ANNEXE DE L'ARTICLE

UTILISATION DE MODÈLES DE TAUX DE TYPE CIR POUR ÉVALUER LA VALEUR ÉCONOMIQUE DES CONTRATS D'ÉPARGNE PARTICIPATIFS ?

Version 2.0 du 14/11/2020

KAMAL ARMEL[1] FRÉDÉRIC PLANCHET[2]

Ce document est rattaché à l'article Armel et Planchet [2020] : « Peut-on utiliser des modèles de taux de type CIR pour évaluer le *best-estimate* des contrats d'épargne participatif ? ». Il présente :

- Quelques généralités sur la famille des modèles de taux à structure par termes affine et leur extension par des fonctions déterministes afin de prendre en compte la courbe de taux initiale ;
- La dynamique et les propriétés analytiques (1) des modèles CIR à un facteur de référence et généralisé (modèle CIR++) ainsi que (2) des modèles CIR à deux facteurs de référence et généralisé (modèle CIR2++) ;
- La définition et les propriétés des lois Khi-deux non-centrées.

[1]Kamal Armel est actuaire qualifié et fondateur d'ARMEL Consulting. Contact : kamal.armel@armelconsulting.fr
[2]Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé à PRIM'ACT. Contact : frederic@planchet.net

Contenu

1 Modèles de taux à structure par termes affine

Le succès de modèles tels que celui de Vasicek [1977] et celui de Cox, Ingersoll et Ross [1985] est principalement dû à leur capacité à évaluer analytiquement les obligations et les options sur des obligations.

La dynamique du modèle de Vasicek ($dr\ (t)\ =\ k\ [\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$) est intéressante d'un point de vue analytique. L'équation est linéaire et peut être résolue explicitement. La distribution du taux court est gaussienne et les prix d'obligations et de certaines options peuvent être exprimés sous une forme analytique.

Par ailleurs, l'approche d'équilibre général proposée par Cox, Ingersoll et Ross [1985] a introduit un terme en « racine carrée» dans le coefficient de diffusion de la dynamique du taux court instantané proposé par Vasicek [1977].

Le modèle résultant est une référence depuis de nombreuses années en raison de sa facilité d'analyse et du fait que, contrairement au modèle de Vasicek [1977], le taux court instantané est toujours positif. La dynamique du modèle sous la mesure risque-neutre s'écrit :

$$dr(t) = k\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

où $r(0) = r_0$ et r_0, k, θ, σ sont des constantes positives.

Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller :

$$2k\theta > \sigma^2$$

Bien qu'ils soient intéressants d'un point de vue analytique, la structure par termes initiale des taux produite par ces modèles ne correspond pas nécessairement à celle observée sur le marché, et ce, quel que soit le choix des paramètres.

Afin que ces modèles reproduisent la structure par termes des taux d'intérêt, la littérature financière propose au moins deux possibilités :

- Rendre les paramètres dépendants du temps (extension de type Hull & White, cf. section 2.1.8.1) ;
- Introduire additivement une fonction déterministe (cf. section 1.2).

Notons par ailleurs que les modèles de Vasicek [1977] et CIR sont des modèles dont la structure par termes est affine. Afin de faciliter la lecture de l'article Armel et Planchet [2020], nous présentons dans la suite quelques généralités sur la famille des modèles de taux à structure par termes affine et leur extension par des fonctions déterministes afin de prendre en compte la courbe de taux initiale.

Nous nous sommes appuyés essentiellement sur Brigo et Mercurio [2007] pour la rédaction de cette section.

1.1 Modèles affines : définition et généralités

Le taux d'intérêt au comptant composé continu évalué à la date t pour la maturité T, noté $R(t,T)$ correspond au taux constant auquel un investissement de $P(t,T)$ unités monétaires à la date t s'accumule de manière continue pour atteindre une unité de monnaie à la date T. Si $P(t,T)$ désigne le prix d'une obligation zéro-coupon évaluée à la date t arrivant à maturité à la date T, alors : $P(t,T) = e^{-R\,(t,T)(T-t)}$.

Les modèles de taux dont la structure par termes est affine sont des modèles où le taux d'intérêt composé continu au comptant évalué à la date t pour la maturité T est une fonction affine du taux court instantané au comptant, noté $r(t)$:

$$R(t,T) = \alpha(t,T) + \beta(t,T)r(t)$$

où α et β sont des fonctions déterministes.

Cette condition est toujours satisfaite quand le prix de l'obligation zéro-coupon évaluée à la date t arrivant à maturité à la date T s'écrit :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

où A et B sont des fonctions déterministes.

Il suffit en effet de prendre :

- $\alpha(t,T) = -ln\big(A(t,T)\big)/(T-t)$;
- $\beta(t,T) = B(t,T)/(T-t)$.

Supposons que le taux court instantané suit la dynamique suivante :

$$dr(t) = b(t,r(t))dt + \sigma(t,r(t))dW(t)$$

Pour que le modèle caractérisé par cette dynamique soit affine, il suffit que les fonctions déterministes b et σ^2 soient affines.

Si les coefficients b et σ^2 sont de la forme :

$$\begin{cases} b(t,x) = \lambda(t) \times x + \eta(t) \\ \sigma^2(t,x) = \gamma(t) \times x + \delta(t) \end{cases}$$

où λ, η, γ et δ sont des fonctions déterministes appropriées, alors le modèle a une structure par termes affine.

Les fonctions A et B (respectivement α et β) peuvent être obtenues à partir des coefficients λ, η, γ et δ par la résolution des équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t,T) + \lambda(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B(t,T)^2 + 1 = 0 \; et \; B(T,T) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\ln\big(A(t,T)\big)\right] - \eta(t)B(t,T) + \frac{1}{2}\delta(t)B(t,T)^2 = 0 \; et \; A(T,T) = 1$$

Dans le cas particulier du modèle CIR les équations ci-dessus admettent une solution et il suffit de prendre :

$$\begin{cases} \lambda(t) = -k \\ \eta\ (t) = k\theta \\ \gamma(t) = \sigma^2 \\ \delta\ (t) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, l'affinité dans les coefficients se traduit par l'affinité de la structure par termes. L'inverse est également vrai dans le cas où les fonctions b et σ^2 sont homogènes : $b(t,x) = b(x)$ et $\sigma(t,x) = \sigma(x)$.

En effet, il est possible de prouver que si un modèle a une structure par termes affine et des coefficients homogènes ($b(t,x) = b(x)$ et $\sigma(t,x) = \sigma(x)$), alors ces coefficients sont nécessairement affines en fonction de x :

$$\begin{cases} b\ (x) = \lambda x + \eta \\ \sigma^2(x) = \gamma x + \delta \end{cases}$$

pour des constantes appropriées λ, η, γ et δ.

1.2 Extension des modèles de taux à structure par termes affine par des fonctions déterministes

Cette section présente une méthode d'extension des modèles de taux court instantanés à structure par termes affine permettant de reproduire la courbe de taux observée tout en préservant les caractéristiques analytiques du modèle de référence.

1.2.1 Notations et hypothèses

Soit x^α un processus stochastique dont les coefficients sont homogènes et dont la dynamique sous une mesure donnée Q^x s'écrit :

$$dx_t^\alpha = \mu(x_t^\alpha; \alpha)dt + \sigma\ (x_t^\alpha;\ \alpha)dW_t^x$$

où W^x est un mouvement brownien standard, x_0^α est un nombre réel donné, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in IR^n, n \geq 1$, est un vecteur de paramètres, et μ et σ sont des fonctions réelles appropriées.

Nous supposons que le processus x^α décrit l'évolution du taux d'intérêt *spot* instantané sous la mesure Q^x. Soit F_t^x la sigma-algèbre générée par $\{x_i^\alpha\}_{i \leq t}$.

Le prix à l'instant t, noté $P^x(t,T)$, d'une obligation zéro coupon de maturité T est :

$$P^x(t,T)\ =\ E^{Q^x}\left(exp\left[-\int_t^T x_s^\alpha ds\right]|F_t^x\right)$$

Nous supposons également qu'il existe une forme analytique, une fonction réelle notée Π_x, définie sur un sous-ensemble approprié de IR^{n+3}, telle que $P^x(t,T) = \Pi^x(t,T,x_t^\alpha;\ \alpha)$.

Les modèles de Vasicek [1977] et de Cox-Ingersoll-Ross [1985] sont des exemples de modèles de taux pour lesquels une telle fonction existe.

Soit r_t le taux court instantané sous la mesure risque-neutre Q défini par :

$$r_t = x_t + \varphi(t;\alpha), t \geq 0$$

où x est un processus stochastique qui a sous Q la même dynamique que x^α sous Q^x et φ est une fonction déterministe, dépendant du vecteur de paramètres (α, x_0), intégrable sur des intervalles fermés.

Le processus r dépend des paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_0$ et la fonction φ peut être choisie de manière à produire la structure par termes des taux d'intérêt.

Notons F_t la sigma-algèbre générée par $\{x_i^\alpha\}_{i \leq t}$.

Si φ est différentiable, l'équation différentielle stochastique du taux court instantané s'écrit :

$$dr_t = \left[\frac{d\varphi(t;\alpha)}{dt} + \mu(r_t - \varphi(t;\alpha);\alpha)\right]dt + \sigma(r_t - \varphi(t;\alpha);\alpha)dW_t$$

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1, dans le cas de coefficients homogènes, une structure par termes affine des taux à court terme est équivalente à une structure affine des coefficients de dérive et de diffusion au carré. Il s'ensuit que si le modèle de référence a une structure par termes affine, le modèle étendu l'est également. Nous pouvons alors anticiper que les modèles décalés de Vasicek (équivalent au modèle de Hull et White) et de CIR (CIR ++) sont des modèles affines.

1.2.2 Reproduction de la courbe des taux initiale

En remplaçant x_t par $r_t - \varphi(t;\alpha)$ on peut prouver que le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit :

$$P(t,T) = exp\left(-\int_t^T \varphi(s;\alpha)ds\right)\Pi^x(t,T,r_t - \varphi(t;\alpha);\ \alpha)$$

Soit $f^x(0,t;\alpha)$ le taux *forward* instantané à l'instant 0 pour une échéance t associée au prix de l'obligation $P^x(0,t)$, alors :

$$f^x(0,t;\alpha) = -\frac{\partial \ln\left(P^x(0,t)\right)}{\partial t} = -\frac{\partial \ln\left(\Pi^x(0,t,x_0;\ \alpha)\right)}{\partial t}$$

Soit $f^M(0,t)$ le taux *forward* instantané du marché observé à la date 0 pour la maturité t :

$$f^M(0,t) = -\frac{\partial \ln\left(P^M(0,t)\right)}{\partial t}$$

alors, le modèle reproduit la structure par terme observée des taux d'intérêt si et seulement si :

$$\varphi\ (t;\ \alpha) = \varphi^*(t;\ \alpha) = f^M(0,t) - f^x(0,t;\alpha)$$

C'est-à-dire :

$$exp\left(-\int_t^T \varphi(s;\alpha)ds\right) = \Phi^*(t,T,x_0;\ \alpha) = \frac{\mathrm{P^M(0,T)}}{\Pi^{\mathrm{x}}(0,\mathrm{T},\mathrm{x_0};\ \alpha)}.\frac{\Pi^{\mathrm{x}}(0,\mathrm{t},\mathrm{x_0};\alpha)}{\mathrm{P^M(0,t)}}$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon à l'instant t est donné par :

$$P(t,T) = \Pi(t,T,r_t;\alpha)$$

où $\Pi(t,T,r_t;\alpha) = \Phi^*(t,T,x_0;\alpha)\Pi^x(t,T,r_t - \varphi^*(t;\ \alpha);\alpha)$.

1.2.3 Formules explicites pour valoriser les options européennes

L'extension proposée dans la section 1.2.1 est encore plus intéressante lorsque le modèle de référence propose des formules analytiques pour valoriser les options européennes sur des obligations zéro-coupons. Le modèle généralisé peut préserver la possibilité d'évaluer les prix des options par des formules fermées au moyen de facteurs de correction analytiques fonctions de φ.

Le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne de maturité T, de prix d'exercice K sur une obligation zéro-coupon de maturité τ est :

$$V^x(t,T,\tau,K) = E^x\left\{exp\left[-\int_t^T x_s^\alpha\, ds\right](P^x(T,\tau) - K)^+ \middle| F_t^x\right\}$$

Supposons qu'il existe une forme analytique, une fonction réelle explicite notée Ψ^x, définie sur un sous-ensemble approprié de IR^{n+5}, telle que

$$V^x(t,T,\tau,K) \;=\; \Psi^x(t,T,\tau,K,x_t^\alpha;\alpha)$$

Les modèles de Vasicek [1977] et de Cox-Ingersoll-Ross [1985] sont des exemples de modèles de taux court pour lesquels une telle fonction existe.

Dans le cadre du modèle étendu décrit dans la section 1.2.1, le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne de maturité T, de prix d'exercice K sur une obligation zéro-coupon de maturité τ est :

$$\begin{aligned} &ZBC(t,T,\tau,K) \\ &\qquad = \exp\left(-\int_t^\tau \varphi\,(s;\ \alpha)ds\right) \\ &\qquad \cdot \Psi^x\left(t,T,\tau,Kexp\left[\int_T^\tau \varphi(s;\ \alpha)ds\right], r_t - \varphi(t;\alpha);\ \alpha\right) \end{aligned}$$

Le prix d'une option de vente européenne peut être obtenu via la parité *call-put*.

Les prix des *caps* et des *floors* peuvent également être évalués analytiquement.

Par ailleurs, si la décomposition de Jamshidian [1989] pour évaluer les *swaptions*, peut être appliquée au modèle de référence, la même décomposition est également applicable au modèle étendu. Les *swaptions* peuvent donc être évaluées par des formules analytiques.

2 Modèles CIR : définition, propriétés et extensions

Cette section présente la dynamique et les propriétés analytiques :

- Des modèles CIR à un facteur de référence et généralisé (modèle CIR++) ;
- Des modèles CIR à deux facteurs de référence et généralisé (modèle CIR2++).

Nous nous sommes appuyés essentiellement sur Cox, Ingersoll et Ross [1985] et Brigo et Mercurio [2007] pour la rédaction de cette section.

2.1 Modèle CIR de référence

2.1.1 Dynamique du modèle

Le modèle CIR généralise le modèle de Vasicek [1977] et introduit un terme en racine carrée du taux court instantané dans la dynamique permettant au modèle de produire des taux d'intérêt positifs.

L'équation différentielle du modèle sous la mesure risque-neutre Q est :

$$dr(t) = k\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

avec $r(0) = r_0$ et k, θ et σ sont des constantes positives.

Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller :

$$2k\theta > \sigma^2$$

2.1.2 Solution de l'équation différentielle

Notons p_Y la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Y, alors la densité de $r(t)$ conditionnellement à $r(s)$ s'écrit :

$$p_{r(t)|r(s)}(x) = c_{t-s} \times p_{\chi^2(v,\lambda_{t,s})}(c_{t-s}x) = p_{\chi^2(v,\lambda_{t,s})/c_{t-s}}(x)$$

où :

- $c_{t-s} = \frac{4k}{\sigma^2\left(1-exp\left(-k(t-s)\right)\right)}$;
- $v = 4k\theta/\sigma^2$;
- $\lambda_{t,s} = c_{t-s}r_s exp\big(-k(t-s)\big)$.

La densité de probabilité d'une loi Khi-deux non centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ est :

$$p_{\chi^2(v,\lambda)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!} \mathrm{p}_{\Gamma(\mathrm{i}\,+\,v/2,1/2)}(\mathrm{z})$$

où

$$\mathrm{p}_{\Gamma\left(\mathrm{i}\,+\frac{v}{2},\frac{1}{2}\right)}(\mathrm{z}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{i+\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(i+\frac{v}{2}\right)} \times z^{i-1+\frac{v}{2}} \times e^{-\frac{z}{2}} = p_{\chi^2(v\,+2i)}(z)$$

La fonction $p_{\chi^2(v\,+2i)}(z)$ est la densité de probabilité d'une loi Khi-deux centrée avec $v + 2i$ degrés de liberté.

La moyenne et la variance de $r(t)$ conditionnellement à F_s sont données par :

$$E\{r(t)|F_s\} = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right)$$

$$Var\{r(t)|F_s\} = \frac{r(s)\sigma^2}{k}\left(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}\right) + \theta\frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-k(t-s)}\right)^2$$

2.1.3 Densité conditionnelle du taux court instantané et dynamique du taux *forward* composé

Soit Q^T la mesure *T-forward*[3] et soit W^T la variable définie par : $dW^T(t) = dW(t) + \sigma B(t,T)\sqrt{r(t)}dt$. W^T est un mouvement brownien standard sous Q^T.

Il est possible de montrer que, sous Q^T, la distribution du taux court r(t) conditionnellement au taux $r(s)$, $s \leq t \leq T$, est donnée par :

$$p^T_{\left(r(t)\middle|r(s)\right)}(x) = q(t,s)p_{\chi^2(v,\delta(t,s))}(q(t,s)x)$$

où :

- $q(t,s) = 2[\rho(t-s) + \psi + B(t,T)]$;
- $\delta(t,s) = \frac{4\rho(t-s)^2 r(s)e^{h(t-s)}}{q(t,s)}$.

Soit par ailleurs $F(t;T,S)$, le taux *forward* composé simplement, observé à la date t dont le terme est T et la maturité est S, défini par :

$$F\,(t;T,S) = \frac{1}{\gamma(T,S)}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right)$$

où $\gamma(T,S)$ est la fraction d'année entre T et S.

Sous la mesure *forward* Q^S, le taux *forward* s'écrit :

$$dF(t;T,S) = \sigma \times \left(F\,(t;\,T,S) + \frac{1}{\gamma(T,S)}\right) \times \sqrt{\left(B(t,S) - B\,(t,T)\right) ln\left[\frac{(\gamma\,(T,S)F\,(t;\,T,S) +\, 1)A(t,S)}{A(t,T)}\right]}\, dW^S(t)$$

Notons que cette équation différentielle est assez différente de la dynamique log-normale du taux *forward* dans le modèle LMM, où typiquement $dF(t;T,S) = \sigma(t)F(t;T,S)dW^S(t)$ pour une fonction déterministe σ.

2.1.4 Prix d'une obligation zéro-coupon

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T est :

[3] Q^T est la mesure de probabilité définie par la dérivée de Radon-Nikodym : $\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{\exp\left(-\int_0^T r(u)du\right)}{P(0,T)}$

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

où

$$A(t,T) = \left[\frac{2h\exp\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}\right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t,T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

La formule d'Itô permet d'écrire :

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt - B(t,T)P(t,T)\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

En inversant la formule du prix $P(t,T)$, déduisant ainsi r de P, on peut écrire :

$$d\ln(P(t,T)) = \left(\frac{1}{B(t,T)} - \frac{1}{2}\sigma^2 B(t,T)\right)[\ln(A(t,T)) - \ln(P(t,T))]dt - \sigma\sqrt{B(t,T)[\ln(A(t,T)) - \ln(P(t,T))]}\,dW(t)$$

Nous remarquons que la volatilité rapportée au prix de l'obligation zéro-coupon n'est pas une fonction déterministe, mais dépend du niveau actuel des prix.

2.1.5 Prix d'une option européenne sur une obligation zéro-coupon

Le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne, de maturité $T > t$ et de prix d'exercice X, émise sur une obligation zéro-coupon de maturité $S > T$ et dont le taux cours instantané à l'instant t est noté $r(t)$, s'écrit (cf. Cox, Ingersoll et Ross [1985] et Brigo et Mercurio [2007])[4] :

$$\begin{aligned} ZBC(t,T,S,X) &= P(t,S)F_{\chi^2}\left(2\bar{r}\,[\rho + \psi + B(T,S)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t)\exp\{h(T-t)\}}{\rho + \psi + B(T,S)}\right) \\ &- XP(t,T)F_{\chi^2}\left(2\bar{r}\,[\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t)\exp\{h(T-t)\}}{\rho + \psi}\right) \end{aligned}$$

où

- $\rho = \rho(T-t) = \frac{2h}{\sigma^2(\exp[h(T-t)]-1)}$;
- $\psi = \frac{k+h}{\sigma^2}$;
- $\bar{r} = \bar{r}(S-T) = \frac{\ln\left(\frac{A(T,S)}{X}\right)}{B(T,S)}$.

[4] $F_{\chi^2}(.;u,v)$ est la fonction de répartition d'une loi Khi-deux non centrée avec u degrés de liberté et un paramètre de décentralisation v.

Le prix de l'option de vente est obtenu par la parité *put-call* et est noté ZBP :

$$ZBP(t,T,\tau,K) = ZBC(t,T,\tau,K) - P(t,\tau) + KP(t,T)$$

2.1.6 Prix de *caps* et de *floors*

Le prix à la date t d'un capelet dont la date d'échéance est notée T, la date de paiement est notée $T+\tau$, le prix d'exercice est noté X et le montant nominal noté N s'écrit :

$$Cpl(t,T,T+\tau,N,X) = N(1+X\tau) \times ZBP\left(t,T,T+\tau,\frac{1}{1+X\tau}\right)$$

Notons $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des maturités de paiements des *caps* ou des *floors* augmenté de la date d'initialisation t_0. Soit τ_i la différence entre t_{i-1} et t_i.

Le prix à l'instant $t < t_0$ du *cap* de prix d'exercice X, de valeur nominale N et défini sur l'ensemble $\zeta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ est donné par :

$$Cap(t,\zeta,N,X) = N\sum_{i=1}^{n}(1 + X\tau_i) \times ZBP\left(t,t_{i-1},t_i,\frac{1}{1+X\tau_i}\right)$$

Le prix du *floor* est donné par :

$$Flr(t,\zeta,N,X) = N\sum_{i=1}^{n}(1 + X\tau_i) \times ZBC\left(t,t_{i-1},t_i,\frac{1}{1+X\tau_i}\right)$$

2.1.7 Prix de *swaptions*

La forme analytique du prix d'une *swaptions* européennes évaluée en utilisant le modèle CIR peut être explicitement formulée en utilisant la décomposition de Jamshidian [1989] (cf. Brigo et Mercurio [2007]).

Considérons une *swaption* payeuse avec un taux d'exercice noté X, une échéance T et une valeur nominale N. Elle donne à son titulaire le droit de contracter à un instant $t_0 = T$ un *swap* de taux d'intérêt avec des dates de paiements $\zeta = \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_1 > T$, où il paye un taux fixe X et reçoit le taux variable.

On note τ_i la fraction d'année de t_{i-1} à t_i, $i = 1,\dots,n$ et soit $c_i = X\tau_i$ pour $i = 1,\dots,n-1$ et $c_n = 1 + X\tau_n$.

Soit r^* le taux *spot* à la date T pour lequel $\sum_{i=1}^{n} c_i \bar{A}(T,t_i) \times e^{-B(T,t_i)r^*} = 1$ et soit $X_i = \bar{A}(T,t_i) \times e^{-B(T,t_i)r^*}$.

Le prix de la *swaption* payeuse à l'instant $t < T$ est alors donné par :

$$PS(t,T,\zeta,N,X) = N\sum_{i=1}^{n} c_i \times ZBP(t,T,t_i,X_i)$$

Par symétrie, le prix de la *swaption* receveuse est :

$$RS(t,T,\zeta,N,X) = N\sum_{i=1}^{n} c_i \times ZBC(t,T,t_i,X_i)$$

2.1.8 Quelle extension du modèle CIR ?

Le modèle CIR de référence ne peut reproduire la structure par termes des taux d'intérêt observés sur le marché. La littérature financière propose notamment deux méthodes d'extension de ce modèle pour reproduire la courbe de taux initiale du marché :

- Rendre tous les paramètres du modèle dépendants du temps (extension de type Hull & White) ;
- Introduire additivement une fonction déterministe.

D'autres extensions, que nous ne détaillerons pas ici, sont proposées par la littérature. On peut citer, par exemple, celle présentée dans Shiu et Yao [1999] qui proposent des formules fermées pour valoriser des zéro-coupons en supposant que le taux d'intérêt instantané est décrit par les EDS suivantes :

$$dr(t) = \varphi(t)dt + k[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t)$$
$$d\theta(t) = \beta(r(t) - \theta(t))dt$$

La fonction déterministe $\varphi(t)$ permettant de répliquer la courbe de taux initiale.

2.1.8.1 Extension du modèle CIR par Hull & White

Outre l'extension du modèle de Vasicek [1977], Hull & White [1990] ont proposé une extension du modèle de Cox, Ingersoll et Ross [1985] qui repose sur le même principe : rendre les coefficients dépendants du temps. La dynamique du taux court est alors donnée par :

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t)$$

où a, ϑ et σ sont des fonctions déterministes.

Les caractéristiques analytiques d'une telle extension sont cependant limitées.

En effet, on peut montrer que, pour $t < T$, le prix d'une obligation zéro-coupon peut s'écrire sous la forme

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

La fonction B est une solution d'une équation de Riccati et A est la solution d'une équation différentielle linéaire soumise à certaines conditions.

On observe les mêmes limites analytiques pour la dynamique simplifiée ou le paramètre de volatilité est constant :

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a \times r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

où a et σ sont des constantes positives et seule la fonction ϑ est supposée dépendre du temps afin de reproduire la structure par termes des taux d'intérêt.

À notre connaissance, aucune expression analytique générale de $\vartheta(t)$ n'est proposée par la littérature financière. Quand on suppose que le rapport $\vartheta(t)/\sigma^2(t)$ est égal à une constante positive δ supérieure à $\frac{1}{2}$ pour que l'origine soit inaccessible, le modèle CIR généralisé par Hull & White [1990] présente des caractéristiques analytiques plus étendues. Ces propriétés analytiques ne font pas l'objet de développements dans ce papier, le lecteur intéressé peut se référer à Brigo et Mercurio [2007].

La section suivante présente une extension du modèle CIR plus intéressante d'un point de vue analytique. Elle permet notamment de reproduire la courbe de taux observée et prendre en compte des taux négatifs.

2.1.8.2 *Extension par une fonction déterministe : modèle CIR++*

L'application des développements de la section 1 permet d'étendre le modèle CIR de référence au modèle appelé CIR++. Le processus du taux court instantané r est ainsi la somme d'une fonction déterministe et d'un processus CIR de référence.

La section suivante présente la dynamique du modèle CIR++ ainsi que les formules analytiques pour valoriser les obligations zéro-coupons, les *caps*, les *floors* et les *swaptions*.

2.2 Le modèle CIR à un facteur décalé

2.2.1 Extension du modèle CIR de référence par une fonction déterministe : modèle CIR++

L'application des développements de la section 1 permet d'étendre le modèle CIR au modèle CIR++. Le processus du taux court instantané r est ainsi décrit à partir d'une fonction déterministe φ et du processus x dont le vecteur de paramètre est noté $\alpha = (k, \theta, \sigma)$ et qui est défini comme suit :

$$dx(t) = k\big(\theta - x(t)\big)dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t)\,;\; x(0) = x_0$$

et on a :

$$r\,(t) = x(t) + \varphi(t)$$

où x_0, k, θ et σ sont des constantes positives telles que $2k\theta > \sigma^2$, garantissant ainsi que l'origine est inaccessible pour la variable x, et donc que ce processus reste positif.

Les formules analytiques présentées dans la suite sont une traduction directe des développements présentés dans la section 1.

2.2.2 Prix d'une obligation zéro-coupon

En notant $\varphi(t) = \varphi^{CIR}(t;\alpha)$ on a donc :

$$\varphi^{CIR}(t;\alpha) = \mathrm{f}^{\mathrm{M}}(0,\mathrm{t}) - \mathrm{f}^{\mathrm{CIR}}(0,\mathrm{t};\ \alpha)$$

où

$$f^{CIR}(0,t;\alpha)=\frac{2k\theta(exp\{th\}-1)}{2h+(k+h)(exp\,\{th\}-1)}+x_0\,\frac{4h^2exp\{th\}}{[2h+(k+h)(exp\{th\}-1)]^2}$$

avec $h\ =\ \sqrt{k^2+2\sigma^2}$.

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T est :

$$P(t,T)=\bar{A}\,(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

où

$$\bar{A}(t,T)=\frac{P^M(0,T)A(0,t)exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)exp\{-B(0,T)x_0\}}A(t,T)e^{B(t,T)\varphi^{CIR}(t;\alpha)}$$

- $A(t,T)$ et $B(t,T)$ sont définis dans la section 2.1.4.
- $P^M(0,T)$ est le prix de marché de l'obligation zéro-coupon sans risque observée à l'instant 0.

Le taux d'intérêt à l'instant t pour l'échéance T est donc :

$$R\,(t,T)=\frac{1}{T-t}\left(\ln\left(\frac{P^M(0,t)A(0,T)exp\{-B(0,T)x_0\}}{A(t,T)P^M(0,T)A(0,t)\,exp\{-B(0,t)x_0\}}\right)-B(t,T)\varphi^{CIR}(t;\ \alpha)\right.$$
$$\left.+\,B(t,T)r(t)\right)$$

On peut noter que le taux $R(t,T)$ est affine en $r(t)$.

2.2.3 Prix d'une option européenne sur une obligation zéro-coupon

Le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne, à échéance $T>t$ et de prix d'exercice K, sur une obligation zéro coupon de maturité $\tau>T$ est égal à :

$$ZBC(t,T,\tau,K)$$
$$=\frac{P^M(0,\tau)A(0,t)exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,\tau)exp\{-B(0,\tau)x_0\}}$$
$$\times\,\Psi^{CIR}\left(t,T,\tau,K\frac{P^M(0,T)A(0,\tau)exp\{-B(0,\tau)x_0\}}{P^M(0,\tau)A(0,T)exp\{-B(0,T)x_0\}},r(t)-\varphi^{CIR}(t;\alpha);\alpha\right)$$

où $\Psi^{CIR}(t,T,\tau,X,x;\alpha)$ est le prix de l'option valorisée par le modèle CIR tel que défini dans la section 2.1.4.

En simplifiant davantage cette formule, on peut écrire :

$$ZBC(t,T,\tau,K)$$
$$=P(t,\tau)F_{\chi^2}\left(2\hat{r}[\rho+\psi\right.$$
$$\left.+\,B(T,\tau)];\frac{4k\theta}{\sigma^2},\frac{2\rho^2[r(t)-\varphi^{CIR}(t;\ \alpha)]exp\{h(T-t)\}}{\rho+\psi+B(T,\tau)}\right)$$
$$-\,KP(t,T)F_{\chi^2}\left(2\hat{r}[\rho+\psi];\frac{4k\theta}{\sigma^2},\frac{2\rho^2[r(t)-\varphi^{CIR}(t;\ \alpha)]exp\{h(T-t)\}}{\rho+\psi}\right)$$

Avec

$$\hat{r} = \frac{1}{B(T,\tau)}\left[\ln\left(\frac{A(T,\tau)}{K}\right) - \ln\left(\frac{P^M(0,T)A(0,\tau)exp\{-B(0,\tau)x_0\}}{P^M(0,\tau)A(0,T)exp\{-B(0,T)x_0\}}\right)\right]$$

Le prix de l'option de vente est obtenu par la parité *put-call* et est noté ZBP :

$$ZBP(t,T,\tau,K) = ZBC(t,T,\tau,K) - P(t,\tau) + KP(t,T)$$

2.2.4 Prix de *caps* et de *floors*

Les *caps* et les *floors* peuvent être considérés comme des portefeuilles d'options sur des obligations zéro-coupons. Le prix à la date t d'un capelet dont la date d'échéance est notée T, la date de paiement est notée $T+\tau$, le prix d'exercice noté X et le montant nominal noté N s'écrit :

$$Cpl(t,T,T+\tau,N,X) = N(1+X\tau) \times ZBP\left(t,T,T+\tau,\frac{1}{1+X\tau}\right)$$

Notons $\zeta = \{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ l'ensemble des maturités de paiements des *caps* ou des *floors augmenté de t_0 correspondant à l'instant d'initialisation*. Soit τ_i la différence entre t_{i-1} et t_i.

Le prix à l'instant $t < t_0$ du *cap* de prix d'exercice X, de valeur nominale N et défini sur l'ensemble $\zeta = \{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ est donné par :

$$Cap(t,\zeta,N,X) = N\sum_{i=1}^{n}(1 + X\tau_i) \times ZBP\left(t,t_{i-1},t_i,\frac{1}{1+X\tau_i}\right)$$

Le prix du *floor* est donné par :

$$Flr(t,\zeta,N,X) = N\sum_{i=1}^{n}(1 + X\tau_i) \times ZBC\left(t,t_{i-1},t_i,\frac{1}{1+X\tau_i}\right)$$

2.2.1 Prix de *swaptions*

Comme pour le modèle CIR, la forme analytique du prix d'une *swaptions* européennes évaluée en utilisant le modèle CIR++ peut être explicitement formulée en utilisant la décomposition de Jamshidian [1989] (cf. Brigo et Mercurio [2007]).

Considérons une *swaption* payeuse avec un taux d'exercice noté X, une échéance T et une valeur nominale N. Elle donne à son titulaire le droit de contracter à un instant $t_0 = T$ un *swap* de taux d'intérêt avec des dates de paiements $= \{t_1,\ldots,t_n\}$, $t_1 > T$, où il paye un taux fixe X et reçoit le taux variable.

On note τ_i la fraction d'année de t_{i-1} à t_i, $i = 1,\ldots,n$ et soit $c_i = X\tau_i$ pour $i = 1,\ldots,n-1$ et $c_n = 1 + X\tau_n$.

Soit r^* le taux *spot* à la date T pour lequel $\sum_{i=1}^{n} c_i\bar{A}(T,t_i) \times e^{-B(T,t_i)r^*} = 1$ et soit $X_i = \bar{A}(T,t_i) \times e^{-B(T,t_i)r^*}$.

Le prix de la *swaption* payeuse à l'instant $t < T$ est alors donné par :

$$PS(t,T,\zeta,N,X) = N \sum_{i=1}^{n} c_i \times ZBP(t,T,t_i,X_i)$$

Par symétrie, le prix de la *swaption* receveuse est :

$$RS(t,T,\zeta,N,X) = N \sum_{i=1}^{n} c_i \times ZBC(t,T,t_i,X_i)$$

2.3 Modèle CIR décalé à deux facteurs

Le modèle CIR2++ est un modèle de taux court instantané à deux facteurs qui consiste à ajouter un décalage déterministe à la somme de deux processus CIR indépendants. Ce modèle peut être considéré comme la généralisation naturelle à deux facteurs du modèle CIR++ présenté dans la section 2.2.

Le modèle CIR2++ est de la forme : $r_t = x_t + y_t + \varphi(t)$, où φ est une fonction déterministe permettant de reproduire la courbe de taux initiale observée et x et y sont deux processus CIR indépendants.

Dans la suite, nous présentons d'abord le modèle CIR à deux facteurs de référence (non décalé) et nous présentons ensuite le modèle CIR2++.

2.3.1 Le modèle CIR à deux facteurs de référence

2.3.1.1 Dynamique du modèle

Le modèle CIR à deux facteurs de référence définit le taux d'intérêt instantané comme la somme de deux processus CIR indépendants sous la mesure risque-neutre.

Soit x et y deux processus définis par :

$$dx(t) = k_1(\theta_1 - x(t))dt + \sigma_1\sqrt{x(t)}dW_1(t)$$

$$dy(t) = k_2(\theta_2 - y(t))dt + \sigma_2\sqrt{y(t)}dW_2(t)$$

où W_1 et W_2 sont des mouvements browniens indépendants sous la mesure risque neutre, et k_1, θ_1, σ_1, k_2, θ_2 et σ_2 sont des constantes positives telles que $2k_1\theta_1 > \sigma_1^2$ et $2k_2\theta_2 > \sigma_2^2$.

Les réels positifs $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ sont respectivement les valeurs initiales des processus x et y.

Le taux court instantané est alors défini comme suit :

$$\xi_t^{\alpha} = x(t) + y(t)$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 = (k_1, \theta_1, \sigma_1)$ et $\alpha_2 = (k_2, \theta_2, \sigma_2)$.

Le taux court est donc la somme linéaire de deux variables indépendantes de lois de Khi-deux non centrées et indépendantes.

2.3.1.2 *Prix d'une obligation zéro-coupon*

En raison de l'indépendance des facteurs, le prix d'une obligation zéro-coupon est directement déduit de la formule analytique du prix du modèle CIR à un facteur de référence. Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit :

$$P^{\xi}(t,T;x(t),y(t),\alpha) = P^1(t,T;x(t),\alpha_1) \times P^1(t,T;y(t),\alpha_2)$$

où P^1 désigne le prix d'une obligation zéro-coupon valorisée par le modèle CIR à un facteur (cf. section 2.1.4). Rappelons que si z est un processus CIR à un facteur de paramètres (k_i,θ_i,σ_i), le prix d'un zéro-coupon est donné par :

$$P^1(t,T;z(t),k_i,\theta_i,\sigma_i) = A_z(t,T)e^{-B_z(t,T)z(t)}$$

où

- $A_z(t,T) = \left[\frac{2h_i exp\left\{\frac{(k_i+h_i)(T-t)}{2}\right\}}{2h_i+(k_i+h_i)(exp\{(T-t)h_i\}-1)}\right]^{\frac{2k_i\theta_i}{\sigma_i^2}}$;
- $B_z(t,T) = \frac{2(exp\{(T-t)h_i\}-1)}{2h_i+(k_i+h_i)(exp\{(T-t)h_i\}-1)}$;
- $h = \sqrt{k_i^2 + 2\sigma_i^2}$;
- $z \in \{x,y\}$ et $i = 1$ si $z = x$, $i = 2$ sinon.

Le taux d'intérêt à terme vu en t pour la maturité T est donné par :

$$R^{\xi}(t,T;x(t),y(t),\alpha) = R^1(t,T;x(t),\alpha_1) + R^1(t,T;y(t),\alpha_2)$$

où R^1 désigne le taux d'intérêt à terme valorisé par le modèle CIR à un facteur obtenu à partir de P^1.

Sous la mesure risque neutre, la dynamique du prix des obligations s'écrit :

$$\begin{aligned} dP^{\xi}(t,T;\alpha) = P^{\xi}(t,T;\alpha)\Big[\xi_t^{\alpha}dt - B(t,T;\alpha_1)\sigma_1\sqrt{x(t)}\,dW_1(t) \\ - B(t,T;\alpha_2)\sigma_2\sqrt{y(t)}dW_2(t)\Big] \end{aligned}$$

où la fonction déterministe B est définie comme dans la section 2.1.4.

2.3.1.3 *Prix d'une option européenne sur une obligation zéro-coupon*

Le prix d'une option d'achat évaluée à la date t dont la maturité est notée $T > t$ et le prix d'exercice noté K sur une obligation zéro-coupon dont la maturité est $S > T$ et dont le nominal est noté N, est donné par :

$$\begin{aligned} &C^{\xi}(t,T,S,N,K;x(t),y(t),\alpha) \\ &\quad = P^{\xi}(t,T;x(t),y(t),\alpha)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}[N \times P^1(T,S;x_1,\alpha_1) \times P^1(T,S;x_2,\alpha_2) \\ &\quad - K]^+ \times p_{x(T)|x(t)}^T(x_1)p_{y(T)|y(t)}^T(x_2)dx_1dx_2 \end{aligned}$$

On notera la présence dans cette expression d'une intégrale double sur le produit de deux densités de Khi-deux non centrées. Les expressions analytiques de ces densités conditionnelles sous la mesure *T-forward* ont été présentées dans la section 2.1.3.

2.3.2 Dynamique du modèle CIR décalé à deux facteurs

En parfaite analogie avec les développements présentés dans la section 1.2, utilisés dans la section 2.2 pour le cas à un facteur, le taux cours instantané du modèle CIR2++, sous la mesure risque neutre est défini par :

$$r_t = \varphi(t;\alpha) + \xi_t^{\alpha} = \varphi(t;\alpha) + x(t) + y(t)$$

où $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et où $\varphi(t;\alpha)$ est une fonction déterministe fonction du vecteur de paramètre $\alpha = (x_0, y_0, k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2, \sigma_2)$.

Afin de reproduire exactement la courbe des taux par termes observée sur le marché, il suffit que :

$$\varphi(t;\alpha) = f^M(0,t) - f^1(0,t;x_0,\alpha_1) - f^1(0,t;y_0,\alpha_2)$$

où f^1 est le taux *forward* instantané évalué par le modèle CIR à un facteur de référence, tel qu'indiqué dans la section 2.2.2 et f^M est le taux *forward* instantané du marché.

Dans ce qui suit, il est utile de définir la fonction :

$$\begin{aligned}\Phi^{\xi}(u,v;\ \alpha) = exp\left[-\int_u^v \varphi(t;\alpha)ds\right] &= \frac{P^M(0,v)P^{\xi}(0,u;\alpha)}{P^M(0,u)P^{\xi}(0,v;\alpha)} \\ &= \exp\{[R^{\xi}(0,v;\alpha) - R^M(0,v)]v - [R^{\xi}(0,u;\alpha) - R^M(0,u)]u\}\end{aligned}$$

qui est entièrement définie à partir des prix observés ($P^M(0,T)$) et de l'expression analytique de P^{ξ}.

2.3.3 Valorisation d'une obligation zéro-coupon par le modèle CIR décalé à deux facteurs

Le processus CIR à deux facteurs ξ^{α} permet de valoriser les prix d'obligations zéro-coupons par des formules fermées. Cette propriété analytique est conservée dans le modèle CIR2++.

Le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit comme le produit de l'exponentielle de la primitive de la fonction de décalage φ et le prix d'une obligation zéro-coupon valorisée par le modèle CIR à deux facteurs non décalé (cf. section 2.3.1.2). Ce prix s'écrit :

$$P(t,T;x(t),y(t),\alpha) = \Phi^{\xi}(t,T;\alpha) \times P^{\xi}(t,T;x(t),y(t),\alpha)$$

2.3.4 Valorisation des *caps* et des *floors* par le modèle CIR décalé à deux facteurs

Le prix à la date t d'une option d'achat européenne dont la maturité est notée $T > t$ et le prix d'exercice noté K sur une obligation zéro-coupon dont le nominal est noté N et de maturité notée $S > T$ s'écrit :

$$ZBC(t,T,S,N,K;x(t),y(t),\alpha) \\ = N \times \Phi^{\xi}(t,S;\alpha) \times C^{\xi}\left(t,T,S,N,\frac{K}{\Phi^{\xi}(T,S;\alpha)};x(t),y(t),\alpha\right)$$

où C^{ξ} est la fonction de prix d'une option d'achat valorisée par le modèle CIR à deux facteurs (cf. section 2.3.1.3).

Le prix d'une option de vente est obtenu à partir de la parité *put-call* et s'écrit :

$$ZBP(t,T,S,N,K;x(t),y(t),\alpha) \\ = ZBC(t,T,S,N,K;x(t),y(t),\alpha) - N \times P(t,S;x(t),y(t),\alpha) \\ + K \times P(t,T;x(t),y(t),\alpha)$$

Comme pour le modèle CIR à deux facteurs non-décalé, la valorisation d'une option sur une obligation zéro-coupon nécessite la résolution d'une intégrale double.

Les *caps* et les *floors* s'écrivent comme une série d'options sur des obligations zéro-coupons (cf. par exemple la section 2.1.6). La valorisation de ces instruments peut donc être réalisée par la formule semi-fermée présentée dans la section 2.3.1.3 ou par d'autres méthodes comme la simulation de Monte Carlo.

2.3.5 Valorisation des *swaptions* par le modèle CIR à deux facteurs décalé CIR2++

Contrairement au modèle CIR à un facteur, la décomposition de Jamshidian [1989] pour valoriser les *swaptions* n'est pas applicable pour le cas du modèle CIR à deux facteurs. Par conséquent, le prix des *swaptions* est évalué par d'autres méthodes, comme la simulation de Monte Carlo.

3 Loi du Khi-deux non centrée : définition et propriétés

Cette section a pour objectif de :

- Définir la famille des lois du Khi-deux non-centrées et présenter leurs caractéristiques ;
- Présenter une méthode de simulation des lois du Khi-deux non-centrées ;
- Présenter quelques approximations normales aux lois Khi-deux non-centrées.

Nous nous sommes appuyés sur les trois références suivantes pour rédiger cette section : Johnson et al [1970], Devroye [1986] et Patel et Read [1982].

3.1 Définition et propriétés

Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité χ^2 centrée avec $v > 0$ degrés de liberté si la densité de probabilité de X est donnée par :

$$p_{\chi^2(v)}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{v}{2}-1} ; x > 0$$

où Γ est la fonction Gamma.

Quand $v = 0$ alors $p_{\chi^2(0)}(x) = 0$ et la fonction de répartition $F_{\chi^2(0)}(x) = 1$ pour tout $x > 0$.

La loi du χ^2 centrée est un cas particulier de la loi Gamma. En effet, si X suit une loi Gamma de paramètres (a, b) alors sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}}{b^a \Gamma(a)}\,; x > 0$$

Pour $a = v/2$ et $b = 2$, nous retrouvons exactement la densité de probabilité d'une loi du χ^2 centrée à v degrés de liberté.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi du χ^2 non-centrée de degrés de liberté $v \geq 0$ et de paramètre de décentralisation λ si sa fonction de répartition s'écrit :

$$F_{\chi^2(v,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k F_{\chi^2(v+2k)}(x)$$

La densité s'écrit donc :

$$P_{\chi^2(v,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k P_{\chi^2(v+2k)}(x)$$

Notons que la fonction $P_{\chi^2(v,\lambda)}$ s'écrit comme la somme de densités de lois χ^2 centrées pondérées par des probabilités de la loi de Poisson.

Quand v est un entier positif, la fonction de répartition d'une loi du χ^2 non-centrée à v degrés de liberté et de paramètre de décentralisation λ s'écrit naturellement comme la fonction de répartition de la somme quadratique de variables aléatoires normales. Plus précisément, soit $X_1, \ldots, X_v$ des variables aléatoires normales indépendantes de moyennes μ_k, $k = 1, \ldots, v$ et de variances unitaires. Alors la densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{v} X_k^2$ est $p_{\chi^2(v,\lambda)}$ avec : $\lambda = \sum_{k=1}^{v} \mu_k^2$.

Les propriétés distributionnelles d'une loi du χ^2 non-centrée peuvent être difficiles à obtenir car la densité n'est pas sous une forme fermée. Une autre expression de la densité $p_{\chi^2(v,\lambda)}$, qui n'est pas nécessairement plus simple, est :

$$p_{\chi^2(v,\lambda)}(x) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x+\lambda}{2}\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{v-2}{4}} I_{\frac{v-2}{2}}(\sqrt{\lambda x})$$

La fonction $I_v(x)$ désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce définie par :

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}}{k!\,\Gamma(v+k+1)}$$

Par ailleurs, si N est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de moyenne $\lambda/2$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(k) = \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \; ; k = 0, 1, \dots$$

Alors la variable aléatoire χ^2 centrée à $v + 2N$ degrés de liberté suit une loi du χ^2 non-centrée à v degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ.

Notons en effet que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)\, P(\chi^2(v + 2N) < x | N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k F_{\chi^2(v+2k)}(x) = F_{\chi^2(v,\lambda)}(x)$$

3.2 Simulation d'une loi du χ^2 non-centrée

Soit $X_{(v,\lambda)}$ une variable aléatoire χ^2 non-centrée. Alors la variable $X_{(v,\lambda)}$ peut s'écrire comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes X_v et X_λ : $X_{(v,\lambda)} = X_v + X_\lambda$ avec (Johnson et al [1970]) :

- La variable X_v suit une loi du χ^2 centrée à v degrés de liberté ;
- La variable X_λ suit une loi du χ^2 non-centrée à 0 degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est λ. C'est la part purement excentrique de la variable $X_{(v,\lambda)}$. La variable X_λ suit donc une loi χ^2 centrée à $2N$ degrés de liberté, où N est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de moyenne $\lambda/2$. Sa fonction de répartition s'écrit :

$$F_{\chi^2(0,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k F_{\chi^2(2k)}(x)$$

Cette décomposition d'une variable aléatoire χ^2 non-centrée en deux variables, isolant le degré de liberté dans une variable de loi χ^2 centrée et le paramètre de décentralisation dans une variable de loi χ^2 non-centrée mais à 0 degrés de liberté, permet de simuler la loi du χ^2 non-centrée à partir de variables de lois Gamma et de Poisson. Les générateurs de lois Gamma ou de Poisson sont en général disponibles dans les outils et logiciels statistiques classiques.

En effet :

- La variable X_v suit une loi Gamma de paramètres $(v/2,2)$ et peut être générée directement en simulant une loi Gamma ;
- La variable X_λ suit une loi χ^2 centrée à $2N$ degrés de liberté, où N suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda/2$. Elle peut être générée en tirant d'abord un nombre aléatoire K suivant la loi de Poisson et tirer ensuite une loi Gamma de paramètres $(K, 2)$.

3.1 Approximation d'une loi du χ^2 non-centrée par des lois normales

Les propriétés distributionnelles d'une loi du χ^2 non-centrée peuvent être difficiles à obtenir car la densité n'est pas sous une forme fermée. L'approximation d'une loi du χ^2 non-centrée par des variables normales peut être intéressantes. Patel et Read [1982] synthétisent un ensemble d'approximations que nous présentons dans la suite.

Désignons par $y \rightarrow F(y\,; v\,, \lambda)$ la fonction de répartition d'une loi χ^2 non-centrée de paramètres (v, λ). La liste suivante présente quelques méthodes d'approximation de la fonction de répartition F par la fonction de répartition normales centrées et réduites notées Φ.

1. Approximations linéaires : deux approximations normales simples, ayant une erreur de l'ordre de $O\ (1/\sqrt{\lambda})$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$:
    a. $F(y\,; v\,, \lambda) \approx \Phi\left(\frac{y-v-\lambda}{\sqrt{2(v+2\,\lambda)}}\right)$;
    b. $F(y\,; v\,, \lambda) \approx \Phi\left(\frac{y-v-\lambda+1}{\sqrt{2(v+2\,\lambda)}}\right)$.
2. Approximations non linéaires :
    a. Approximation plus adaptée quand le paramètre de décentralisation est petit (et donc quand la distribution ressemble plus à celle du χ^2 centrée) et se détériore à mesure que le paramètre λ augmente : $F(y\,; v\,, \lambda) \approx \Phi(u)$ avec :

$$u = \frac{\left(\left\{\frac{y}{v+\lambda}\right\}^{\frac{1}{3}} - 1 + \frac{2(v+2\lambda)}{9(v+\lambda)^2}\right)}{\left(\frac{2(v+2\lambda)}{9(v+\lambda)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

    b. Approximation dont l'erreur est comparable à celles des approximations linéaires : $F(y\,; v\,, \lambda) \approx \Phi(u)$ avec :

$$u = \sqrt{\frac{2y(v+\ \lambda)}{v+2\lambda}} - \left(\frac{2(v+\ \lambda)^2}{v+2\lambda} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

    c. Approximation sans contraintes sur le degré de liberté et le paramètre de décentralisation. Elle reste adaptée même quand le degré de liberté est faible. L'erreur est de l'ordre de $O\ (1/\lambda^2)$. Bien que compliquée, cette approximation est la meilleure de toutes les approximations listées ici. Armel et Planchet [2020] illustrent sa qualité pour un ensemble de paramètres. La fonction de répartition s'écrit : $F(y\,; v\,, \lambda) \approx \Phi\left(\frac{\left(\left(\frac{y}{v+\lambda}\right)^h - a\right)}{b}\right)$ avec :

$$h\ =\ 1\ - \frac{2(v+\lambda)(v+3\lambda)}{3(v+2\lambda)^2}$$

$$a = 1 + \frac{h(h-1)(v+2\lambda)}{(v+\lambda)^2} - \frac{h(h-1)(2-h)(1-3h)(v+2\lambda)^2}{2(v+\lambda)^4}$$

$$b = \frac{h\sqrt{2(v+2\lambda)}}{v+\lambda}\left(1 - \frac{(1-h)(1-3h)(v+2\lambda)}{2(v+\lambda)^2}\right)$$

d. Approximation similaire à celle du point 2.c mais l'erreur est de l'ordre de $O\,(1/\lambda)$. En effet la fonction de répartition s'écrit : $F(y\,;v\,,\lambda) \approx \Phi\left(\frac{\left(\left(\frac{y}{v+\lambda}\right)^h - a'\right)}{b'}\right)$ avec :

$$h = 1 - \frac{2(v+\lambda)(v+3\lambda)}{3(v+2\lambda)^2}$$

$$a' = 1 + \frac{h(h-1)(v+2\lambda)}{(v+\lambda)^2}$$

$$b' = \frac{h\sqrt{2(v+2\lambda)}}{v+\lambda}$$

3. Approximations des quantiles : soit y_p et z_p les quantiles d'ordre $1-p$ tel que $F\left(y_p\,;v\,,\lambda\right) = 1-p = \Phi(z_p)$. En reprenant les notations du point 2, on peut approximer y_p par z_p comme suit :

   a. $y_p \approx (v+\lambda)\left(z_p\sqrt{C} + 1 - C\right)^3$; $C = \frac{2(v+2\lambda)}{9(v+\lambda)^2}$;

   b. $y_p \approx (v+\lambda)\left(a + bz_p\right)^{\frac{1}{h}}$;

   c. $y_p \approx (v+\lambda)\left(a' + b'z_p\right)^{\frac{1}{h}}$.

4 Références

Armel K., Planchet F. [2018] « Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ? », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 85 (1-2).

Armel K., Planchet F. [2019a] « Comment définir la qualité d'un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le *best-estimate* d'un contrat d'épargne ? », Bankers, *Markets and Investors*, n°157, June 2019.

Armel K., Planchet F. [2020] « Utilisation de modèles de taux de type CIR pour évaluer la valeur économique des contrats d'épargne participatif ? », Working Paper.

Brigo D., Mercurio F. [2007] « Interest Rate Models - Theory and Practice ». 2nd Edition. *Springer*.

Cox, J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. [1985] « A theory of the term structure of interest rates », Econometrica 53(2), 385–407.

Devroye L. [1986] « Non- Uni form Random Variate Generation », Springer-Verlag New York Inc.

Hull J., White A. [1990] « Pricing interest rate derivative securities », *Review of Financial Studies* 3, 573–92.

Jamshidian F. [1989] « An Exact Bond Option Pricing Formula », The Journal of Finance 44, 205-209.

Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. [1970] « Continuous Univariate Distributions - Volume 2 », John Wiley & Sons, Inc.

Patel J.K., Read C.B. [1982] « Handbook of the normal distribution », MARCEL DEKKER, INC.

Shiu E., Yao Y. [1999] « Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models » Proceedings of AFIR Colloquim, Tokyo. 407–418 (1999).

Vasicek O. [1977] « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.