \left( \frac{\rho_t - \eta_t}{2\rho_t - \eta_t} \right)' + \rho_t \left( \frac{\rho_t - \eta_t}{2\rho_t - \eta_t} \right) \geq 0. \quad (2.29)$$

En terme d'interprétation financière, la condition  $\rho_t - \eta_t \geq 0$  indique que l'on ne peut pas créer de manipulation de prix en plaçant dans le carnet d'ordres un ordre à un meilleur prix ou bien en annulant des ordres. En revanche, placer de nouveaux ordres à des prix existants dans le carnet d'ordres peut créer des manipulations de prix. Cela diffère du modèle V de résilience sur le volume pour lequel on ne peut pas créer de manipulations de prix en rajoutant des ordres dans le carnet.

**Remarque 2.4.6.** Dans [55], Gatheral propose le modèle d'impact sur les prix suivant :

$$S_t = S_t^0 + \int_0^t \varphi(\dot{X}_s) G(t-s) ds$$

pour des stratégies  $X$  différentiables. La fonction  $\varphi$  représente l'impact sur les prix et la fonction  $G$  représente la résilience du marché. Pour une résilience exponentielle  $G(t) = e^{-\rho t}$ , Gatheral montre que tout impact  $\varphi$  autre que linéaire donne lieu à des manipulations de prix au sens d'Huberman et Stanzl. Ici, les modèles V et P ne contiennent pas de telles manipulations de prix, bien que nous ayons une résilience exponentielle et des impacts sur les prix non linéaires. La différence est que la non linéarité de l'impact sur les prix porte sur chaque transaction dans le modèle de Gatheral, contrairement aux modèles V et P.

## 2.5 Etude d'autres formes de résilience du marché

Jusqu'à présent, nous avons essentiellement considéré des résiliences exponentielles pour l'impact des transactions sur les prix. Néanmoins, des études empiriques montrent que cet impact ne décroît pas exactement de cette façon. Bouchaud, Gefen, Potters et Wyart [32] observent plutôt une décroissance en  $(1+t)^{-\gamma}$ , avec  $\gamma \approx 0,4$  pour les données de marché qu'ils considèrent. Une question naturelle est alors de se demander comment ce type de résilience modifie la solution du problème d'exécution optimale. Pour étudier ce problème, nous avons considéré dans [19] le modèle suivant pour le prix d'un actif

$$S_t = S_t^0 + \int_0^t G(t-s) dX_s. \quad (2.30)$$

Comme précédemment,  $S_t^0$  représente la dynamique de l'actif en l'absence du grand investisseur et est supposé être une martingale càdlàg par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  représentant l'information du marché. Nous faisons également l'hypothèse que  $X$  satisfait (2.6). La fonction  $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est supposée décroissante. Elle décrit la résilience du marché. Lorsque l'investisseur place un ordre  $dX_t$  à l'instant  $t$ , on divise généralement son impact en trois composantes :

- l'impact instantané,  $(G(0) - G(0+))dX_t$ , est subi uniquement par l'investisseur lors de sa transaction, et n'a plus de répercussion dans le futur,
- l'impact permanent,  $G(+\infty)dX_t$ , affecte de la même façon toutes les transactions futures,
- l'impact transitoire,  $(G(0+) - G(+\infty))dX_t$ , décroît et disparaît au fil du temps.

Notons ici que nous considérons un impact linéaire sur les prix afin de simplifier l'analyse du modèle et il serait bien évidemment intéressant de pouvoir traiter des impacts non linéaires. Le cas d'une résilience exponentielle  $G(t) = qe^{-\rho t}$  (avec  $q, \rho > 0$ ) correspond ainsi aux modèles V et P lorsque la fonction de forme du carnet d'ordres est constante et vaut  $f \equiv 1/q$ .

Nous allons maintenant expliciter le coût de la stratégie  $X$ . Lorsque  $X$  est continu en  $t$ , le coût de l'ordre infinitésimal  $dX_t$  est donné par  $S_t dX_t$ . Lorsque  $X$  est discontinu, on note  $\Delta X_t = X_{t+} - X_t$  l'ordre placé en  $t$ . Le prix  $S_t$  est alors modifié de la façon suivante  $S_{t+} = S_t + G(0)\Delta X_t$ . Le coût de cette transaction est calculé comme pour (2.10) avec  $f \equiv 1/G(0)$  et vaut  $S_t^0 \Delta X_t + \frac{G(0)}{2}(\Delta X_t)^2$ . Tout compte fait, le coût de la stratégie  $X$  est donné par

$$\int_{[0,T]} S_t dX_t = \int_0^T S_t^0 dX_t + \frac{1}{2} \int_{[0,T]} \int_{[0,T]} G(|t-s|) dX_s dX_t,$$

l'intégrale sur  $[0, T]$  signifiant que l'on tient compte de l'éventuel ordre final  $\Delta X_T$ . L'espérance de ce coût est donnée par

$$\mathcal{C}(X) = -S_0^0 X_0 + \frac{1}{2} \mathbb{E}[C(X)], \quad \text{avec } C(X) = \int_{[0,T]} \int_{[0,T]} G(|t-s|) dX_s dX_t. \quad (2.31)$$

Le problème d'exécution optimale consiste à minimiser  $\mathcal{C}(X)$  parmi les stratégies  $X$  satisfaisant (2.6). Il se ramène comme précédemment à un problème déterministe. Il suffit en effet de minimiser la fonction  $X \mapsto C(X)$  parmi les stratégies déterministes continues à gauche, à variation totale finie et telles que  $X_{T+} = 0$ .

Le cadre que nous avons considéré dans [19] se restreint aux stratégies discrètes. L'extension de ces résultats au cadre continu que nous présentons ici est faite dans l'article de Gatheral, Schied et Slynko [56]. Comme les résultats sont de nature très similaires, nous donnons par souci d'unité et de clarté les deux principaux résultats de [19] et [56] dans le cadre continu.

L'optimisation que requiert le problème d'exécution optimale consiste à minimiser une forme quadratique sous la contrainte (linéaire) de la liquidation des actifs. La première question est de déterminer quand est-ce que le problème de minimisation ci-dessus a un sens et admet une solution. Dans le cadre des stratégies discrètes, il faut et il suffit que la forme quadratique soit définie positive. Pour la forme quadratique particulière que l'on regarde ici, ce problème a été résolu explicitement par Bochner [30].

**Proposition 2.5.1.** *Soit  $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et bornée. Alors  $C(X) \geq 0$  pour toute stratégie  $X$  continue à gauche, à variation totale finie satisfaisant  $X_{T+} = 0$  si, et seulement si la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto G(|t|)$  est la transformée de Fourier d'une mesure borélienne finie  $\mu$ , i.e.  $G(|t|) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx)$ . Si, en outre le support de cette mesure n'est pas discret, alors  $C(X) > 0$  pour toute stratégie  $X$  non identiquement nulle.*

Ce résultat nous donne ainsi une condition nécessaire et suffisante pour exclure les manipulations de prix au sens d'Huberman et Stanzl. De plus, on peut montrer que les fonctions  $G$  convexes s'écrivent comme la transformée de Fourier d'une mesure non discrète. Ce résultat est connu depuis des travaux de Carathéodory [36] et Toeplitz [87].

Nous considérons maintenant deux exemples de résilience  $G$  qui satisfont les hypothèses ci-dessus. La figure 2.3 illustre la stratégie optimale pour une fonction de résilience convexe de type "puissance". La différence principale avec une résilience exponentielle est que les transactions intermédiaires ne sont pas toutes identiques. En revanche, la stratégie optimale obtenue pour une résilience gaussienne (figure 2.4) est bien plus étrange. Elle consiste à acheter et vendre successivement plusieurs fois l'actifs. Plus la grille de temps sur laquelle l'investisseur fait des transactions est fine, plus cette oscillation est marquée. Nous sommes bien ici dans des conditions qui excluent toute manipulation de prix au sens d'Huberman et Stanzl, et pourtant le marché est instable. On comprend aisément d'ailleurs à partir de la figure 2.4 pourquoi il ne peut y avoir de stratégie optimale en temps continu puisque les stratégies optimales discrètes divergent lorsque le pas de temps diminue. Ce phénomène est analysé dans [56]. Ainsi, pour la stabilité du marché, il est souhaitable d'exclure également les manipulations de prix induites par les transactions. Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi.

**Théorème 2.5.2.** *Soit  $G$  une fonction de résilience non constante, décroissante et convexe telle que  $G(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) < \infty$ . Alors, il existe une unique stratégie optimale  $X^*$  satisfaisant (2.6), et cette stratégie est une fonction monotone du temps. En particulier, il n'y a pas de manipulation de prix induite par les transactions.*

En outre, nous disposons d'une réciproque partielle à ce résultat. S'ils existent  $s, t > 0$ ,  $s \neq t$  tels que  $G(0) - G(s) < G(t) - G(t+s)$  (ce qui est le cas si  $G$  est concave au voisinage de zéro), alors il existe une manipulation de prix induite par les transactions. Ainsi, notre étude théorique indique que les fonctions convexes sont de bons candidats pour modéliser la résilience de l'impact des transactions sur les prix de marché.

**Remarque 2.5.3.** *Il est souhaitable d'exclure les manipulations de prix induites par les transactions pour modéliser un marché stable. Néanmoins, il est arrivé à certains moments que le marché ne soit pas ainsi. Lors du Flash Crash du 6 mai 2010, la SEC a relevé ([39, page 3]) des ordres d'achat et de vente successifs de volume élevé mais de somme quasi nulle, ce qui est finalement assez similaire à ce que l'on observe figure 2.4.*

Jusqu'ici, nous n'avons pas cherché à caractériser précisément la stratégie optimale  $X^*$ . On peut toujours calculer numériquement les stratégies optimales discrètes. En effet, celles-ci minimisent une forme quadratique positive sous une contrainte linéaire. Essentiellement, il suffit d'inverser la matrice  $G(|t_i - t_j|)_{0 \leq i, j \leq N}$  pour pouvoir calculer la stratégie discrète optimale sur la grille de temps  $t_0 \leq \dots \leq t_N$ . En revanche, calculer analytiquement la stratégie optimale  $X^*$  en temps continu est plus délicat. Celle-ci apparaît comme la solution d'une équation intégrale de Fredholm ([56], théorème 2.2.6). Sauf pour des cas très particuliers, cette équation ne possède pas de solution explicite connue. Une raison pour laquelle il est plus difficile d'analyser la stratégie optimale  $X^*$  provient du fait que le modèle n'est pas Markovien. Autrement dit, l'information du marché à l'instant  $t$  ne se résume pas, contrairement aux modèles V et P, à la connaissance du couple  $(X_t, E_t)$  et il faut connaître tous ordres du passé pour déterminer leur impact futur. Néanmoins, lorsque la fonction de résilience est complètement monotone, on peut se ramener à un cadre Markovien et caractériser plus précisément la stratégie optimale  $X^*$ . Nous allons présenter maintenant ces résultats qui sont obtenus dans [18].

La fonction de résilience est complètement monotone si elle est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et satisfait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, (-1)^n G^{(n)}(t) \geq 0.$$

Elle est en particulier décroissante et convexe, et on suppose que  $G(0) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t)$ . Les fonctions de résilience exponentielle ( $G(t) = e^{-\rho t}$ ) ou de type puissance ( $G(t) = (1+t)^{-\gamma}$  avec  $\gamma > 0$ ) sont des exemples de fonctions complètement monotones. En vertu du théorème de Hausdorff-Bernstein-Widder ([88], Théorème IV.12a), une fonction  $G$  telle que  $G(0) = 1$  est complètement monotone si, et seulement si elle s'écrit comme la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}_+$ , i.e.

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\rho t} \lambda(d\rho).$$

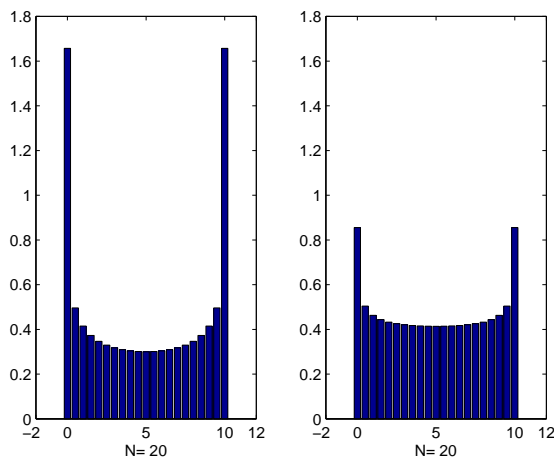


FIGURE 2.3 – Stratégie optimale la fonction de résilience  $G(t) = (1+t)^{-\gamma}$  avec  $\gamma = 0.4$  (à gauche) et  $\gamma = 2$  (à droite), pour une grille de temps régulière de pas  $1/N$  et  $X_0 = -10$  (achat de 10 actifs).

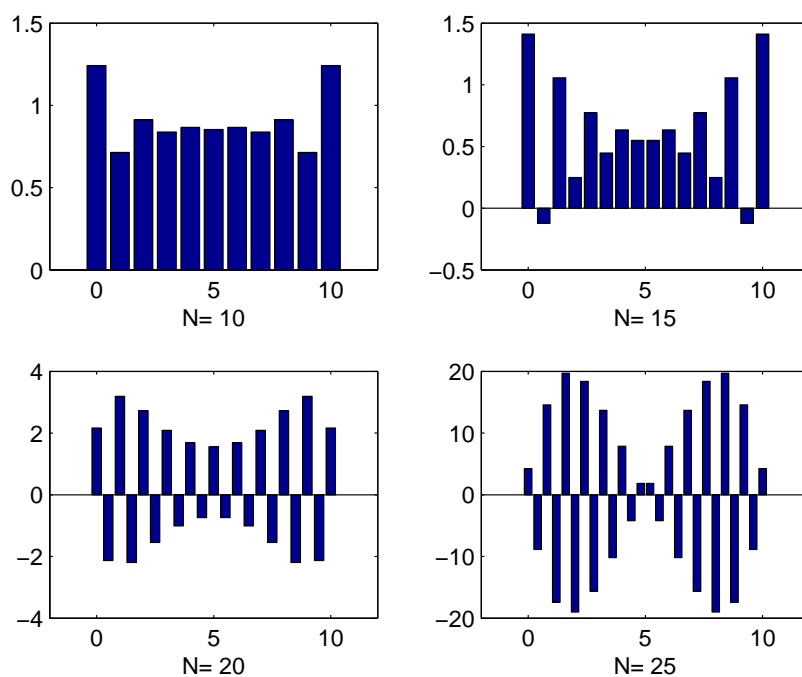


FIGURE 2.4 – Stratégie optimale pour la fonction de résilience gaussienne  $G(t) = e^{-t^2}$  pour une grille de temps régulière de pas  $1/N$  et  $X_0 = -10$ .

En posant

$$E_t^X(\rho) = \int_{[0,t)} e^{-\rho(t-s)} dX_s, \quad \text{pour } \rho \geq 0, \quad (2.32)$$

on peut montrer que le coût (2.31) se réécrit :

$$C(X) = \int_{[0,T)} \int E_t^X(\rho) \lambda(d\rho) dX_t + \frac{1}{2} \sum_{t \leq T} (\Delta X_t)^2. \quad (2.33)$$

Ainsi, pour déterminer l'évolution du coût à l'instant  $t$ , il suffit de connaître  $(E_t^X(\rho), \rho \geq 0)$  si bien que l'on est à nouveau dans un cadre Markovien avec cette fois-ci un état infini-dimensionnel.

Pour résoudre le problème d'exécution optimale, nous supposons que  $G''(0+) < \infty$ , ce qui permet de définir :

$$\bar{\rho} = \int \rho \lambda(d\rho) < \infty \quad \text{et} \quad \bar{\rho}^2 = \int \rho^2 \lambda(d\rho) < \infty. \quad (2.34)$$

Nous introduisons également l'équation différentielle de Riccati infini-dimensionnelle suivante pour  $\varphi : [0, \infty) \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\varphi'(t, \rho_1, \rho_2) + (\rho_1 + \rho_2)\varphi(t, \rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2\bar{\rho}} \left( \rho_1 + \int x\varphi(t, \rho_1, x) \lambda(dx) \right) \left( \rho_2 + \int x\varphi(t, x, \rho_2) \lambda(dx) \right) \quad (2.35)$$

de condition initiale

$$\varphi(0, \rho_1, \rho_2) = 1 \quad \text{pour tout } \rho_1, \rho_2 \geq 0. \quad (2.36)$$

Dans (2.35),  $\varphi'$  désigne la dérivée temporelle de  $\varphi$ . La solution de cette équation permet ensuite de caractériser la stratégie optimale  $X^*$ . Nous commençons par énoncer le résultat d'existence et d'unicité qui est obtenu dans [18].

**Théorème 2.5.4.** *Lorsque  $G''(0+) < \infty$  l'équation de Riccati (2.35) de condition initiale (2.36) admet une unique solution  $\varphi$  parmi les fonctions  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^1([0, \infty); \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2))$  satisfaisant l'inégalité*

$$0 \leq \tilde{\varphi}(t, \rho_1, \rho_2) \leq c(1 + \rho_1)(1 + \rho_2), \quad (2.37)$$

où  $c$  est une constante qui dépend de  $\tilde{\varphi}$  et est localement uniforme en  $t$ . De plus,  $\varphi$  vérifie les propriétés suivantes.

1.  $\varphi$  est strictement positive.
2.  $\varphi$  is symétrique :  $\varphi(t, \rho_1, \rho_2) = \varphi(t, \rho_2, \rho_1)$  pour tout  $(\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}_+^2$ .
3.  $1 = \int \varphi(t, \rho, x) \lambda(dx) = \int \varphi(t, x, \rho) \lambda(dx)$  pour tout  $\rho \geq 0$ .
4.  $\varphi \in \mathcal{C}^2([0, \infty); \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2))$ .
5. Pour tout  $t$ , le noyau  $\varphi(t, \cdot, \cdot)$  est positif sur  $L^2(\lambda)$ , i.e.,

$$\int \int f(x)f(y)\varphi(t, x, y) \lambda(dx) \lambda(dy) \geq 0 \quad \text{pour } f \in L^2(\lambda). \quad (2.38)$$

6. Les fonctions  $\varphi(t, \rho_1, \rho_2)$  et  $\varphi'(t, \rho_1, \rho_2)$  sont localement Lipschitz en  $(\rho_1, \rho_2)$ , et la constante de Lipschitz est localement uniforme en  $t$ .

Lorsque la mesure de probabilité  $\lambda$  à un support discret et fini, ce qui correspond à une fonction de résilience  $G(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\rho_i t}$  qui est une combinaison linéaire convexe d'exponentielles, l'équation de Riccati (2.35) se ramène à une équation de Riccati matricielle, dont la solution explicite est donnée dans Levin [73].

La solution de l'équation de Riccati (2.35) de condition initiale (2.36) permet d'expliquer la solution du problème d'exécution optimale. On pose

$$\varphi_0(t) = \varphi(t, 0, 0) \quad \text{et} \quad \psi(t, \rho) = \int x \varphi(t, x, \rho) \lambda(dx)$$

C'est à l'aide d'un argument de vérification que l'on obtient le théorème suivant, qui est prouvé dans [18].

**Théorème 2.5.5.** *Soit  $X^*$  l'unique stratégie optimale parmi les stratégies satisfaisant (2.6) de valeur initiale  $X_0$ . Alors, le coût de cette stratégie est donné par*

$$C(X^*) = \frac{X_0^2}{2\varphi_0(T)}. \quad (2.39)$$

En outre,  $X^*$  a des sauts aux instants  $t = 0$  et  $t = T$  de taille

$$\Delta X_0^* = \Delta X_T^* = -\frac{\psi(T, 0)}{2\bar{\rho}\varphi_0(T)} X_0$$

et est continûment dérivable sur  $(0, T)$ . La dérivée  $x(t) = \frac{d}{dt} X_t^*$  est l'unique solution continue de l'équation de Volterra intégrale suivante

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t, s)x(s) ds, \quad (2.40)$$

où la fonction  $f$  et le noyau  $K(\cdot, \cdot)$  sont donnés par

$$f(t) = \frac{\Delta X_0^*}{2\bar{\rho}} \int e^{-\rho t} \Theta(T-t, \rho) \lambda(d\rho), \quad K(t, s) = \frac{1}{2\bar{\rho}} \int e^{-\rho(t-s)} \Theta(T-t, \rho) \lambda(d\rho), \quad (2.41)$$

avec

$$\Theta(t, \rho) := \frac{\rho + \psi(t, \rho)}{\psi(t, 0)} \int x^2 \varphi(t, x, 0) \lambda(dx) - \int x^2 \varphi(t, x, \rho) \lambda(dx) + \rho^2. \quad (2.42)$$

Comme pour une résilience exponentielle, la stratégie optimale consiste à effectuer un ordre initial et un ordre final de même taille. Les ordres intermédiaires sont placés continûment et de taille infinitésimale.



## 2.6 Perspectives

Les travaux [11, 10, 17, 18, 19, 12] que nous avons présentés ici sont tous dérivés autour d'un modèle de carnet d'ordres extrêmement simple. Grâce à ce cadre, nous avons caractérisé précisément, dans plusieurs cas, la solution du problème d'exécution optimale. Ce modèle nous a permis en particulier de tenir compte d'un impact non linéaire des transactions sur les prix. Nous avons pu également étudier l'impact de la résilience du marché sur le problème d'exécution optimale et sur la stabilité du marché. Les résultats que nous avons obtenus ont également ouvert des questions sur la notion de manipulation de prix sur des échelles de temps courtes. Nous avons en effet montré qu'exclure les manipulations de prix au sens d'Huberman et Stanzl n'était pas suffisant pour garantir la stabilité du marché. Cela nous a motivé pour introduire la notion de "manipulation de prix induite par les transactions" afin d'exclure les instabilités observées.

Cependant, force est d'admettre que la modélisation que nous proposons ici est bien fruste par rapport à la complexité du marché et en particulier de la dynamique réelle d'un carnet d'ordres. Il y a par conséquent de très nombreuses directions pour étudier plus finement certains comportements du marché. Plutôt que de dresser une liste exhaustive de tous les raffinements possibles, nous allons essayer de soulever quelques questions importantes pour les praticiens et pour la recherche académique.

Tout d'abord, nous allons discuter d'améliorations possibles par rapport au modèle d'impact sur les prix. Le modèle que nous proposons ici considère uniquement des ordres de marchés qui sont exécutés immédiatement. Il serait très intéressant de pouvoir rajouter de façon consistante la possibilité de placer des ordres limites, c'est à dire des ordres dont le prix est fixé mais dont le temps d'exécution est aléatoire et dépend du marché. Il existe des modèles qui prennent en compte ce type d'ordres. Bayraktar et Ludkovski [23] proposent ainsi un modèle où les transactions ne peuvent se faire qu'aux instants de saut d'un processus de Poisson, et résolvent dans ce cadre le problème d'exécution optimale. Guéant, Lehalle et Tapia [63] suggèrent un modèle où l'ordre limite est exécuté en un temps de loi exponentielle, dont le paramètre dépend de la distance entre le prix de l'ordre limite et le prix coté de l'actif. Ils résolvent le problème d'exécution optimale, avec toutefois une formulation légèrement différente de celle donnée ici. En revanche, il n'existe toujours pas à ma connaissance de modèle permettant à la fois de placer des ordres de marché et des ordres limites. Un tel modèle dans lequel on pourrait mener à bien l'analyse du problème d'exécution optimale serait très intéressant d'un point de vue pratique. Bien évidemment, on se doute bien qu'il est plus avantageux de placer des ordres limites si l'on dispose d'assez de temps, et qu'il est en revanche préférable d'utiliser des ordres de marchés lorsque l'échéance est courte afin de satisfaire la contrainte de liquidation. Il serait néanmoins très intéressant d'avoir un modèle permettant de quantifier cela et donnant idéalement la stratégie optimale (taille et prix des ordres limites, taille des ordres de marchés).

Dans les modèles d'impact de prix d'Almgren et Chriss comme dans celui que nous considérons, il y a un seul grand investisseur. L'action de tous les autres acteurs du marché

est modélisée à travers la martingale  $S_t^0$ . Cette modélisation est raisonnable pour une multitude de petits investisseurs qui ont des opinions contradictoires sur l'état du marché. Elle est en revanche moins acceptable si, en même temps que le grand investisseur, d'autres intervenants souhaitent acheter ou liquider des positions significatives. Il serait ainsi très intéressant de voir comment est modifiée la stratégie d'exécution optimale lorsqu'il y a deux ou plusieurs grand investisseurs. Il faut alors distinguer si chaque investisseur a, ou peut avoir de l'information ou non sur l'objectif et la stratégie des autres. Ces questions entrent pleinement dans le domaine de la théorie des jeux et ont clairement un intérêt pratique.

Les modèles d'impact sur les prix sont à mi-chemin entre une modélisation fine de la microstructure des marchés et une modélisation en temps long des marchés pour laquelle on décrit plus finement la dynamique stochastique et où on ignore généralement l'impact des transactions sur les prix. Il n'y a à ce jour que peu de passerelles entre ces trois types de modèles. Cetin, Jarrow et Protter [38] ont proposé un modèle de diffusion où le coût de chaque transaction n'est pas proportionnel au volume. Autrement dit, il y a un impact instantané des transactions sur les prix, mais il n'y a en revanche pas d'impact permanent ni d'impact transitoire. Récemment, Cont et De Larrard [41] ont proposé une modélisation pour les carnets d'ordres et ont établi la convergence en temps long de ce modèle vers une diffusion limite. De manière générale, il serait très intéressant d'un point de vue théorique de pouvoir faire le lien entre les trois niveaux de modélisation que nous avons mentionné. Idéalement, on aimerait disposer d'un modèle de carnet d'ordres qui soit compatible avec un modèle d'impact sur les prix et une diffusion en temps long connus, pour gérer un portefeuille de manière consistante sur les différentes échelles de temps. Un intérêt réel d'une modélisation du carnet d'ordres serait de pouvoir prendre en compte de façon précise différentes règles de cotation (taille du tick, coûts de transaction pour les ordres de marchés, coûts de transaction pour placer ou annuler les ordres limites, etc.) Ainsi, on disposerait d'un outil permettant d'analyser l'impact des règles de cotation sur la liquidité et la stabilité du marché. Intuitivement, moins il y a de coûts de transaction, plus il est aisé de placer et d'annuler des ordres sur le marché, plus il y a de bruit et plus il y a un risque d'instabilité du marché. Inversement, si les coûts de transactions sont plus élevés, il y aura moins d'ordres placés et donc une liquidité moindre. Il serait très intéressant de pouvoir quantifier cela et déterminer si les coûts de transactions sur les ordres de marchés, sur le placement ou l'annulation d'ordres limites jouent le même rôle ou non. Obtenir un modèle assez réaliste permettant de répondre à ces questions est un objectif assez ambitieux. Cependant, l'émergence de nombreux marchés et le foisonnement des mécanismes de cotation qui ont suivi la mise en place de la directive européenne sur les marchés d'instruments financiers de 2007 laissent penser que ces questions sont pertinentes, aussi bien pour les marchés que pour leurs régulateurs.

# Chapitre 3

## Résumé des autres travaux de recherche

### Calibration exacte d'un modèle à volatilité locale homogène en temps à partir des prix d'options américaines perpétuelles

[14, 13] : Il est bien connu que l'on peut toujours trouver un modèle à volatilité locale  $dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t$  qui donne exactement les prix de marché des options européennes. Ce résultat est dû à Gyöngy [65], et Dupire [49] a donné un lien explicite entre la volatilité locale  $\sigma(t, x)$  et les prix des call (ou put) européens. Un problème naturel est de chercher de façon analogue à obtenir un lien univoque entre cette fonction  $\sigma$  et la nappe de prix des options américaines. Dans [14], nous répondons positivement à ce problème pour les options américaines perpétuelles et une volatilité  $\sigma(x)$  homogène en temps, et nous explicitons le lien entre les prix des options américaines et  $\sigma$ . Contrairement à la formule de Dupire qui s'appuie beaucoup sur la forme particulière du payoff (call ou put), la calibration que nous obtenons ici peut s'étendre à des payoffs plus généraux, ce que nous montrons dans [13]. Ces travaux ont été repris et complétés par Lu [75] qui propose une méthode de calibration lorsqu'on dispose seulement d'un nombre fini de prix d'options américaines, Ekström et Hobson [50] qui simplifient significativement la méthode de calibration de  $\sigma$  que nous donnons dans [14], et Hobson et Klimmek [68] qui étendent les résultats obtenus dans [13].

### Risque de crédit

[8] : Dans cet article, nous introduisons une nouvelle famille de copules que l'on construit à partir de fonctions 1-périodiques positives d'intégrale 1 sur une période. Ces copules peuvent être simulées aisément. Une propriété intéressante de ces copules est qu'elles permettent des relations deux à deux non symétriques, contrairement à beaucoup de familles de copules usuelles.

[33] : Dans cet article, nous proposons un modèle joint du taux d'intérêt et de l'intensité de défaut d'une entreprise. Ce modèle étend naturellement le modèle CIR++ proposé par

Brigo et Mercurio [34] pour le taux d'intérêt court. Dans ce modèle, nous obtenons des formules presque explicites pour les prix de CDS, ce qui permet une calibration aisée aux données de marché. Ce modèle peut être ensuite utilisé pour calculer le prix d'options plus complexes et mesurer l'impact de la dépendance entre le taux d'intérêt et l'intensité de défaut sur les prix.

[16] : Black et Cox [28] ont proposé de modéliser le défaut d'une entreprise comme le premier instant où sa valeur  $V$  passe en dessous d'un certain seuil. Le processus  $V$  est supposé suivre un modèle de Black-Scholes :  $dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t$ . Dans [16], nous généralisons ce modèle en supposant que l'intensité de défaut de la firme change de valeur autour de certains seuils et est donnée par :

$$\lambda_t = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{1}_{C_i \exp(\alpha t) \leq V_t < C_{i-1} \exp(\alpha t)}, \quad (3.1)$$

avec  $C_n = 0 < C_{n-1} < \dots < C_1 < C_0 = +\infty$ . Dans ce cadre, nous déterminons la transformée de Laplace de la probabilité de survie, ce qui permet de calculer efficacement à l'aide de l'algorithme de transformée de Fourier rapide les prix de CDS. Nous montrons que ce modèle avec un seuil ( $n = 2$ ) permet déjà de calibrer convenablement des données de marché bien variées sur les CDS.

[6] : Article d'introduction à la modélisation des instants de défaut d'un panier d'actifs.

### Autres publications

[4] : Article de synthèse sur le modèle de Cox-Ingersoll-Ross pour les taux d'intérêts.

[9] : Cet article propose une méthode hybride (stochastique-déterministe) pour la simulation de réactions chimiques au sein d'une cellule. Au niveau cellulaire, la rareté et la localisation de certains reactants font que les réactions les impliquant doivent être modélisées de façon aléatoire. D'autres réactions plus fréquentes peuvent elles être modélisées en utilisant la cinétique chimique "classique". Cette méthode hybride permet de prendre en compte le caractère occasionnel de certaines réactions, tout en étant bien plus économe en temps qu'une modélisation entièrement stochastique de toutes les réactions.

# Bibliographie

- [1] Abdelkoddousse Ahdida and Aurélien Alfonsi. Exact and high order discretization schemes for Wishart processes and their affine extensions. *To appear in Annals of Applied Probability*, 2010.
- [2] Abdelkoddousse Ahdida and Aurélien Alfonsi. A Mean-Reverting SDE on Correlation matrices. 2011.
- [3] Aurélien Alfonsi. On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods Appl.*, 11(4) :355–384, 2005.
- [4] Aurélien Alfonsi. *Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Model*. Encyclopedia of Quantitative Finance, John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [5] Aurélien Alfonsi. High order discretization schemes for the CIR process : application to affine term structure and Heston models. *Math. Comp.*, 79(269) :209–237, 2010.
- [6] Aurélien Alfonsi. An introduction to the multiname modelling in credit risk. *Chapitre du livre “Credit Risk Frontiers” édité par T. Bielecki, D. Brigo and F. Patras*, 2011.
- [7] Aurélien Alfonsi. Strong convergence of some drift implicit Euler scheme. Application to the CIR process. 2012.
- [8] Aurélien Alfonsi and Damiano Brigo. New families of copulas based on periodic functions. *Comm. Statist. Theory Methods*, 34(7) :1437–1447, 2005.
- [9] Aurélien Alfonsi, Eric Cancès, Gabriel Turinici, Barbara Di Ventura, and Wilhelm Huisinga. Adaptive simulation of hybrid stochastic and deterministic models for biochemical systems. In *CEMRACS 2004—mathematics and applications to biology and medicine*, volume 14 of *ESAIM Proc.*, pages 1–13 (electronic). EDP Sci., Les Ulis, 2005.
- [10] Aurélien Alfonsi, Antje Fruth, and Alexander Schied. Constrained portfolio liquidation in a limit order book model. In *Advances in mathematics of finance*, volume 83 of *Banach Center Publ.*, pages 9–25. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008.
- [11] Aurélien Alfonsi, Antje Fruth, and Alexander Schied. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions. *Quant. Finance*, 10(2) :143–157, 2010.
- [12] Aurélien Alfonsi and José Infante Acevedo. Optimal execution and price manipulations in time-varying limit order books. 2012.

- [13] Aurélien Alfonsi and Benjamin Jourdain. General duality for perpetual American options. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 11(6) :545–566, 2008.
- [14] Aurélien Alfonsi and Benjamin Jourdain. Exact volatility calibration based on a Dupire-type call-put duality for perpetual American options. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 16(4) :523–554, 2009.
- [15] Aurélien Alfonsi, Benjamin Jourdain, and Arturo Kohatsu Higa. Pathwise optimal transport bounds between a one-dimensional diffusion and its Euler scheme. 2012.
- [16] Aurélien Alfonsi and Jérôme Lelong. A closed-form extension to the Black-Cox model. *Accepted for publication in the International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2010.
- [17] Aurélien Alfonsi and Alexander Schied. Optimal trade execution and absence of price manipulations in limit order book models. *SIAM J. Financial Math.*, 1 :490–522, 2010.
- [18] Aurélien Alfonsi and Alexander Schied. Capacitary measures for completely monotone kernels via singular control. 2012.
- [19] Aurélien Alfonsi, Alexander Schied, and Alla Slynko. Order book resilience, price manipulation, and the positive portfolio problem. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 3(1) :511–533, 2012.
- [20] Robert Almgren and Neil Chriss. Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, 3 :5–39, 2000.
- [21] Leif Andersen. Simple and efficient simulation of the heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*, 11(3), 2008.
- [22] V. Bally and D. Talay. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. I. Convergence rate of the distribution function. *Probab. Theory Related Fields*, 104(1) :43–60, 1996.
- [23] Erhan Bayraktar and Michael Ludkovski. Optimal trade execution in illiquid markets. *Math. Finance*, 21(4) :681–701, 2011.
- [24] A. Benabid, H. Bensusan, and N. El Karoui. Wishart Stochastic Volatility : Asymptotic Smile and Numerical Framework. Preprint, 2010.
- [25] Abdel Berkaoui, Mireille Bossy, and Awa Diop. Euler scheme for SDEs with non-Lipschitz diffusion coefficient : strong convergence. *ESAIM Probab. Stat.*, 12 :1–11 (electronic), 2008.
- [26] Dimitris Bertsimas and Andrew Lo. Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets*, 1 :1–50, 1998.
- [27] Alexandros Beskos, Omiros Papaspiliopoulos, and Gareth O. Roberts. Retrospective exact simulation of diffusion sample paths with applications. *Bernoulli*, 12(6) :1077–1098, 2006.
- [28] F. Black and J. C. Cox. Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance*, 31 :351–367, 1976.

- [29] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :pp. 637–654, 1973.
- [30] Salomon Bochner. *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.
- [31] Jean-Philippe Bouchaud. *Price Impact*. Encyclopedia of Quantitative Finance, John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [32] Jean-Philippe Bouchaud, Yuval Gefen, Marc Potters, and Matthieu Wyart. Fluctuations and response in financial markets : the subtle nature of 'random' price changes. *Quantitative Finance*, 4(2) :176–190, 2004.
- [33] Damiano Brigo and Aurélien Alfonsi. Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model. *Finance Stoch.*, 9(1) :29–42, 2005.
- [34] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models—theory and practice*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. With smile, inflation and credit.
- [35] M.F. Bru. Wishart processes. *J. Theoret. Probab.*, 4(4) :725–751, 1991.
- [36] Constantin Carathéodory. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Mathematische Annalen*, 64 :95–115, 1907.
- [37] Peter Carr and Dilip Madan. Option pricing and the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4) :61–73, 1999.
- [38] Umut Çetin, Robert A. Jarrow, and Philip Protter. Liquidity risk and arbitrage pricing theory. *Finance Stoch.*, 8(3) :311–341, 2004.
- [39] CFTC-SEC. Findings regarding the market events of may 6, 2010. Report, 2010.
- [40] Bin Chen, Cornelis W. Oosterlee, and Hans van der Weide. Efficient unbiased simulation scheme for the sabr stochastic volatility model. 2011.
- [41] Rama Cont and Adrien De Larrard. Price dynamics in a markovian limit order market. *ssrn e-prints*, 2012.
- [42] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr., and Stephen A. Ross. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53(2) :363–384, 1985.
- [43] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr., and Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2) :385–407, 1985.
- [44] Christa Cuchiero, Damir Filipović, Eberhard Mayerhofer, and Josef Teichmann. Affine processes on positive semidefinite matrices. *Ann. Appl. Probab.*, 21(2) :397–463, 2011.
- [45] J. Da Fonseca, M. Grasselli, and C. Tebaldi. Option pricing when correlations are stochastic : an analytical framework. *Review of Derivatives Research*, 10 :151–180, 2008.

- [46] Qiang Dai and Kenneth Singleton. Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, LV(5) :1943 – 1978, 2000.
- [47] G. Deelstra and F. Delbaen. Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term. *Appl. Stochastic Models Data Anal.*, 14(1) :77–84, 1998.
- [48] Steffen Dereich, Andreas Neuenkirch, and Lukasz Szpruch. An euler-type method for the strong approximation of the cox-ingersoll-ross process. *Proceedings of the Royal Society A*, 2012.
- [49] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, (7) :18–20, 1994.
- [50] Erik Ekström and David Hobson. Recovering a time-homogeneous stock price process from perpetual option prices. *Ann. Appl. Probab.*, 21(3) :1102–1135, 2011.
- [51] C. L. Epstein and R. Mazzeo. Wright-Fisher diffusion in one dimension. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(2) :568–608, 2010.
- [52] A. Etheridge. *Some mathematical models from population genetics*, volume 2012 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011. Lectures from the 39th Probability Summer School held in Saint-Flour, 2009.
- [53] P.A. Forsyth, J.S. Kennedy, S.T. Tse, and H. Windcliff. Optimal trade execution : A mean quadratic variation approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2012.
- [54] Takehiro Fujiwara. Sixth order methods of kusuoka approximation. 2006.
- [55] Jim Gatheral. No-dynamic-arbitrage and market impact. *Quant. Finance*, 10(7) :749–759, 2010.
- [56] Jim Gatheral, Alexander Schied, and Alla Slynko. Transient linear price impact and fredholm integral equations. *Mathematical Finance*, pages no–no, 2011.
- [57] P. Gauthier and D. Possamai. Efficient Simulation of the Wishart Model. *SSRN eLibrary*, 2009.
- [58] Michael B. Giles. Multilevel Monte Carlo path simulation. *Oper. Res.*, 56(3) :607–617, 2008.
- [59] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [60] L. J. Gleser. A canonical representation for the noncentral wishart distribution useful for simulation. *Journal of the American Statistical Association*, 71(355) :690–695, 1976.
- [61] C. Gourieroux and R. Sufana. Wishart quadratic term structure models. *Working paper.*, 2003.



- [62] Piotr Graczyk and Jacek Malecki. Multidimensional Yamada-Watanabe theorem and its applications. 2011.
- [63] O. Guéant, C.-A. Lehalle, and J. Fernandez Tapia. Optimal Portfolio Liquidation with Limit Orders. *ArXiv e-prints*, June 2011.
- [64] Julien Guyon. Euler scheme and tempered distributions. *Stochastic Process. Appl.*, 116(6) :877–904, 2006.
- [65] I. Gyöngy. Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an Itô differential. *Probab. Theory Relat. Fields*, 71(4) :501–516, 1986.
- [66] István Gyöngy and Miklós Rásonyi. A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients. *Stochastic Process. Appl.*, 121(10) :2189–2200, 2011.
- [67] Steven Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2) :327–343, 1993.
- [68] David Hobson and Martin Klimmek. Constructing time-homogeneous generalized diffusions consistent with optimal stopping values. *Stochastics*, 83(4-6) :477–503, 2011.
- [69] Gur Huberman and Werner Stanzl. Price manipulation and quasi-arbitrage. *Econometrica*, 72(4) :1247–1275, 2004.
- [70] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [71] C. Kaya Boortz. Modelling correlation risk. *Diplomarbeit, preprint*, 2008.
- [72] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second edition, 2008.
- [73] J. J. Levin. On the matrix Riccati equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 :519–524, 1959.
- [74] Roger Lord, Remmert Koekoek, and Dick Van Dijk. A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quant. Finance*, 10(2) :177–194, 2010.
- [75] Bing Lu. Recovering a piecewise constant volatility from perpetual put option prices. *J. Appl. Probab.*, 47(3) :680–692, 2010.
- [76] Syoiti Ninomiya and Nicolas Victoir. Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing. *Appl. Math. Finance*, 15(1-2) :107–121, 2008.
- [77] A. Obizhaeva and J. Wang. Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics. *Working Paper Series*, 2005.

- [78] P. L. Odell and A. H. Feiveson. A numerical procedure to generate a sample covariance matrix. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 61 :199–203, 1966.
- [79] Kojiro Oshima, Josef Teichmann, and Dejan Velušček. A new extrapolation method for weak approximation schemes with applications. *Annals of Applied Probability*, 22(3) :1008–1045, 2012.
- [80] Marc Potters and Jean-Philippe Bouchaud. More statistical properties of order books and price impact. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 324(1-2) :133–140, 2003. Proceedings of the International Econophysics Conference.
- [81] Silviu Predoiu, Gennady Shaikhet, and Steven Shreve. Optimal execution in a general one-sided limit-order book. *SIAM J. Financial Math.*, 2 :183–212, 2011.
- [82] A. Reghai. Breaking correlation breaks. *Risk*, (October) :90–95, 2010.
- [83] Alexander Schied, Torsten Schöneborn, and Michael Tehranchi. Optimal basket liquidation for CARA investors is deterministic. *Appl. Math. Finance*, 17(6) :471–489, 2010.
- [84] W. B. Smith and R. R. Hocking. Algorithm as 53 : Wishart variate generator. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 21(3) :341–345, 1972.
- [85] Gilbert Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5 :506–517, 1968.
- [86] Denis Talay and Luciano Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Anal. Appl.*, 8(4) :483–509 (1991), 1990.
- [87] Otto Toeplitz. Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. *Mathematische Annalen*, 70 :351–376, 1911.
- [88] David Vernon Widder. *The Laplace Transform*. Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.