Somme de lois gamma differentes et determination des parametres d'une distribution gamma equivalente

Lambert Pierrat[1] et Gérard d'Aubigny[2]

LJ-consulting[1] *et LabSAD(UA 3698)*[1,2]
Université Pierre Mendès-France, Grenoble 2,
1251, avenue centrale, B.P. 47 - 38040 Grenoble cédex 9, France.

E-mail : Gerard.d-Aubigny@upmf-grenoble.fr
e_zainescu@yahoo.fr[1]

Résumé : *La stabilité additive de la distribution du Khi-deux n'est transposable à la distribution Gamma que lorsque toutes les composantes de la somme ont le même paramètre d'échelle. Dans le cas général de* n *lois* $\Gamma(\alpha_i;\beta_i)$ *ayant des paramètres de forme* α_i *et d'échelle* β_i *distincts, l'expression exacte de la distribution de la somme n'est pas facilement manipulable.*

On justifie l'existence d'une distribution approximative du type $\Gamma(\alpha';\beta')$ *dont les paramètres sont déterminés simplement par identification des deux premiers moments de la loi. On vérifie analytiquement la validité de cette équivalence dans un cas limite assez défavorable: un nombre minimal (*$n = 2$*) de lois exponentielles* $\Gamma(1;\beta)$ *dont les coefficients de variation (CV) valent* 1 *et le rapport des paramètres d'échelle (*$\beta_1/\beta_2 = 2$*) ont des valeurs significatives.*

Mots clef : *Loi Gamma à deux paramètres, convolution, èquivalence, quasi-stabilité.*

Abstract : *One can transpose the additive stability property of the Chi-square distribution to the Gamma one, only if components have a common scale parameter. Generally, if we consider several independent Gamma distributions having different scale and shape parameters, the exact expression of their sum is difficult to work with analytically.*

We justify the existence of an approximate Gamma distribution, whose two parameters are simply determined only by identification of the first two moments. The validity of this approximation is confirmed analytically by considering a restricted limit case, such as the sum of a smalll number (i.e. two) of particular Gamma distributions (i.e. exponential), both having a large variation coefficient (equal to one) and a significant scale parameter ratio (i.e. equal to two).

Keywords : *Two-parameter Gamma distribution, convolution, equivalence, quasi-stability.*

1 Introduction

La distribution de la somme de n lois Gamma $\Gamma(\alpha_i;\beta_i)$ mutuellement indépendantes et de paramètres $\theta_i = (\alpha_i;\beta_i)$ différents peut être obtenue par convolution ou inversion de la fonction caractéristique. Si tous les paramètres d'échelle sont identiques ($\beta_i = \beta\ \forall i$), on obtient la solution simple et exacte $\Gamma(\sum_i \alpha_i;\beta)$, fondée sur la propriété d'additivité du Khi-deux. de plus, lorsque le nombre n de composantes croît indéfiniment, on converge en loi vers une loi de Gauss dont les paramétres sont déterminés à partir du théoréme central-limite, c.f. Saporta (1990).

Mais ces résultats ne sont pas utilisables dans le cas d'un nombre fini et assez faible de composantes de lois hétérogènes au sens où les paramètres $\theta_i = (\alpha_i;\beta_i)$ sont quelconques. Nous proposons de définir dans ce cas, une distribution équivalente $\Gamma(\alpha';\beta')$, préservant l'asymétrie positive de la distribution exacte, et dont les paramétres $(\alpha';\beta')$ sont définis simplement par identification des deux premiers moments.

Tout d'abord, nous établissons la fonction caractéristique de la somme, ce qui nous permet de montrer l'insuffisance du théorème central-limite, et donc de justifier la prise en compte de l'asymétrie. Puis, nous rappellons les principales caractéristiques statistiques de la distribution Gamma qui nous seront utiles pour valider la distribution équivalente dont nous avons déterminé explicitement les paramètres. Enfin, nous étudions la validité de l'équivalence proposée de façon un peu particulière, puisque par comparaison à une distribution analytique représentative d'une situation limite combinant les facteurs les plus défavorables (somme de deux composantes hétérogénes et fortement asymétriques).

2 Convolution de lois Gamma a deux paramètres

2.1 Fonction caractéristique:

On considère n variables aléatoires X_i de lois respectives $\Gamma(\alpha_i;\beta_i)$. La densité de probabilité d'une loi Gamma s'écrit:

$$g_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{x}{\beta}^{\alpha-1}\,\frac{exp(-\frac{x}{\beta})}{\beta} \quad x \geq 0 \tag{1}$$

et sa seconde fonction caractéristique est:

$$\log(\Psi_X(t)) = -\alpha\, Log(1-\beta\, t). \tag{2}$$

Notons Y la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et de lois respectives $\Gamma(\theta_i)$ où les θ_i sont *a priori* distinctes. Sa fonction caractéristique $\Psi_Y(t)$ est égale au produit des $\Psi_{X_i}(t)$, ce qui donne:

$$\log(\Psi_Y(t)) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log(1-\beta_i\, t) \tag{3}$$

En principe, l'inversion de cette fonction caractéristique permet de remonter à la densité de probabilité $g_X(x)$, mais le calcul correspondant est loin d'être évident et il n'est pas possible d'en obtenir une expression analytique suffisamment simple. Par contre, c.f. Saporta (1990), elle permet d'accéder aux moments à partir desquels nous allons établir et justifier notre proposition.

2.2 Normalité asymptotique par rapport à n:

Si $|\beta_i \, t| < 1$ pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$, le développement en série de l'expression (4) fait apparaître les cumulants de la distribution, dont les trois premiers s'identifient successivement à:

- la moyenne : $M_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \beta_i,$ (4)
- la variance : $M_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, (\beta_i)^2$ (5)
- le moment d'ordre 3 : $M_3 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, (\beta_i)^3$ (6)

Notez qu'il s'agit ici des moments centrés M_2 et M_3 par rapport à la moyenne M_1. On peut faire appel au théorême de la limite centrale en considérant que si $M_3(Y/\sqrt{n})$ tend vers zéro pour $n >> 1$, alors $g_Y(y)$ tend vers une distribution normale de moyenne M_1 et de variance M_2. Malheureusement, cette propriété n'est pas exploitable dans notre cas, pour plusieurs raisons concomitantes:

1. la somme n'a pas nécessairement un nombre suffisamment élevé de composantes,
2. les composantes X_i peuvent avoir des lois $\Gamma(\theta_i)$ de paramètres θ_i très différents,

ce qui signifie que la distribution de la somme conserve une asymétrie significative et ne saurait être valablement assimilée à une loi de Gauss. Bien que l'on puisse caractériser la vitesse de convergence de la loi résultante vers la loi normale en utilisant la loi du logarithme itéré, c.f. Erdös (1942), ceci ne nous renseigne pas explicitement sur la décroissance de l'asymétrie, laquelle dépend simultanément de tous les paramètres θ_i et n, susceptibles de varier dans des limites assez larges.

2.3 Tendance asymptotique par rapport à la variable:

Dans le cas d'une somme finie de variables mutuellement indépendantes et distribuées suivant une loi Gamma de paramètres θ_i différents, on peut supposer que le comportement de la queue de la distribution résultante est gouverné par celui de la composante ayant le plus grand paramètre d'échelle. Cette conjecture a été démontrée par Zolotarev (1961), qui a montré que la forme asymptotique de $g_Y(y)$ s'écrit, à une constante près:

$$g_Y^{as}(y) = (1 + m(y))\,\Gamma(\theta_1) \tag{7}$$

où $m(y)$ est une fonction monotone décroissante de y dont l'ordre de grandeur est déterminé essentiellement par $\alpha_1 = \max(\alpha_i)$. Il en résulte qu'on peut envisager la recherche d'une loi équivalente pour la somme, sous la forme $\Gamma(\theta')$ et sous réserve d'en vérifier la validité, non pas de façon générale, mais dans le contexte de chaque application particulière.

3 Distribution équivalente

La forme et les caractéristiques statistiques de la distribution Gamma équivalente étant imposées a priori, il convient d'en définir explicitement les paramètres à partir de ceux des lois Gamma des composantes. Rappelons donc les caractéristiques statistiques suivantes de la densité de probabilité (1):

- la moyenne : $M_1^{(\alpha;\beta)}(X) = \alpha\,\beta$ (8)
- la variance : $M_2^{(\alpha;\beta)}(X) = \alpha, \beta$ (9)
- le coefficient de variation : $CV^{(\alpha;\beta)}(X) = (1/\sqrt{\alpha})$ (10)
- le coefficient d'asymétrie :$Sk^{(\alpha;\beta)}(X) = (2/\sqrt{\alpha})$ (11)

Les coefficients CV et Sk sont définis comme suit:

$$\log\left(CV^{(\alpha;\beta)}(X)\right) = (1/2)\,\log(M_2) - \log(M_1) \tag{12}$$

$$\log\left(Sk^{(\alpha;\beta)}(X)\right) = \log(M_3) - (3/2)\,\log(M_2) \tag{13}$$

On notera l'importance du paramètre de forme α, qui détermine seul la dispersion et l'asymétrie de la loi Gamma, ainsi que le rapport entre ces deux caractéristiques.

Compte tenu de ce qui précède, on peut définir les paramètres de la distribution Gamma équivalente $\Gamma(\theta')$ par identification de ses moments à ceux de la somme des composantes $\Gamma(\theta_i)$. Il vient, en utilisant (4) et (5)

$$\alpha' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,(\beta_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i\,\beta_i)^2} \qquad \beta' = \frac{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\beta_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\beta_i} \tag{14}$$

Il en résulte pour CV' et Sk', conformément à (10) et ((11) :

$$CV' = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \qquad Sk' = 2\,CV' = \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} \tag{15}$$

Lorsque toutes les composantes ont le même paramètre d'échelle β, on retrouve bien la propriété de reproduction du Khi-Deux, le paramètre de forme α' étant égal à la somme des paramètres α_i, ce qui conduit à une loi $\Gamma(\sum_i \alpha_i, \beta)$. Dans le cas plus particulier de n lois exponentielles identiques $\Gamma(1, \beta)$, on retrouve aussi un résultat classique, la loi résultante étant $\Gamma(n, \beta)$.

4 Validation de l'équivalence

On peut échapper dans une certaine mesure à une validation fondée uniquement sur des simulations numériques en étudiant un cas limite dont la solution analytique est facilement exploitable. Ce cas limite doit être interprété comme une association des facteurs d'influence les plus défavorables, à savoir : i) un nombre minimal de composantes, ii) des distributions fortement asymétriques, et iii) des paramètres d'échelle très différents, toutes conditions permettant de conserver une asymétrie significative et d'éloigner de la normalité asymptotique. Nous avons donc retenu le cas de deux lois exponentielles, $\Gamma(1,2)$ et $\Gamma(1,1)$, ayant un coefficient de variation unitaire ($CV_1 = CV_2 = 1$) ainsi qu'un rapport des paramètres d'échelle égal à deux ($\beta_1/\beta_2 = 2$). Après avoir obtenu, par convolution, la forme analytique de la distribution résultante, on pourra la comparer à celle de la distribution équivalente.

4.1 Distribution exacte:

On note $Y = X_1 + X_2$ et $f_Y(y)$ la densité de probabilité obtenue par convolution des deux lois exponentielles $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$ dont l'expression formelle s'écrit :

$$f_Y(y) = \frac{\exp -(y/\beta_1) - \exp -(y/\beta_2)}{\beta_1 * \beta_2 * ((1/\beta_2) - (1/\beta_1))} \tag{16}$$

qui se simplifie en $f_Y(y) = \exp -(y/2) - \exp -(y)$, compte tenu des valeurs assignées aux paramètres d'échelle. Les moments non centrés d'ordre k étant définis par $m(k) = 2^{k+1}\, k\,\Gamma(k) - k\,\Gamma(k)$, cette distribution a pour caractéristiques statistiques : une moyenne $M_1 = 3$, une variance $M_2 = 5$, un coefficient de variation $CV = \sqrt{5/3}$, une asymétrie $K = 18/5\sqrt{5} \approx 1.610$ et un mode $y^m = 2\,\log(2) \approx 1.386$, avec $f(y^m) = 1/4$. Quant à la fonction de répartition, elle s'écrit $F_Y(y) = 1 + \exp -(y) - 2\,\exp -(y/2)$. On peut de plus vérifier la tendance asymptotique évoquée plus haut en notant que pour $y >> 1$, on a $f(y) \approx exp - (y/2)$.

4.2 Distribution équivalente:

La détermination des paramètres fondée sur l'identification des deux premiers moments homologues, donne d'après (14) les paramètres d'échelle $\beta' = 5/3$ et de forme $\alpha' = 9/5$.

Cette distribution possède, par définition, une moyenne, une variance et donc un coefficient de variation identiques à ceux de la distribution de référence. Ses imperfections peuvent être mises en évidence par les écarts affectant d'autres caractéristiques:

- son asymétrie est légérement plus faible, dans le rapport $Sk'/Sk) = 25/27 \approx 0.926$;
- son mode est $y'^m = \beta'\,(\alpha' - 1) = 5/3$ et donc $y'^m/y^m = 5/6\,\log(2) \approx 0.832$. Ceci traduit un décalage de la densité vers la gauche. Les pics correspondants diffèrent peu, puisque dans le rapport $f_Y(y'^m)/f_Y(y^m) = 12/5\,\exp(-1)/\Gamma(9/5) \approx 0.948$.

Une comparaison numérique des densités montre que les plus grands écarts apparaissent sur les queues - positifs dans la plage $0 < y < 1/3$ et négatifs dans la plage $y > 13$ - les erreurs relatives correspondant à ces bornes étant inférieures à 10% environ. La plage $1/2 < y < 7$ est couverte avec des erreurs inférieures à 5% environ.
La plus faible asymétrie de la distribution équivalente influence la queue supérieure, dont la décroissance est plus rapide à partir de $y > 10$. En fait, il est plus pertinent de comparer les fonctions de répartition, dont les écarts relatifs devraient être plus faibles, compte tenu de l'intégration qui relie $F_Y(y)$ à $f_Y(y)$. Le tableau ci-dessous permet de comparer $F'_Y(y)$ et $F_Y(y)$ pour des valeurs de $F'_Y(y)$ comprises entre 1% et 99%. Les pourcentages non entiers de $F_Y(y)$ sont calculées de la façon suivante: on se fixe d'abord une valeur entière $F'_Y(y)$, puis on détermine par inversion le quantile correspondant y de la distribution équivalente $\Gamma(9/5, 5/3)$. Enfin, on calcule la valeur exacte $F_Y(y)$ à partir de l'expression donnée dans la section précédente. Compte tenu d'une approximation de l'ordre de 1% affectant le calcul du quantile y, les valeurs de $F_Y(y)$ sont arrondies à 0.1% près.

$F'_Y(y)$ en %	1.00	5.00	10.0	25.00	50.00	75.00	90.00	95.00	99.00
$F_Y(y)$ en %	0.65	3.35	9.02	24.68	50.46	75.42	90.00	94.95	98.66
$quantile(y)$	0.17	0.45	0.71	01.37	02.48	04.06	05.95	07.33	10.00

On constate que la coincidence est satisfaisante dans une plage utile comprise entre 10% et 99%. Ces écarts, correspondant à un cas limite défavorable, seront généralement plus faibles si l'on envisage un nombre plus grand de composantes moins hétérogènes.

5 Conclusion

La distribution de la somme de lois Gamma mutuellement indépendantes et hétérogènes peut être valablement approchée par une distribution Gamma équivalente dont les paramètres sont déterminés uniquement et simplement par la moyenne et la variance de la distribution exacte. Par rapport à la convergence en loi vers une distribution normale que cette équivalence respecte asymptotiquement, elle tient compte de l'asymétrie résultant du nombre fini de composantes. Cette équivalence peut être interprétée comme une propriété de quasi-stabilité de la distribution Gamma. Ceci correspond à une extension empirique de la stabilité additive du Khi-deux, lorsque les paramètres d'échelle ne sont pas unitaires.

Bibliographie

[1] Erdös P. (1942) On the law of iterated logarithm, *Annals of Mathematics*, 43, 419-436.
[2] Saporta G. (1990) *Probabilités, Analyse des données et Statistique*, Editions Technip, Paris.
[3] Zolotarev V. M. (1961) Concerning a certain probability problem, *Theory of Probability and its Applications*, 6, 201-204.