

UTILISATION DE MODÈLES DE TAUX DE TYPE CIR POUR ÉVALUER LA VALEUR ÉCONOMIQUE DES CONTRATS D'ÉPARGNE PARTICIPATIFS ?

Version 2.0 du 14/11/2020

KAMAL ARMEL¹ FRÉDÉRIC PLANCHET²

Le prix des options et des garanties des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéficiaires n'est pas observable sur un marché organisé. La justification du choix et du calibrage du générateur de scénarios économiques par une confrontation directe avec des prix observées ne peut être envisagée. Dans ce cadre de valorisation *Mark-to-Model*, se posent naturellement les questions de la pertinence des choix des modèles et de la construction de critères de qualité pour valider ces choix.

Cet article s'intéresse à la problématique de choix de modèles de taux d'intérêt destinés à évaluer la valeur économique (*best estimate*) de contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéficiaires dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs. Il s'inscrit dans la continuité de précédents travaux (cf. Armel et Planchet [2018] et Armel et Planchet [2019]). Dans ces travaux, une construction d'un générateur de scénarios économiques (GSE) risque-neutre utilisé pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* aux modèles de taux Hull & White, G2++ et LMM ainsi qu'à leur calibrage est proposée.

Nous introduisons ici une troisième famille de modèles de taux. Il s'agit des modèles de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross), dont la dynamique intègre une composante en racine carrée du taux court instantané. L'objectif est de :

- Définir les modèles CIR++ et CIR2++ et décrire les méthodes de calibrage et de simulation de ces modèles ;
- Proposer des méthodes de construction de générateurs de scénarios économiques risque-neutres dont les modèles de taux sont des modèles CIR++ ou CIR2++ ;
- Évaluer, en application, les sensibilités du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéficiaires français aux modèles de taux CIR++ et CIR2++ et à leurs calibrages ;
- Dresser une comparaison des modèles CIR++, CIR2++, Hull & White, G2++ et LMM destinés à valoriser le *best-estimate*.

¹Kamal Armel est actuariaire qualifié et fondateur d'ARMEL Consulting. Contact : kamal.armel@armelconsulting.fr

²Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuariaire associé à PRIM'ACT. Contact : frederic@planchet.net

Contenu

1	Préambule	3
2	Modèles CIR++ et CIR2++ : définition, calibrage et simulation	4
2.1	Modèle CIR++	6
2.1.1	Définition	6
2.1.2	Prix d'une obligation zéro-coupon	6
2.1.3	Prix d'une option sur une obligation zéro coupon	7
2.1.4	Calibrage du modèle CIR++ sur des <i>caps</i>	7
2.1.5	Calibrage du modèle CIR++ sur des <i>swaptions</i>	8
2.1.6	Le modèle CIR++ et les taux négatifs	9
2.1.7	Simulation du modèle CIR++	10
2.2	Modèle CIR2++	11
2.2.1	Prix d'une obligation zéro-coupon	11
2.2.2	Calibrage du modèle CIR2++ sur des <i>caps</i> et des <i>swaptions</i>	12
2.2.3	Le modèle CIR2++ et les taux négatifs	13
2.2.4	Simulation du modèle CIR2++	13
3	Comment construire un GSE avec des modèles de taux CIR++ et CIR2++ ?	14
3.1	Modèles actions et immobilier	15
3.2	Quelle structure de dépendance ?	15
3.2.1	Problématique	15
3.2.2	Démarche de construction de la structure de dépendance	16
3.2.3	Approximation de la distribution du taux d'intérêt par une distribution gaussienne 18	
4	Analyse des résultats et des sensibilités du <i>best-estimate</i> de contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français aux modèles de taux	26
4.1	Démarche et données	26
4.2	Modèle CIR++	27
4.2.1	Résultats du calibrage	27
4.2.2	Analyse de l'impact de la valeur initiale du modèle CIR++ sur la volatilité et l'espérance du taux d'intérêt	29
4.2.3	Sensibilité de la moyenne et de la volatilité des taux d'intérêt au facteur de décalage de Black	32
4.3	Modèle CIR2++	33
4.3.1	Résultats du calibrage	33
4.3.2	Sensibilité de la moyenne et de la volatilité des taux d'intérêt au facteur de décalage de Black	35
4.4	Structure de dépendance et modèles actions et immobilier	36
4.5	Impact du choix du modèle de taux sur le <i>best-estimate</i>	36
5	Conclusion	38
6	Références	41

1 Préambule

Le prix des options et des garanties des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices n'est pas observable sur un marché organisé. La justification du choix et du calibrage du générateur de scénarios économiques par une confrontation directe avec des données observées, dans le cadre d'une approche statistique, ne peut être envisagée. Dans ce cadre de valorisation *Mark-to-Model*, se posent naturellement les questions de la pertinence des choix des modèles et de la construction de critères de qualité pour valider ces choix (Armel et Planchet [2018] et Armel et Planchet [2019]).

Cet article s'intéresse plus particulièrement à la problématique de choix de modèles de taux d'intérêt destinés à évaluer le *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs.

Armel et Planchet [2018] présentent en effet une démarche de construction d'un générateur de scénarios économiques risque-neutre dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs. Ce générateur est destiné à la valorisation du passif des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices et respecte le cadre normatif de Solvabilité 2. Armel et Planchet [2019] utilisent ce GSE pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* Solvabilité 2 des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices aux choix des modèles de taux et des données de calibrage. Trois modèles de taux ont été retenus pour réaliser ces sensibilités :

- Modèles de taux dont la dynamique suit une loi normale :
 - o Modèle à dynamique normale à un facteur : modèle de Hull-White ;
 - o Modèle à dynamique normale à deux facteurs : modèle gaussien à deux facteur noté G2++.
- Modèle de taux dont la dynamique suit une loi log-normale : le modèle de marché LMM.

Ce papier introduit une troisième famille de modèles de taux. Il s'agit des modèles de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross), dont la dynamique intègre une composante en racine carrée du taux court instantané. L'objectif étant de produire une étude comparative des modèles de taux : CIR à un facteur, CIR à deux facteurs, Hull & White, G2++ et LMM. Cela consiste notamment à évaluer :

1. La simplicité du calibrage et de la diffusion ;
2. La capacité à reproduire les prix de marché des *caps* et des *swaptions* ;
3. La pertinence du choix du modèle de taux au regard de l'objectif de valorisation des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

Afin d'évaluer le point 3, une attention particulière est accordée à la capacité de reproduction des prix de *caps* (et donc de *floors* par symétrie) par les modèles de taux étudiés. En effet l'analyse de la structure optionnelle financière élémentaire du *best-estimate* conduit à observer que le calibrage des modèles de taux destinés à la valorisation

du *best-estimate* est cohérent, sous certaines conditions, avec un calibrage sur des *floorlets* (ou des *caplets* par symétrie, voir Armel et Planchet [2019]).

Nous nous focalisons ici essentiellement sur le modèle CIR à un facteur (CIR++) et le modèle CIR à deux facteurs (CIR2++), qui n'avaient pas été analysés dans les travaux précédents. Les propriétés analytiques de ces modèles sont documentées dans une annexe technique rattachée à cet article.

Les variables d'intérêt étudiées dans la suite sont les taux d'intérêt sans risque, les actions et les investissements en immobilier. Le risque de crédit n'est pas abordé ici.

Ce papier s'organise en trois sections principales :

- La section 2 définit les modèles CIR++ et CIR2++ et décrit les méthodes de calibrage et de simulation de ces modèles ;
- La section 3 présente les modèles retenus pour les investissements en actions et en immobilier et décrit une démarche de construction de générateurs de scénarios économiques dont les processus de taux sont les modèles CIR++ et CIR2++ ;
- La section 4 présente
 - o les résultats des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ et une analyse de leur qualité,
 - o une étude des sensibilités du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français aux choix de modèles de taux CIR++ et CIR2++ et de leurs calibrages.

2 Modèles CIR++ et CIR2++ : définition, calibrage et simulation

Le succès de modèles tels que celui de Vasicek [1977] et celui de Cox, Ingersoll et Ross [1985] est principalement dû à leur capacité à permettre d'évaluer analytiquement les obligations et les options sur des obligations.

La dynamique du modèle de Vasicek ($dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$) est linéaire et peut être résolue explicitement. La distribution du taux court instantané est gaussienne et les prix d'obligations et de certaines options peuvent être exprimés sous une forme analytique.

L'approche d'équilibre général proposée par Cox, Ingersoll et Ross [1985] a introduit un terme en « racine carrée » du taux court dans le facteur de diffusion de la dynamique du modèle proposé par Vasicek [1977].

Le modèle résultant est une référence depuis de nombreuses années en raison de sa facilité d'analyse et du fait que, contrairement au modèle de Vasicek [1977], le taux court instantané est toujours positif, ce qui est longtemps apparu comme une propriété désirable pour un modèle de taux. La dynamique du modèle de Cox, Ingersoll et Ross [1985] sous la mesure risque-neutre s'écrit :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t)$$

où : $r(0) = r_0$ et r_0, k, θ, σ sont des constantes positives.

Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller suivante :

$$2k\theta > \sigma^2$$

Comme précisé dans la section 3.1.2 de l'annexe technique, le processus de taux court $r(t)$ conditionnellement à $r(s)$ suit la loi $\chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$:

$$r(t)|r(s) = \chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$$

où :

- $\chi^2(v, \lambda_{t,s})$ est une loi du Khi-deux non-centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est $\lambda_{t,s}$;
- $c_{t-s} = \frac{4k}{\sigma^2(1-\exp(-k(t-s)))}$;
- $v = 4k\theta/\sigma^2$;
- $\lambda_{t,s} = c_{t-s}r_s \exp(-k(t-s))$.

Bien qu'ils soient intéressants d'un point de vue analytique, les modèles de Vasicek et de CIR ne reproduisent pas la structure par termes des taux d'intérêt observée sur le marché, et ce, quel que soit le choix des paramètres.

Afin que ces modèles reproduisent la structure par termes des taux d'intérêt, la littérature financière propose notamment deux possibilités :

- Rendre les paramètres dépendants du temps (extension de type Hull & White, cf. section 2.1.8.1 de l'annexe technique) ;
- Introduire additivement une fonction déterministe de recalage sur la courbe initiale (cf. section 2.1.8.2 de l'annexe technique).

D'autres extensions, que nous ne détaillerons pas ici, sont proposées par la littérature. On peut citer, par exemple, celle présentée dans Shiu et Yao [1999] qui proposent des formules fermées pour valoriser des zéro-coupons en supposant que le taux d'intérêt instantané est décrit par les EDS suivantes :

$$dr(t) = \varphi(t)dt + k[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t)$$

$$d\theta(t) = \beta(r(t) - \theta(t))dt$$

La fonction déterministe $\varphi(t)$ permettant de répliquer la courbe de taux initiale.

Les modèles de Vasicek [1977] et CIR sont des modèles dont la structure par termes est affine. Afin de faciliter la lecture de cet article nous présentons dans la section 2 de l'annexe technique quelques généralités sur la famille des modèles de taux à structure par termes affine et leur extension par des fonctions déterministes afin de prendre en compte la courbe de taux initiale observée sur le marché.

Nous définissons dans la suite les modèles de taux CIR++ et CIR2++ et présentons les méthodes de calibrage et de simulation retenues. Les propriétés de ces modèles sont détaillées dans l'annexe technique. Nous nous sommes appuyés essentiellement sur Cox,

Ingersoll et Ross [1985] et Brigo et Mercurio [2007] pour la rédaction des sections suivantes.

2.1 Modèle CIR++

2.1.1 Définition

Le modèle CIR++ décrit le processus du taux court instantané r à partir d'une fonction déterministe notée φ et d'un processus CIR noté x , dont le vecteur de paramètres est noté $\alpha = (k, \theta, \sigma)$, défini comme suit :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t); x(0) = x_0$$

et on a :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

où x_0, k, θ et σ sont des constantes positives telles que $2k\theta > \sigma^2$, garantissant ainsi que l'origine est inaccessible pour la variable x , et donc que ce processus reste positif.

La fonction $\varphi(t)$ est notée également $\varphi^{CIR}(t; \alpha)$ dans la suite.

2.1.2 Prix d'une obligation zéro-coupon

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro coupon de maturité T peut être écrit sous la forme :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

où

- $\bar{A}'(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T)$
- $P^M(0, T)$ est le prix de marché de l'obligation zéro-coupon sans risque observée à l'instant 0 pour la maturité T .
- $A(t, T)$ et $B(t, T)$ sont définis dans la section 2.1.4 de l'annexe technique :

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

Le taux d'intérêt composés à l'instant t pour l'échéance T est donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\ln \left(\frac{P^M(0, t)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

Le prix $P(t, T)$ et le taux $R(t, T)$ sont des fonctions des paramètres du modèle CIR à un facteur x et de la valeur initiale x_0 . Nous pouvons donc caractériser la dynamique de $R(t, T)$ sans calculer la fonction $\varphi(t)$.

Par ailleurs, la diffusion des taux d'intérêt composés revient à diffuser le processus x . Celui-ci peut être simulé à partir de la diffusion d'une loi du Khi-deux non-centrée (cf. section 4.2 de l'annexe technique).

Aussi, le taux $R(t, T)$ est une fonction affine de $x(t)$ dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine d'une loi du Khi-deux non-centrée.

2.1.3 Prix d'une option sur une obligation zéro coupon

En reprenant les développements présentés dans la section 2.2.3 de l'annexe technique, on peut noter que le prix à l'instant $t = 0$ d'une option d'achat européenne, à échéance $T > t$ et de prix d'exercice K , sur une obligation zéro coupon de maturité $\tau > T$ est égal à :

$$\begin{aligned} ZBC(t = 0, T, \tau, K) &= P(0, \tau) F_{\chi^2} \left(2\hat{r}[\rho + \psi + B(T, \tau)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 x_0 \exp\{hT\}}{\rho + \psi + B(T, \tau)} \right) \\ &\quad - KP(0, T) F_{\chi^2} \left(2\hat{r}[\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 x_0 \exp\{hT\}}{\rho + \psi} \right) \end{aligned}$$

où

- $\hat{r} = \frac{1}{B(T, \tau)} \left[\ln \left(\frac{A(T, \tau)}{K} \right) - \ln \left(\frac{P^M(0, T)A(0, \tau) \exp\{-B(0, \tau)x_0\}}{P^M(0, \tau)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}} \right) \right]$;
- $\rho = \rho(T - t) = \frac{2h}{\sigma^2(\exp[h(T-t)] - 1)}$;
- $\psi = \frac{k+h}{\sigma^2}$;
- $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$;
- $F_{\chi^2}(\cdot; \nu, \lambda)$ est la fonction de répartition d'une loi Khi-deux non-centrée à ν degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ .

Le prix de l'option de vente est obtenu par la parité put-call et est noté ZBP :

$$ZBP(t = 0, T, \tau, K) = ZBC(t = 0, T, \tau, K) - P(0, \tau) + KP(0, T)$$

2.1.4 Calibrage du modèle CIR++ sur des caps

Notons $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des maturités de paiements des caps ou des floors et t_0 la date d'initialisation de l'option. Soit τ_i la différence entre t_{i-1} et t_i .

Le prix à l'instant $t = 0 < t_0$ du cap de prix d'exercice X , de valeur nominale N et défini sur l'ensemble $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ est donné par :

$$Cap(t = 0, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) \times ZBP \left(0, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i} \right)$$

Le prix du *floor* est donné par :

$$Cap(t = 0, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n (1 + X\tau_i) \times ZBC \left(0, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + X\tau_i} \right)$$

Notons :

- $\beta = (k, \theta, \sigma)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix d'un *cap* i valorisé par le marché via la formule de Black³ ;
- $Cap_i^{CIR++}(\beta)$: le prix d'un *cap* i valorisé par le modèle CIR++.

Les paramètres du modèle CIR++ sont calculés par l'optimisation suivante sur l'ensemble des *caps* retenus pour le calibrage (d est une distance) :

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin}_{\beta} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (Cap_i^{CIR++}(\beta))_i \right) \right)$$

Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués. Cette reconstitution par le modèle de Black a, entre autres, deux avantages. Elle permet en effet de :

- Retrouver les prix observés du marché ayant servi pour le calcul des volatilités implicites ;
- Produire des prix cohérents avec les prix de marché quand les volatilités implicites utilisées sont extraites de modèles de volatilités calibrés sur les volatilités du marché (exemple : reconstruction de la nappe de volatilités sur des dates supplémentaires à partir des volatilités de marché).

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle CIR++ peut être calibré directement sur ces prix de marché en réécrivant la fonction d'optimisation comme suit :

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin}_{\beta} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (Cap_i^{CIR++}(\beta))_i \right) \right)$$

2.1.5 Calibrage du modèle CIR++ sur des *swaptions*

Considérons une *swaption* payeuse avec un taux d'exercice noté X , une échéance T et une valeur nominale N . Elle donne à son titulaire le droit de contracter à un instant $t_0 = T$ un *swap* de taux d'intérêt avec des dates de paiements égaux à $= \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_1 > T$, où il paye un taux fixe X et reçoit le taux variable.

³ Armel & Planchet [2018] détaillent la méthode de valorisation de *caps*, *floors* et *swaptions* par le modèle de Black et présente un processus de calibrage et de simulation d'un GSE destiné à la valorisation du *best-estimate* d'un contrat d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

On note τ_i la fraction d'année de t_{i-1} à t_i , $i = 1, \dots, n$ et soit $c_i = X\tau_i$ pour $i = 1, \dots, n - 1$ et $c_n = 1 + X\tau_n$.

La valorisation de la *swaption* nécessite l'évaluation de la suite déterministe :

$$X_i = \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*}$$

où :

- $\bar{A}(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T)e^{B(t, T)\varphi^{CIR}(t; \alpha)}$;
- r^* le taux à la date T solution de l'équation : $\sum_{i=1}^n c_i \bar{A}(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)r^*} = 1$.

Si on note : $x^* = r^* - \varphi^{CIR}(T; \alpha)$, alors x^* est solution de l'équation $\sum_{i=1}^n c_i \bar{A}'(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)x^*} = 1$ et $X_i = \bar{A}'(T, t_i) \times e^{-B(T, t_i)x^*}$.

Dans la mesure ou le calcul de r^* ne sert qu'à évaluer les X_i l'introduction de x^* permet d'éviter l'évaluation de $\varphi^{CIR}(T)$.

Le prix de la *swaption* payeuse à l'instant $t < T$ est alors donné par :

$$PS(t = 0, T, \zeta, N, X) = N \sum_{i=1}^n c_i \times ZBP(0, T, t_i, X_i)$$

Notons :

- $\beta = (a, \theta, \sigma)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix d'une *swaption* i valorisée par le marché via la formule de Black ;
- $f_i^{CIR++}(\beta)$: le prix d'une *swaption* i valorisée par le modèle CIR++.

Les paramètres du modèle sont déduits par l'optimisation suivante sur l'ensemble des *swaptions* retenues pour le calibrage (d est une distance) :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (f_i^{CIR++}(\beta))_i \right) \right)$$

Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués. Cette reconstitution permet de retrouver des prix cohérents avec les prix observés.

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle de CIR++ peut être calibré directement sur ces prix de marché en réécrivant la fonction d'optimisation comme suit :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (f_i^{CIR++}(\beta))_i \right) \right)$$

2.1.6 Le modèle CIR++ et les taux négatifs

Le modèle CIR++ permet de générer des taux négatifs et de reproduire la courbe de taux anticipée sans introduire de facteur de décalage comme dans les modèles log-normaux.

Si l'on dispose des prix directement observables des *caps*, des *floors* ou des *swaptions*, le modèle CIR++ peut être calibré directement sur ces prix de marché en utilisant les formules fermées présentées ci-dessus.

L'utilisation des volatilités de Black implicites du marché pour le calibrage du modèle CIR++ dans un environnement économique à taux négatifs, nécessite l'utilisation du modèle de Black décalé. Le calibrage du modèle CIR++ sur des *caps*, des *floors* ou des *swaptions* valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites peut être réalisé comme suit (cf. Armel et Planchet [2018]) :

- Etape 1 : calibrage du modèle de Black décalé consistant à définir, pour une courbe de taux sans risque donnée, un facteur de décalage et à extraire les volatilités implicites cohérentes avec ce facteur ;
- Etape 2 : valorisation du produit dérivé par le modèle de Black décalé. Cette étape permet de disposer des prix des actifs dérivés cohérents avec les valeurs observées ;
- Etape 3 : calibrer le modèle CIR++ en minimisant la distance entre les prix de Black et les prix théoriques du modèle CIR++ comme expliqué ci-dessus.

Les paramètres du modèle CIR++ calibrés ainsi sont cohérents avec les valeurs observées et avec la courbe de taux sans risque dans un environnement économique à taux négatifs.

2.1.7 Simulation du modèle CIR++

Nous présentons ici la méthode de simulation du modèle CIR++ que nous avons retenue. Nous avons fait le choix d'une diffusion exacte des taux d'intérêt sans passer par des processus de discrétisation d'Euler, évitant ainsi les problématiques liées à la convergence.

La méthode de simulation se présente comme un processus itératif. Ce processus est présenté dans la suite avec une fréquence annuelle et peut être adapté à d'autres fréquences.

Comme présenté dans la section 2.1.2 de l'annexe technique, si x suit un processus CIR, alors pour tout $t \geq 1$ la variable aléatoire $x(t)$ conditionnellement à $x(t-1)$ a la même loi que la variable $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})/c_1$ où $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})$ suit une loi du Khi-deux non-centrée de paramètres $(v, \lambda_{t,t-1})$ tels que :

- $c_1 = \frac{4k}{\sigma^2(1-\exp(-k))}$;
- $v = 4k\theta/\sigma^2$;
- $\lambda_{t,t-1} = c_1 x_{t-1} \exp(-k)$.

Afin de simuler des réalisations du taux d'intérêt à terme continu $R(t, T)$ vu en $t \geq 1$ pour la maturité T nous avons retenu l'algorithme suivant (cf. Shao [2012] et Malham et Wiese [2013]) :

- Définition d'une valeur initiale x_0 . Ce choix est arbitraire mais n'a aucun impact sur la reproduction de la courbe des taux par termes observée (cf. section 4.2.2 pour une analyse de l'impact de cette valeur initiale) ;

- Simulation d'une loi du $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})$ en suivant la méthode présentée dans la section 3.2 de l'annexe technique ;
- Simulation de $x(t)$ correspondant aux réalisations de $\chi^2(v, \lambda_{t,t-1})$ divisées par c_1 ;
- Simulation de $R(t, T)$ à partir de $x(t)$, des prix des zéro-coupons observés et des paramètres du modèle en utilisant la formule suivante :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\ln \left(\frac{P^M(0, t)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

2.2 Modèle CIR2++

Le modèle CIR2++ est un modèle de taux court instantané à deux facteurs qui consiste à ajouter un calage déterministe à la somme de deux processus CIR indépendants. Ce modèle peut être considéré comme la généralisation naturelle à deux facteurs du modèle CIR++.

Le modèle CIR2++ est de la forme : $r_t = x_t + y_t + \varphi(t)$, où φ est une fonction déterministe permettant de reproduire la courbe des taux initiale observée et x et y sont deux processus CIR indépendants :

$$\begin{aligned} dx(t) &= k_1(\theta_1 - x(t))dt + \sigma_1\sqrt{x(t)}dW_1(t) \\ dy(t) &= k_2(\theta_2 - y(t))dt + \sigma_2\sqrt{y(t)}dW_2(t) \end{aligned}$$

2.2.1 Prix d'une obligation zéro-coupon

En raison de l'indépendance des facteurs, le prix d'une obligation zéro-coupon est directement déduit de la formule analytique du prix du modèle CIR à un facteur de référence. Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit en effet (cf. section 2.3.3 de l'annexe technique) :

$$P(t, T; x(t), y(t), \alpha) = \Phi^\xi(t, T; \alpha) \times P^\xi(t, T; x(t), y(t), \alpha)$$

avec :

- x_0 est la valeur initiale du processus x ;
- y_0 est la valeur initiale du processus y ;
- $\alpha = (k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2, \sigma_2)$ représente l'ensemble des paramètres du modèle CIR2++ ;
- $\Phi^\xi(u, v; \alpha) = \frac{P^M(0, v)P^\xi(0, u; \alpha)}{P^M(0, u)P^\xi(0, v; \alpha)}$;
- $P^M(0, T)$: prix du marché observé du zéro-coupon observé à 0 pour la maturité T ;
- $P^\xi(t, T; x(t), y(t), \alpha) = P^1(t, T; x(t), \alpha_1) \times P^1(t, T; y(t), \alpha_2)$;
- P^1 désigne le prix d'une obligation à zéro-coupon valorisée par le modèle CIR à un facteur. Rappelons que pour un processus CIR à un facteur z de paramètre $\alpha_i = (k_i, \theta_i, \sigma_i)$, le prix d'un zéro-coupon est donné par :

$$P^1(t, T; z(t), k_i, \theta_i, \sigma_i) = A_z(t, T)e^{-B_z(t, T)z(t)}$$

où

$$\begin{aligned} - A_z(t, T) &= \left[\frac{2h_i \exp\left\{\frac{(k_i + h_i)(T-t)}{2}\right\}}{2h_i + (k_i + h_i)(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)} \right]^{\frac{2k_i\theta_i}{\sigma_i^2}} ; \\ - B_z(t, T) &= \frac{2(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)}{2h_i + (k_i + h_i)(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)} ; \\ - h &= \sqrt{k_i^2 + 2\sigma_i^2} ; \\ - z &\in \{x, y\} \text{ et } i = 1 \text{ si } z = x, i = 2 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Le taux d'intérêt composé $R(t, T)$ s'écrit alors :

$$R(t, T) = \frac{-\ln(P(t, T; x(t), y(t), \alpha))}{T - t}$$

donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(B_x(t, T)x(t) + B_y(t, T)y(t) - \ln(\Phi^\xi(t, T; \alpha) \times A_x(t, T) \times A_y(t, T)) \right)$$

Notons que $R(t, T)$ est une fonction affine de $x(t)$ et $y(t)$ dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine de deux variables de lois Khi-deux non-centrées et indépendantes. Cette propriété nous sera utile dans les développements présentés dans la section 2.2.4 de ce papier.

2.2.2 Calibrage du modèle CIR2++ sur des caps et des swaptions

Comme évoqué dans l'annexe technique, section 2.3, le modèle CIR à deux facteurs décalé ne permet pas la valorisation des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Nous disposons néanmoins d'une formule semi-fermée permettant de valoriser les *caps* et les *floors* en calculant numériquement une intégrale-double sous la mesure *T-forward*.

Nous avons choisi ici de valoriser les *caps* et les *swaptions* par des méthodes de Monte-Carlo classiques. Cela consiste à simuler les taux d'intérêt, évaluer les *pay-offs* et calculer l'espérance de ces *pay-offs* actualisés⁴ pour disposer des prix. Le processus de simulation des taux d'intérêt composés est expliqué dans la section 2.2.4.

Notons :

- $\beta = (k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2, \sigma_2)$: les paramètres du modèle ;
- $Prix_i^{black}$: le prix d'un *cap* i (respectivement une *swaption* i) valorisé par le marché via la formule de Black ;

⁴ Le lecteur peut se référer au chapitre 1 de Brigo et Mercurio [2007] qui présente l'écriture des *caps*, *floors* et *swaptions* sous forme de *pay-offs* actualisés.

- $f_i^{CIR2++}(\beta)$: le prix d'un cap i (respectivement une swaption i) valorisé par le modèle CIR2++.

Les paramètres du modèle sont évalués par l'optimisation suivante sur l'ensemble des caps (respectivement une swaptions) retenus pour le calibrage (d est une distance) :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{black})_i, (f_i^{CIR2++}(\beta))_i \right) \right)$$

Les prix valorisés par le modèle de Black à partir des volatilités implicites jouent ici le rôle de prix de marché reconstitués. Cette reconstitution permet de retrouver des prix cohérents avec les prix observés.

Si l'on dispose des prix directement observables, le modèle de CIR2++ peut être calibré directement sur ces prix de marché en réécrivant la fonction d'optimisation comme suit :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \left(d \left((Prix_i^{market})_i, (f_i^{CIR2++}(\beta))_i \right) \right)$$

2.2.3 Le modèle CIR2++ et les taux négatifs

Le modèle CIR2++ permet de générer des taux négatifs et de reproduire la courbe de taux anticipée.

Comme pour le modèle CIR++, le processus de calibrage du modèle CIR2++ sur les prix de marché valorisés par le modèle de Black est le même que celui présenté dans la section 2.1.6.

2.2.4 Simulation du modèle CIR2++

Comme pour le modèle CIR++, nous avons fait le choix d'une méthode qui diffuse exactement le modèle sans passer par des discrétisations d'Euler et évitant ainsi les problématiques liées à la convergence.

Les variables indépendantes x et y suivent un processus CIR (non-décalé). Alors pour tout $t \geq 1$ les variables aléatoire $x(t)$ conditionnellement à $x(t-1)$ et $y(t)$ conditionnellement à $y(t-1)$ ont respectivement les mêmes lois que les variables $\chi^2(v^{(x)}, \lambda_{t,t-1}^{(x)})/c_1^{(x)}$ et $\chi^2(v^{(y)}, \lambda_{t,t-1}^{(y)})/c_1^{(y)}$ où $\chi^2(v^{(z)}, \lambda_{t,t-1}^{(z)})$ suit une loi du khi-deux non-centrée de paramètres $(v^{(z)}, \lambda_{t,t-1}^{(z)})$ tels que :

- $c_1^{(z)} = \frac{4k_i}{\sigma_i^2(1-\exp(-k_i))}$;
- $v^{(z)} = 4k_i\theta_i/\sigma_i^2$;
- $\lambda_{t,t-1}^{(z)} = c_1^{(z)} z_{t-1} \exp(-k_i)$;
- $z \in \{x, y\}$ et $i = 1$ si $z = x$, $i = 2$ sinon.

Afin de simuler des réalisations du taux d'intérêt composé continu $R(t, T)$ vu en $t \geq 1$ pour la maturité T nous avons retenu l'algorithme suivant (cf. Shao [2012] et Malham et Wiese [2013]) :

- Définition des valeurs initiales x_0 et y_0 . Ces choix sont arbitraires mais n'ont aucun impact sur la reproduction de la courbe des taux par termes observée (cf. section 4.2.2 pour une analyse de l'impact de ces valeurs initiales) ;
- Simulation des lois du $\chi^2(v^z, \lambda_{t,t-1}^z)$, $z \in \{x, y\}$, en suivant la méthode présentée dans la section 4.2 de l'annexe technique ;
- Simulation de $x(t)$ et $y(t)$ correspondant, respectivement, aux réalisations de $\chi^2(v^x, \lambda_{t,t-1}^x)$ divisées par c_1^x et $\chi^2(v^y, \lambda_{t,t-1}^y)$ divisées par c_1^y ;
- Simulation du prix du zéro-coupon $P(t, T; x(t), y(t), \alpha)$ à partir de $x(t)$ et $y(t)$, des prix des zéro-coupons observés et des paramètres du modèle (cf. section 2.2.1).
- Simulation de $R(t, T)$ en utilisant la formule suivante :

$$R(t, T) = \frac{-\ln(P(t, T; x(t), y(t), \alpha))}{T - t}$$

Dans cette section nous avons défini les modèles de taux CIR++ et CIR2++ et nous avons présenté les méthodes de calibrage et de simulation.

La section suivante présente les modèles que nous avons retenus pour représenter le prix des investissements en actions et en immobilier. Elle présente également le processus de calibrage de ces modèles et détaille l'approche que nous proposons pour modéliser la structure de dépendance des taux d'intérêt, des rendements des actions et des rendements immobiliers.

3 Comment construire un GSE avec des modèles de taux CIR++ et CIR2++ ?

La génération de scénarios économiques est un processus qui peut être synthétisé en trois étapes (Armel et Planchet [2018]) :

- Choisir les variables économiques à modéliser. Ici ce sont les taux d'intérêt, un indice actions et un investissement en immobilier ;
- Construire les modèles mathématiques des variables d'intérêt. Cela consiste à choisir les modèles qui vont représenter la dynamique individuelle de ces variables et le choix du modèle qui représente la structure de dépendance ;
- Paramétrer : choisir les produits financiers dérivés pour les calibrages, les données, les méthodes d'estimation statistique des paramètres des modèles et des méthodes de validation.

Deux générateurs de scénarios économiques sont construits et étudiés dans ce papier :

- **GSE1** : composé d'un modèle CIR++ pour modéliser les taux d'intérêt sans risque instantanés, un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix du

portefeuille d'actions et un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix d'un investissement en immobilier ;

- **GSE2** : composé d'un modèle CIR2++ pour modéliser les taux d'intérêt sans risque instantanés, un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix du portefeuille d'actions et un modèle de type Black et Scholes pour représenter le prix d'un investissement en immobilier.

La section 2 de ce papier ainsi que l'annexe technique présentent les caractéristiques techniques des modèles CIR++ et CIR2++ ainsi que des méthodes de calibrage et de simulation. Les sections suivantes présentent :

- Les modèles retenus pour l'indice actions et l'investissement en immobilier et leur calibrage ;
- La modélisation de la structure de dépendance.

3.1 Modèles actions et immobilier

Nous reprenons ici la même approche de modélisation et de calibrage, de l'indice actions et de l'indice immobilier, que nous avons proposée dans la section 2.3 de l'annexe technique de l'article Armel et Planchet [2018]. Ces deux indices sont supposés suivre un modèle de type Black-Scholes dont la forme discrétisée de la solution exacte de l'EDS s'écrit sous la forme, ce qui peut être vérifié directement par l'application de la formule d'Itô :

$$S_T = S_t \exp \left(\int_t^T r(u) du - \int_t^T \frac{\sigma_u^2}{2} du + \int_t^T \sigma_u dW_u \right)$$

Nous avons proposé dans l'article Armel et Planchet [2018] une approche de calibrage des volatilités implicites à partir des prix des *calls* observés sur le marché. Cette démarche est retenue ici pour le calibrage de la volatilité de l'indice actions. La volatilité d'un investissement en immobilier est calibrée sur les prix historiques.

3.2 Quelle structure de dépendance ?

3.2.1 Problématique

Le taux d'intérêt composé $R(t, T)$ dont la dynamique est décrite par un modèle CIR++ ou un modèle CIR2++ est une écriture affine de variables aléatoires suivant des lois de Khi-deux non centrées. L'espace généré par les taux d'intérêt, l'indice actions et les investissements en immobilier n'est, de fait, pas gaussien. La description de la structure de dépendance par des corrélations n'est donc pas adaptée.

Aussi, la rationalisation des corrélations entre les bruits browniens des indices actions et immobiliers et des modèles CIR++ et CIR2++ reste complexe. En effet :

- Le processus de taux court instantané n'est pas observable sur le marché et la chronique anticipée du mouvement brownien implicite au modèle n'est pas accessible, et ce, même dans le cas d'une discrétisation d'Euler ;

- Le marché n'offre pas d'information sur le prix futur du sous-jacent action mais donne accès uniquement à une information sur sa variabilité (volatilité implicite). La chronique du mouvement brownien sous-jacent n'est pas accessible ;
- Les investissements en immobilier sont calibrés sur des données historiques et non pas sur des données anticipées ;
- L'estimation de la corrélation implicite en utilisant des produits dérivés (comme pour le modèle BSHW - cf. Laurent et al. [2016] et Haastrecht [2010]) est difficile en pratique dans un cadre multivarié gaussien. En effet, il faudra trouver au moins un produit dérivé liquide dont les sous-jacents sont l'indice actions et l'investissement en immobilier pour estimer leur corrélation.

La démarche consistant à (1) construire les observations des aléas browniens pour (2) déduire leurs corrélations que (3) l'on utilise ensuite pour les simulations, n'est pas adaptée à notre problématique.

Armel et Planchet [2018] présentent par ailleurs une démarche de modélisation de la structure de dépendance pour la génération de scénarios économiques risque-neutres. Cette démarche n'est néanmoins adaptée que pour des modèles de taux normaux ou log-normaux.

À ce jour, nous ne connaissons pas de publications traitant la problématique de la modélisation et du calibrage d'une structure de dépendance non linéaire dans le cadre d'un modèle de génération de scénarios économiques multivariés sous la probabilité risque neutre. Une étude détaillée de l'introduction de structures de dépendance non-linéaires (copules) dans un modèle multivarié calibré sur des données historiques est proposée dans Armel et al. [2011].

Par ailleurs, la génération de scénarios économiques risque-neutres dont la structure de dépendance n'est pas gaussienne pose deux problématiques :

- Le choix du modèle de la structure de dépendance ;
- Le calibrage de ce modèle.

Afin de contourner la complexité que pourrait générer une modélisation non linéaire de la structure de dépendance et afin de pouvoir calibrer notre modèle sur les seules observations dont on dispose (historique des taux, la courbe des taux anticipée, l'historique des prix des sous-jacents et les prix des dérivés), nous avons pensé à construire des transformations, par des fonctions, des facteurs de risque telles que les lois de probabilité des variables transformées uni-variées soient assimilables à des variables gaussiennes. La dépendance de ces variables transformées sera supposée linéaire. Notre démarche est présentée dans la section suivante.

3.2.2 Démarche de construction de la structure de dépendance

La démarche que nous proposons pour modéliser la structure de dépendance s'appuie sur l'idée de trouver des transformations des variables économiques de sorte que les variables transformées soit observables et assimilables à des variables gaussiennes. Cela permettra de calibrer une corrélation historique et de diffuser les variables transformées. Par

inversion des fonctions nous aurons ainsi une diffusion cohérente de nos variables économiques et financières.

Notons d'abord que la variable Λ_t définie ci-dessous est gaussienne. Ses caractéristiques sont accessibles et observables. Ils ne dépendent en effet que de la volatilité (historique pour l'immobilier et implicite pour les actions) :

$$\Lambda_{t,T} = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) + \ln(D(t,T)) = - \int_t^T \frac{\sigma_u^2}{2} du + \int_t^T \sigma_u dW_u$$

$D(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)$ désigne le noyau d'actualisation stochastique.

Supposons maintenant qu'il existe deux fonctions bijectives H_{CIR++} et H_{CIR2++} telles que $H_{CIR++}(R(t,T))$ et $H_{CIR2++}(R(t,T))$ soient assimilables à des variables gaussiennes (cf. section 3.2.3).

Notre démarche propose d'injecter, dans les GSE risque-neutres, les corrélations historiques observées entre les variables suivantes :

- $H_{CIR++}(R_1^{(t)})$ la transformation des taux sans risque historiques sur un an observés à la date t avec l'hypothèse que leur dynamique suit le modèle CIR++ ;
- $H_{CIR2++}(R_1^{(t)})$ la transformation des taux sans risque historiques sur un an observés à la date t avec l'hypothèse que leur dynamique suit le modèle CIR2++ ;
- $\Lambda_{t,t+1}^{action}$ le taux de rendement logarithmique annuel observé à la date $t + 1$ de l'historique de l'indice actions diminué du taux sans risque un an ;
- $\Lambda_{t,t+1}^{immobilier}$ le taux de rendement logarithmique annuel observé à la date $t + 1$ de l'historique de l'indice immobilier diminué du taux sans risque un an.

Deux matrices de corrélation sont calculées :

- $M_1 = \text{corrélation}\left(H_{CIR++}(R_1^{(t)}), \Lambda_{t+1}^{action}, \Lambda_{t+1}^{immobilier}\right)$ la matrice de corrélation utilisée pour le GSE 1 ;
- $M_2 = \text{corrélation}\left(H_{CIR2++}(R_1^{(t)}), \Lambda_{t+1}^{action}, \Lambda_{t+1}^{immobilier}\right)$ la matrice de corrélation utilisée pour le GSE 2.

Nous supposons que ces deux matrices ne dépendent pas du temps, de la maturité et des variables modélisées.

Le processus de simulation des variables corrélées est le suivant :

1. Simulation des taux d'intérêt composé indépendamment des autres variables économiques ;
2. À chaque pas de projection t , calcul de la distribution du bruit gaussien, centré et réduit, sous-jacent à la transformée des taux composés : $H_{CIR++}(R(t, t + 1))$ pour le GSE 1 et $H_{CIR2++}(R(t, t + 1))$ pour le GSE 2 ;
3. Simulation de deux bruits gaussiens corrélés au bruit gaussien calculé dans l'étape 2 suivant la matrice de corrélation M_i ($i=1$ ou 2) par la méthode de Cholesky ;

4. Utilisation de ces bruits gaussiens pour la diffusion des deux variables intermédiaires $\Lambda_{t,t+1}^{action}$ et $\Lambda_{t,t+1}^{immobilier}$;
5. Simulations des indices actions et immobilier en ajoutant $\ln(D(t, t + 1))$ aux variables $\Lambda_{t,t+1}^{action}$ et $\Lambda_{t,t+1}^{immobilier}$.

Cette approche de simulation de l'indice actions et de l'indice immobilier conditionnellement aux trajectoires du taux par termes permet de construire un modèle de génération de scénarios économiques risque-neutre dont la structure de dépendance est cohérente avec les structures de dépendance historiques observées.

La mise en place de cette démarche repose sur l'existence de deux fonctions bijectives H_{CIR++} et H_{CIR2++} telles que $H_{CIR++}(R(t, T))$ et $H_{CIR2++}(R(t, T))$ soient assimilables à des variables gaussiennes. La section suivante présente la méthode de construction de telles fonctions.

3.2.3 Approximation de la distribution du taux d'intérêt par une distribution gaussienne

Le taux d'intérêt $R(t, T)$ dont la dynamique est le modèle CIR++ ou le modèle CIR2++ s'écrit comme une fonction affine de lois Khi-deux non centrées (cf. section 2.1.2 et 2.2.1).

- Pour le modèle CIR++, il existe deux fonctions déterministes $\alpha(t, T)$ et $\beta(t, T)$ telles que :

$$R_{CIR++}(t, T) = \alpha(t, T)\chi^2(v, \lambda_t) + \beta(t, T)$$

- Pour le modèle CIR2++, il existe trois fonctions déterministes $\alpha_x(t, T)$, $\alpha_y(t, T)$ et $\beta_{xy}(t, T)$ telles que :

$$R_{CIR2++}(t, T) = \alpha_x(t, T)\chi^2(v^{(x)}, \lambda_t^{(x)}) + \alpha_y(t, T)\chi^2(v^{(y)}, \lambda_t^{(y)}) + \beta_{xy}(t, T)$$

Rappelons que si la variable z désigne un processus CIR de paramètres (k, θ, σ) alors z suit une loi $\chi^2(v, \lambda_t)/c_t$ avec :

- $\chi^2(v, \lambda_t)$ est une loi du Khi-deux non-centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ_t . Ce dernier paramètre dépend de l'année de projection t ;
- $c_t = \frac{4k}{\sigma^2(1-\exp(-kt))}$;
- $v = 4k\theta/\sigma^2$;
- $\lambda_t = c_t z_0 \exp(-kt)$.

Nous examinons dans la suite deux transformations des lois du Khi-deux non-centrées permettant d'assimiler les taux d'intérêt à des variables gaussiennes : une transformation linéaire et une transformation non- linéaire. Ces deux transformations ont été retenues suite à l'étude des transformations présentées dans la section 4 de l'annexe technique.

3.2.3.1 Transformation linéaire

Cette transformation est présentée au point 1.a de la section 3.3 de l'annexe technique. Elle présente une qualité meilleure que l'approximation linéaire présentée au point 1.b de la même section.

Elle permet d'exprimer une loi du Khi-deux non-centrée en fonction d'une loi normale. En effet, la variable aléatoire

$$G_1(\chi^2(v, \lambda)) = \frac{\chi^2(v, \lambda) - v - \lambda}{\sqrt{2(v + 2\lambda)}}$$

a, approximativement, la même distribution qu'une distribution normale centrée et réduite (cf. annexe technique et Patel et Read [1982]).

Et donc : $\chi^2(v, \lambda) \approx \sqrt{2(v + 2\lambda)}N(0,1) - v - \lambda$.

La qualité de cette transformation est meilleure quand v ou λ sont significatifs.

Nous avons étudié la pertinence de cette approximation sur la base des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ présentés dans la section 4. Les graphiques et les résultats qui suivent s'appuient sur le calibrage du modèle CIR++ sur les caps avec un décalage du modèle de Black de 1 % et une valeur initiale du modèle CIR++ de 1 %.

Nous avons également validé la qualité de cette approximation sur tout l'horizon de projection. Les graphiques, résultats et analyses présentés dans la suite sont réalisés pour deux dates, une date de projection à un an et une autre, à plus long terme, de vingt ans.

Les paramètres calibrés du modèle CIR++, pour un décalage du modèle de Black de 1% et une valeur initiale du modèle CIR++ de 1%, sont : $k = 0,03$; $\theta = 1$ et $\sigma = 0,03$. Dans ce cas :

- Les paramètres de la loi du Khi-deux non-centrée pour la première année de projection sont : $v = 133,26$ et $\lambda = 42,06$;
- Les paramètres de la loi du Khi-deux non-centrée pour la 20^{ème} année de projection sont : $v = 133,26$ et $\lambda = 1,54$.

Posons : $X_t = \chi^2(v, \lambda_t)$ et $Y_t = \sqrt{2(v + 2\lambda_t)}N(0,1) - v - \lambda_t$.

Dans la suite nous présentons les diagrammes Quantile à Quantile (QQ plot) des variables X_t et Y_t (pour $t=1$ an et $t=20$ ans) ainsi que les écarts relatifs de ces quantiles⁵.

⁵ Les quantiles sont évalués sur 990 points allant de l'ordre 0,1 % à l'ordre 99 % avec un pas de 0,1%. Les écarts relatifs sont calculés comme $\frac{(Q_X(p) - Q_Y(p))}{Q_X(p)}$ où $Q_X(p)$ (resp. $Q_Y(p)$) désigne le quantile d'ordre p de X (resp. Y).

Figure 1 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $v = 133,26$ et $\lambda = 42,06$

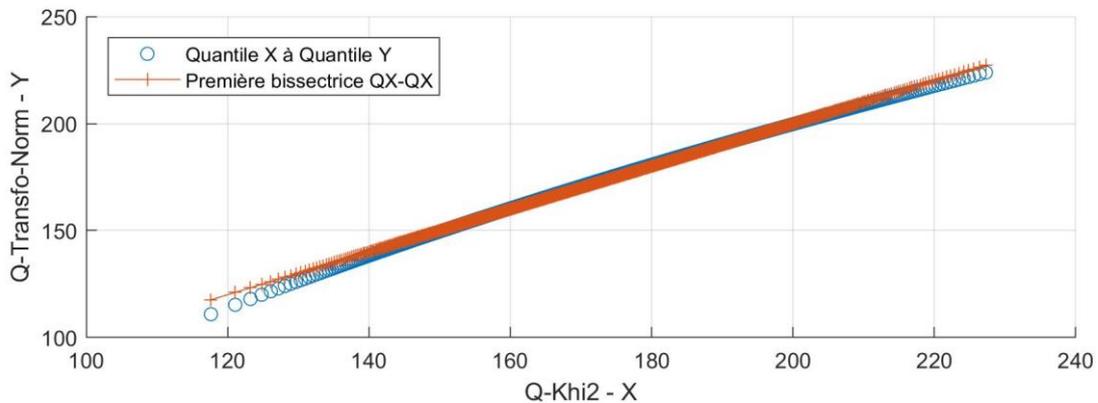
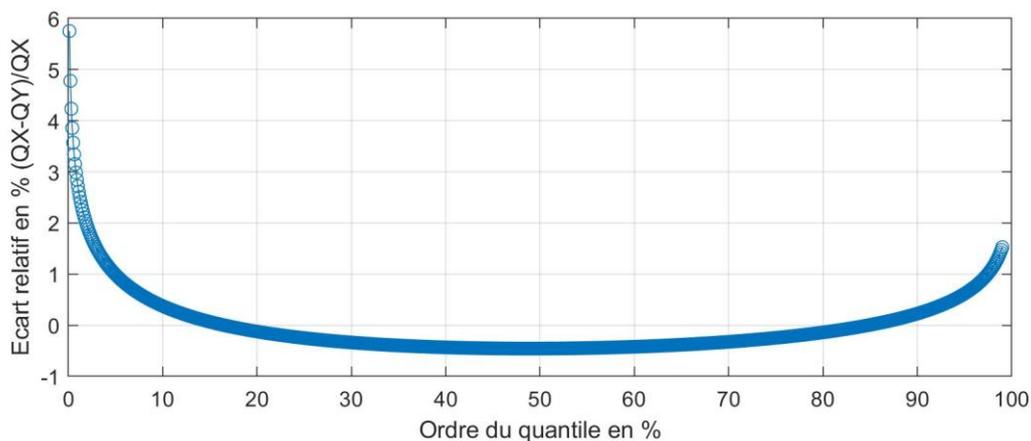


Figure 2 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $v = 133,26$ et $\lambda = 42,06$



Nous observons que la qualité de l'approximation de X_1 par Y_1 est bonne. On peut noter en effet que :

- Le diagramme quantile à quantile est quasiment aligné sur la première bissectrice ;
- Tous les quantiles de X_1 peuvent être assimilés aux quantiles de Y_1 :
 - o Sur tous les ordres de probabilité avec une erreur inférieure à 6 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité supérieurs à l'ordre 0,2 % avec une erreur inférieure à 5 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité supérieurs à 0,7 % avec une erreur inférieure 3% ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité entre 10% et 90 % avec une valeur absolue de l'erreur inférieure à 0,45%.

Figure 3 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=20$; $v = 133,26$ et $\lambda = 1,54$

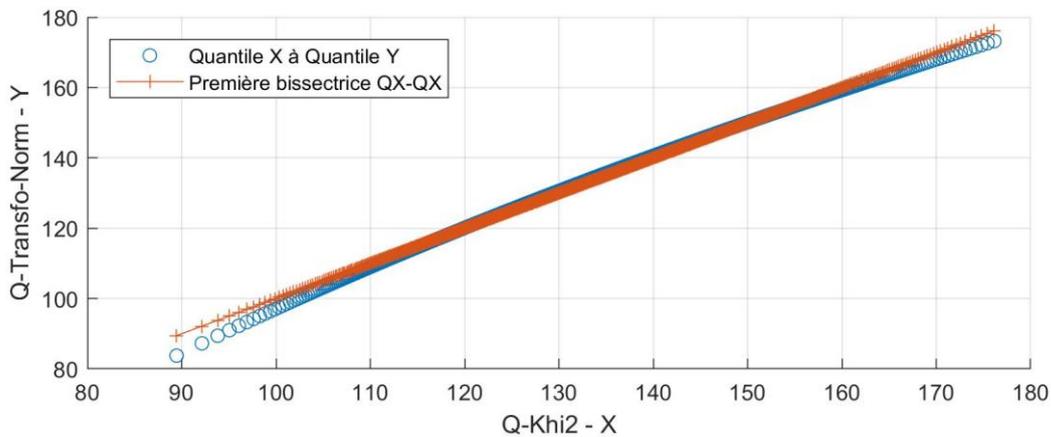
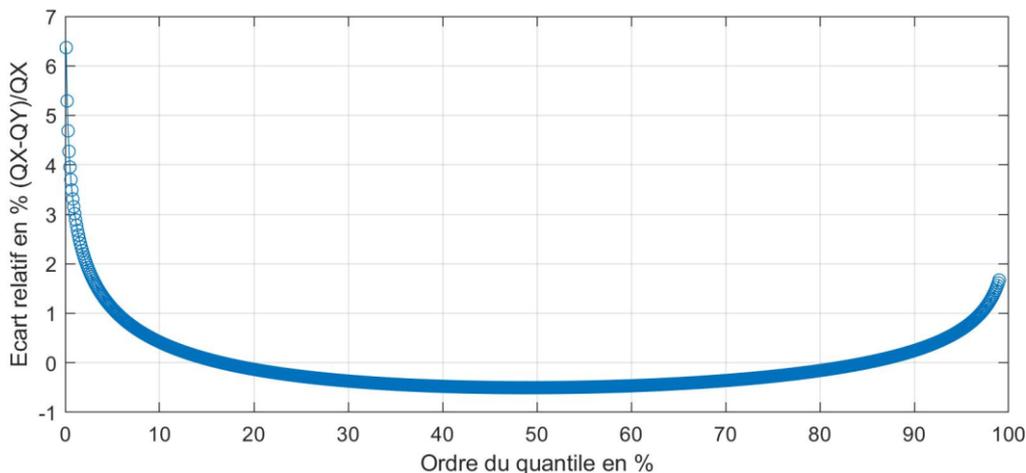


Figure 4 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t pour : $t=20$; $v = 133,26$ et $\lambda = 1,54$



Comme pour le cas de l'horizon de projection de un an, nous observons que la qualité de l'approximation de X_{20} par Y_{20} est bonne. On peut noter en effet que :

- Le diagramme quantile à quantile est quasiment aligné sur la première bissectrice ;
- Tous les quantiles de X_1 peuvent être assimilés aux quantiles de Y_1 :
 - o Sur tous les ordres de probabilité avec une erreur inférieure à 7 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité supérieurs à l'ordre 0,2 % avec une erreur inférieure à 5 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité supérieurs à 1 % avec une erreur inférieure 3 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité entre 10 % et 90 % avec une valeur absolue de l'erreur inférieure à 0,50 %.

La qualité de l'approximation est bonne quand le degré de liberté ou le paramètre de décentralisation sont significatifs (cf. Patel et Read [1982]). Les résultats des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ présentés dans la section 4 montrent que les degrés de liberté ou les paramètres de décentralisation des lois du Khi-deux implicites à ces modèles sont assez

significatifs. Les erreurs d'approximation restent donc faibles et comparables aux erreurs présentées ci-dessus.

Aussi, le taux d'intérêt (CIR++ ou CIR2++) est une fonction affine de lois du Khi-deux. L'écriture de ces lois sous une forme gaussienne, permet l'approximation des taux d'intérêt par des lois gaussiennes.

Pour le modèle CIR++, il existe donc deux fonctions déterministes $\alpha'(t, T)$ et $\beta'(t, T)$ telles que : $R_{CIR++}(t, T) \approx \alpha'(t, T) \times N(0,1) + \beta'(t, T)$ et $N(0,1)$ est une loi normale centrée et réduite.

Pour le modèle CIR2++, il existe ainsi trois fonctions déterministes $\alpha'_x(t, T)$, $\alpha'_y(t, T)$ et $\beta'_{xy}(t, T)$ telles que : $R_{CIR2++}(t, T) \approx \alpha'_x(t, T) \times N_1(0,1) + \alpha'_y(t, T) \times N_2(0,1) + \beta'_{xy}(t, T)$ avec $N_1(0,1)$ et $N_2(0,1)$ sont des lois normales centrées, réduites et indépendantes.

L'intérêt majeur de cette approximation est la possibilité d'approcher les taux d'intérêt par des lois gaussiennes. Le taux d'intérêt peut être assimilé à une variable gaussienne ce qui nous permet de nous placer dans un univers gaussien pour calibrer les matrices de corrélation et pour diffuser les indices actions et immobilier conditionnellement aux taux d'intérêt comme précisé dans la section 3.2.2.

Rappelons que les taux d'intérêt sont diffusés en discrétisation exacte comme décrit dans les sections 2.1.7 et 2.2.4. L'approximation linéaire n'est retenue que pour calibrer et prendre en compte le co-mouvement des indices modélisés.

3.2.3.2 Transformation non linéaire

Cette transformation est présentée au point 2.c de la section 3.3 de l'annexe technique. Elle présente une qualité meilleure que toutes les approximations présentées dans cette section.

Soit G_2 une fonction définie pour tout $0 \leq z$ par :

$$G_2(z) = \frac{\left(\left(\frac{z}{v + \lambda}\right)^h - a\right)}{b}$$

avec :

$$h = 1 - \frac{2(v + \lambda)(v + 3\lambda)}{3(v + 2\lambda)^2}$$

$$a = 1 + \frac{h(h - 1)(v + 2\lambda)}{(v + \lambda)^2} - \frac{h(h - 1)(2 - h)(1 - 3h)(v + 2\lambda)^2}{2(v + \lambda)^4}$$

$$b = \frac{h\sqrt{2(v + 2\lambda)}}{v + \lambda} \left(1 - \frac{(1 - h)(1 - 3h)(v + 2\lambda)}{2(v + \lambda)^2}\right)$$

Notons que G_2 est continue et strictement monotone. Elle est donc bijective de \mathbb{R}^+ vers $G_2(\mathbb{R}^+)$.

La variable aléatoire $G_2(\chi^2(v, \lambda))$ a, approximativement, la même distribution qu'une distribution normale centrée et réduite. Aucune contrainte n'est formulée sur les paramètres v et λ (cf. Patel et Read [1982]).

Cette transformation permet d'exprimer une loi du Khi-deux non-centrée en fonction d'une loi normale centrée et réduite : $\chi^2(v, \lambda) \approx G_2^{-1}(N(0,1))$.

Comme dans la section 3.2.3.1, nous avons étudié la pertinence de cette approximation sur la base des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ présentés dans la section 4. Les graphiques et résultats qui suivent s'appuient sur les mêmes paramètres présentés dans la section 3.2.3.1.

Posons : $X_t = \chi^2(v, \lambda_t)$ et $Y_t = G_2^{-1}(N(0,1))$.

Dans la suite nous présentons les diagrammes Quantile à Quantile (QQ plot) des variables X_t et Y_t (pour $t=1$ ans et $t=20$ ans) ainsi que les écarts relatifs de ces quantiles⁶.

Figure 5 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $v = 133,26$ et $\lambda = 42,06$

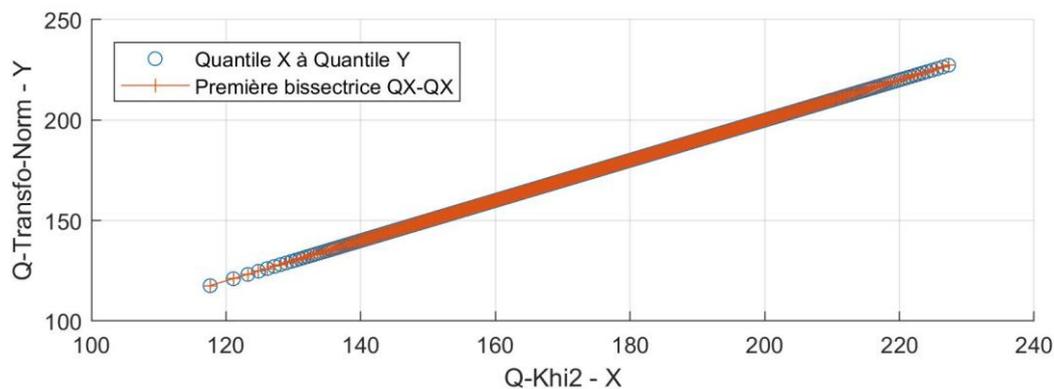
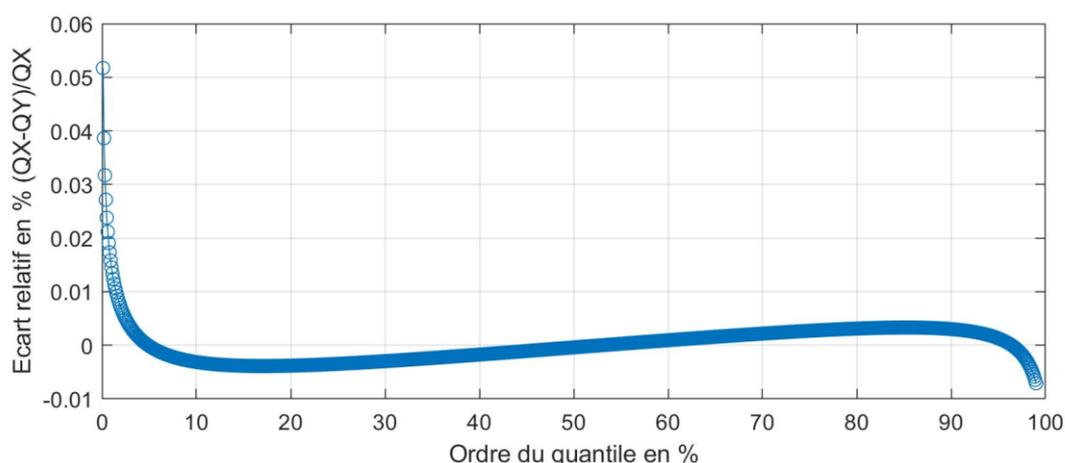


Figure 6 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t pour : $t=1$; $v = 133,26$ et $\lambda = 42,06$



⁶ Les quantiles sont évalués sur 990 points allant de l'ordre 0,1 % à l'ordre 99 % avec un pas de 0,1%. Les écarts relatifs sont calculés comme $\frac{(Q_X(p) - Q_Y(p))}{Q_X(p)}$ où $Q_X(p)$ (resp. $Q_Y(p)$) désigne le quantile d'ordre p de X (resp. Y).

Nous observons que la qualité de l'approximation de X_1 par Y_1 est très bonne. On peut noter en effet que :

- Le diagramme quantile à quantile est parfaitement aligné sur la première bissectrice ;
- Tous les quantiles de X_1 peuvent être assimilés aux quantiles de Y_1 :
 - o Sur tous les ordres de probabilité avec une erreur inférieure à 0,06 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité supérieurs à l'ordre 0,2 % avec une erreur inférieure à 0,04 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité supérieurs à 0,3 % avec une erreur inférieure 0,03 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité entre 1,5 % et 100 % avec une valeur absolue de l'erreur inférieure à 0,01 %.

Figure 7 : diagramme Quantile à Quantile de X_t et de Y_t pour : $t=20$; $v = 133,26$ et $\lambda = 1,54$.

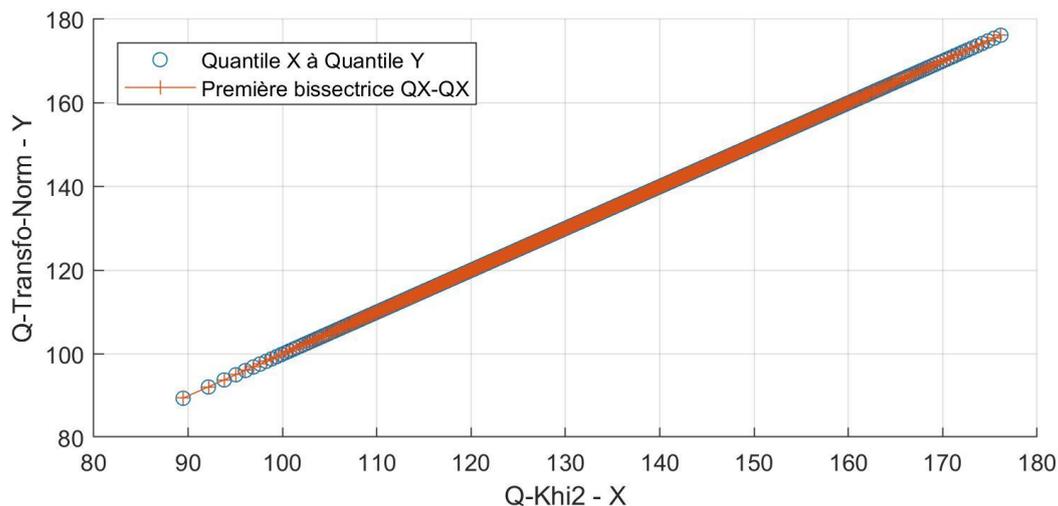
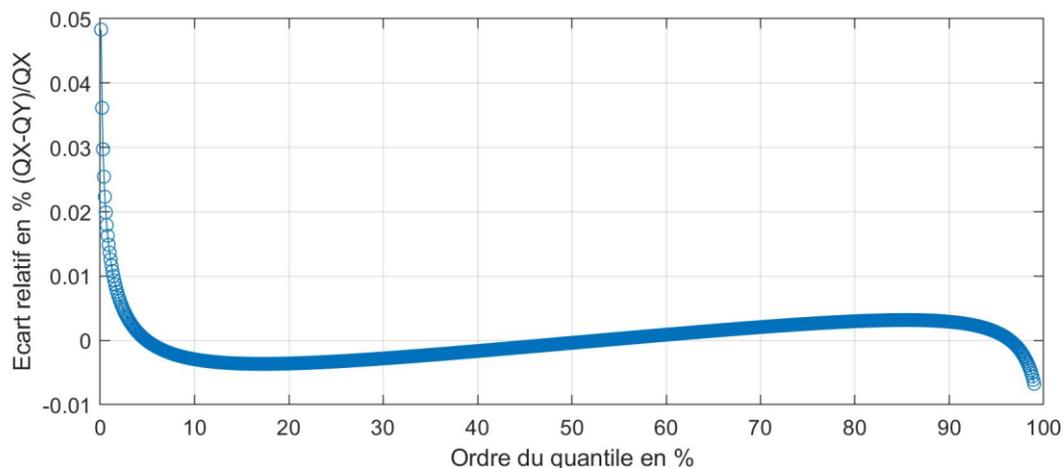


Figure 8 : écarts relatifs entre les quantiles de X_t et de Y_t pour : $t=20$; $v = 133,26$ et $\lambda = 1,54$



Comme pour le cas de l'horizon de projection de un an, nous observons que la qualité de l'approximation de X_{20} par Y_{20} est très bonne. On peut noter en effet que :

- Le diagramme quantile à quantile est quasiment aligné sur la première bissectrice ;
- Tous les quantiles de X_1 peuvent être assimilés aux quantiles de Y_1 :
 - o Sur tous les ordres de probabilité avec une erreur inférieure à 0,05 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité supérieurs à l'ordre 0,3 % avec une erreur inférieure à 0,03 % ;
 - o Sur tous les ordres de probabilité entre 1,5 % et 100 % avec une valeur absolue de l'erreur inférieure à 0,01 %.

L'approximation présentée dans cette section est la meilleure approximation étudiée parmi celles listées dans la section 3.3 de l'annexe technique. Elle est cependant non-linéaire ce qui limite son utilisation au seul modèle CIR++.

En effet, si la dynamique implicite au taux d'intérêt composé est le modèle CIR++, alors on peut écrire, en loi :

$$G_2 \left(\frac{(R_{CIR++}(t, T) - \beta(t, T))}{\alpha(t, T)} \right) = G_2(\chi^2(v, \lambda_t)) \approx N(0,1)$$

Dans ce cas, on peut trouver une bijection transformant le taux d'intérêt composé en variable normale et appliquer l'algorithme présenté dans la section 3.2.2 pour calibrer la structure de dépendance et diffuser les indices actions et immobilier.

Dans le cas du modèle CIR2++, le taux d'intérêt composé est une fonction affine de deux variables aléatoire Khi-deux non-centrées. L'utilisation de la transformation G_2 n'est donc pas adaptée car elle est non linéaire.

Compte tenu de la qualité de l'approximation linéaire présentée à la section 3.2.3.1 et de la simplicité de sa mise en œuvre, nous avons retenu celle-ci pour calibrer la structure de dépendance et diffuser les indices actions et immobilier des deux générateurs GSE1 et GSE2.

Dans les sections 2 et 3 nous avons présenté notre démarche pour calibrer et diffuser les variables économiques et financières dans le cadre de la génération de scénarios économiques risque-neutre où les taux d'intérêt suivent des modèles CIR++ ou CIR2++.

La section suivante présente le résultat des calibrages de ces modèles et se focalise essentiellement sur l'étude des modèles de taux. Une étude de sensibilité du *best-estimate* aux choix de modèles de taux et des données de calibrage y est présentée également.

4 Analyse des résultats et des sensibilités du *best-estimate* de contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français aux modèles de taux

Nous examinons dans cette section les résultats de la mise en œuvre pratique des développements théoriques présentés dans les sections 2 et 3. L'objectif est de présenter :

- Les données et la démarche retenues pour calibrer les générateurs de scénarios économiques étudiés ici (GSE1 et GSE2) ;
- Les résultats des calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ et une analyse de leur qualité ;
- Une étude des sensibilités du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français aux choix de modèles de taux CIR++ et CIR2++ et de leurs calibrages.

4.1 Démarche et données

Les données et la démarche retenues pour calibrer les générateurs de scénarios économiques étudiés ici sont similaires à ceux présentés dans l'article Armel et Planchet [2018]. Nous retenons donc la même convention de calibrage des modèles de taux. Cette convention peut se synthétiser en quatre étapes :

1. **Modèle et instruments financiers dérivés** : choix du modèle de taux et choix des produits dérivés pour son calibrage : *caps, floors, swaptions...*
2. **Prix d'exercice et volatilités implicites** : choix d'un prix d'exercice et extraction des volatilités de marché. Ces volatilités correspondent aux volatilités implicites des produits dérivés choisis à l'étape 1. Elles sont cohérentes avec la courbe de taux sans risque du marché.
3. **Valorisation des produits dérivés** en utilisant la courbe publiée par l'EIOPA : utilisation du modèle de Black (si les volatilités sont implicites à un modèle log-normal) ou du modèle de Bachelier (si les volatilités sont implicites à un modèle normal) pour l'évaluation d'un prix des instruments dérivés en utilisant la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA. Ce sont ces prix qui vont jouer le rôle de « prix de marché » pour calibrer le modèle de taux retenu.
4. **Calibrage du modèle de taux retenu** en minimisant une distance entre : (1) les prix ré-estimés à partir de la courbe de taux EIOPA et les volatilités de marché et (2) les prix théoriques du modèle de taux.

Nous avons également fait les choix suivants :

- Les options retenues pour le calibrage des différents modèles (*calls*, *caps* et *swaptions*) sont ATM⁷ ;
- Les volatilités de marché des *caps* et des *swaptions* utilisées dans le processus de calibrage sont des volatilités log-normales ATM non décalées fournies par Bloomberg (le facteur de décalage est égale à 0) ;
- La courbe de taux sans risque retenue pour les processus de calibrage et de simulation est la courbe de taux fournie par l'EIOPA au 31/12/2017 ;
- L'utilisation de la courbe EIOPA implique la nécessité d'introduire un facteur de décalage non nul pour évaluer les prix des *caps* et des *swaptions* par le modèle de Black ;
- Différents calibrages des modèles CIR++ et CIR2++ ont été réalisés correspondant à différents niveaux du facteur de décalage du modèle de Black. Trois niveaux du facteur de décalage sont testés : 0,4 %, 1 % et 2 %. La valeur de 0,4 % correspond à la valeur absolue arrondie du taux minimal de la courbe de taux sans risque EIOPA du 31 décembre 2017 ;
- Le calibrage et la diffusion des modèles CIR++ et CIR2++ nécessite la définition de valeurs initiales des processus CIR. Plusieurs valeurs sont testées ;
- Pour la projection d'investissements en actions et en immobilier, nous avons retenu des modèles de Black-Scholes à volatilités constantes :
 - La volatilité implicite à un investissement en actions est calibrée sur le prix du *call* ATM sur le CAC 40 de maturité 3 ans ;
 - La volatilité d'un investissement en immobilier correspond à la volatilité historique des rendements de l'indice des prix de vente des logements anciens publié par l'INSEE⁸.

Les sections suivantes présentent les résultats de calibrage et les études de sensibilités du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

4.2 Modèle CIR++

4.2.1 Résultats du calibrage

Le Tableau 1 présente les résultats du calibrage du modèle CIR++ (noté aussi CIR1F dans la suite) sur les prix de *caps* ATM et le Tableau 2 présente les résultats du calibrage sur les prix de *swaptions* ATM.

⁷ Un *cap*, un *floor* ou une *swaption* dont l'ensemble des dates de paiements est $\{T_i\}_{i \in \llbracket \alpha, \beta \rrbracket}$ sont ATM (At The Money) si et seulement si le prix d'exercice K_{ATM} s'écrit $K_{ATM} = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P(t, T_j)}$.

⁸ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/series/102770558>

Le méta-paramètre x_0 du modèle CIR++ représentant la valeur initiale du processus CIR doit être fixée en amont du processus de calibrage. Ce paramètre n'a aucun impact sur la reproduction de la courbe de taux d'intérêt initiale mais peut avoir un impact sur la dynamique du taux d'intérêt diffusé. Comme pour le facteur de décalage du modèle de Black, trois niveaux du méta-paramètre x_0 sont testés : 0,4 %, 1 % et 2 %.

Par la notation $CIR1F(i, j)$ nous désignons le modèle CIR++ calibré sur des caps ou des swaptions avec le $i^{\text{ème}}$ facteur de décalage de Black et le $j^{\text{ème}}$ méta-paramètre du modèle CIR++, tous les deux appartenant à (0,4 % ; 1 % ; 2 % ; 0,4 % ; 1 % ; 2 %).

Tableau 1 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Caps

Paramètres	CIR1F(1,1)	CIR1F(1,2)	CIR1F(1,3)	CIR1F(2,1)	CIR1F(2,2)	CIR1F(2,3)	CIR1F(3,1)	CIR1F(3,2)	CIR1F(3,3)
k	1,95%	2,91%	3,89%	2,20%	3,12%	4,09%	2,62%	3,45%	4,37%
Θ	99,39%	99,22%	99,16%	98,77%	99,98%	99,24%	99,05%	99,34%	99,24%
σ	2,57%	2,10%	1,81%	3,68%	3,06%	2,68%	5,45%	4,69%	4,14%
Erreur totale au carré relative	1,05%	1,19%	1,35%	1,00%	1,15%	1,34%	0,88%	1,03%	1,21%

Tableau 2 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Swaptions

Paramètres	CIR1F(4,1)	CIR1F(4,2)	CIR1F(4,3)	CIR1F(5,1)	CIR1F(5,2)	CIR1F(5,3)	CIR1F(6,1)	CIR1F(6,2)	CIR1F(6,3)
k	2,63%	2,99%	3,45%	3,52%	3,85%	4,31%	4,95%	5,19%	5,50%
Θ	99,95%	99,99%	100,00%	99,97%	99,99%	100,00%	99,90%	99,96%	99,98%
σ	5,76%	5,31%	4,87%	7,05%	6,65%	6,20%	9,53%	9,16%	8,70%
Erreur totale au carré relative	2,92%	3,19%	3,60%	3,45%	3,73%	4,15%	4,89%	5,16%	5,60%

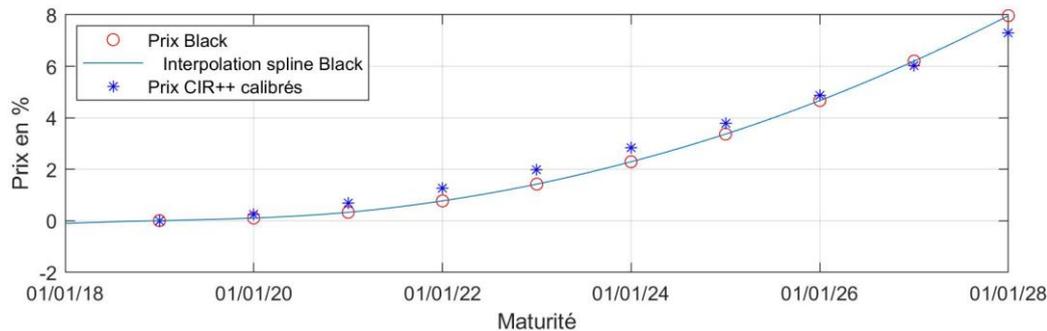
L'erreur totale est calculée comme la somme des erreurs au carré (fonction objectif) divisée par la somme des prix de Black au carré.

Les paramètres calibrés respectent la contrainte de Feller.

En reprenant les résultats de calibrage du modèle de Hull-White et du modèle G2++ présentés dans Armel et Planchet [2018], on peut noter que la qualité de reproduction des prix de caps et de swaptions par le modèle CIR++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White mais moins bonne que celle du modèle G2++. Cela s'explique essentiellement par le nombre de paramètres des modèles : le modèle Hull-White a deux paramètres, le modèle CIR++ a trois paramètres contraints par la relation de Feller et le modèle G2++ a cinq paramètres avec une meilleure capacité à reproduire les volatilités du marché (cf. section 4.3.1). Des conclusions similaires sont présentées dans Brigo et Mercurio [2007].

La Figure 9 présente la qualité du calibrage du modèle CIR++ sur les prix de marché des caps évalués par le modèle de Black décalé de 1 % et un méta-paramètre CIR de 1 %. Nous observons que le modèle CIR++ reproduit assez bien les prix.

Figure 9 : qualité de reproduction des prix de caps par le modèle CIR++



4.2.2 Analyse de l'impact de la valeur initiale du modèle CIR++ sur la volatilité et l'espérance du taux d'intérêt

Le méta-paramètre x_0 du modèle CIR++ représente la valeur initiale du processus CIR. Il doit être fixé en amont du processus de calibrage. Nous avons étudié l'impact du choix de ce paramètre sur les moyennes des taux d'intérêt et leurs volatilités.

La volatilité des taux courts instantanés d'un processus CIR s'écrit⁹ :

$$\text{Var}\{x(t)|F_s\} = \frac{x(s)\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2$$

L'augmentation de x_0 augmente donc systématiquement les volatilités des taux d'intérêt composés¹⁰. L'effet est beaucoup plus prononcé pour les volatilités à court terme. En effet, x_0 n'affecte pas la variance asymptotique du taux court instantané puisque, pour un k positif :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Var}\{x(t)\} = \theta \frac{\sigma^2}{2k}$$

Donc, les volatilités à long terme sont théoriquement moins sensibles aux variations de x_0 et l'augmentation de x_0 a pour effet de réduire la pente initiale de la courbe de volatilité.

Aussi, lors du processus de calibrage, l'augmentation de la valeur initiale x_0 devrait être contrebalancée par la baisse de la dispersion σ ou la hausse de la vitesse de retour à la moyenne k afin de maintenir un niveau de volatilité permettant de reproduire les prix du marché fixés en amont. Ce constat théorique est validé par les résultats pratiques présentés dans le Tableau 1 et le Tableau 2. On notera que pour un facteur de décalage du modèle de Black donné, le paramètre σ est décroissant en fonction de x_0 et le paramètre k est croissant.

⁹ Cf. la section 2.1.2 de l'annexe technique.

¹⁰ Rappelons que les taux composés CIR++ sont des fonctions affines des taux courts instantanés. L'analyse de leur volatilité revient à l'analyse de la volatilité des taux courts instantanés dont la dynamique est un modèle CIR.

Par ailleurs, le modèle CIR++ a été calibré sur dix maturités allant de 1 an à 10 ans. Sur ces maturités, la volatilité des taux d'intérêt, dont les modèles sont calibrés sur les mêmes prix, devraient être sensiblement égales.

Le choix de la valeur initiale n'aura a priori que peu d'impact sur ces volatilités (maturités de 1 an à 10 ans) car le processus de calibrage compensera le niveau de x_0 par σ et k . La valeur initiale aura cependant un impact indirect sur la variance asymptotique via ces paramètres σ et k . Quand x_0 croît, la quantité $\frac{\sigma^2}{2k}$ décroît en effet. On peut donc s'attendre à une baisse de la variance asymptotique ($\theta \frac{\sigma^2}{2k}$) quand x_0 augmente et quand θ reste stable. Ce constat théorique est validé par l'analyse des variances des modèles CIR++ calibrés dont les paramètres sont présentés dans le Tableau 1 et le Tableau 2 et dont une illustration est présentée dans la Figure 11.

Les figures suivantes illustrent l'impact du choix du méta-paramètre sur les caractéristiques distributionnelles du processus CIR++ pour un calibrage sur les prix de marché des caps et des swaptions évalués avec le modèle de Black décalé de 1 %.

Figure 10 : impact du choix du méta-paramètre sur l'espérance des taux composés, calibrage sur caps avec décalage de Black de 1%

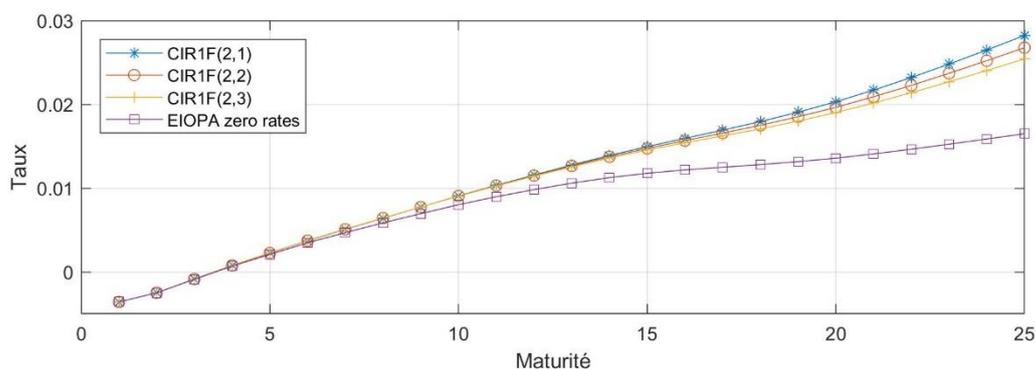


Figure 11 : impact du choix du méta-paramètre sur la volatilité des taux composés, calibrage sur caps avec décalage de Black de 1%

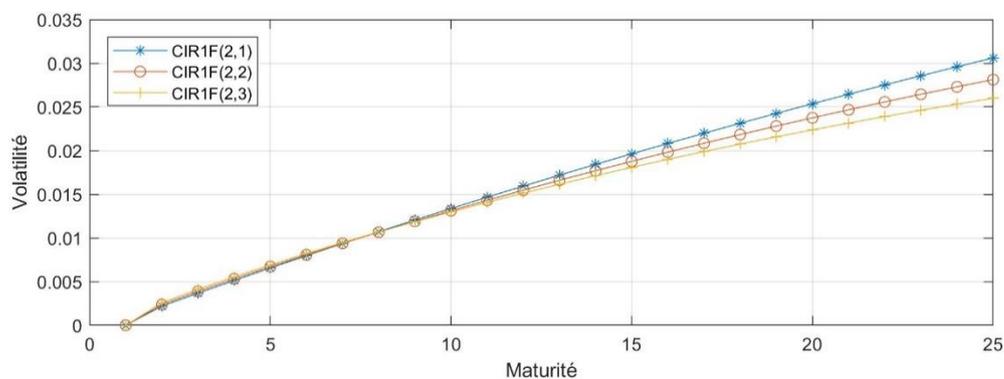


Figure 12 : impact du choix du méta-paramètre sur les noyaux d'actualisation, calibrage sur caps avec décalage de Black de 1%

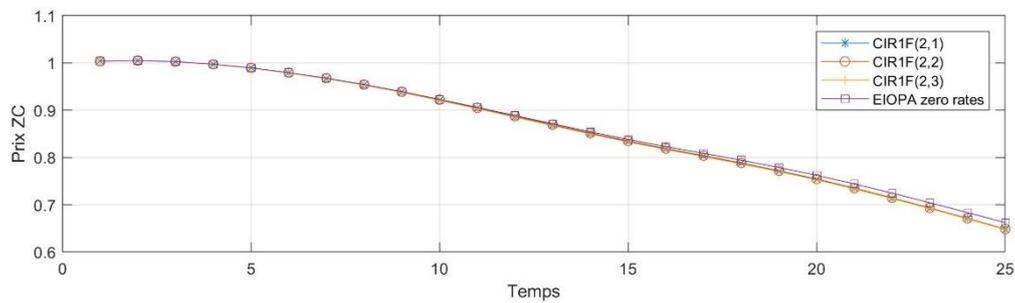


Figure 13 : impact du choix du méta-paramètre sur l'espérance des taux composés, calibrage sur swaptions avec décalage de Black de 1%

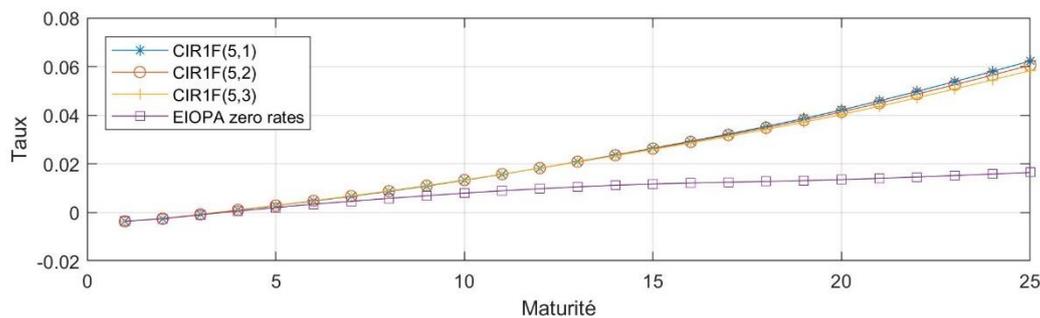


Figure 14 : impact du choix du méta-paramètre sur la volatilité des taux composés, calibrage sur swaptions avec décalage de Black de 1%

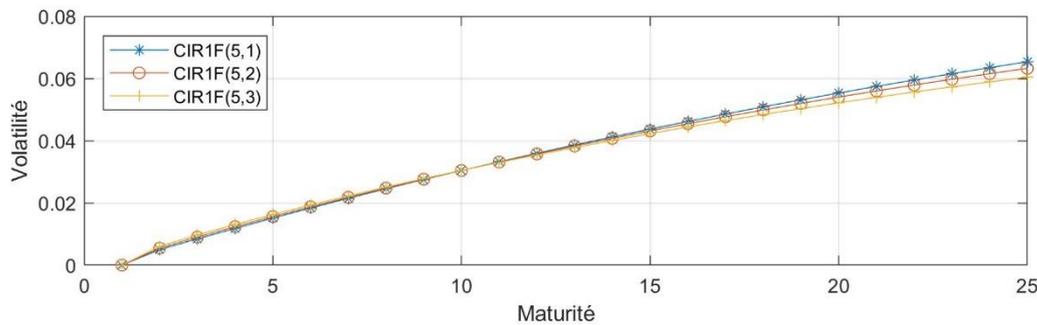
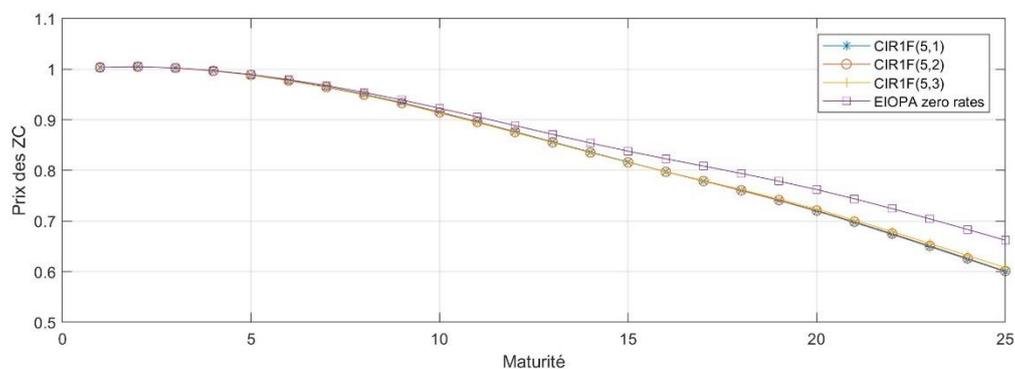


Figure 15 : impact du choix du méta-paramètre sur les noyaux d'actualisation, calibrage sur swaptions avec décalage de Black de 1%



Nous observons que la moyenne et la dispersion du taux d'intérêt composé restent globalement stables pour les trois valeurs initiales étudiées (0,4 % ; 1 % ; 2 %). La moyenne et

la dispersion des prix des zéro-coupons restent stables également. Ce constat est valable pour tous les facteurs de décalage du modèle de Black étudiés.

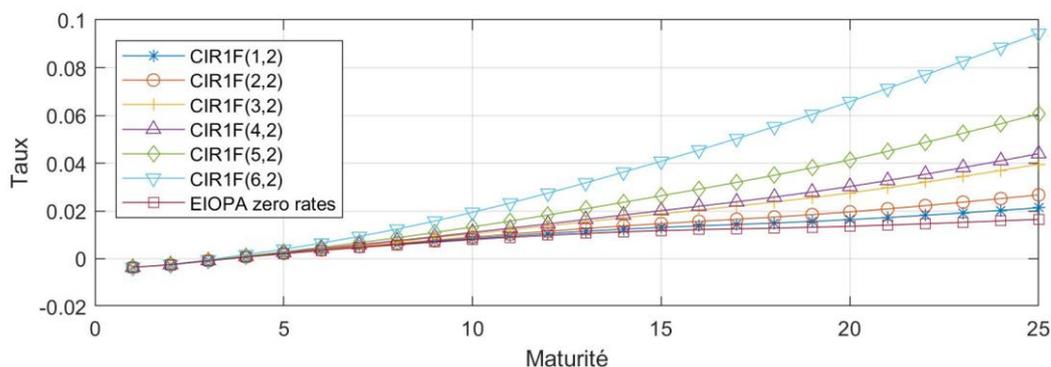
Compte tenu du faible impact de la valeur initiale du modèle CIR, nous nous contentons dans la suite de l'article d'étudier l'impact du facteur de décalage du modèle de Black et nous fixons la valeur initiale des modèles CIR++ et CIR2++ à 1 %.

4.2.3 Sensibilité de la moyenne et de la volatilité des taux d'intérêt au facteur de décalage de Black

La Figure 16 présente la courbe des espérances des taux par termes dont la dynamique est décrite par des modèles CIR++ (de valeurs initiales à 1 %). Les modèles sont calibrés sur des prix de *caps* et de *swaptions* valorisés avec le modèle de Black paramétré avec les trois facteurs de décalage présentés ci-dessus. Ce sont ces modèles CIR++ qui vont être utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* présentée dans la section 4.5.

Nous observons que les espérances peuvent s'écarter significativement de la courbe de taux sans risque centrale. Ce constat est cohérent avec l'expression du taux par termes présentée dans la section 2.1.2.

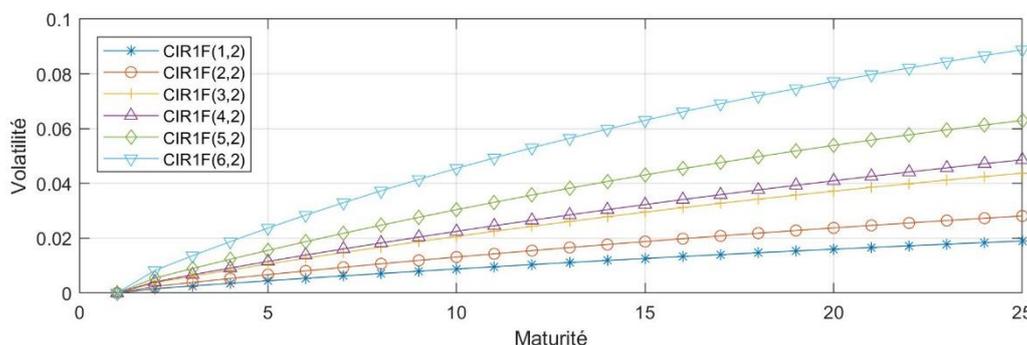
Figure 16 : dynamiques des espérances - calibrages du modèle CIR++ sur les caps et swaptions, méta-paramètre à 1%



La Figure 17 présente l'évolution des volatilités des taux par termes en fonction des maturités. Nous constatons que les écarts entre les espérances et les taux sans risque EIOPA sont d'autant plus importants que les volatilités sont importantes.

Pour chaque type de produit (*caps* et *swaptions*), nous notons que la volatilité est croissante en fonction du facteur de décalage. En effet, le prix de Black étant croissant en fonction du facteur de décalage, le modèle CIR++ « compense » cette hausse de prix par une hausse de la volatilité.

Figure 17 : courbes de volatilité - calibrages du modèle CIR++ sur les caps et swaptions, méta-paramètre à 1%



L'augmentation du paramètre de retour à la moyenne k s'accompagne d'une baisse de la volatilité des taux à terme. L'augmentation des paramètres θ et σ s'accompagne d'une augmentation de cette volatilité.

4.3 Modèle CIR2++

4.3.1 Résultats du calibrage

Le Tableau 3 présente les résultats du calibrage du modèle CIR2++ (noté aussi CIR2F dans la suite) sur les prix de *caps* ATM et de *swaptions* ATM. Ce sont ces modèles CIR2++ qui vont être utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* présentée dans la section 4.5.

Les méta-paramètres x_0 et y_0 du modèle CIR2++ dont la somme représente la valeur initiale du processus CIR2++ sont fixés en amont du processus de calibrage à $x_0 = 0,5\%$ et $y_0 = 0,5\%$. La valeur initiale du processus CIR2++ est donc de 1%.

Par la notation $CIR2F_i$ nous désignons le modèle CIR2++ calibré sur des *caps* ($i \leq 3$) ou des *swaptions* ($4 \leq i$) avec le $i^{\text{ème}}$ facteur de décalage de Black appartenant à (0,4% ; 1% ; 2% ; 0,4% ; 1% ; 2%).

Tableau 3 : résultats du calibrage du modèle CIR2++ sur des caps et des swaptions

Paramètres	Caps			Swaptions		
	CIR2F_1	CIR2F_2	CIR2F_3	CIR2F_4	CIR2F_5	CIR2F_6
k_1	2,39%	2,38%	2,41%	3,00%	3,55%	2,93%
θ_1	101,05%	98,49%	100,00%	100,39%	92,51%	97,08%
σ_1	1,58%	1,62%	3,20%	3,99%	4,89%	7,72%
k_2	2,41%	2,65%	2,41%	3,00%	3,51%	2,96%
θ_2	101,05%	97,14%	100,00%	100,63%	98,29%	101,20%
σ_2	1,58%	2,49%	3,20%	4,00%	5,01%	6,68%
Erreur totale au carré relative	0,83%	0,94%	0,76%	3,25%	3,71%	5,47%

L'erreur totale est calculée comme la somme des erreurs au carré (fonction objectif) divisée par la somme des prix de Black au carré.

Les paramètres estimés respectent la contrainte de Feller.

En reprenant les résultats de calibrage du modèle de Hull-White et du modèle G2++ présentés dans Armel et Planchet [2018], la qualité de reproduction des prix de *caps* et de *swaptions* par le modèle CIR2++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White et du modèle CIR++.

Le nombre de paramètres du modèle CIR2++ est de six, contraints par la formule de Feller. De fait, la reproduction des prix de marché est en général meilleure que le modèle de Hull-White (deux paramètres) et le modèle CIR++ (trois paramètres contraints).

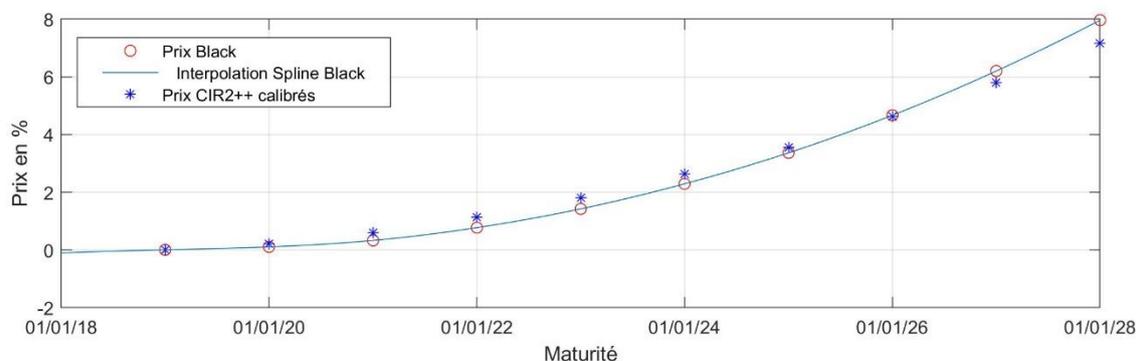
Cependant, on peut noter que le modèle G2++ (cinq paramètres) reproduit mieux les prix que le modèle CIR2++ (six paramètres contraints).

Brigo et Mercurio [2007] font le même constat. Ils le justifient par la présence d'un paramètre de corrélation ρ entre les bruits browniens des deux facteurs du modèle G2++ lui donnant plus de flexibilité. Quand ce facteur de corrélation est strictement négatif (ce qui est le cas dans Armel et Planchet [2018]) le modèle G2++ permet d'avoir une forme en bosse de la volatilité (*volatility hump*) du taux *forward* instantané et reproduit mieux les prix de marché. Cependant, la reproduction des prix est moins bonne quand le paramètre de corrélation est nul : $\rho = 0$ car le modèle ne peut reproduire la forme en bosse de la volatilité.

La situation est analogue dans le cas du modèle CIR2++. La corrélation entre les bruits gaussiens des deux facteurs CIR du modèle CIR2++ est nulle et ne permet pas d'avoir une forme en bosse de la volatilité (*volatility hump*) du taux *forward* instantané. Cette forme est une caractéristique souhaitable du modèle permettant de mieux refléter les prix du marché. Cependant un facteur de corrélation non-nul limiterait significativement les propriétés analytiques du modèle CIR2++.

La Figure 18 présente la qualité du calibrage du modèle CIR2++ (valeur initiale de 1 %) aux prix de marché des *caps* évalués par le modèle de Black décalé par un facteur égal à 1 %. Nous observons que le modèle CIR2++ reproduit assez bien les prix.

Figure 18 : qualité de reproduction des prix de *caps* par le modèle CIR2++

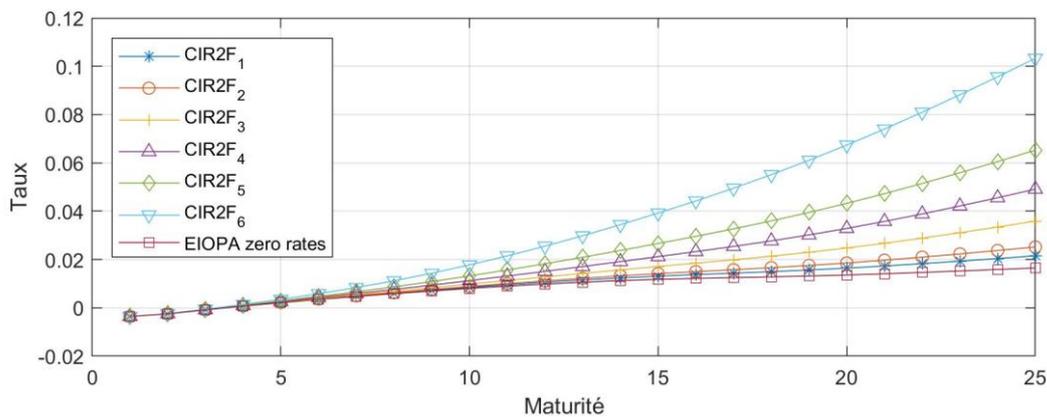


4.3.2 Sensibilité de la moyenne et de la volatilité des taux d'intérêt au facteur de décalage de Black

La Figure 19 présente la courbe des espérances des taux par termes dont le calibrage est présenté dans le *Tableau 3*.

Nous observons que les espérances peuvent s'écarter significativement de la courbe de taux sans risque centrale. Ce constat est cohérent avec l'expression du taux par termes présentée dans la section 2.2.1.

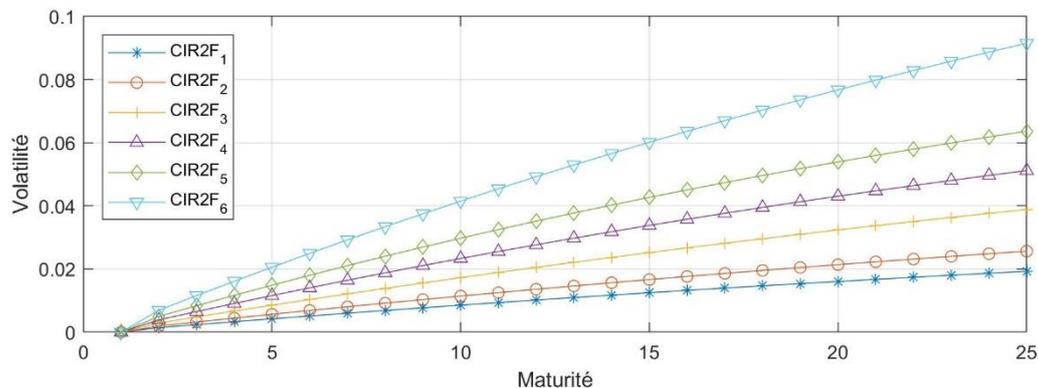
Figure 19 : dynamiques des espérances - calibrages du modèle CIR2++ sur les caps et swaptions



La Figure 20 présente l'évolution des volatilités des taux par termes en fonction des maturités. Nous constatons que les écarts entre les espérances et les taux sans risque EIOPA sont d'autant plus importants que les volatilités sont importantes.

La volatilité est croissante en fonction du facteur de décalage. En effet, le prix de Black étant croissant en fonction du facteur de décalage, le modèle CIR2++ « compense » cette hausse de prix par une hausse de la volatilité.

Figure 20 : courbes de volatilité - calibrages du modèle CIR2++ sur les caps et swaptions



L'augmentation des paramètres de retour à la moyenne k_1 et k_2 s'accompagne d'une baisse de la volatilité des taux par termes. L'augmentation des paramètres θ_1 , θ_2 , σ_1 et σ_2 s'accompagne d'une augmentation de cette volatilité.

4.4 Structure de dépendance et modèles actions et immobilier

Nous avons proposé dans la section 3.2.2 une approche de simulation de l'indice actions et de l'indice immobilier conditionnellement aux trajectoires du taux d'intérêt avec des matrices de corrélations historiques. Les taux historiques utilisés pour construire ces matrices sont les taux Euribor 12 mois. Le tableau suivant présente la matrice de corrélation historique utilisée pour la diffusion des indices.

Tableau 4 : matrice de corrélations

Matrice de corrélation	Taux	Action-Taux	Immobilier-Taux
Taux	100,0%	-53,7%	-3,9%
Action-Taux	-53,7%	100,0%	11,2%
Immobilier-Taux	-3,9%	11,2%	100,0%

La volatilité de l'indice immobilier correspond à la volatilité historique des rendements de l'indice des prix de vente des logements anciens publiés par l'INSEE¹¹ de décembre 2006 à décembre 2016. Cette volatilité est de 3,5 %.

La volatilité du modèle actions est supposée indépendante du temps et a été calibrée sur le prix d'un call ATM de maturité 3 ans sur l'indice CAC 40. Une approche Monte-Carlo a été retenue en intégrant les corrélations présentées ci-dessus pour extraire cette volatilité. Les résultats sont présentés dans le Tableau 5 (le facteur de décalage de Black sous-jacent à chaque modèle de taux est égal à 1 %).

Tableau 5 : volatilité implicite de l'indice actions

Modèle taux	Volatilité implicite actions
CIR++	10,34%
CIR2++	10,25%

Le calibrage des modèles de taux CIR++ et CIR2++ ainsi que le calibrage du modèle actions, du modèle immobilier et de la structure de dépendance, permet de générer les scénarios économiques et de réaliser ainsi des études de sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux CIR++ et CIR2++ et des données de calibrage. Ces études sont présentées dans la suite.

4.5 Impact du choix du modèle de taux sur le *best-estimate*

Dans Armel et Planchet [2019] nous avons retenu trois modèles de taux (Hull & White, G2++ et LMM décalé) représentatifs des choix des acteurs du marché, calibrés sur deux types de produits financiers (*caps* et *swaptions*), pour réaliser des tests de sensibilité du *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéficiaires. Ces modèles respectent notamment les contraintes du régulateur.

¹¹ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/series/102770558>

Le modèle LMM, calibré sur les données observées au 2 janvier 2018, n'a pu être retenu cependant du fait de sa divergence. La version retenue dans les tests de sensibilité est un modèle ajusté et convergent, qui n'est donc plus « *market consistent* ».

Nous complétons dans cette section ces tests de sensibilité en évaluant l'impact du choix des modèles de taux CIR++ et CIR2++ et des données de calibrage sur le *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéficiaires.

Afin d'évaluer ces impacts, nous avons repris ici les mêmes modèles et paramètres d'évaluation des passifs présentés dans Armel et Planchet [2019]. Nous avons donc utilisé le package R SimBEL¹² alimenté par des données réelles modifiées d'un assureur. La valeur de marché de l'actif est de 100M€, la provision mathématique est de 70 M€ et l'horizon de projection est de 20 ans.

Les Tableau 6 et Tableau 7 présentent la sensibilité du *best-estimate* aux modèles CIR++ et CIR2++ ainsi qu'à leurs calibrages *market-consistent*.

Tableau 6 : *best-estimate* par le modèle CIR++ *market-consistent*

Montants en M€	Cap			Swaption		
	CIR1F(1,2)	CIR1F(2,2)	CIR1F(3,2)	CIR1F(4,2)	CIR1F(5,2)	CIR1F(6,2)
Best-estimate net de frais	82,62	82,66	83,03	83,58	83,94	84,67
Frais	7,92	7,89	7,85	7,89	7,83	7,70
Best-estimate	90,54	90,55	90,89	91,47	91,78	92,37

Tableau 7 : *best-estimate* par le modèle CIR2++ *market-consistent*

Montants en M€	Caps			Swaptions		
	CIR2F_1	CIR2F_2	CIR2F_3	CIR2F_4	CIR2F_5	CIR2F_6
Best-estimate net de frais	82,63	82,99	82,85	83,12	84,44	84,32
Frais	7,93	7,94	7,89	7,82	7,86	7,74
Best-estimate	90,56	90,94	90,74	90,94	92,30	92,05

Nous constatons que les *best-estimates* évalués sont peu sensibles aux choix du modèle de taux (CIR++ ou CIR2++), aux facteurs de décalage du modèle de valorisation de Black et aux choix des produits dérivés pour le calibrage. Le Tableau 8 montre en effet que l'écart entre les valeurs minimale et maximale représente 2 % de la valeur moyenne des *best-estimates* évalués en utilisant les modèles CIR++ et CIR2++.

Tableau 8 : comparaison des *best-estimates*

Best-estimate en M€	Ecart-type	Min	Max	Ecart (Max-Min)/Moyenne
Modèle CIR++ et modèle CIR2++	0,77%	90,54	92,37	2,00%
Modèles <i>market-consistent</i> : CIR++, CIR2++, HW & G2++	1,13%	87,48	92,37	5,38%
Tous les modèles yc LMM ajusté	1,06%	87,48	92,37	5,38%

Si l'on reprend les résultats de sensibilités présentés dans Armel et Planchet [2019], il ressort du Tableau 8 que l'impact sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître d'abord assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 5,4 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 7,0 % des provisions mathématiques. Cet impact est cependant substantiel s'il

¹² Voir <http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/C5542E1CF549F21FC12581680046FD2E>

est comparé aux fonds propres. En effet, ces derniers représentent en France en moyenne 5,3 % des provisions mathématiques à fin 2016 (FFA [2017]).

La sensibilité du *best-estimate* aux modèles de taux peut être comparable au niveau des fonds propres et aucun critère indiscutable ne permet à ce stade de préférer l'un ou l'autre des modèles ci-dessus, une fois le modèle LMM exclu du fait de son absence de convergence.

5 Conclusion

Cet article s'intéresse à la problématique de choix de modèles de taux d'intérêt destinés à évaluer le *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfiques dans un environnement économique caractérisé par des taux négatifs. Il s'inscrit dans la continuité des travaux que nous avons publiés : Armel et Planchet [2018] et Armel et Planchet [2019].

Nous avons introduit ici une troisième famille de modèles de taux. Il s'agit des modèles de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross), dont la dynamique intègre une composante en racine carrée du taux court instantané. Nous présentons dans cette section nos conclusions et une comparaison des modèles de taux : CIR++, CIR2++, Hull & White, G2++ et LMM suivant trois axes :

1. La simplicité du calibrage et de la diffusion ;
2. La capacité à reproduire les prix de marché des *caps* et des *swaptions* ;
3. La pertinence du choix du modèle de taux au regard de l'objectif de valorisation des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfiques.

La simplicité du calibrage et de la diffusion

Les modèles normaux Hull et White et G2++ permettent de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Cela rend le processus de calibrage de ces modèles plus performant. On peut en effet disposer d'une meilleure précision du calibrage et d'une meilleure optimisation des ressources informatiques contrairement à un processus de calibrage avec une valorisation par des méthodes de Monte-Carlo.

La diffusion des modèles normaux Hull et White et G2++ est relativement simple car les taux d'intérêt peuvent être discrétisés exactement et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.

Le modèle CIR++ permet également de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. La complexité du processus de calibrage est comparable à celle des modèles normaux et intègre en plus une contrainte sur les paramètres (contrainte de Feller). Le modèle CIR++ peut être diffusé par des formules exactes et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.

Cependant le modèle CIR2++ ne permet pas de valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées. Le processus de calibrage utilise nécessairement des méthodes de valorisation alternatives comme les méthodes de Monte-Carlo ou de génération d'arbres ce qui le rend complexe. Aussi, si la diffusion est réalisée par des discrétisations d'Euler (ce qui n'est pas le cas dans ce papier), la complexité du calibrage augmente compte tenu des contraintes supplémentaires de convergence. Le modèle CIR2++ peut être diffusé par des formules exactes et les prix des zéro-coupons peuvent être évalués par des formules fermées.

Le modèle LMM propose également des formules fermées pour la valorisation des dérivées, ce qui simplifie en partie le processus de calibrage. Ces formules peuvent découler d'approximations ou de la discrétisation d'Euler du modèle (cf. Armel et Planchet [2018]). La diffusion du modèle des taux d'intérêt est réalisée par une discrétisation d'Euler.

La capacité à reproduire les prix de marché des caps et swaptions

Il ressort des résultats de calibrage *market-consistent* présentés ici et dans Armel et Planchet [2018] que le modèle G2++ est le modèle qui reproduit le mieux les prix de marché des *caps* et des *swaptions*.

La qualité de reproduction des prix par le modèle CIR++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White mais moins bonne que celle du modèle G2++. Cela s'explique essentiellement par le nombre de paramètres des modèles.

La qualité de reproduction des prix de *caps* et de *swaptions* par le modèle CIR2++ est meilleure que celle du modèle de Hull-White et du modèle CIR++ mais reste moins bonne que celle du modèle G2++. Le modèle G2++ permet en effet d'avoir une forme en bosse de la volatilité (*volatility hump*) du taux *forward* instantané et reproduit mieux les prix de marché. Cette propriété est souhaitable quand le marché présente de fortes volatilités (cf. Brigo et Mercurio [2007]).

Il ressort du calibrage du modèle LMM que ce modèle reproduit très bien les volatilités de marché. Les paramètres issu du calibrage *market-consistent* ne peuvent être retenus cependant du fait de la divergence du modèle.

La pertinence du choix du modèle de taux au regard de l'objectif de valorisation des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices

L'impact du choix de modèles de taux sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître d'abord assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 5,4 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 7,0 % des provisions mathématiques.

Cet impact est substantiel s'il est comparé aux fonds propres et aucun critère indiscutable ne permet à ce stade de préférer l'un ou l'autre des modèles ci-dessus, une fois le modèle LMM exclu du fait de son absence de convergence.

Par ailleurs, Armel et Planchet [2019] montrent que la capacité d'un modèle de taux à reproduire les prix de *floorlets* et par extension, les prix de *caps*, peut être considérée comme un critère de choix des modèles de taux destinés à valoriser les passifs des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices.

Les modèles de taux de type CIR (CIR++ et CIR2++) et les modèles gaussiens (Hull et White et G2++) reproduisent avec une erreur acceptable les prix de marché des *caps*. Ils présentent également un cadre de modélisation répondant à l'ensemble des contraintes imposées par le superviseur et permettent de gérer des taux négatifs sans introduire des facteurs de décalage arbitraires comme dans les modèles log-normaux.

Enfin, le modèle G2++ est simple à calibrer et à diffuser. Il est le modèle qui reproduit le mieux les prix de marché des *caps*. Il présente également des propriétés analytiques plus étendues que le modèle CIR2++.

6 Références

- Armel K., Planchet F., Kamega A. [2011] « [Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ?](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°22.
- Armel K., Planchet F. [2018] « [Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ?](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 85 (1-2).
- Armel K., Planchet F. [2019] « [Comment définir la qualité d'un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le best-estimate d'un contrat d'épargne ?](#) », *Bankers, Markets and Investors*, n°157, June 2019.
- Brigo D., Mercurio F. [2007] « [Interest Rate Models - Theory and Practice](#) ». 2nd Edition. Springer.
- Cox, J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. [1985] « [A theory of the term structure of interest rates](#) », *Econometrica* 53(2), 385–407.
- FFA (Fédération Française de l'Assurance) [2017] « [Bilan de l'année 2016 et perspectives de l'année 2017](#) », conférence de presse.
- Haastrecht A. [2010] « [Pricing Long-term Options with Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rates](#) », Phd Thesis, Published by Wohrmann Print Service, Zutphen, The Netherlands.
- Hull J., White A. [1990] « [Pricing interest rate derivative securities](#) », *Review of Financial Studies* 3, 573–92.
- Jamshidian F. [1989] « [An Exact Bond Option Pricing Formula](#) », *The Journal of Finance* 44, 205-209.
- Laurent J.P., Norberg R., Planchet F. (editors) [2016] « [Modelling in life insurance – a management perspective](#) », EAA Series, Springer.
- Malham S.J.A., Wiese A. [2008] « [Chi-square simulation of the CIR process and the Heston model](#) », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 16(3).
- Patel J.K., Read C.B. [1982] « [Handbook of the normal distribution](#) », MARCEL DEKKER, INC.
- Shao A. [2012] « [A fast and exact simulation for CIR process](#) », A dissertation presented to the Graduate School of the University of Florida in partial fulfilment of the requirements for the degree of doctor of philosophy.
- Shiu E., Yao Y. [1999] « [Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models](#) » *Proceedings of AFIR Colloquim, Tokyo*. 407–418 (1999).

Vasicek O. [1977] « [An Equilibrium Characterization of the Term Structure](#) », *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.