

**UNIVERSITÉ MONTESQUIEU–BORDEAUX IV**  
DROIT, SCIENCES SOCIALES ET POLITIQUES, SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION

Laboratoire d'Analyse et de Recherche Économiques – URA CNRS n°944

**LA STRUCTURE PAR TERME DES TAUX ZÉRO :  
MODÉLISATION ET IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE**

Application à la structure par terme française du 10 février 1994 au 30 août 1996

**Thèse pour le doctorat ès Sciences Économiques**

Présentée et soutenue le 23 mars 1998

par

**Thierry RONCALLI**

MEMBRES DU JURY

**Eric GIRARDIN**, suffragant

Professeur à l'Université Montesquieu–Bordeaux IV

**Christian GOURIEROUX**, rapporteur

Professeur à l'Université Paris IX-Dauphine et à l'ENSAE

**Henri LOUBERGE**, suffragant

Professeur à l'Université de Genève

**Vélayoudom MARIMOUTOU**, directeur de recherche

Professeur à l'Université Montesquieu–Bordeaux IV

**Mark SALMON**, rapporteur

Professeur à la City University Business School

## Remerciements

Mes plus profonds remerciements vont tout d'abord à mon directeur de recherche, Monsieur le Professeur Vélayoudom MARIMOUTOU, pour la disponibilité dont il a fait preuve à mon égard, pour les conseils qu'il m'a prodigués et pour ses encouragements. Je lui suis reconnaissant aussi de la liberté dont j'ai pu bénéficier pour mener à bien d'autres projets.

Je tiens aussi à exprimer mes plus sincères remerciements à Messieurs les Professeurs Christian Gouriéroux et Mark Salmon qui ont consenti à rapporter mes travaux et ce, en dépit d'emplois du temps très chargés. Toute ma gratitude va également à Messieurs les Professeurs Eric Girardin et Henri Loubergé pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Je remercie, en outre, Monsieur le Professeur Henri Bourguinat qui m'a accueilli au sein du Laboratoire d'Analyse et de Recherche Economiques et Monsieur le Professeur Dominique Lacoue-Labarthe pour la confiance qu'il m'a accordée en me confiant les cours de Théorie Financière du Magistère d'Economie et Finance Internationales.

Il m'est difficile d'oublier ceux qui ont été mes compagnons de route durant ces quatre années et les relations chaleureuses que nous avons eu l'occasion de nouer au laboratoire. En particulier, je salue amicalement Jean-Sébastien, Marc-Alexandre et Arnaud avec lesquels j'ai partagé le bureau et échangé de nombreuses idées. Ensemble, nous avons entrepris de nombreux travaux.

Il y a quatre ans, je découvrais le logiciel numérique GAUSS. Je ne savais pas à l'époque que cela modifierait profondément mes recherches. Avec l'équipe de Ritme Informatique, nous avons réalisé de nombreux projets qui ont eu une influence importante sur cette thèse. Qu'il me soit permis de les remercier, ainsi que les nombreux utilisateurs de GAUSS avec lesquels je suis en contact.

Enfin, je remercie Florence qui a fait preuve de beaucoup de patience et m'a toujours soutenu dans les moments difficiles. Sa présence, ainsi que celle de nos enfants, ont été pour moi salutaires dans les périodes de doute et de découragement.

A la petite Éva,  
et à Théo.

# Table des matières

Introduction générale	8
<b>I Aspects économiques de la structure par terme ou une approche de la structure par terme observée</b>	<b>12</b>
<b>1 Quelques notions sur la structure par terme</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction	13
1.2 Les théories traditionnelles de la structure par terme	14
1.2.1 La théorie des anticipations	15
1.2.2 La théorie de la prime de liquidité	17
1.2.3 La théorie de la segmentation des marchés	18
1.2.4 La théorie de l'habitat préféré	19
1.3 La construction de la courbe des taux	20
1.3.1 Comment définir La courbe des taux ?	20
1.3.1.1 La structure par terme des obligations à coupon zéro	21
1.3.1.2 Justification de la définition par le modèle d'évaluation par arbitrage	22
1.3.2 Les problèmes de construction	22
1.3.2.1 Le choix de la méthode d'estimation	24
1.3.2.2 Structure par terme des coupons zéro ou des taux zéro ?	26
1.3.2.3 Le marché des obligations à coupon zéro en France	28
1.3.3 Quelques méthodes d'estimation	30
1.3.3.1 Les fonctions splines polynomiales	31
1.3.3.2 La méthode de NELSON et SIEGEL [1987]	34
1.3.3.3 L'implémentation de ces méthodes	37
1.4 La structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996	42
1.4.1 La courbe des taux zéro française	43
1.4.1.1 La crise monétaire de février 1995	43
1.4.1.2 La crise monétaire d'octobre 1995	43
1.4.2 Quelques utilisations du modèle de Nelson et Siegel	44
1.4.2.1 La décomposition de Nelson et Siegel	44
1.4.2.2 Une analyse des taux zéro court et long français	46
1.4.2.3 La détermination des taux à terme	47
1.5 La théorie des anticipations rationnelles	49
1.5.1 Les travaux de John Campbell et Robert Shiller	51
1.5.1.1 L'apport analytique	51

1.5.1.2	L'apport empirique . . . . .	54
1.5.2	Les tests de l'hypothèse d'anticipations rationnelles . . . . .	55
1.5.2.1	Modélisation linéaire du taux long . . . . .	55
1.5.2.2	Les tests dans une économie linéaire réursive . . . . .	61
1.5.2.3	Les tests de volatilité . . . . .	72
1.5.3	La prime de terme et la théorie des anticipations . . . . .	73
1.5.3.1	La pertinence d'une prime de terme . . . . .	73
1.5.3.2	La prime de terme est-elle monotone croissante ? . . . . .	74
1.6	Conclusion . . . . .	75
1.7	Annexes . . . . .	77
1.7.1	L'optimisation sous contraintes linéaires . . . . .	77
1.7.2	La méthode de PHILLIPS et HANSEN [1990] . . . . .	77
1.7.3	Test de stationnarité . . . . .	80
1.7.3.1	Présentation du test KPSS . . . . .	80
1.7.3.2	Application du test KPSS aux taux zéro . . . . .	81
1.7.4	La programme quadratique associé à une régression en imposant des contraintes d'inégalités . . . . .	82
<b>2</b>	<b>Le contenu informationnel de la structure par terme</b>	<b>84</b>
2.1	Introduction . . . . .	84
2.2	Une nouvelle vision de la structure par terme . . . . .	85
2.2.1	Le spread de la courbe des taux . . . . .	85
2.2.2	La pente de la courbe des taux . . . . .	87
2.2.3	Le niveau de la courbe des taux . . . . .	88
2.2.4	Les relations entre le spread, la pente et le niveau de la courbe des taux . . . . .	90
2.2.5	Comparaison des courbes de taux française et allemande . . . . .	92
2.3	Les taux à terme implicites . . . . .	95
2.3.1	La détermination des taux à terme dans le modèle de Nelson et Siegel . . . . .	97
2.3.2	Prévision des taux d'intérêt futurs . . . . .	100
2.3.2.1	Anticipations d'évolution des taux . . . . .	100
2.3.2.2	Evolution des anticipations des taux . . . . .	107
2.3.3	Les taux à terme et la politique monétaire . . . . .	107
2.4	Les anticipations d'inflation . . . . .	109
2.4.1	La relation de Fisher . . . . .	109
2.4.2	Mesure des tensions inflationnistes . . . . .	113
2.4.3	Des études empiriques non consensuelles . . . . .	118
2.5	Activité et courbe des taux . . . . .	119
2.5.1	Des éléments empiriques . . . . .	119
2.5.2	Des éléments théoriques . . . . .	122
2.6	Les anticipations de change . . . . .	123
2.6.1	Définition des taux de dépréciation ex-post . . . . .	125
2.6.2	L'utilisation des taux à terme pour la prévision du cours de change . . . . .	127
2.6.3	Crédibilité de la politique de change . . . . .	131
2.7	Conclusion . . . . .	132

<b>3</b>	<b>Une analyse factorielle de la structure par terme</b>	<b>134</b>
3.1	Introduction . . . . .	134
3.2	Une analyse en terme de corrélation . . . . .	134
3.2.1	Le principe de l'analyse en composantes principales . . . . .	135
3.2.2	Une analyse factorielle de la courbe des taux française . . . . .	136
3.2.2.1	Interprétation du premier facteur . . . . .	138
3.2.2.2	Interprétation du second facteur . . . . .	139
3.2.2.3	Interprétation du troisième facteur . . . . .	144
3.2.3	Considération de différents segments de la courbe des taux . . . . .	146
3.3	Une analyse en terme de composantes inobservables . . . . .	148
3.3.1	La modélisation espace-état . . . . .	149
3.3.2	Une analyse en terme de systèmes approximativement linéaires . . . . .	151
3.3.3	Le problème d'identification d'un système linéaire . . . . .	152
3.3.4	Quelques résultats empiriques . . . . .	155
3.4	La prise en compte de relations multilatérales . . . . .	157
3.4.1	Mise en évidence d'un facteur multilatéral . . . . .	158
3.4.2	L'interdépendance des taux zéro . . . . .	162
3.4.2.1	Une approche en terme du taux nominal . . . . .	163
3.4.2.2	Une approche en terme de spread de taux . . . . .	165
3.5	Conclusion . . . . .	166

## **II Aspects financiers de la structure par terme ou une approche de la structure par terme théorique** **167**

<b>4</b>	<b>Modèle financier de structure par terme — Le cas d'une seule variable d'état</b>	<b>168</b>
4.1	Introduction . . . . .	168
4.2	Quelques notions préliminaires . . . . .	169
4.2.1	La notion de structure par terme en temps continu . . . . .	169
4.2.2	La notion d'arbitrage . . . . .	170
4.3	Le modèle d'arbitrage de la structure par terme des obligations à coupon zéro . . . . .	172
4.3.1	Présentation du modèle . . . . .	172
4.3.2	Dérivation de l'équation de valorisation . . . . .	173
4.3.3	Interprétation de la fonction $\lambda(t)$ . . . . .	174
4.3.4	La mesure de probabilité neutre au risque et la solution de l'EDP . . . . .	175
4.4	Résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles . . . . .	176
4.4.1	La méthode des différences finies . . . . .	176
4.4.1.1	Discretisation dans l'espace . . . . .	176
4.4.1.2	Discretisation dans le temps . . . . .	177
4.4.1.3	La méthode des $\theta$ -schémas . . . . .	177
4.4.2	Les différents algorithmes de résolution . . . . .	178
4.4.2.1	Le schéma explicite . . . . .	178
4.4.2.2	Le schéma totalement implicite . . . . .	179
4.4.2.3	Les schémas mixtes . . . . .	179

4.4.3	Etude de la stabilité des schémas . . . . .	180
4.4.4	Programmation efficace des algorithmes . . . . .	182
4.4.5	Un exemple . . . . .	185
4.5	Résolution numérique de la solution par martingale . . . . .	190
4.5.1	Méthode de Monte Carlo . . . . .	190
4.5.1.1	L'estimateur classique . . . . .	190
4.5.1.2	L'estimateur du bootstrap . . . . .	191
4.5.1.3	Un exemple . . . . .	192
4.5.2	Approximation par une chaîne de Markov . . . . .	195
4.6	Le modèle de Vasicek [1977] . . . . .	197
4.7	Les autres modèles . . . . .	203
4.8	Conclusion . . . . .	204
4.9	Annexes . . . . .	205
4.9.1	Théorème de représentation de Feynman-Kac . . . . .	205
4.9.2	Théorème de Girsanov . . . . .	206
4.9.3	Algorithme tridiagonal . . . . .	206
4.9.4	Algorithmes de simulation d'une équation différentielle sto- chastique . . . . .	207
4.9.5	Solution d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	208
4.9.6	Preuve du théorème 8 . . . . .	209
4.9.7	Preuve de la solution avec contraintes . . . . .	211

## 5 Modèle financier de structure par terme — Le cas de plusieurs variables d'état 213

5.1	Introduction . . . . .	213
5.2	Modèle d'arbitrage à $M$ variables d'état . . . . .	213
5.2.1	Présentation du modèle . . . . .	213
5.2.2	Dérivation de l'équation de valorisation . . . . .	215
5.2.3	Solution de l'équation de valorisation . . . . .	219
5.2.4	Quelques cas particuliers . . . . .	221
5.2.4.1	Modèle à deux variables d'état . . . . .	221
5.2.4.2	Modèle à trois variables d'état . . . . .	223
5.2.4.3	Modèle linéaire factoriel gaussien . . . . .	224
5.2.5	Méthodes numériques de résolution . . . . .	226
5.3	Un modèle d'équilibre général intertemporel des prix des actifs . . . . .	228
5.3.1	Présentation du modèle . . . . .	229
5.3.2	Solution de l'utilité indirecte . . . . .	231
5.3.3	Détermination du taux d'intérêt d'équilibre . . . . .	233
5.3.4	Détermination de l'équation de valorisation des actifs financiers	234
5.3.5	La structure par terme des obligations à coupon zéro . . . . .	234
5.3.5.1	Dérivation de la structure par terme . . . . .	234
5.3.5.2	Equivalence modèle d'arbitrage – modèle d'équilibre général . . . . .	235
5.4	Les différents modèles à plusieurs variables d'état . . . . .	236
5.4.1	Le modèle de RICHARD [1978] . . . . .	236
5.4.2	Le modèle de BRENNAN et SCHWARTZ [1979] . . . . .	237
5.4.3	Le modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985b] . . . . .	237

5.4.4	Le modèle de LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992]	238
5.4.5	Le modèle de CHEN [1995]	239
5.5	Conclusion	242
5.6	Annexes	242
5.6.1	Générateur infinitésimal d'un processus augmenté	242
5.6.2	Dérivation du modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985a]	243
5.6.2.1	Preuve de la proposition 14	243
5.6.2.2	Preuve de la proposition 15	244
5.6.2.3	Preuve de la proposition 16	245
5.6.2.4	Preuve de la proposition 17	246
5.6.2.5	Preuve de la proposition 18	246
5.6.2.6	Preuve de la proposition 19	248
5.6.2.7	Preuve de la proposition 20	248
5.6.2.8	Preuve du théorème 21	249
<b>6</b>	<b>Estimation des modèles financiers de structure par terme</b>	<b>250</b>
6.1	Introduction	250
6.2	Estimation des paramètres de la dynamique des variables d'état	251
6.2.1	La passage du temps continu au temps discret	251
6.2.2	Estimation des paramètres d'un processus de diffusion	254
6.2.2.1	L'estimateur de la méthode du maximum de vraisemblance	254
6.2.2.2	L'estimateur de la méthode des moments généralisés	260
6.2.3	Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique	260
6.2.3.1	L'estimateur naïf de la méthode du maximum de vraisemblance	261
6.2.3.2	L'estimateur naïf de la méthode des moments généralisés	262
6.2.3.3	L'estimateur de la méthode de l'inférence indirecte	263
6.2.4	Extension au cas multidimensionnel	267
6.3	Estimation des paramètres des fonctions de prix des obligations à coupon zéro	268
6.4	Quelques résultats empiriques	270
6.4.1	Un survol des études existantes	270
6.4.2	Analyse empirique à partir de la structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996	272
6.5	Conclusion	276
<b>7</b>	<b>Structures par terme théorique et observée : Quelques exemples de valorisation et de gestion des actifs financiers</b>	<b>279</b>
7.1	Introduction	279
7.2	Utilisation des fonctions d'actualisation implicites pour la valorisation des actifs financiers	279
7.2.1	Les obligations	280
7.2.2	Les options	281
7.2.3	Les options sur obligation	285



7.3	Modèles de déformation de la courbe des taux . . . . .	288
7.3.1	La problématique . . . . .	288
7.3.2	Le modèle de HO et LEE [1986] . . . . .	289
7.3.2.1	Détermination des fonctions perturbatrices $h(\tau)$ et $h^*(\tau)$ . . . . .	290
7.3.2.2	Valorisation des actifs contingents . . . . .	293
7.3.2.3	Application à la structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996 . . . . .	295
7.3.3	Le modèle de BLACK, DERMAN et TOY [1990] . . . . .	297
7.3.4	Le modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1992] . . . . .	299
7.3.4.1	Présentation du modèle . . . . .	300
7.3.4.2	Implémentation numérique . . . . .	302
7.3.5	Le modèle de HULL et WHITE [1993] . . . . .	305
7.4	Conclusion . . . . .	311
7.5	Annexes . . . . .	312
7.5.1	Equation fondamentale de la finance . . . . .	312
7.5.2	Primes des caps et floors dans le modèle de Vasicek [1977] . . . . .	314
7.5.3	Le modèle de HO et LEE [1986] . . . . .	315
7.5.3.1	Détermination des fonctions perturbatrices $h(\tau)$ et $h^*(\tau)$ . . . . .	315
7.5.3.2	Interprétation des coefficients $\delta$ et $\pi$ . . . . .	317
	<b>Conclusion générale</b> . . . . .	<b>319</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>327</b>
	<b>Notations</b> . . . . .	<b>351</b>
	<b>Annexe générale : la bibliothèque SPT</b> . . . . .	<b>353</b>
	Installation . . . . .	353
	Liste des procédures . . . . .	354
	Les mots réservés . . . . .	358
	Description des procédures . . . . .	360
	Liste des programmes . . . . .	483
	Remarques sur la gestion de la base de données des obligations . . . . .	484
	Construction de la base de données des obligations . . . . .	484
	L'utilisation des données DATASTREAM . . . . .	486

# Introduction générale

La structure par terme des taux d'intérêt est une notion relativement récente dans l'histoire de l'analyse économique. Apparue dans les années trente<sup>1</sup>, elle constitue actuellement un domaine de recherche important. Cependant, l'emploi abusif du terme "structure par terme des taux d'intérêt" par certains travaux, sous prétexte qu'ils font référence à au moins deux taux d'intérêt différents, engendre des confusions. En fait, la structure par terme des taux d'intérêt, ou la courbe des taux, correspond à la courbe des taux de rendement des obligations à coupon zéro. Notre travail porte uniquement sur la structure par terme des taux **zéro**.

En France, depuis le début des années 90, nous notons plusieurs faits marquants liés à la courbe des taux. D'un point de vue financier, deux événements ont contribué à mieux faire connaître la structure par terme. D'une part, en mai 1991, le Trésor français autorise le démembrement de l'OAT 8.5% 2019 et crée ainsi un marché d'obligations à coupon zéro. La simplicité de ce titre n'est qu'apparente, comme le rappelle l'avant-propos de CLERMONT-TONNERRE et LÉVY [1992] :

*L'annonce par le Trésor du démembrement de l'OAT 2019 a surpris la plupart des banques... A cet événement, il convenait de réagir vite et fort... Réagir fort, car les moyens à mettre en œuvre étaient relativement importants en termes de savoir-faire... Cette greffe des mathématiques sur le marché devait être menée en direct live, le délai imposé par la concurrence étant de l'ordre de la journée. La réaction de la direction des marchés du CCF fut à la mesure de l'enjeu : elle décida de procéder au mariage de la carpe et du lapin, en réunissant un ingénieur et un trader pour lancer l'activité.*

D'autre part, le 6 février 1997, on assiste à la première émission en France d'obligations convertibles à coupon zéro par le groupe Clarins. L'opération est très technique, notamment pour la fixation du prix d'émission. Chacune de ces deux innovations a posé des problèmes de modélisation et d'implémentation numérique aux

---

<sup>1</sup>Keynes parle ainsi de "gammes des taux d'intérêt à différents termes" dans la Théorie Générale.

praticiens. Cependant, ces difficultés ne touchent pas seulement l'aspect financier de la structure par terme. Ainsi, après l'intervention remarquée de Lars Svensson au colloque Banque de France-Universités en 1993, la Banque de France se dote enfin d'un programme de construction de courbe des taux fin 1995.

La courbe des taux intéresse à la fois les économistes **et** les financiers. Les premiers s'intéressent aux anticipations futures de taux d'intérêt et la plupart des banques centrales l'utilisent maintenant comme un indicateur pour fixer la politique monétaire. Pour les seconds, son étude permet de valoriser et de gérer des produits financiers. Les uns analysent une courbe des taux observée, alors que les autres s'intéressent beaucoup plus à la courbe des taux théorique. A première vue, ces deux aspects, économique et financier, sont distincts l'un de l'autre. Le rapport "Macroeconomic and monetary policy issues raised by the growth of derivatives markets" de la Banque des Règlements Internationaux révèle un intérêt croissant des économistes pour les modèles financiers et notamment ceux de la structure par terme. L'annexe VI "Some guidelines for gauging market sentiment from derivatives markets data" préparée par la Banque de France présente un exemple d'utilisation du prix d'un contrat *future* pour évaluer les anticipations des agents financiers. Dans l'annexe IV, la Banque du Japon s'intéresse à la volatilité implicite des options à la monnaie sur obligation pour comprendre l'évolution du taux d'intérêt de long terme. Pour que son interprétation ne soit pas erronée, l'économiste doit comprendre les modèles qu'il manipule.

Comme l'indiquent SÖDERLIND et SVENSSON [1997], cette utilisation des modèles financiers en économie devrait croître très rapidement. Une des raisons de ce phénomène est la nouveauté des techniques employées. Face à la faible performance des anciens indicateurs de la politique monétaire comme M3 par exemple, ces techniques présentent une alternative pour la construction de nouveaux indicateurs. Ainsi, dans son intervention à la Banque de France en novembre 1993, Svensson utilise les taux à terme implicites de la courbe des taux comme indicateur de la politique monétaire. Une autre raison concerne les résultats très intéressants des études faites à partir des options pour extraire le "contenu en information" de ces actifs et révéler ainsi les anticipations des agents financiers.

Au début de l'année 1997, la Fondation Banque de France pour la Recherche en Économie Monétaire, Financière et Bancaire lance un appel d'offres de recherche sur le thème "Innovations dans la banque et la finance et leurs implications pour la politique monétaire et le contrôle bancaire". L'un des projets intitulé "Indicateurs monétaires et financiers" est présenté de la façon suivante :

*Depuis quelques années, les banques centrales manifestent un intérêt marqué pour la construction d'indicateurs monétaires et financiers pouvant servir de guide à la politique monétaire. L'objet de ce sous-thème serait de développer diverses méthodes — notamment celles de l'ingénierie financière — susceptibles de fournir aux banques centrales des indicateurs synthétiques leur permettant d'extraire les anticipations sur les marchés financiers et de quantifier l'orientation de la politique monétaire. On peut considérer, à titre d'exemple, le contenu en information des marchés de produits dérivés, la mesure des risques dans le système financier, l'analyse des facteurs dans la déformation nationale ou internationale des courbes de taux ou le rôle des prix d'actifs comme indicateurs pour la politique monétaire.*

Notre travail s'inscrit dans cette ligne directrice. Cependant, l'application des modèles financiers de structure par terme à des fins économiques est une tâche complexe. L'objet de cette thèse est beaucoup plus modeste. Puisque les difficultés rencontrées par les économistes concernent principalement la **modélisation** et l'**implémentation numérique**, nous choisissons d'aborder ces difficultés et de fournir les outils nécessaires pour l'utilisation économique de la structure par terme des taux zéro.

Deux parties composent la thèse. La première partie concerne les aspects économiques de la structure par terme et son utilisation traditionnelle dans le cadre de la politique monétaire. Dans le premier chapitre, nous abordons le problème de la construction d'une courbe des taux à partir des prix de marché des obligations. Nous consacrons aussi une section à l'étude de la théorie des anticipations rationnelles. Celle-ci est à la base de l'analyse économique de la structure par terme. Dans les deux chapitres suivants, nous présentons l'utilisation des taux à terme pour construire des indicateurs de politique monétaire et une analyse factorielle de la déformation de la courbe des taux. La seconde partie traite de la modélisation financière de la structure par terme et de son utilisation pour la valorisation des actifs contingents au taux d'intérêt. Quatre chapitres composent cette partie. Les deux premiers concernent les modèles financiers d'arbitrage à un seul facteur et à plusieurs facteurs. Une analyse empirique de la dynamique du taux zéro instantané et l'utilisation des modèles financiers de structure par terme pour la valorisation des actifs dérivés constituent les deux derniers chapitres. Enfin, nous présentons en conclusion quelques applications possibles des modèles financiers théoriques pour extraire les anticipations sur les marchés financiers de taux d'intérêt.

Nous avons développé spécialement pour la thèse une bibliothèque GAUSS de procédures intitulée **SPT**. L'annexe générale constitue le manuel de référence de cette bibliothèque.

## Partie I

**Aspects économiques de la  
structure par terme ou une  
approche de la structure par  
terme observée**

# Chapitre 1

## Quelques notions sur la structure par terme

### 1.1 Introduction

Il est difficile d'appréhender la structure par terme des taux d'intérêt, car elle comprend à la fois le concept de taux d'intérêt et celui de structure. Contrairement à la notion de structure par terme, celle de taux d'intérêt est relativement ancienne et occupe une grande place dans l'histoire de l'analyse économique. Jusqu'aux années 1940, les économistes s'intéressent à la nature du taux d'intérêt. Est-ce un phénomène monétaire ou réel ? Quels sont les marchés qui le déterminent ? Les autorités peuvent-elles l'influencer ? Quelle est l'influence du niveau général du taux d'intérêt sur l'économie ? Il est important de noter que la valeur du taux d'intérêt défini par ces économistes est en fait un niveau général. Le taux d'intérêt apparaît alors **unique**. Il faut attendre Keynes pour parler de "gammes des taux d'intérêt à différents termes"<sup>1</sup>, mais le passage d'un taux unique à une **multitude** de taux **interdépendants** a été difficile, même si aujourd'hui il est naturel de préciser à quel type de taux d'intérêt nous faisons référence.

DE BOISSIEU [1982] note que "Le passage du singulier au pluriel, du taux d'intérêt à la structure des taux d'intérêt représente une transition indispensable". Hicks est l'un des premiers économistes à mettre l'accent sur l'existence de plusieurs taux d'intérêt. Il analyse en détail les motifs de cette multiplicité et retient deux facteurs explicatifs principaux. Le premier facteur concerne la maturité et le calendrier des coupons versés et le second est lié au risque de détention d'un titre long (défaillance de l'emprunteur, illiquidité de l'actif). Les avancées de Hicks sur la structure par terme (et sur l'économie financière) sont importantes. Il précise la notion de prime de risque. Il utilise la notion d'arbitrage pour montrer que le taux

---

<sup>1</sup>Le terme "gamme des taux" est encore utilisé par certains économistes et financiers, par exemple Patrice PONCET [1997].

d'intérêt au comptant peut se décomposer en taux d'intérêt à terme. Ces éléments sont repris par LUTZ [1940] et MEISELMAN [1962] pour élaborer la théorie des anticipations de la structure par terme des taux d'intérêt. Bien qu'il existe d'autres théories et qu'elle fasse l'objet de nombreuses critiques, la théorie des anticipations représente un "noyau central" (GOURLAOUEN [1997]) pour l'analyse économique de la courbe des taux.

Cependant, les définitions de la structure par terme des théories qui apparaissent des années 1940 à 1980 ne sont pas satisfaisantes et des problèmes de terminologie se posent. Certains auteurs font référence à une seule structure par terme (ROLL [1970]), alors que d'autres distinguent plusieurs structures de taux (DE BOISSIEU [1982], LUBOCHINSKY [1990]), comme par exemple la structure des taux de marchés et la structure des taux débiteurs des intermédiaires financiers. Des économistes présentent des travaux empiriques qui prennent en compte selon eux la structure par terme. En fait, cette structure par terme est généralement représentée par une différence entre un taux de rendement d'une obligation d'état et un taux d'intérêt du marché monétaire ! Avec le développement des recherches sur la valorisation des obligations, les financiers apportent une réponse plus précise et plus satisfaisante. La construction (ou l'estimation) d'une courbe des taux est alors plus rigoureuse. Elle fait actuellement l'objet de nombreux travaux, en particulier de la part des banques centrales et des institutions financières, car sans l'outil de construction de la courbe des taux, l'analyse économique de la structure par terme est aujourd'hui difficilement possible.

La structure par terme est aussi fortement liée à la théorie moderne des anticipations rationnelles. Cette dernière reste une référence, un point d'ancrage au développement des méthodes d'interprétation économique. C'est pourquoi nous consacrerons la dernière section de ce chapitre à la théorie moderne des anticipations rationnelles et à sa vérification.

## **1.2 Les théories traditionnelles de la structure par terme**

Les auteurs (par exemple, DEMAROLLE et QUINET [1996]) distinguent généralement quatre théories : celle des anticipations, celle de la prime de liquidité, celle de la segmentation et celle de l'habitat préféré. Il existe de nombreux points communs entre elles, c'est pourquoi cette délimitation peut sembler artificielle ou exagérée. Ainsi, les théories des anticipations et de la prime de liquidité sont très proches. La théorie de l'habitat préféré peut apparaître comme une modification de la théorie de



la segmentation (LUBOCHINSKY [1990]). D'autres classifications sont donc possibles. Par exemple, GOURLAOUEN [1997] présente les trois dernières théories comme un amendement de la théorie pure des anticipations par la prise en compte d'une prime de risque exogène.

### 1.2.1 La théorie des anticipations

Cette théorie a évolué au cours du temps. Nous distinguons généralement la théorie "naïve" des anticipations de LUTZ [1940] de la théorie des anticipations de MEISELMAN [1962].

Lutz reprend les travaux de Hicks en accentuant le rôle des anticipations. Chez Hicks, les différents taux au comptant  $R_t(\tau)$  sont liés au taux à terme  $F_t(\tau, m)$ . Par exemple, nous avons

$$[1 + R_t(\tau)]^\tau = \prod_{\theta=0}^{\tau-1} [1 + F_t(\theta, 1)] \quad (1.1)$$

Hicks explique la formation des taux à terme  $F_t(\theta, 1)$  par les anticipations des agents sur l'évolution future du taux court  $R_{t+\theta}(1)$  et d'autres facteurs. Lutz estime que le taux à terme  $F_t(\theta, 1)$  est exactement égal à l'anticipation en  $t$  du taux au comptant  $R_{t+\theta}(1)$ . Nous noterons celle-ci  ${}_tR_{t+\theta}(1)$ . L'équation (1.1) devient

$$[1 + R_t(\tau)]^\tau = \prod_{\theta=0}^{\tau-1} [1 + {}_tR_{t+\theta}(1)] \quad (1.2)$$

Cette formulation implique l'hypothèse forte de certitude de la prévision des taux d'intérêt, ce qui explique le nom de théorie "naïve" des anticipations. Notons le rôle **central**<sup>2</sup> que joue le taux court dans cette théorie : puisque la structure par terme  $\mathfrak{R}$  est entièrement déterminée par les prévisions des agents du taux court, la courbe des taux permet de révéler les anticipations des agents. L'interprétation diffère selon la forme de la courbe des taux (ascendante, plate ou inversée). Par exemple, une structure par terme inversée est le signe d'une anticipation de baisse du taux court.

La théorie des anticipations de Meiselman prend en compte un cadre probabiliste. Le taux anticipé  ${}_tR_{t+\theta}(1)$  n'est plus une variable certaine mais une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un ensemble  $\mathcal{E}$ . Meiselman suppose que l'agent est capable d'affecter une probabilité d'occurrence à chacun des éléments de  $\mathcal{E}$ . L'agent construit alors une prévision basée sur le critère de l'espérance mathématique. L'équation (1.2) devient

$$[1 + R_t(\tau)]^\tau = \prod_{\theta=0}^{\tau-1} [1 + E[{}_tR_{t+\theta}(1)]] \quad (1.3)$$

---

<sup>2</sup>DE BOISSIEU [1976] parle de taux d'intérêt *pivot*.

L'apport de Meiselman est aussi économétrique et méthodologique. Comme l'agent construit les probabilités d'occurrence sur la base de l'information disponible à l'instant  $t$ , la fonction de densité de  ${}_tR_{t+\theta}(1)$  est conditionnelle et révisée chaque fois que l'ensemble d'information se modifie. Meiselman adopte un schéma de révision linéaire des prévisions de la forme

$$E[{}_tR_{t+\theta}(1)] = E[{}_{t-1}R_{t+\theta}(1)] + b_\theta (R_t(1) - E[{}_{t-1}R_t(1)]) \quad (1.4)$$

avec  $1 = b_0 > b_1 > \dots > b_\infty$ . Le rôle de l'erreur de prévision sur le taux court diminue avec la maturité. Puisque  $F_t(\theta, 1) = E[{}_tR_{t+\theta}(1)]$ , Meiselman propose d'estimer le modèle linéaire suivant

$$F_t(\theta, 1) - F_{t-1}(\theta + 1, 1) = \alpha_\theta + \beta_\theta (R_t(1) - F_{t-1}(1, 1)) + \varepsilon_t^\theta \quad (1.5)$$

Tester la théorie des anticipations revient à tester l'hypothèse  $1 > \beta_1 > \dots > \beta_\infty$ . Meiselman utilise des données annuelles américaines pour la période 1901-1954. Il observe effectivement une décroissance<sup>3</sup> de la valeur de l'estimateur  $\beta_\theta$  en fonction de la maturité  $\theta$ . Des études contemporaines confirment les résultats de Meiselman (par exemple, HOLLAND [1965] ou VAN HORN [1965]). Mais très vite, de nombreux travaux vont les infirmer (par exemple, MASERA [1972]). En fait, il semble que l'hypothèse de Meiselman soit vérifiée avec des données de basse fréquence (annuelles), mais qu'elle ne soit plus soutenable avec des données mensuelles ou trimestrielles. L'attaque la plus significative des résultats de Meiselman est celle de BUSE [1967]. Il utilise la même base de données que Meiselman et se pose alors la question suivante : est-ce que l'arrangement temporel de la série est important pour la vérification empirique ? La réponse est forcément positive, puisque la régression suivante

$$F_t(\theta, 1) - F_{t'}(\theta + 1, 1) = \alpha_\theta + \beta_\theta (R_t(1) - F_{t'}(1, 1)) + \varepsilon_t^\theta \quad (1.6)$$

n'a de sens que si  $t'$  est égal à  $t-1$  (ou à  $t-n$  si nous observons une forte corrélation temporelle entre les taux). L'idée géniale de Buse est alors de mélanger les observations et de tester l'hypothèse de Meiselman avec ces "nouvelles" séries. L'hypothèse de Meiselman reste vérifiée. La conclusion de Buse est alors la suivante :

*The Meiselman model is consistent with any set of smoothed yield curves in which the short and long rates move together but in which short rates show a greater variability. The correct chronological order is not vital for the order. The model cannot, therefore, be considered a useful test of the expectations theory because it does not discriminate between the*

---

<sup>3</sup>Les résultats de Meiselman (page 22) sont :  $\hat{\beta}_1 = 0.703$ ,  $\hat{\beta}_2 = 0.526$ ,  $\hat{\beta}_3 = 0.403$ ,  $\hat{\beta}_4 = 0.326$ ,  $\hat{\beta}_5 = 0.277$ ,  $\hat{\beta}_6 = 0.233$ ,  $\hat{\beta}_7 = 0.239$  et  $\hat{\beta}_8 = 0.208$ .

*behavior of investors acting as Meiselman postulates and alternative formulations which are consistent with the same pattern of observed rates.*

### 1.2.2 La théorie de la prime de liquidité

Pour Hicks, le taux à terme n'est pas égal à l'anticipation du taux au comptant futur du fait de plusieurs risques, en particulier d'un risque résultant de l'illiquidité du placement :

*Donc, le taux d'intérêt à terme pour une semaine ultérieure donnée (qui représente, comme nous l'avons constaté, l'unité de base des taux à long terme) est déterminé, comme le prix à terme d'une marchandise, à un niveau qui suffit à pousser un nombre suffisant de "spéculateurs" à accepter un contrat à terme. Ce taux sera forcément plus élevé que le taux à court terme prévu pour cette semaine par les spéculateurs en question ; sinon ils ne bénéficieraient d'aucune compensation pour le risque auquel ils s'exposent ; en fait, le taux à terme devra dépasser suffisamment le taux escompté pour que le spéculateur soit tenté d'assumer le risque.*

La théorie de la prime de liquidité est en fait un ensemble de travaux indissociable de la théorie des anticipations. Ces travaux apparaissent à la suite de la publication du livre de Meiselman, qui propose de tester l'hypothèse d'absence de prime de liquidité en vérifiant que le coefficient  $\alpha_\theta$  dans la régression (1.5) n'est pas statistiquement différent de zéro. Les valeurs de  $\alpha_\theta$  qu'il obtient varient de -0.03 à 0.01 et il ne peut rejeter l'hypothèse nulle  $\alpha_\theta = 0$ . Le test proposé par Meiselman est fortement critiqué par WOOD [1963]. Celui-ci suppose que le taux à terme est égal à l'anticipation du taux au comptant majoré d'une prime de liquidité, que nous notons  $L_t(\theta, 1)$

$$F_t(\theta, 1) = E [{}_tR_{t+\theta}(1)] + L_t(\theta, 1) \quad (1.7)$$

En reformulant la régression (1.5), Wood montre alors que le coefficient  $\alpha_\theta$  a pour expression

$$\alpha_\theta = L_t(\theta, 1) - L_{t-1}(\theta + 1, 1) + \beta_\theta L_{t-1}(1, 1) \quad (1.8)$$

TELSER [1967] note alors que  $\alpha_\theta = 0$  n'est pas une condition suffisante pour rejeter la théorie de la prime de liquidité. Comme le fait remarquer Wood, le signe de  $\alpha_\theta$  est indéterminé. En effet, la théorie de la prime de liquidité implique les inégalités  $0 \leq L_{t-1}(1, 1) \leq L_t(\theta, 1) \leq L_{t-1}(\theta + 1, 1)$  puisque cette prime est positive et croissante avec le terme.

C'est donc Meiselman lui-même qui est à l'origine des travaux sur la prime de liquidité. D'ailleurs, ces travaux sont généralement construits sur un schéma identique. Une première section est consacrée à la théorie des anticipations, une deuxième concerne la prime de liquidité<sup>4</sup> et enfin, l'étude empirique est présentée dans une dernière section. Après avoir testé la théorie des anticipations, l'auteur cherche à évaluer les primes de liquidité. BUSE [1967] est un des premiers économistes à les estimer. Il suppose que les primes de liquidité sont constantes dans le temps. Dans ce cas, elles satisfont l'équation

$$L(\theta + 1, 1) = L(\theta, 1) + \hat{\beta}_\theta L(1, 1) - \hat{\alpha}_\theta \quad (1.9)$$

Telser critique vivement la méthode de Buse. A partir du début des années 1970, des problèmes de terminologie apparaissent au sujet de l'estimation de la prime de liquidité. Ainsi, MASERA [1972], qui a soutenu sa thèse en 1969 sous la direction de Hicks, parle de prime de risque<sup>5</sup>. Les termes prime de liquidité et prime de risque sont alors employés indifféremment. En fait, ce problème de terminologie s'explique facilement. En effet, la prime de liquidité est obligatoirement croissante avec la maturité. Or, certains résultats empiriques (en particulier, Masera, page 157) montrent que cela n'est pas toujours vérifié. C'est pourquoi certains auteurs préfèrent utiliser le terme prime de risque, tout en conservant les idées de Hicks. Cependant, ce terme moins précis peut entraîner des confusions dans les études empiriques qui tentent de modéliser une prime de risque (par exemple, en employant des processus ARCH) que nous pouvons difficilement relier à l'idée originelle de Hicks.

### 1.2.3 La théorie de la segmentation des marchés

Cette théorie est développée par CULBERTSON [1957]. Pour celui-ci, les théories précédentes sont basées sur des hypothèses irréalistes : la rationalité des agents et l'efficacité du marché financier. Il faut admettre que le critère d'espérance mathématique comme critère de rationalité dans la théorie des anticipations est difficile à vérifier. En effet, l'erreur de prévision ne constitue pas une mesure de la qualité des anticipations. Le spéculateur cherche avant tout à connaître la tendance (de court terme). Si son erreur de prévision est faible, mais dans le mauvais sens, il subit une perte. Un autre spéculateur qui a bien anticipé la tendance et dont l'erreur de prévision est forte, bénéficie d'un gain. Culbertson critique aussi l'hypothèse de rationalité car elle suppose une homogénéité des prévisions. C'est

---

<sup>4</sup>Les termes anglais *Hicksian model* et *Hicksian premium* reviennent souvent dans la littérature économique de la fin des années 1960.

<sup>5</sup>Il emploie le terme anglais *Hicksian risk-premium*.

pourquoi Culbertson doute du rôle prépondérant de l'activité spéculative dans la détermination de la structure par terme. Il considère que les comportements des agents sont différents; leur motif principal est de se prémunir contre les risques financiers. Il explique aussi que les actifs ne sont pas parfaitement substituables; car les agents choisissent de les détenir en fonction de leur structure de dette. Le marché financier n'est alors plus unifié, mais constitué d'un ensemble de segments. Certains économistes ont interprété abusivement la théorie de Culbertson et ont fait du marché financier un marché de compartiments indépendants les uns des autres. En fait, la lecture de "the term structure of interest rates" montre que Culbertson a une vision plus pragmatique et moins "extrémiste" du marché financier.

#### 1.2.4 La théorie de l'habitat préféré

On présente généralement cette théorie, élaborée par MODIGLIANI et SUTCH [1967], comme une théorie de compromis ou une synthèse des précédentes. Les agents ont un habitat préféré, c'est-à-dire qu'ils choisissent des actifs qui appartiennent à un même segment de marché : on le dit familier. Ils sont incités à le quitter temporairement si un autre habitat offre une prime de terme plus importante. Cette prime de terme doit être d'autant plus importante qu'il est éloigné de l'habitat préféré. Cette prime diffère de celle de Hicks car il n'y a aucune raison pour qu'elle soit croissante avec la maturité. Toutefois, elle doit être considérée comme relativement continue avec le terme. La théorie de l'habitat préféré tente donc de réconcilier les théories de la prime de liquidité et de la segmentation. Elle emprunte aussi des éléments à la théorie des anticipations, puisque les taux de rendement d'un actif de maturité  $\tau$  dépendent de l'anticipation du taux court pour les  $\tau$  périodes suivantes.

Le défaut majeur de cette théorie est justement de tenter d'être synthétique. Modigliani et Sutch la décrivent comme une adaptation de la théorie des anticipations. KESSEL [1965] estime que la théorie de l'habitat préféré est un autre nom de la théorie de la segmentation. Il est difficile en fait de savoir quel est l'élément principal. Plus que par la théorie, les économistes ont été marqués par un traitement empirique original (même s'il est difficile d'être en accord avec les interprétations des auteurs). Modigliani et Sutch décident de modéliser le spread de taux, c'est-à-dire la différence entre le rendement d'une obligation à long terme et le taux d'intérêt court. Le taux court est la variable explicative du modèle. Ils utilisent aussi un polynôme d'Almon. La modélisation du spread en fonction du taux court avec un processus autorégressif constitue depuis longtemps une grande part des investigations empiriques sur la structure par terme.

## 1.3 La construction de la courbe des taux

Dans la section précédente, nous avons présenté les différentes théories traditionnelles de la structure par terme. Nous avons vu notamment l'importance du rôle du taux d'intérêt *court*. Les notions exactes de courbe des taux ou de taux d'intérêt de court terme ne sont cependant pas explicitées par ces théories. Par exemple, le taux court correspond à une maturité d'une semaine chez Hicks alors que Modigliani et Sutch utilisent une moyenne de taux à 3 mois. Dans le troisième chapitre, MASERA [1972] critique la méthode de Durand pour la construction de la courbe des taux, et remet donc en cause les résultats de Meiselman. Ces problèmes existent car les auteurs n'ont pas attaché d'importance à la définition de la structure par terme.

Dans une première sous-section, nous définirons la structure par terme des taux d'intérêt. Nous verrons notamment qu'il existe une **seule** courbe des taux, que nous appellerons aussi la courbe des taux zéro. Nous pourrions ensuite poser le problème de la construction de cette courbe des taux. Plusieurs méthodes existent. La méthode de NELSON et SIEGEL [1987] est l'une des plus intéressantes. C'est pourquoi nous accorderons plus d'importance au développement de celle-ci.

### 1.3.1 Comment définir La courbe des taux ?

Pour de nombreux économistes (voir DEMAROLLE et QUINET [1996], page 29), il existe "une multitude de taux d'intérêt, que l'on peut représenter par la notion de structure des taux d'intérêt, définie comme l'ensemble des niveaux de taux correspondant aux différentes maturités des titres". Cette vision de la structure par terme conduit parfois à des recherches étonnantes. Par exemple, PALADINO et SALSECCI [1996] analysent les spreads longs américain, allemand et italien. Il n'y a aucune homogénéité dans les données utilisées : le taux long américain correspond au taux de rendement d'une obligation d'état 10 ans, le taux long allemand est le taux de rendement d'une obligation d'état 5 ans, les taux italiens sont des taux zéro-coupon, le taux court allemand est le taux Lombard, etc. Les données ne sont pas homogènes du point de vue de la maturité et du marché sur lequel elles sont observées. Dans l'esprit de certains auteurs, l'utilisation d'au moins deux taux d'intérêt de maturités différentes leur permet de faire référence à la structure par terme.

Nous pensons que nous devons employer cette notion avec plus de précaution. C'est pourquoi nous utiliserons le concept de structure par terme pour parler de la structure par terme des obligations à coupon zéro (ou structure par terme des coupons zéro) et de la structure par terme des taux zéro (ou structure par terme des taux zéro-coupon).

### 1.3.1.1 La structure par terme des obligations à coupon zéro

Considérer que la courbe des taux est un ensemble de taux d'intérêt de maturités différentes pose le problème de l'existence de différents taux pour une même échéance, c'est-à-dire l'existence de plusieurs marchés. Nous désirons que la courbe des taux révèle les différences de rendement qui sont dues au seul facteur maturité. Cela implique que les titres soient représentatifs de leur échéance. Une mesure possible de la "durée" d'un titre est sa duration  $\mathcal{D}$ . Elle est définie par la formule suivante

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^J \tau_j \left( \frac{c_j e^{-r\tau_j}}{\sum_{i=1}^J c_i e^{-r\tau_i}} \right) \quad (1.10)$$

avec  $r$  le taux d'actualisation. Considérons une obligation à coupon zéro de maturité  $\tau$  et de nominal 1 Franc. Notons  $P_t^c(\tau)$  le prix actuel de cette obligation. Nous avons

$$P_t^c(\tau) = e^{-r\tau} \quad (1.11)$$

Une nouvelle expression de la duration est alors

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^J \tau_j \left( \frac{c_j P_t^c(\tau_j)}{\sum_{i=1}^J c_i P_t^c(\tau_i)} \right) \quad (1.12)$$

La duration est donc une mesure de durée de vie moyenne. Les pondérations sont les valeurs des flux du titre actualisés.  $\mathcal{D}$  possède une propriété intéressante, puisque la duration est toujours inférieure ou égale à la maturité résiduelle du titre. Pour l'obligation à coupon zéro, nous avons  $\mathcal{D} = \tau$ . C'est le seul titre dont la duration est exactement égale à la maturité résiduelle. **Puisque l'obligation à coupon zéro est le seul titre représentatif de sa maturité, elle présente les meilleures caractéristiques pour construire une structure par terme.** Nous rappelons que la courbe des taux doit révéler les différences de rendement dues au seul facteur maturité. Cela implique aussi que nous devons éliminer l'influence d'autres facteurs comme ceux d'illiquidité ou de signature. Il est donc important que nous utilisions les obligations à coupon zéro d'un seul et même émetteur. Nous définissons alors la structure par terme des coupons zéro  $\mathfrak{P}$  comme celle des obligations à coupon zéro d'état. La courbe des taux  $\mathfrak{R}$  est alors la structure par terme des taux de rendement de celles-ci. Nous avons

$$\mathfrak{R} = \left\{ R_t(\tau) = -\frac{\ln P_t^c(\tau)}{\tau}, \tau \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (1.13)$$

Par construction, cette courbe des taux zéro-coupon est unique et de nature financière.

### 1.3.1.2 Justification de la définition par le modèle d'évaluation par arbitrage

Il existe un lien entre la courbe des taux, telle que définie dans la sous-section précédente et le modèle d'évaluation par arbitrage<sup>6</sup> de ROSS [1976]. Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes : le nombre des actifs financiers de l'économie est grand, leur rendement obéit à un modèle factoriel additif et il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage. Soit  $\tilde{R}_j$  le taux de rendement de l'actif  $j$ . Nous avons

$$E \left[ \tilde{R}_j \right] = \lambda_0 + \lambda_1 f_{1,j} + \cdots + \lambda_K f_{K,j} \quad (1.14)$$

avec  $f_{k,j}$  le coefficient factoriel mesurant la sensibilité de l'actif  $j$  au facteur  $k$ . Supposons que le premier facteur soit la maturité. Alors, le champ des théories de la structure par terme concerne la partie  $\lambda_0 + \lambda_1 f_{1,j}$ . Le problème est donc d'isoler  $\lambda_0 + \lambda_1 f_{1,j}$ . Cela suppose que la relation (1.14) soit parfaitement déterminée et en particulier, que l'ensemble des facteurs soit connu. Nous pouvons contourner la difficulté, en considérant un ensemble  $\mathcal{E}$  d'actifs financiers tels que nous ayons

$$\begin{cases} f_{2,j} = f_2 \\ \vdots \\ f_{K,j} = f_K \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{E} \quad (1.15)$$

Dans ce cas, nous avons

$$E \left[ \tilde{R}_j \right] - E \left[ \tilde{R}_i \right] = \lambda_1 (f_{1,j} - f_{1,i}) \quad (1.16)$$

Il est donc possible de construire *une* structure par terme pour les actifs de l'ensemble  $\mathcal{E}$ , mais ces titres doivent présenter les mêmes caractéristiques compte tenu des restrictions, imposées par le système (1.15). Par exemple, ils doivent présenter les mêmes caractéristiques en terme de risque de signature (ou risque de défaut), de fiscalité ou de négociabilité. Le modèle d'arbitrage d'évaluation est donc intéressant parce qu'il fournit les conditions nécessaires générales à la construction de *toute* structure par terme. La structure par terme des taux zéro les respecte.

## 1.3.2 Les problèmes de construction

ANDERSON, BREEDON, DEACON, DERRY et MURPHY [1996] présentent une revue du problème et des méthodes. L'article de GOURIÉROUX et SCAILLET [1994] contient aussi de nombreuses méthodes statistiques d'estimation de la structure par terme. La littérature sur la construction d'une courbe des taux zéro est abondante. Dans cette sous-section, nous limitons volontairement le champ des investigations.

---

<sup>6</sup>Le terme anglais Asset Pricing Theory est couramment utilisé.



Nous cherchons à obtenir une méthode d'estimation qui réponde à certains critères et qui nous permette de construire la courbe des taux zéro française pour l'analyser dans les chapitres suivants.

La construction de la structure par terme des taux d'intérêt est un domaine de recherche assez ancien. Les premières recherches datent des années 1940 avec les travaux de Durand. Alors que de nombreuses théories sur la structure par terme apparaissent dans les années 1950 et 1960, il y a paradoxalement peu de publications sur la construction de celle-ci. Les premières méthodes satisfaisantes sont proposées dans les années 1970 par McCulloch. Les articles de 1971 et 1975 demeurent toujours des travaux de référence et contiennent les principes de base. MCCULLOCH [1971] utilise des fonctions *splines* pour déterminer la structure par terme des coupons zéro. Il en déduit ensuite la courbe des taux zéro (en anglais, *yield curve*) et les taux à terme. La méthodologie de McCulloch est toujours d'actualité.

Définissons le problème de la construction. Nous supposons que nous connaissons les taux de rendements  $R_t(\tau)$  ou les prix  $P_t^c(\tau)$  de certaines obligations à coupon zéro. Comment pouvons-nous en déduire la courbe **continue** des taux zéro  $\mathfrak{R} = \{R_t(\tau), \tau \in \mathbb{R}^+\}$  ? Nous notons  $\mathcal{T}$  l'ensemble des maturités observées. Soit  $\mathcal{G}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$ , l'espace vectoriel des fonctions réelles. Nous pouvons alors chercher une fonction  $g \in \mathcal{G}$  vérifiant certaines conditions. Nous devons pour cela définir une méthode de décision. Une première méthode consiste à choisir une fonction  $g_1$  qui vérifie par exemple

$$g_1(\tau) = R_t(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{T} \quad (1.17)$$

C'est la technique de l'interpolation, c'est-à-dire que la courbe estimée des taux zéro  $g_1(\tau)$  passe exactement par les taux de rendements observés. La méthode de proche en proche, fréquemment utilisée par les banques et les financiers (CLERMONT-TONNERRE et LÉVY [1992], PONCET [1997]) est basée sur ce principe. Une autre méthode consiste à choisir un critère  $C$ , par exemple un critère de minimisation entre les données observées et les valeurs "théoriques"

$$g_2 = \min_{g \in \mathcal{G}} C(g, \mathcal{T}) \quad (1.18)$$

Cette seconde méthode est la plus fréquemment employée pour estimer la structure par terme. La raison principale est que la première méthode est sensible aux données aberrantes.

Avant de présenter quelques méthodes d'estimation, nous exposons les problèmes majeurs posés par la construction : le choix de  $\mathcal{G}$ , la modélisation des facteurs ou des taux d'actualisation et la disponibilité des données.

### 1.3.2.1 Le choix de la méthode d'estimation

Nous considérons dans ce paragraphe le choix de la méthode d'estimation. Pour construire la structure par terme, le financier ou l'économiste doit définir **a priori** l'ensemble  $\mathcal{G}$ . Le plus souvent, l'expérience (et la pratique) guide cette décision qui n'est pas neutre. En particulier, nous verrons que le choix de  $\mathcal{G}$  est guidé par l'utilisation de la courbe des taux zéro. De nombreux auteurs estiment que  $\mathcal{G}$  doit être suffisamment "grand" pour modéliser toutes les configurations de la structure par terme. C'est généralement le point de vue des statisticiens, qui utilisent des techniques non paramétriques, mais ce n'est pas forcément la solution la plus adaptée à notre problème.

Par exemple, FISHER, NYCHKA et ZERVOS [1995] et WAGGONER [1997] proposent d'employer les *smoothing splines*. Cette méthode est différente des régressions splines proposées initialement par MCCULLOCH [1971] car nous n'avons pas à spécifier les nœuds de la fonction. Soit  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  une série de points observés. Considérons la fonction spline cubique définie par

$$g(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i[ \quad (1.19)$$

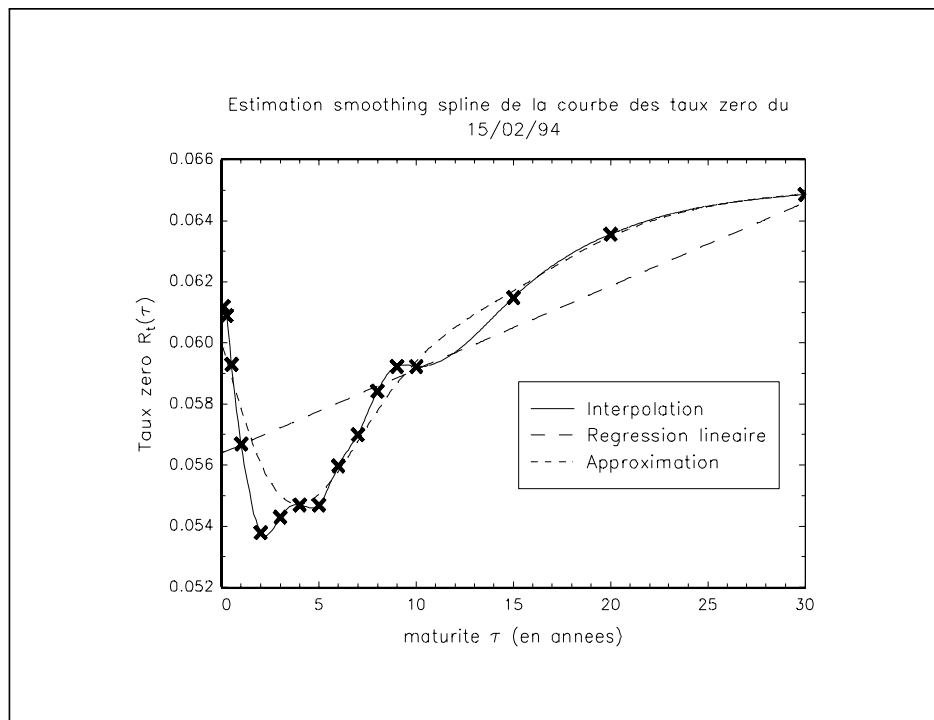
avec

$$\begin{aligned} a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i &= a_{i+1} x_i^3 + b_{i+1} x_i^2 + c_{i+1} x_i + d_{i+1} \\ 3a_i x_i^2 + 2b_i x_i + c_i &= 3a_{i+1} x_i^2 + 2b_{i+1} x_i + c_{i+1} \\ 6a_i x_i + b_i &= 6a_{i+1} x_i + b_{i+1} \end{aligned} \quad (1.20)$$

La fonction  $g$  est donc une succession de polynômes d'ordre 3, deux fois continûment différentiable (du fait des restrictions (1.20)). La fonction d'interpolation spline  $g^*$  est alors la fonction qui vérifie  $g^*(x_i) = y_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . CRAVEN et WAHBA [1979] proposent d'employer le critère de minimisation suivant :

$$\alpha \sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i))^2 + (1 - \alpha) \int g''(x)^2 dx \quad (1.21)$$

pour définir la fonction lissée spline. L'intégrale  $\int g''(x)^2 dx$  est une fonction de lissage pénalisante. Si  $\alpha$  prend la valeur 1, nous obtenons la fonction d'interpolation spline. Si  $\alpha$  prend la valeur 0, nous avons la droite de régression linéaire de  $y_i$  sur  $x_i$ . C'est pourquoi le paramètre  $\alpha$  est appelé paramètre de lissage. Fisher, Nychka et Zervos justifient l'utilisation de cette méthode, par le fait qu'elle permet de réduire le nombre a priori de paramètres. En effet, l'estimation est entièrement déterminée par le paramètre  $\alpha$ . Dans la méthode de McCulloch, il est nécessaire de définir l'ensemble des nœuds de la fonction spline.



Graphique 1.1

Le graphique (1.1) illustre l'influence de la fonction pénalisante<sup>7</sup>. Nous remarquons que le choix du paramètre de lissage<sup>8</sup> influence l'allure de la courbe des taux. Même s'il n'y a qu'un seul paramètre à définir, cette méthode peut donner des résultats très différents les uns des autres. Il est possible de déterminer une "bonne" valeur pour le paramètre de lissage  $\alpha$ , par exemple en utilisant la technique de validation croisée généralisée, mais la marge de flexibilité est encore trop grande. Avec les mêmes données, des financiers peuvent construire des courbes de taux très différentes les unes des autres. Cela pose un vrai problème.

Contrairement à la position de certains auteurs<sup>9</sup>, nous pensons que la préférence d'une méthode ne peut se justifier par un critère d'optimalité sinon par un critère de satisfaction. Par exemple, pouvons-nous implémenter facilement la méthode ? La courbe des taux zero est une courbe continue. Nous ne pouvons donc pas constituer une base de données pour l'ensemble des maturités  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . Cependant lorsque la base de données est constituée, il doit être possible de calculer rapidement  $R_t(\tau)$  pour une valeur particulière de la maturité. Avec cette base de données, nous

<sup>7</sup>Nous avons utilisé les procédures développées par BAIRD [1995].

<sup>8</sup>Pour la fonction d'approximation, nous avons pris une valeur de  $\alpha$  égale à 0.15.

<sup>9</sup>"Besides smoothness, there are no a priori restrictions on the yield curve, and the position of the knots and the optimal smoothness can be determined from data. For these reasons the smoothing procedure is said to be completely data driven" (TANGGAARD [1995]).

devons aussi être capables d'extraire d'autres informations, comme les taux à terme par exemple.

### 1.3.2.2 Structure par terme des coupons zéro ou des taux zéro ?

Cette question ne semble avoir aucun sens. En effet, nous définissons la courbe des taux zéro à partir de la structure par terme des obligations à coupon zéro par la relation (1.13). De cette manière, nous levons l'ambiguïté sur l'existence de plusieurs structures par terme. Il n'existe qu'une courbe des taux zéro. Nous sommes cependant confrontés à un problème numérique fréquent : la reparamétrisation. Nous avons vu que McCulloch choisit de construire la fonction d'actualisation, puis d'en déduire la courbe des taux zéro. Dans la méthode de proche en proche, nous déterminons directement celle-ci. Nous pouvons ensuite en déduire la structure par terme des coupons zéro. Les deux schémas ne donnent pas les mêmes résultats car ils ne sont pas équivalents d'un point de vue numérique. Il est donc nécessaire de choisir un schéma, mais ce choix est en fait conditionné par la méthode utilisée.

Les graphiques (1.2) et (1.3) présentent une estimation de la structure par terme pour les dates du 15 février 1994 et du 2 novembre 1994, basée sur une fonction spline cubique lissée vérifiant le critère de validation croisée. Sur la partie haute des graphiques, nous déterminons les structures par terme à partir de l'estimation de celle des coupons zéro. Sur la partie basse des graphiques, elles sont déduites des taux de rendement des coupons zéro. Nous remarquons qu'il existe peu de différences entre les structures par terme des coupons zéro, mais les courbes de taux zéro sont très différentes. Nous observons aussi que les taux de rendement observés sont relativement éloignés de la courbe des taux zéro déduite de la structure par terme des obligations à coupon zéro. Ces exemples montrent bien le problème de la reparamétrisation, qui introduit des effets de courbure.

Considérons une fonction  $f$ . Soit la fonction  $g$  définie par

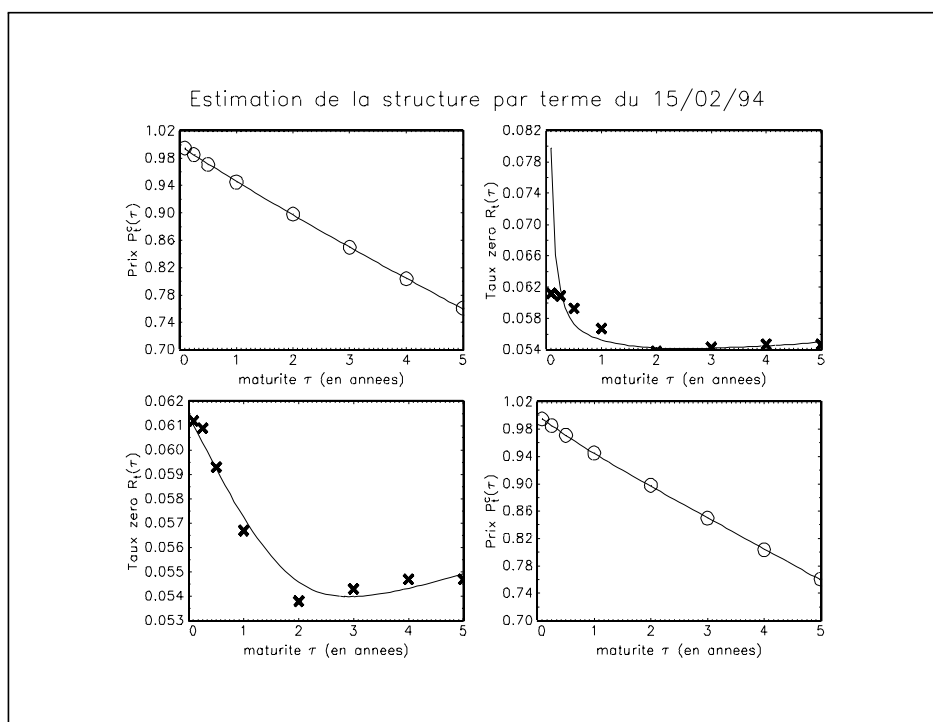
$$g(x) = -\frac{\ln f(x)}{x} \quad (1.22)$$

Du fait même de l'expression de la fonction  $g$ , les représentations graphiques des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  définies à partir de deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  présentant des courbures "relativement proches" peuvent être très différentes. Considérons par exemple la fonction générique

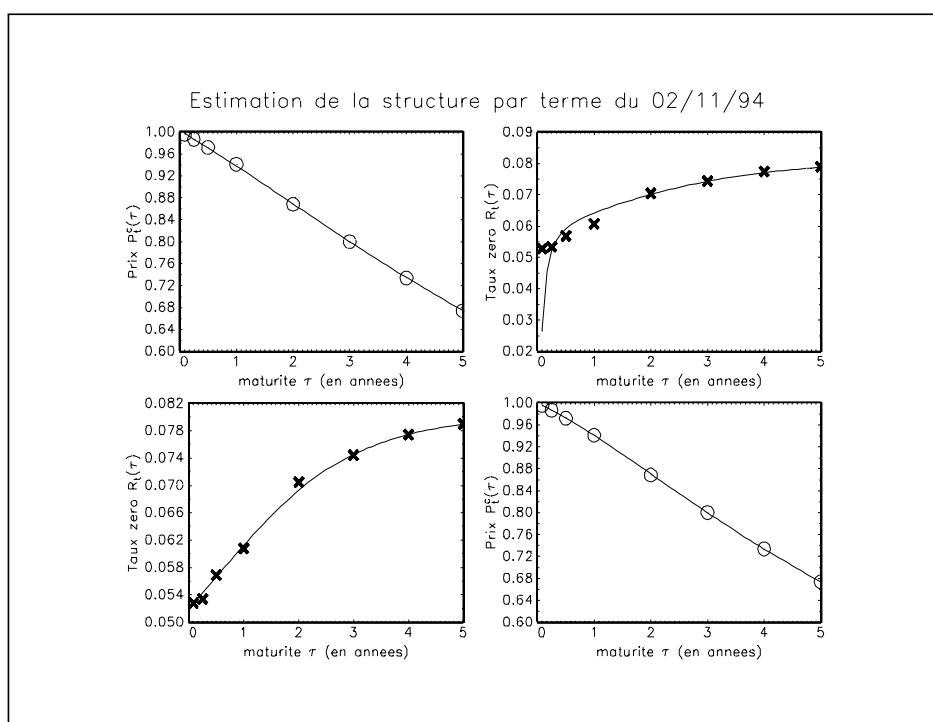
$$f(x) = \frac{1}{1 + \alpha x^\beta + \gamma x^\delta} \quad (1.23)$$

Soient  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions définies par  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0.025, 1.5, 0, -0.05)$  et  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0.035, 1.35, 0.005, -0.05)$ . La fonction  $f_3$  est donnée par

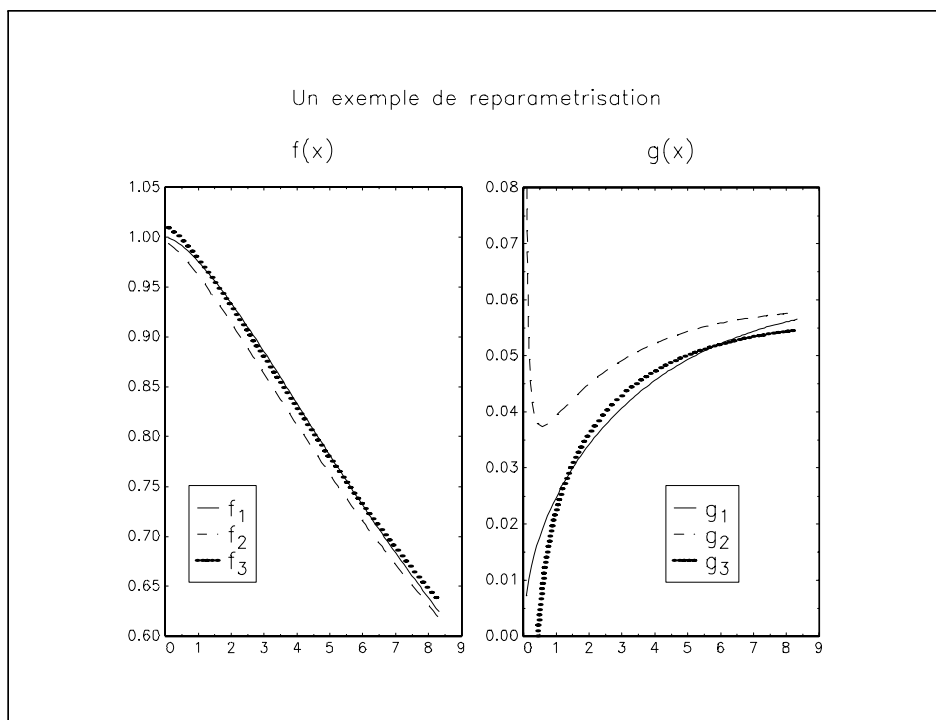
$$f_3(x) = 0.016 + f_2(x) \quad (1.24)$$



Graphique 1.2



Graphique 1.3



Graphique 1.4

Les courbes de ces fonctions sont représentées sur le graphique (1.4). Elles ont des formes très semblables. En revanche, les fonctions  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  sont très différentes les unes des autres. La transformation (1.22) accentue les courbures. Ceci explique pourquoi la courbe des taux zéro construite à partir de l'estimation de la structure par terme des coupons zéro reproduit assez mal la courbure des taux actuariels observés. Nous devons donc choisir une méthode basée sur l'estimation de la structure par terme des coupons zéro avec beaucoup de prudence. Il est notamment important que la méthode d'estimation puisse reproduire *localement* des courbures assez prononcées, d'autant plus que l'économiste et le financier sont intéressés par les taux zéro, mais **aussi** par les taux à terme. Le calcul de ces taux à terme fait intervenir une dérivation ou une différence finie. Ces remarques plaident donc en faveur d'une méthode basée sur l'estimation des taux zéro, mais les données de marché sont actuellement trop peu nombreuses pour choisir une telle méthode.

### 1.3.2.3 Le marché des obligations à coupon zéro en France

L'estimation de la courbe des taux zéro pose le problème des données. Dans les paragraphes précédents, nous supposons que nous disposons des prix des obligations à coupon zéro pour différentes maturités, c'est-à-dire qu'il existe un marché français d'obligations à coupon zéro. En fait, ce marché est apparu relativement tard. Il

faut attendre juin 1991 et le démembrement de l'OAT 8.50% 2019 pour pouvoir parler d'un marché français des coupons zéros. Néanmoins, les financiers, et notamment les institutions bancaires, n'ont pas attendu l'année 1991 pour travailler sur la courbe des taux. Ils étaient déjà confrontés aux bons du trésor américain. De plus, un certain nombre de sociétés ou d'organismes proposaient (et proposent encore) des bases de données "courbe des taux" : par exemple la société Reuter avec ses *Reuter Bonds* ou encore la Banque Internationale de Placement. Ces données ne sont pas généralement des prix de marché, mais des constructions qui se veulent homogènes. Les utilisateurs les considèrent généralement comme des instruments. Ainsi, les Reuter Bonds sont utilisés pour les comparaisons internationales. Mais le démembrement de l'OAT en juin 1991 marque un tournant décisif et historique pour l'étude de la structure par terme française.

L'histoire du démembrement de l'OAT 8.50% 2019 et ses conséquences sont longuement analysées dans l'ouvrage de CLERMONT-TONNERRE et LÉVY [1992]. Ceux-ci reprennent largement l'étude réalisée par la banque CGM et CGM Inter-médiation [1992a,1992b]. L'émission de cette obligation d'état à 30 ans intervient le 25 octobre 1989. La valeur du principal est 2000 francs et la date de son remboursement est fixée au 25 octobre 2019. Cette obligation donne lieu, le 25 octobre de chaque année, à un détachement de coupon de 170 francs. Le Trésor français décide au printemps 1991 l'autorisation du démembrement de cette obligation, c'est-à-dire la conversion en obligations à coupon zéro. Moins de deux ans après son émission, il reste 29 coupons à détacher et le principal à rembourser. L'OAT est ainsi démembré en 30 coupons zéro, de nominal 170 francs pour les 29 premiers et 2000 francs pour le dernier. Le démembrement de l'OAT est assuré par quinze spécialistes en valeurs du Trésor. Ces SVT sont soumis à des règles particulières et peuvent remembrer les obligations à coupon zéro. Cela est d'autant plus facile que le démembrement ne concerne qu'une partie des OAT (près de 14% des OAT lors de la première opération de démembrement le 12 juin). L'OAT 8.50% 2019 ne disparaît donc pas. Cette formule est préférée à celle d'une émission directe par le Trésor d'obligations à coupon zéro.

Le Trésor français manifeste donc le désir de créer un marché des coupons zéro, mais ces OAT démembrées restent peu liquides (PONCET [1997]). C'est pourquoi il existe actuellement peu d'études sur ces OAT démembrées. Il est donc difficile d'utiliser une méthode basée sur l'estimation directe des taux zéro. S'il n'est pas possible d'augmenter le nombre observé de taux zéro, nous pouvons créer un marché élargi des coupons zéro. Considérons les obligations d'état (BTF, BTAN et OAT). Celles-ci peuvent être vues comme des titres remembrés à partir des obligations à

coupon zéro. Supposons que nous disposons de  $N$  obligations d'état de prix  $P_t^{(n)}$  et dont les caractéristiques sont  $\left\{ \left( c_j^{(n)}, \tau_j^{(n)} \right), j = 1, \dots, J^{(n)} \right\}$ . Nous avons alors

$$P_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{J^{(n)}} c_j^{(n)} P_t^c \left( \tau_j^{(n)} \right) \quad (1.25)$$

L'obligation  $n$  correspond alors à  $J^{(n)}$  coupons zéro, qui jouent le rôle de facteur d'actualisation. De ce point de vue, l'estimation de la structure par terme des obligations à coupon zéro est en fait une estimation de la fonction d'actualisation (les auteurs anglais utilisent le terme *discount function fitting*).

### 1.3.3 Quelques méthodes d'estimation

Les méthodes d'estimation de la courbe des taux zéro sont nombreuses. Nous pouvons les classer en 3 catégories : celles qui sont basées sur les fonctions splines, celles qui postulent a priori une classe de fonctions, enfin celles qui utilisent des techniques non-paramétriques. La première catégorie concerne les fonctions splines polynomi-ales, exponentielles (VASICEK et FONG [1982], SHEA [1985]) ou encore les B-splines (LANGETIEG et SMOOT [1989], FISHER et ZERVOS [1996]). La méthode de NELSON et SIEGEL [1987] fait partie de la deuxième catégorie. Dans la troisième catégorie, nous trouvons par exemple les régressions locales de GOURIÉROUX et SCAILLET [1994]. Dans cette sous-section, nous ne présentons que deux types de méthodes : les méthodes splines polynomiales de DE BANDT et LESNE [1991] et celles basées sur la construction de Nelson et Siegel.

Nous pouvons considérer que les diverses méthodes reviennent à postuler une forme fonctionnelle du prix de l'obligation du coupon zéro. Dans de nombreux cas, ce prix "théorique" est une fonction dépendant d'un vecteur de paramètres  $\theta$ . Nous avons donc

$$P_t^c(\tau) = p_\tau^c(\tau, \theta) \quad (1.26)$$

En utilisant la relation (1.25) entre le prix d'une obligation et les prix des coupons zéro, nous obtenons le prix de l'obligation donné par le modèle

$$p_t^{(n)}(\theta) = \sum_{j=1}^{J^{(n)}} c_j^{(n)} p_t^c \left( \tau_j^{(n)}, \theta \right) \quad (1.27)$$

Puisque la structure par terme des coupons zéro est déterminée par le vecteur  $\theta$ , nous pouvons utiliser les prix de marché des obligations  $P_t^{(n)}$  pour estimer ce vecteur. Par exemple, si nous utilisons le critère de minimisation de la somme des carrés des



erreurs, nous avons

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{n=1}^N w_n \left( p_t^{(n)}(\theta) - P_t^{(n)} \right)^2 \quad (1.28)$$

$w_n$  est le poids accordé à la  $n$ -ième obligation. Cette méthode a l'avantage d'être très simple à mettre en œuvre.

### 1.3.3.1 Les fonctions splines polynomiales

DE BANDT et LESNE [1991] considèrent que le prix d'une obligation à coupon zéro peut être approché par une fonction spline polynomiale cubique. Ces auteurs considèrent un seul nœud :

$$p_t^c(\tau, \theta) = \begin{cases} a_{0,t} + a_{1,t}\tau + a_{2,t}\tau^2 + a_{3,t}\tau^3 & \forall \tau \leq \tau^* \\ b_{0,t} + b_{1,t}\tau + b_{2,t}\tau^2 + b_{3,t}\tau^3 & \forall \tau > \tau^* \end{cases} \quad (1.29)$$

Nous avons donc deux morceaux de polynômes : le premier concerne les "faibles" maturités et le second les maturités plus longues. Pour que la fonction soit de classe  $C^2$ , nous imposons les contraintes suivantes

$$\begin{aligned} a_{0,t} + a_{1,t}\tau^* + a_{2,t}\tau^{*2} + a_{3,t}\tau^{*3} &= b_{0,t} + b_{1,t}\tau^* + b_{2,t}\tau^{*2} + b_{3,t}\tau^{*3} \\ a_{1,t} + 2a_{2,t}\tau^* + 3a_{3,t}\tau^{*2} &= b_{1,t} + 2b_{2,t}\tau^* + 3b_{3,t}\tau^{*2} \\ 2a_{2,t} + 6a_{3,t}\tau^* &= 2b_{2,t} + 6b_{3,t}\tau^* \end{aligned} \quad (1.30)$$

Nous devons aussi vérifier que  $p_t^c(0, \theta) = a_{0,t} = 1$ . Le vecteur  $\theta$  des paramètres  $\theta$  de ce modèle est

$$\theta = \begin{bmatrix} a_{0,t} \\ a_{1,t} \\ a_{2,t} \\ a_{3,t} \\ b_{0,t} \\ b_{1,t} \\ b_{2,t} \\ b_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

L'estimation des paramètres correspond à une optimisation sous contraintes linéaires. Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \min \sum_{n=1}^N w_n \left( p_t^{(n)}(\theta) - P_t^{(n)} \right)^2 \\ \text{s.c. } & C\theta = c \end{aligned} \quad (1.32)$$

avec

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \tau^* & \tau^{*2} & \tau^{*3} & -1 & -\tau^* & -\tau^{*2} & -\tau^{*3} \\ 0 & 1 & 2\tau^* & 3\tau^{*2} & 0 & -1 & -2\tau^* & -3\tau^{*2} \\ 0 & 0 & 2 & 6\tau^* & 0 & 0 & -2 & -6\tau^* \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

et  $c = \mathbf{e}_1$ .

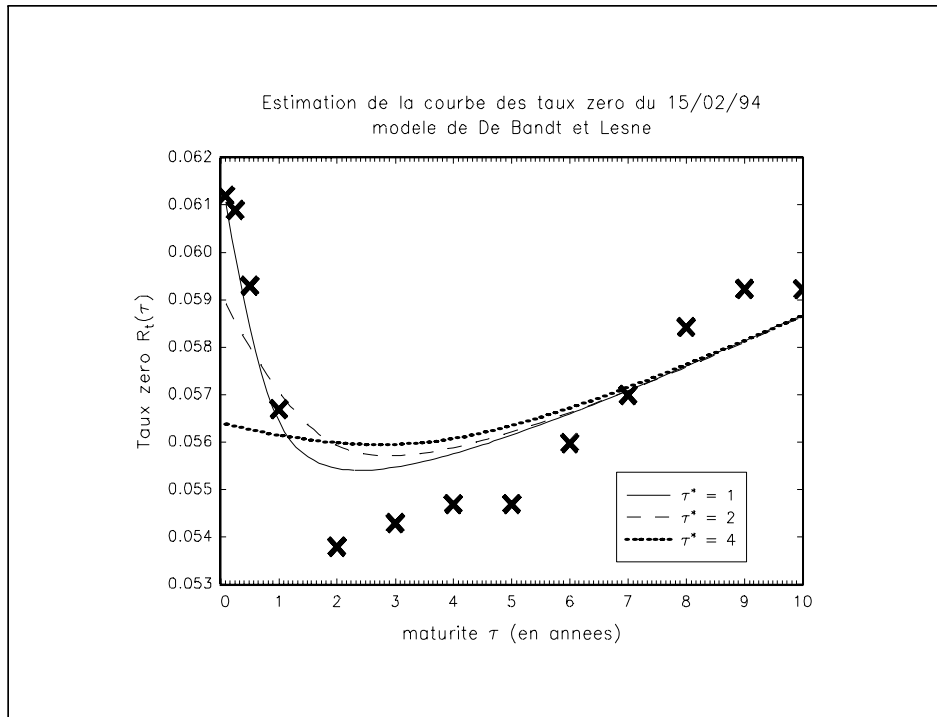
Dans l'article original, De Bandt et Lesne fixe la valeur de  $\tau^*$  à 6. Il faut noter aussi que la méthode employée pour estimer la structure par terme est légèrement différente de celle que nous présentons. Ils obtiennent  $\hat{\theta}$  à partir de l'optimisation libre (1.28) sans prendre en compte les contraintes et vérifient ensuite que l'hypothèse nulle que les contraintes de continuité sont vérifiées n'est pas rejetée. Cette démarche est plus facile à implémenter car l'optimisation libre est équivalente à un système de deux régressions linéaires. En fait, nous pouvons faciliter l'implémentation de l'optimisation sous contraintes. L'annexe 1 de ce chapitre montre comment nous pouvons nous ramener à une optimisation libre. Nous pouvons ensuite utiliser un algorithme de type gradient-conjugué ou de type quasi-Newton pour obtenir l'optimum.

Nous avons estimé la courbe des taux zéro du 15 février 1994 en considérant différentes valeurs pour  $\tau^*$ . Le graphique (1.5) représente les structures par terme estimées pour les maturités inférieures à 10 ans. Nous remarquons que pour  $\tau^*$  égal à 1, les taux de rendement observés sont proches de la courbe des taux zéro. Ce n'est pas le cas lorsque  $\tau^*$  prend les valeurs 2 ou 4. Pour  $\tau^*$  égal à 4, la structure par terme est pratiquement plate pour les maturités inférieures à 7 ans. Les taux théoriques sont alors compris entre 5.6% et 5.7% alors que les taux observés varient entre 5.4% et 6.1%. Ceci s'explique facilement par la contrainte de continuité de la fonction spline. Si nous voulons que la courbe des taux soit plus proche des taux de rendement observés sur la partie courte, nous devons modifier le vecteur des poids. Nous pouvons par exemple attribuer des poids plus forts aux titres de plus faibles maturités. Dans ce cas, l'estimation des parties intermédiaires et longues de la courbe des taux zéro peut être mauvaise. En fait, ce modèle permet difficilement d'appréhender des courbures prononcées car le nombre de nœuds de la fonction spline est trop faible.

C'est pourquoi nous généralisons le modèle précédent en considérant plusieurs nœuds dans la fonction spline polynomiale

$$p_t^c(\tau, \theta) = \begin{cases} a_{1,t} + b_{1,t}\tau + c_{1,t}\tau^2 + d_{1,t}\tau^3 & \forall \tau \leq \tau_1^* \\ \vdots & \\ a_{m,t} + b_{m,t}\tau + c_{m,t}\tau^2 + d_{m,t}\tau^3 & \forall \tau \leq \tau_m^* \\ \vdots & \\ a_{M,t} + b_{M,t}\tau + c_{M,t}\tau^2 + d_{M,t}\tau^3 & \forall \tau > \tau_M^* \end{cases} \quad (1.34)$$

Comme dans le modèle de De Bandt et Lesne, nous cherchons à estimer le vecteur



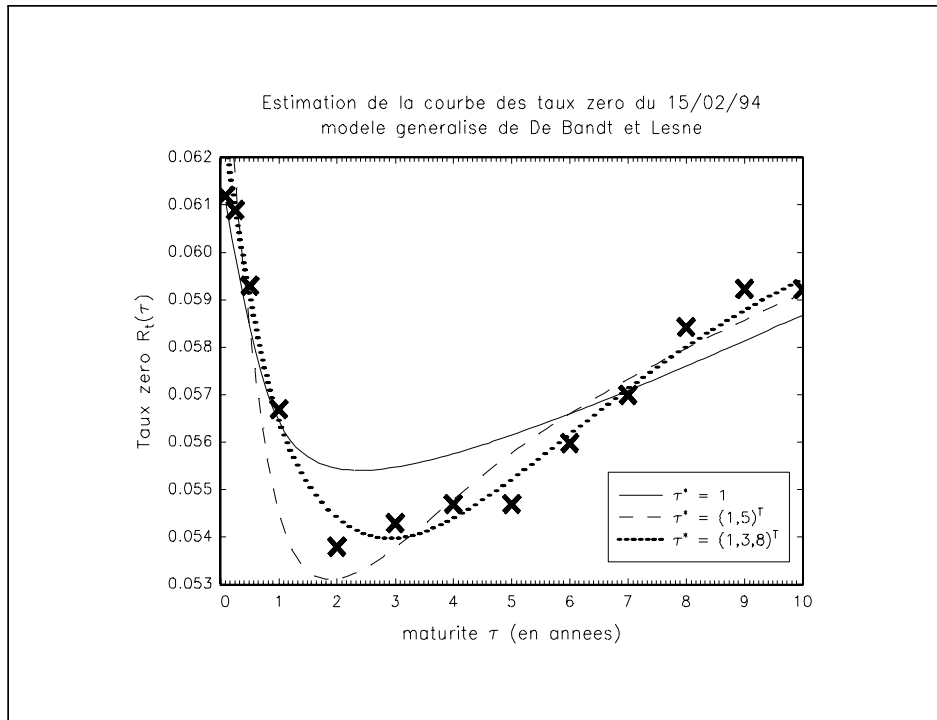
Graphique 1.5

des paramètres  $\theta$  défini par

$$\theta = \begin{bmatrix} a_{0,t} \\ b_{1,t} \\ c_{1,t} \\ d_{1,t} \\ \vdots \\ a_{M,t} \\ b_{M,t} \\ c_{M,t} \\ d_{M,t} \end{bmatrix}$$

Le modèle comporte  $M$  nœuds. Nous avons  $4 \times (M + 1)$  paramètres alors que le modèle original n'en compte que 8. L'hypothèse de continuité implique un système de  $3M$  restrictions. Comme nous devons aussi vérifier que  $p_t^c(0, \theta) = a_{0,t} = 1$ , nous avons en fait  $3M + 1$  contraintes. L'implémentation de cette méthode est légèrement plus difficile mais elle est classique en analyse numérique (elle est mieux connue sous le terme *piecewise polynomial regression*).

Le graphique (1.6) présente de nouvelles estimations de la structure par terme pour le 15 février 1994. Pour  $\tau^* = 1$ , nous retrouvons évidemment la courbe du graphique (1.5). Nous présentons aussi deux autres estimations : la première comporte 2 nœuds  $\tau^* = (1, 5)^\top$ ; nous utilisons trois nœuds  $\tau^* = (1, 3, 8)^\top$  pour l'autre



Graphique 1.6

estimation. Les deux nouvelles courbes de taux zéro sont plus *proches* des taux observés. Ce modèle généralisé permet donc de mieux appréhender les courbures. Cependant, nous restons confrontés au problème de choix des nœuds. Devons nous prendre  $\tau^* = (1, 5)^T$ ,  $\tau^* = (1, 3, 8)^T$  ou même d'autres valeurs ? Il est difficile de répondre, mais le problème ne se pose pas si nous définissons une forme fonctionnelle particulière.

### 1.3.3.2 La méthode de NELSON et SIEGEL [1987]

Le point de départ des travaux de Nelson et Siegel est original. Ils supposent en effet que le taux à terme instantané  $f_t(\tau)$  est solution d'une équation différentielle ordinaire du second ordre dans le cas d'une racine double, c'est-à-dire que l'expression de  $f_t(\tau)$  est de la forme

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad (1.35)$$

Les motifs de l'utilisation de cette forme restent assez flous. Nelson et Siegel indiquent seulement que des équations aux différences ou différentielles peuvent générer des courbes de taux en S. Comme le taux d'intérêt  $R_t(\tau)$  de maturité  $\tau$  est

défini par

$$R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(\theta) d\theta \quad (1.36)$$

celui-ci a pour expression

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} \right] + \mu_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right] \quad (1.37)$$

La courbe des taux zéro dépend donc d'un vecteur de 4 paramètres

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \tau_1 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Certains de ces paramètres ont une signification, puisque nous avons<sup>10</sup>

$$R_t(0) = \mu_1 + \mu_2 \quad (1.39)$$

et

$$R_t(\infty) = \mu_1 \quad (1.40)$$

Le paramètre  $\mu_1$  représente le taux long, alors que le paramètre  $\mu_2$  mesure la différence entre le taux court instantané et le taux long. L'estimation du vecteur des paramètres revient à résoudre le programme suivant

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{n=1}^N w_n \left( p_t^{(n)}(\theta) - P_t^{(n)} \right)^2 \quad (1.41)$$

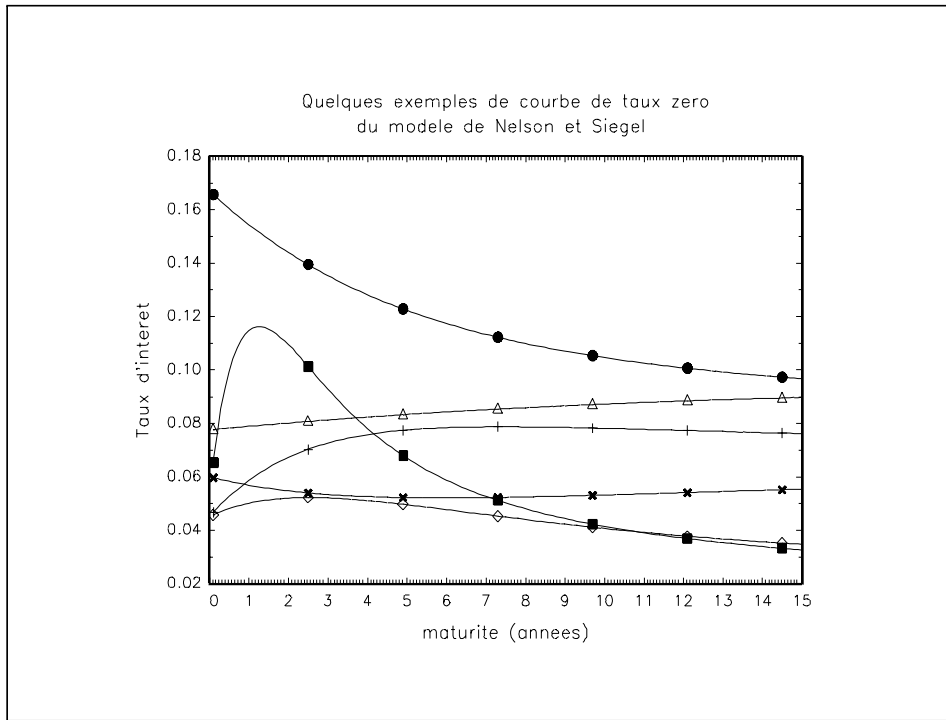
avec  $p_t^{(n)}(\theta) = \exp(-R_t(\tau) \tau)$ . Il est possible d'imposer certaines restrictions, par exemple dues aux relations (1.39) et (1.40).

Le modèle de Nelson et Siegel permet d'appréhender de nombreuses formes de structure par terme. Le graphique (1.7) en présente quelques-unes. Cela est d'autant plus remarquable que le nombre de paramètres est faible (seulement quatre). De plus, l'économiste ou le financier n'utilise pas d'a priori comme pour les splines. Donc, avec les mêmes données, deux financiers obtiendront les mêmes résultats. Nous estimons la courbe des taux zéro pour la date du 15 février 1994 (voir graphique (1.8)). Nous utilisons des poids identiques pour tous les actifs. Le modèle de Nelson et Siegel appréhende relativement bien les parties courte et longue.

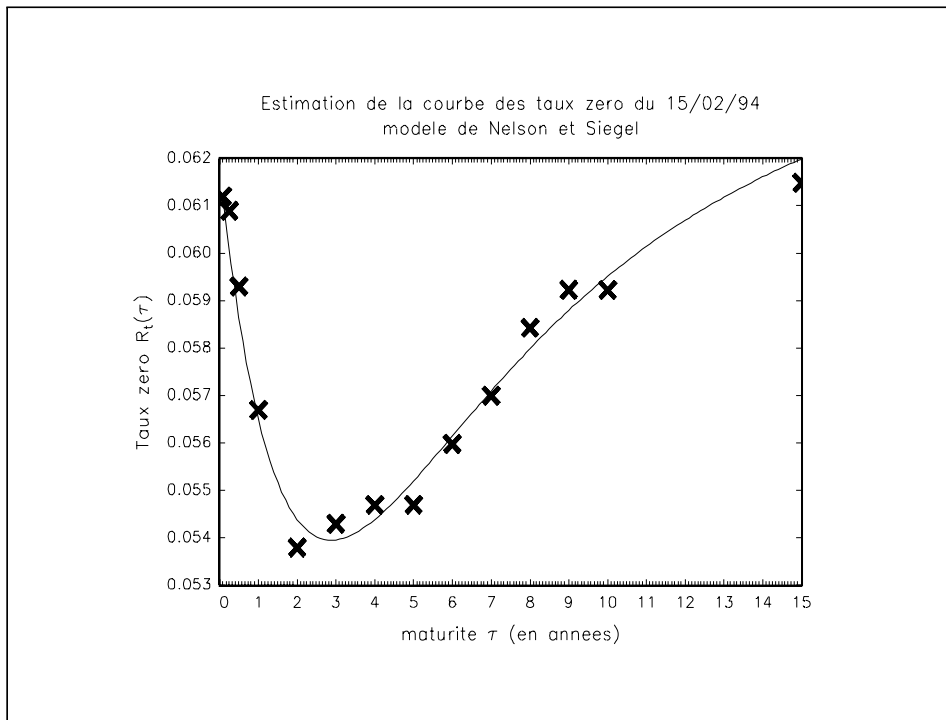
---

<sup>10</sup>En effet, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)}{x} = 1$$



Graphique 1.7



Graphique 1.8

Reprenant l'idée développée par Bliss, SVENSSON [1994b] introduit un quatrième terme dans la définition du taux zéro du modèle de Nelson et Siegel

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} \right] + \mu_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right] + \mu_4 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_2}\right)}{\frac{\tau}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_2}\right) \right] \quad (1.42)$$

Svensson justifie cette modification par un souci de flexibilité. Nous estimons le vecteur des paramètres de la même façon que pour le modèle de Nelson et Siegel. Celui-ci est défini par

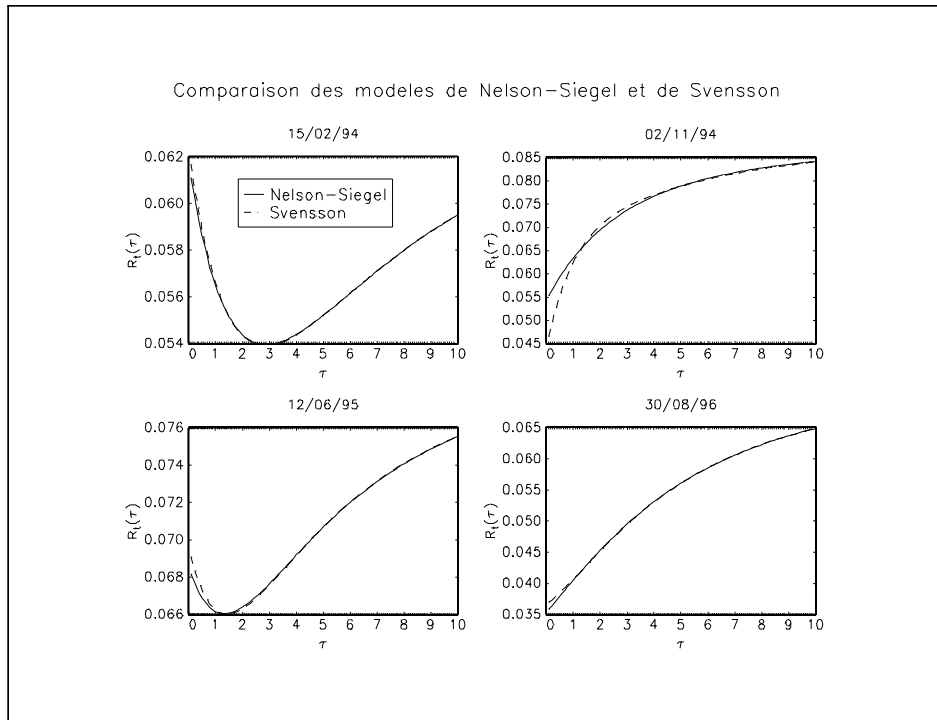
$$\theta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

En pratique, l'estimation du modèle de Svensson pose des problèmes numériques de convergence. C'est pourquoi il est préférable d'estimer les paramètres du modèle de Nelson et Siegel et d'utiliser ces valeurs pour le point de départ de l'optimisation. Dans la procédure **Svensson**, nous utilisons ainsi le point de départ suivant  $(\hat{\mu}_1^{\text{NS}}, \hat{\mu}_2^{\text{NS}}, \hat{\mu}_3^{\text{NS}}, 0.01, \hat{\tau}_1^{\text{NS}}, 1)^\top$ .

Dans le modèle de Svensson, il y a deux composantes permettant de modéliser une forme en U. En théorie, le modèle de Svensson permet de mieux appréhender les différentes formes de courbe de taux, notamment celles qui présentent une double inversion. Cependant, nous rencontrons rarement ces formes spéciales. Le graphique (1.9) présente une comparaison entre le modèle de Nelson et Siegel et celui de Svensson pour quatre dates choisies au hasard. Nous remarquons que les deux estimations sont relativement proches. C'est pourquoi nous préférons utiliser le modèle de Nelson et Siegel qui en outre pose moins de problèmes numériques. Bien sûr, nous pouvons toujours trouver des cas où la courbe des taux zéro de Nelson et Siegel est mal estimée (voir par exemple leur figure 5 et les résultats de leur septième échantillon).

### 1.3.3.3 L'implémentation de ces méthodes

Les méthodes précédentes sont basées sur la minimisation de la fonction quadratique (1.28). Posons  $u_t^n(\theta) = p_t^{(n)}(\theta) - P_t^{(n)}$  la différence entre le prix *théorique* de l'obligation donné par le modèle et le prix de l'obligation observé sur le marché. Pour définir  $u_t^n(\theta)$  pour la  $n$ -ième obligation, nous devons disposer du prix de marché  $P_t^{(n)}$ , de la valeur des différents coupons  $c_j^{(n)}$  et de la maturité  $\tau_j^{(n)}$  de ces coupons.



Graphique 1.9

La difficulté principale d'implémentation concerne la gestion des caractéristiques des obligations. Considérons par exemple trois obligations  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ . La première est une obligation classique avec un coupon annuel constant, la seconde est un coupon zéro et la troisième verse un coupon dont la valeur diffère selon la maturité. Si nous utilisons un langage orienté objet, nous pouvons définir les caractéristiques de l'obligation par une classe, mais il est plus difficile de manipuler ces obligations avec un langage de programmation numérique classique, parce que la quantité d'information pour définir une obligation n'est pas constante. C'est pourquoi il est nécessaire de proposer un codage de ces obligations. Nous proposons que les caractéristiques d'une obligation soient codées dans un vecteur de la manière suivante

$$v^{(n)} = \begin{bmatrix} J^{(n)} \\ P_t^{(n)} \\ \tau_1^{(n)} \\ c_1^{(n)} \\ \vdots \\ \tau_{J^{(n)}}^{(n)} \\ c_{J^{(n)}}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

La première composante du vecteur correspond au nombre de coupons  $J^{(n)}$  versés par l'obligation. Le prix actuel de l'obligation  $P_t^{(n)}$  est défini par la deuxième



composante. Puis, nous codons successivement la maturité et la valeur de chaque coupon. La procédure `decodage_obligation` permet d'extraire le prix de l'obligation  $P_t^{(n)}$ , le vecteur des maturités  $(\tau_1^{(n)}, \dots, \tau_{J(n)}^{(n)})^\top$  et le vecteur de la valeur des coupons  $(c_1^{(n)}, \dots, c_{J(n)}^{(n)})^\top$ . Considérons un exemple pour montrer l'utilité de cette procédure. L'obligation  $O_1$  est définie par

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 119.95 \\ \frac{25}{360} \\ 8.55 \\ \frac{25}{360} + 1 \\ 8.55 \\ \frac{25}{360} + 2 \\ 8.55 \\ \frac{25}{360} + 3 \\ 8.55 \\ \frac{25}{360} + 4 \\ 108.55 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Pour l'obligation  $O_2$ , nous avons

$$v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 94.50 \\ 1 + \frac{50}{360} \\ 100 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Nous codons la troisième obligation  $O_3$  de cette façon

$$v^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 115.70 \\ \frac{75}{360} \\ 10.15 \\ \frac{75}{360} + 1 \\ 7.45 \\ \frac{75}{360} + 2 \\ 109.35 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Nous pouvons alors créer une base de données contenant les caractéristiques de ces trois obligations. Le fichier se présente de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 5 & 1 & 3 \\
 119.95 & 94.50 & 115.70 \\
 \frac{25}{360} & 1 + \frac{50}{360} & \frac{75}{360} \\
 8.55 & 100 & 10.15 \\
 \frac{25}{360} + 1 & \cdot & \frac{75}{360} + 1 \\
 8.55 & \cdot & 7.45 \\
 \frac{25}{360} + 2 & \cdot & \frac{75}{360} + 2 \\
 8.55 & \cdot & 109.35 \\
 \frac{25}{360} + 3 & \cdot & \cdot \\
 8.55 & \cdot & \cdot \\
 \frac{25}{360} + 4 & \cdot & \cdot \\
 108.55 & \cdot & \cdot
 \end{array} \tag{1.48}$$

Le symbole  $\cdot$  indique une valeur quelconque (nous pouvons utiliser par exemple 0). Pour lire les caractéristiques de la  $n$ -ième obligation, il suffit de sélectionner la  $n$ -ième colonne de la base de données et de l'extraire avec la procédure `decodage_obligation`. Par exemple, nous avons

```
for n (1,3,1);
  {Prix,tau,Coupon} = decodage_obligation(data[:,n]);
endfor;
```

Un autre problème d'implémentation se pose lorsque nous voulons endogénéiser les poids  $w_n$ . Par exemple, la Banque de France utilise le modèle de Svensson avec des poids correspondant à la dérivée du prix de l'obligation  $n$  par rapport à son taux actuariel. Le vecteur des poids est ainsi endogène puisqu'il dépend des paramètres du modèle. RICART et SICSIC [1995a] avouent avoir rencontré des difficultés de convergence. Les auteurs pensent que l'estimation est basée sur une minimisation pondérée des carrés des résidus puisqu'elle est obtenue de la façon suivante

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{n=1}^N w_n(\theta) v_t^n(\theta) \tag{1.49}$$

avec  $v_t^n(\theta) = u_t^n(\theta)^2$ . Posons  $\bar{w}_n(\theta) = v_t^n(\theta)$  et  $\bar{v}_t^n(\theta) = w_n(\theta)$ . Nous vérifions que  $\bar{w}_n(\theta) \geq 0$  et  $\bar{v}_t^n(\theta) \geq 0$ . La fonction objectif utilisée par la Banque de France peut alors s'écrire

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{n=1}^N \bar{w}_n(\theta) \bar{v}_t^n(\theta) \tag{1.50}$$

Mis sous cette forme, nous pouvons interpréter le problème comme une minimisation de la somme pondérée des poids. Si les poids sont endogènes (c'est-à-dire s'ils dépendent du vecteur des paramètres), nous ne pouvons utiliser le critère précédent.

Nous pouvons cependant estimer le vecteur des paramètres avec l'algorithme récursif suivant :

1. Choisir une valeur  $\theta_0$  de  $\theta$ .
2. Calculer le vecteur des poids  $w_n = w_n(\theta_i)$ .
3. Chercher la valeur  $\theta_{i+1}$  telle que

$$\theta_{i+1} = \arg \min \sum_{n=1}^N w_n v_t^n(\theta) \quad (1.51)$$

4. Recommencer les étapes 2 et 3 jusqu'à ce que nous vérifions que  $|\theta_{i+1} - \theta_i| \leq \varepsilon$ .

A l'étape 3, le vecteur des poids est constant et n'est pas modifié au cours de l'optimisation. Nous pouvons montrer sous certaines conditions<sup>11</sup> que cet algorithme est efficace car la suite des optima converge. Il y a peu d'utilisations de l'algorithme récursif en économie. Un exemple est l'estimation par GMM (HANSEN [1982]).

Pour illustrer ce problème numérique, nous considérons la fonction

$$f(x) = 5 - \ln(\theta_1^2 + \theta_2^2(x - \theta_3)^2) \quad (1.52)$$

Nous simulons une série de données<sup>12</sup>  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, 25\}$  avec les valeurs numériques  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0.2$  et  $\theta_3 = 6$ . Nous cherchons à estimer les paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . La courbe théorique, ainsi que les données simulées, sont représentées sur le graphique (1.10). Nous remarquons que la fonction présente des courbures très différentes. C'est pourquoi nous choisissons comme poids le carré de la dérivée seconde de la fonction  $f$  par rapport à  $x$ , c'est-à-dire que nous avons

$$w_i = \left( \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \right)^2 \quad (1.53)$$

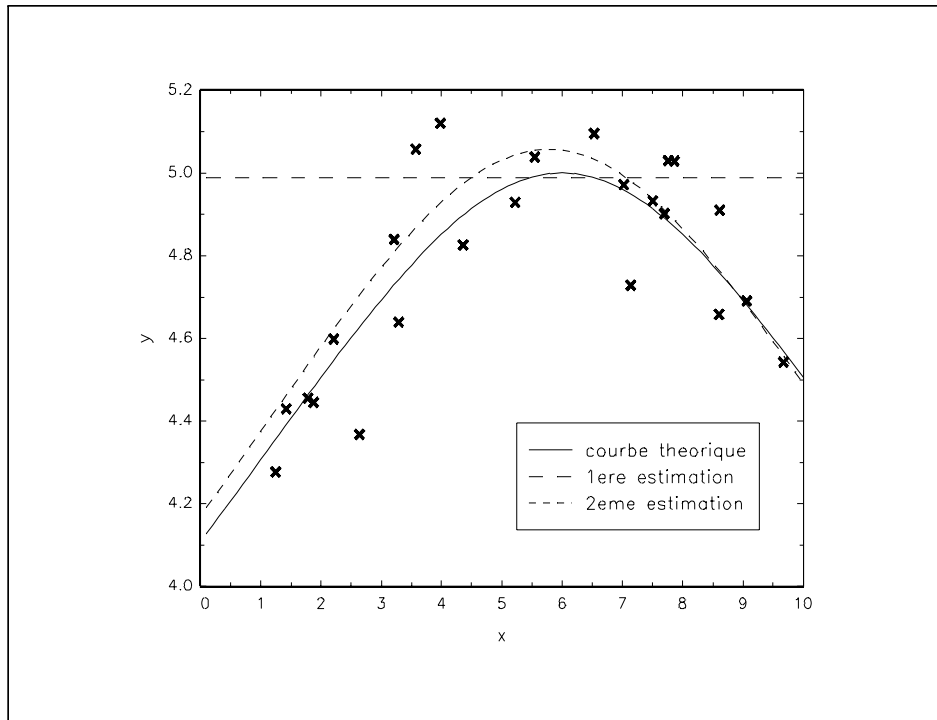
Nous interprétons ce choix comme la volonté d'ajuster les parties de la courbe qui sont "moins linéaires" que les autres. Pour la première estimation, nous endogénéisons les poids, c'est à dire que nous obtenons l'estimation de cette façon

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{i=1}^{25} \left( \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \right)^2 (y_i - f(x_i))^2 \quad (1.54)$$

---

<sup>11</sup>Ces conditions portent sur la fonction objectif (dans notre cas, elle est quadratique, donc l'existence de l'optimum est vérifié) et sur la définition des poids.

<sup>12</sup>Nous obtenons les abscisses  $x_i$  en utilisant un générateur de nombres aléatoires uniformes entre 0 et 10. La valeur  $y_i$  correspond alors à  $f(x_i)$  auquel nous avons ajouté un bruit blanc de variance 0.15.



Graphique 1.10

Nous utilisons l'algorithme récursif pour la seconde estimation. Nous remarquons que les courbes estimées sont très différentes. En particulier, la première estimation aboutit à une courbe étrange, qui ressemble à une droite. Nous pouvons interpréter ce résultat assez facilement : l'optimisation a pris davantage en compte le terme  $\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\Big|_{x=x_i}\right)^2$  que le carré de l'erreur de prévision  $y_i - f(x_i)$ . C'est pourquoi la courbe ressemble à une droite.

## 1.4 La structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996

Nous estimons la structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996 par la méthode de Nelson et Siegel. C'est-à-dire que nous estimons le vecteur  $\theta$  des paramètres de chaque jour pour lequel nous disposons de données. Nous obtenons ainsi une base de données de dimension  $636 \times 4$ . Cette estimation prend un peu de temps sur un Pentium 100 (il faut compter trois heures de calcul). Une fois les calculs terminés, nous pouvons facilement construire la structure par terme des coupons zéro ou des taux zéro. La méthode de Nelson et Siegel permet d'analyser la courbe des taux de façon dynamique très facilement car ce sont les coefficients

du modèle que nous sauvegardons et non un ensemble de taux zéro pour un nombre fini de maturités. Pour obtenir le taux zéro pour une maturité quelconque  $\tau$ , nous utilisons la procédure `NelsonSiegel-TauxZero` :

```
R = NelsonSiegel-TauxZero(theta,tau);
```

La sous-section suivante concerne la courbe des taux zéro française. Nous y indiquons comment utiliser le modèle de Nelson et Siegel pour extraire certaines informations de cette courbe des taux.

### **1.4.1 La courbe des taux zéro française**

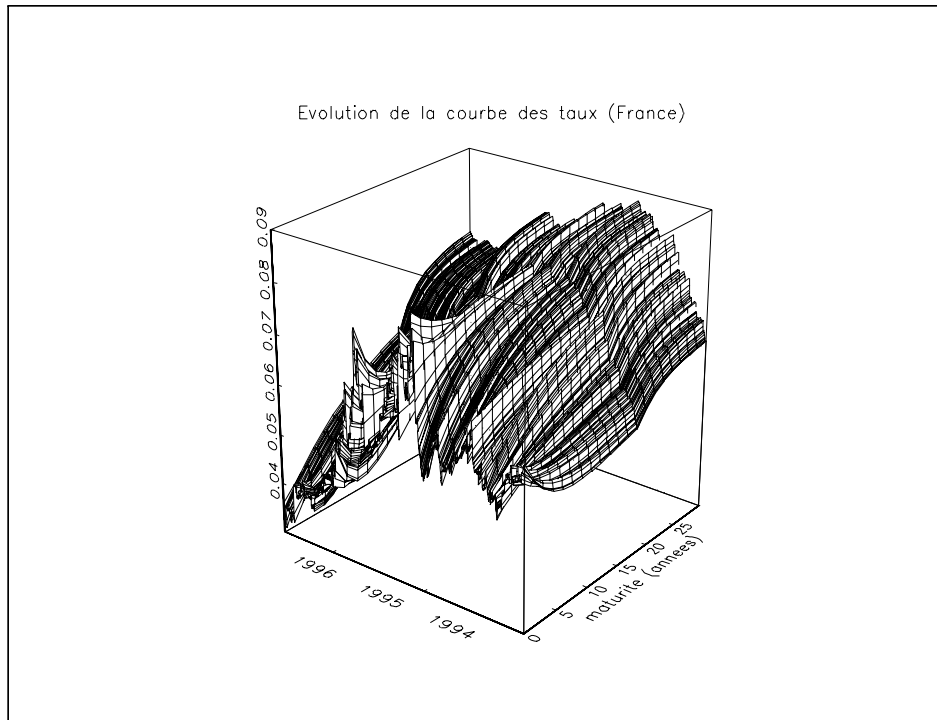
Celle-ci est représentée sur le graphique (1.11). Nous distinguons plusieurs périodes. Au début de l'année 1994, la courbe des taux zéro française est normale (ascendante). Le niveau des taux courts est proche des 6%. La forme de la courbe des taux évolue assez peu jusqu'au début de l'année 1995. Deux inversions de la structure par terme marquent cette année. La première intervient au mois de février et mars. Nous situons la seconde au mois d'octobre. Nous remarquons que c'est l'augmentation des taux courts qui provoquent ces deux inversions puisque les taux longs ont tendance à diminuer sur toute la période étudiée. A partir du mois de novembre 1995, les taux courts diminuent (assez fortement).

#### **1.4.1.1 La crise monétaire de février 1995**

C'est une crise du système des changes qui touche de nombreux pays. Elle débute au début de l'année par la crise mexicaine et la baisse de la devise américaine. Elle se poursuit par une fragilisation des devises faibles du mécanisme de change européen. Suite au relèvement des taux directeurs de la Banque de France, la courbe des taux s'inverse du fait de la forte hausse des taux de rendement des emprunts d'état de faible maturité. Le 24 février, l'INSEE annonce un taux de croissance de 2.5% pour l'année 1994. Toutefois la contribution de cette nouvelle à la crise est sûrement très faible, car d'autres pays connaissent au même moment une inversion de la structure par terme, comme l'Allemagne. Ce n'est donc pas une inversion propre à la France.

#### **1.4.1.2 La crise monétaire d'octobre 1995**

On assiste à une nouvelle crise du système des changes mais qui concerne davantage la devise française. Au mois de septembre, nous notons déjà une vente massive de titres français de la part des fonds de gestion étrangers. La publication du projet de budget français pour l'année 1996 est accueillie sceptiquement par les institutionnels étrangers. A trois ans d'échéance de la monnaie unique, ce projet de loi est considéré



Graphique 1.11

comme peu ambitieux pour l'assainissement des finances publiques. Comme pour la crise précédente, la Banque de France relève ses taux directeurs. Les tensions sur le marché des changes se répercutent sur le marché monétaire puis sur le marché obligataire. On assiste alors à une hausse des taux de rendement pour les échéances courtes (jusqu'à un an). Contrairement à celle du mois de février 1994, il semble que cette inversion soit beaucoup plus marquée par des facteurs nationaux. Aussi, nous n'observons pas d'inversion en Allemagne.

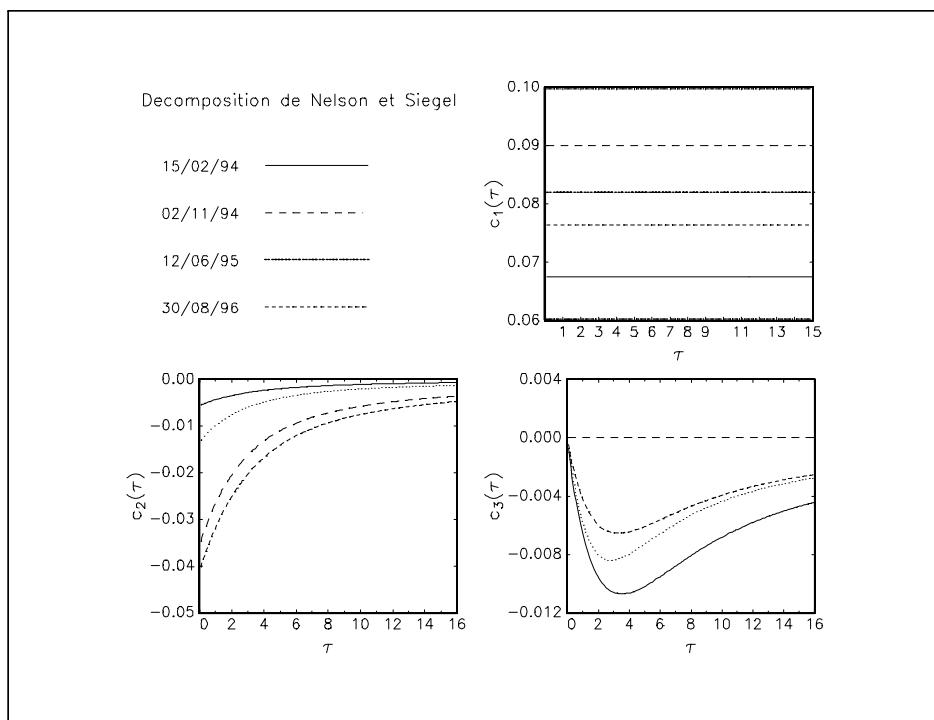
## 1.4.2 Quelques utilisations du modèle de Nelson et Siegel

### 1.4.2.1 La décomposition de Nelson et Siegel

Dans l'article original, Nelson et Siegel présentent une décomposition du **taux à terme** en trois composantes. L'idée est ensuite reprise par SVENSSON [1994b], mais ce sont RICART et SICSIC [1995a] qui suggèrent une décomposition analogue pour le **taux zéro**. Nous avons

$$R_t(\tau) = c_1(\tau) + c_2(\tau) + c_3(\tau) \quad (1.55)$$

avec  $c_1(\tau) = \mu_1$ ,  $c_2(\tau) = \mu_2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) / \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$  et  $c_3(\tau) = \mu_3 \left(\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) / \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right)$ . La première composante est le taux

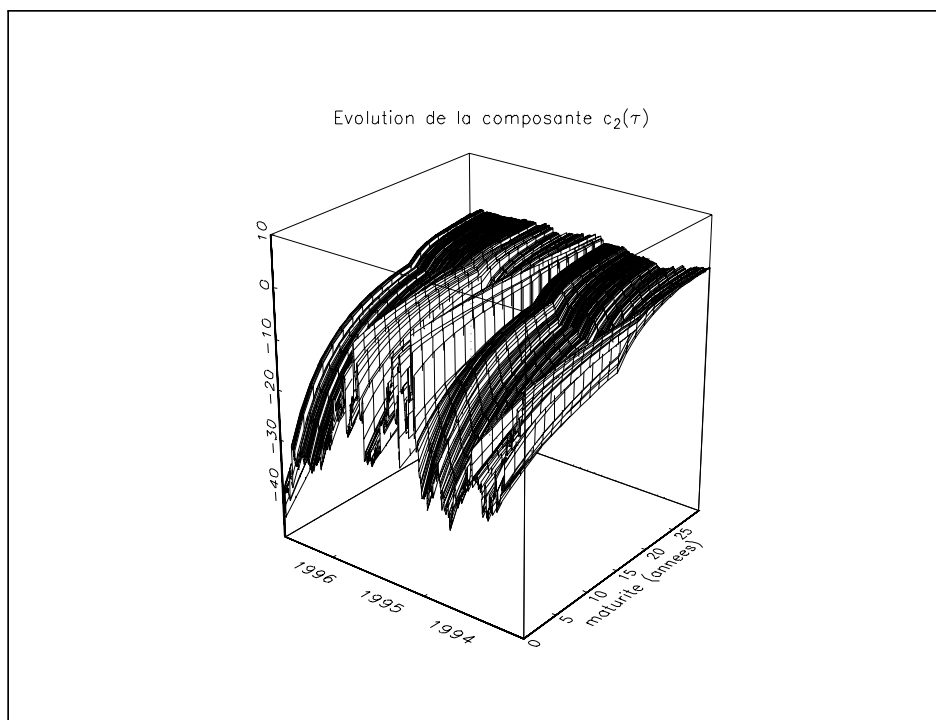


Graphique 1.12

long, c'est-à-dire la valeur vers laquelle le taux zéro tend lorsque la maturité augmente. La seconde composante dépend des paramètres  $\mu_2$  et  $\tau_1$ . Pour  $\tau$  égal à 0, cette composante prend la valeur  $\mu_2$ , c'est-à-dire la différence entre le taux court  $R_t(0)$  et  $R_t(\infty)$ . Comme  $c_2(\tau)$  tend vers 0 lorsque la maturité augmente, cette composante est une "mesure de la contribution" de l'opposé du spread dans la détermination des taux zéro. Nous pouvons interpréter la dernière composante comme la composante *pure* d'inversion des taux, car elle permet à la courbe des taux zéro de s'inverser même si le spread est positif.

Nous représentons sur le graphique (1.12) ces trois composantes pour quatre dates. Nous rappelons que le graphique des courbes de taux zéro correspondantes est page 38. Nous observons notamment que pour les deux inversions, les valeurs prises par la troisième composante sont plus élevées en valeur absolue. Pour la date du 02/11/1994, cette troisième composante est aussi assez forte. Mais nous ne constatons pas d'inversion de la courbe car le spread est très élevé. C'est pourquoi nous ne considérons pas cette troisième composante comme un indicateur d'inversion de la courbe des taux zéro.

Les graphiques (1.13) et (1.14) montrent l'évolution des ces composantes pour la période du 10 février 1994 au 30 août 1996. L'unité de mesure est le point de



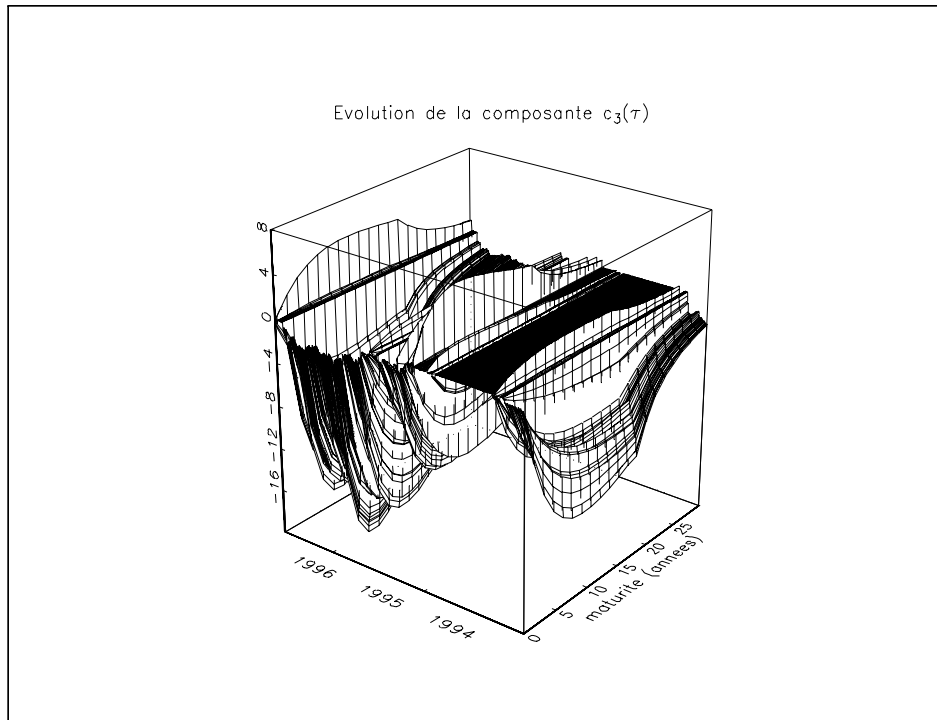
Graphique 1.13

base. L'évolution de la première composante est présentée au paragraphe suivant. Nous pouvons considérer la méthode de Nelson et Siegel comme un modèle à trois facteurs : un premier de niveau des taux, un seconde de spread des taux et un troisième d'inversion de la courbe des taux. Considérons la reparamétrisation des composantes  $\{c_1(\tau) + \mu_2, c_2(\tau) - \mu_2, c_3(\tau)\}$ . Le facteur de niveau est alors le taux court instantané. Nous retrouvons ces facteurs dans de nombreuses analyses factorielles. Il est remarquable que le modèle de Nelson et Siegel prenne en compte ces trois facteurs.

#### 1.4.2.2 Une analyse des taux zéro court et long français

Le modèle de Nelson et Siegel permet de calculer deux taux zéro qui ne sont pas observables mais qui jouent un très grand rôle en analyse économique. Ce sont le taux court instantané  $R_t(0)$  et le taux long  $R_t(\infty)$ . Nous avons déjà précisé dans la première section de ce chapitre l'importance de ce taux court. Nous verrons dans la deuxième partie que son rôle est encore plus important dans les modèles financiers de structure par terme. Nous observons sur le graphique (1.15) que le taux court français varie énormément par rapport au taux long. Nous remarquons aussi que celui-ci a toujours été inférieur au taux long pour la période con-



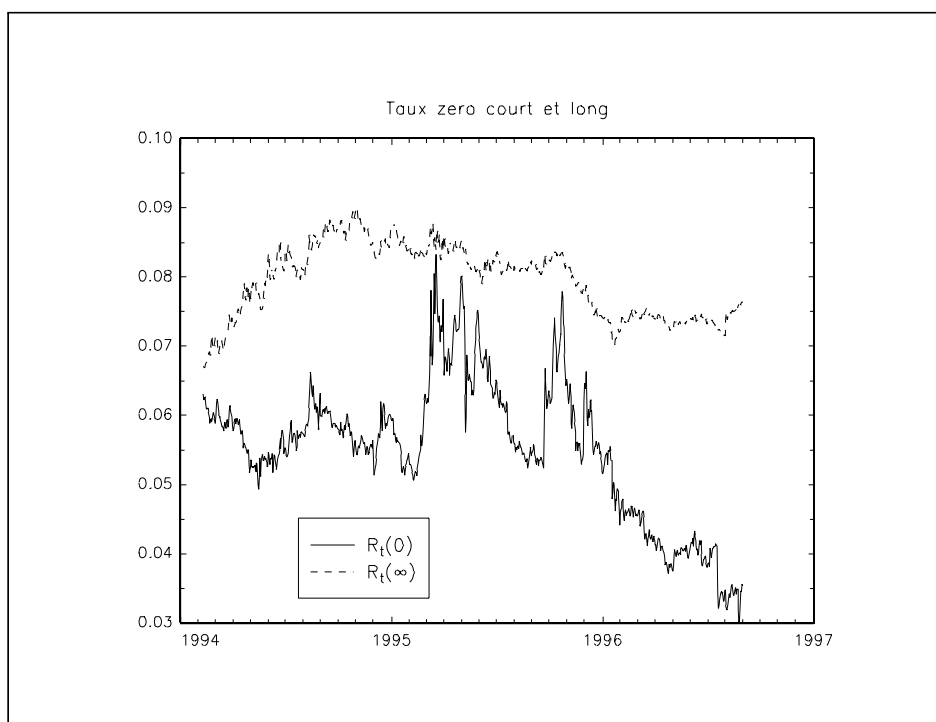


Graphique 1.14

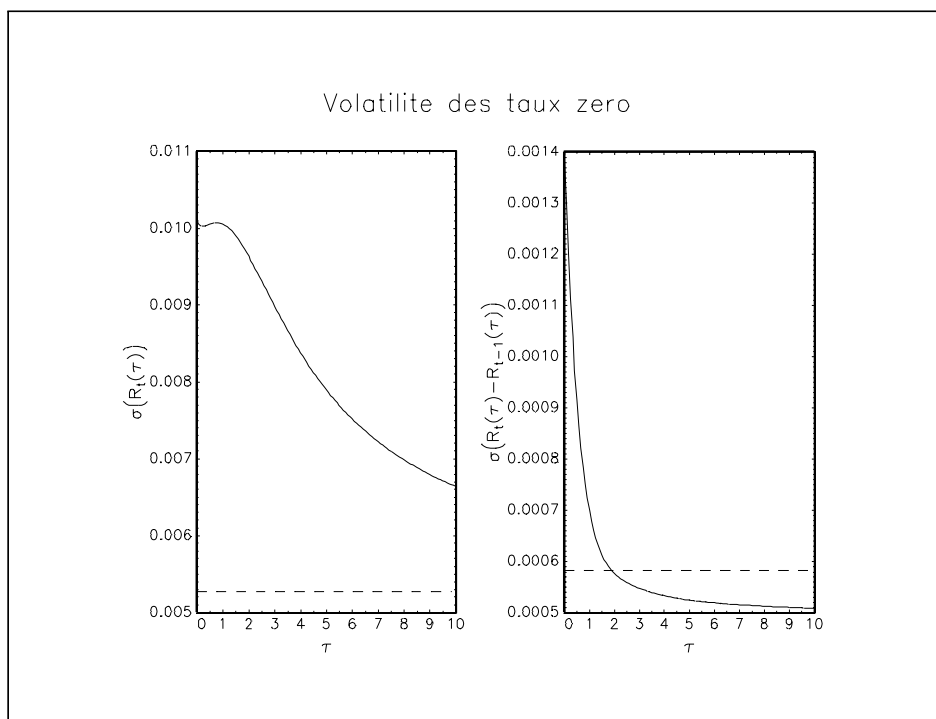
sidérée. L'augmentation du taux court marque les deux périodes d'inversion de taux. Le taux long ne bouge pratiquement pas durant ces deux périodes. Le taux court apparaît donc une variable **centrale** dans l'explication de la déformation de la structure par terme. Si nous réduisons le modèle de Nelson et Siegel à deux facteurs, la décomposition  $\{c_1(\tau) + \mu_2, c_2(\tau) - \mu_2\}$  est beaucoup plus pertinente que  $\{c_1(\tau), c_2(\tau)\}$ . Nous pouvons mesurer la relative inertie du taux long par la volatilité empirique pour la période considérée. Nous obtenons  $\hat{\sigma}[R_t(\infty)] = 0.0053$  et  $\hat{\sigma}[R_t(\infty) - R_{t-1}(\infty)] = 0.0006$ . Cela est beaucoup plus faible que le taux court ( $\hat{\sigma}[r_t] = 0.0101$  et  $\hat{\sigma}[r_t - r_{t-1}] = 0.0014$ ). Nous représentons ces deux mesures de volatilité pour différentes maturités sur le graphique (1.16). Nous remarquons que le taux court est le taux zéro le plus variable. Nous pouvons le considérer comme le taux pivot de De Boissieu.

### 1.4.2.3 La détermination des taux à terme

Étudier la structure par terme, c'est aussi s'intéresser aux taux à terme implicites de la courbe des taux zéro. Le point de départ de la construction de Nelson et Siegel est la modélisation du taux à terme instantané  $f_t(\tau)$ . Nous rappelons que



Graphique 1.15



Graphique 1.16

son expression est

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad (1.56)$$

Considérons  $F_t(\tau, m)$  le taux à terme à la date  $t$  d'un contrat couvrant la période  $[t + \tau, t + \tau + m]$ . Il vérifie la relation suivante

$$P_t^c(\tau + m) = e^{-mF_t(\tau, m)} P_t^c(\tau) \quad (1.57)$$

Nous en déduisons l'expression de  $F_t(\tau, m)$

$$F_t(\tau, m) = -\frac{1}{m} \ln\left(\frac{P_t^c(\tau + m)}{P_t^c(\tau)}\right) \quad (1.58)$$

Nous pouvons donner une nouvelle formulation<sup>13</sup> du taux à terme instantané

$$f_t(\tau) = F_t(\tau, 0) = -\frac{\partial \ln P_t^c(\tau)}{\partial \tau} \quad (1.59)$$

L'information contenue dans les taux à terme est très précieuse pour l'économiste ou le financier. Ces taux à terme apparaissent même plus importants que les taux zéro (RICART et SICSIC [1995b]). Nous développerons cette idée dans le deuxième chapitre. Il est intéressant de noter pour l'instant que la formulation du modèle de Nelson et Siegel permet de calculer l'ensemble des taux à terme  $\{F_t(\tau, m), \tau \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+\}$  très facilement. Pour les obtenir avec la bibliothèque **SPT**, nous spécifions

```
TauxATerme = NelsonSiegel.TauxATerme(theta, tau, m);
```

Le graphique (1.17) présente différents taux à terme pour quatre dates.

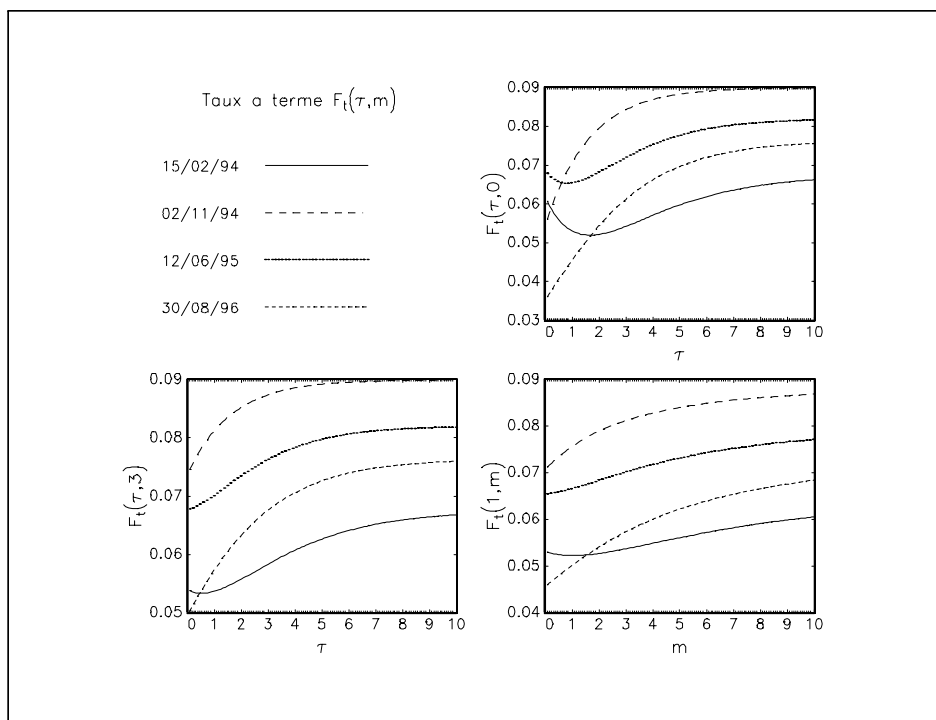
## 1.5 La théorie des anticipations rationnelles

Nous avons déjà présenté la théorie des anticipations dans la première section de ce chapitre. Depuis la fin des années 1970, avec le développement des outils économétriques, le nombre de travaux sur la théorie des anticipations a fortement augmenté, mais il existe peu d'études économétriques en sa faveur. En 1983, CAMPBELL, SCHOENHOLTZ et SHILLER écrivent à ce sujet

---

<sup>13</sup>car nous avons

$$\lim_{m \rightarrow 0} F_t(\tau, m) = -\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\ln P_t^c(\tau + m) - \ln P_t^c(\tau)}{(\tau + m) - \tau} = -\frac{\partial \ln P_t^c(\tau)}{\partial \tau}$$



Graphique 1.17

*The simple expectations theory, in combination with the hypothesis of rational expectations, has been rejected many times in careful econometric studies. But the theory seems to reappear perennially in policy discussions as if nothing had happened to it. It is uncanny how resistant superficially appealing theories in economics are to contrary evidence. We are reminded of the Tom and Jerry cartoons that precede feature films at movie theatre. The villain, Tom the cat, may be buried under a ton of boulders, blasted through a brick wall (leaving a cat-shaped hole), or flattened by a steamroller. Yet seconds later he is up again plotting evil deeds.*

En effet, avec le temps, cette théorie est devenue un point d'ancrage dans l'analyse de la structure par terme. A tel point que le chapitre 13 du *Handbook of Monetary Economics* intitulé "the term structure of interest rates" ne concerne que cette théorie. Abandonner cette théorie revient à refuser le rôle central de la structure par terme dans l'analyse monétaire. Aussi, de nombreux résultats des chapitres suivants sont obtenus dans le cadre de cette théorie. C'est pourquoi nous lui consacrons une section entière.

Il n'y a pas de théorie des anticipations rationnelles de la structure par terme. Le terme désigne en fait la théorie des anticipations avec l'hypothèse de rationalité. C'est donc la même théorie que celle de MEISELMAN [1962]. Sous l'impulsion de certains chercheurs, notamment John Campbell et Robert Shiller, elle a acquis une connotation très économétrique. Bien sûr, les définitions et les concepts sont maintenant plus précis, mais le plus grand changement concerne les outils d'analyse, en particulier les tests de l'hypothèse d'anticipations rationnelles et la mesure de la prime de terme.

## 1.5.1 Les travaux de John Campbell et Robert Shiller

La contribution de John Campbell et Robert Shiller à la théorie des anticipations de la structure par terme est très intéressante pour différentes raisons. Nous constatons chez ces auteurs une référence constante à cette théorie et, en même temps, un souci évident de s'en démarquer.

### 1.5.1.1 L'apport analytique

Dans la théorie traditionnelle des anticipations, nous considérons le taux long comme une moyenne arithmétique du taux court. L'égalité suivante est vérifiée pour toutes valeurs de  $\tau$  et  $N$ .

$$R_t(N\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E [R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] \quad (1.60)$$

S'inspirant notamment des travaux de Modigliani et Sutch, de nombreux auteurs proposent de remplacer l'expression (1.60) par celle-ci

$$R_t(N\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n(\tau) E [R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] \quad (1.61)$$

Les poids  $w_n(\tau)$  ne sont plus forcément égaux, mais la somme est proche de l'unité. Par exemple, SHILLER [1979] exprime le taux  $R_t(N\tau)$  de la façon suivante

$$R_t(N\tau) = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^N} \sum_{n=0}^{N-1} \gamma^n E [R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] \quad (1.62)$$

Cette formulation est reprise dans de nombreux articles, par exemple dans CAMPBELL, SCHOENHOLTZ et SHILLER [1983]. Cette formulation est très importante car elle est à la base des deux tests les plus populaires de la théorie des anticipations : le test de volatilité de Shiller et le test de cointégration vectorielle de Campbell et Shiller.

Nous devons aussi à CAMPBELL et SHILLER [1984] la distinction entre différents concepts de prime de risque (ou de prime de terme, SHILLER [1990]). La prime de risque, que nous rencontrons le plus souvent, est la différence entre le taux à terme et l'anticipation du taux au comptant futur

$$L_t(\tau, m) = F_t(\tau, m) - E[R_{t+\tau}(m) | \mathcal{F}_t] \quad (1.63)$$

Notons  $H_t(\tau, m)$  le taux de rendement entre  $t$  et  $t + \tau$  de détention d'un coupon zéro d'échéance  $t + \tau + m$ . Nous avons

$$H_t(\tau, m) = \frac{\ln P_{t+\tau}^c(m) - \ln P_t^c(\tau + m)}{\tau} \quad (1.64)$$

ou encore

$$H_t(\tau, m) = \frac{(\tau + m) R_t(\tau + m) - m R_{t+\tau}(m)}{\tau} \quad (1.65)$$

Campbell et Shiller définissent alors la prime de risque "par période de détention" de la façon suivante :

$$L_t^{(2)}(\tau, m) = E[H_t(\tau, m) | \mathcal{F}_t] - R_t(\tau) \quad (1.66)$$

Il existe une troisième forme de prime de risque liée à l'expression (1.61)

$$L_t^{(3)}(\tau, N) = R_t(N\tau) - \sum_{n=0}^{N-1} w_n(\tau) E[R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] \quad (1.67)$$

Les auteurs anglais lui donnent le nom de "rollover term premium". Dans la suite de la thèse, nous désignerons ces trois primes sous les noms respectifs de prime de terme, prime de détention et prime cumulée de terme. Nous remarquons que si la prime de terme est nulle, alors la prime de détention et la prime cumulée de terme sont nulles aussi.

Nous pouvons exprimer la prime de détention et la prime cumulée de terme en fonction de la prime de terme. Ces différentes formes de prime ne conduisent donc pas à une incompatibilité. Dans la théorie pure des anticipations, ces trois primes sont nulles car nous supposons que

$$L_t(\tau, m) = 0 \quad (1.68)$$

Nous appelons cette hypothèse l'hypothèse des anticipations sans biais. COX, INGERSOLL et ROSS [1981] montrent qu'il existe trois formes d'anticipation et que l'hypothèse précédente n'est plus vérifiée pour les deux autres formes. Pour l'hypothèse des anticipations dite "locales", nous supposons que l'espérance de rendement instantané du coupon zéro est égal au taux d'intérêt instantané. Nous avons

$$E[dP_t^c(\tau) | \mathcal{F}_t] = r_t P_t^c(\tau) dt \quad (1.69)$$

La formulation (1.69) est une relation d'arbitrage en temps continu. Considérons un agent qui investit dans un coupon zéro. Si l'horizon de détention est  $t + \Delta t$ , le rendement de ce placement est  $-r_t P_t^c(\tau) \Delta t + [P_{t+\Delta t}^c(\tau) - P_t^c(\tau)]$ . Sous l'hypothèse de neutralité au risque, nous retrouvons l'expression (1.69). Cox, Ingersoll et Ross appellent la troisième forme la théorie des anticipations par période de détention. Sa formulation est

$$\frac{1}{P_t^c(\tau)} = E \left[ \exp \int_t^T r_\theta d\theta \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (1.70)$$

Il s'agit d'une généralisation de la relation classique d'arbitrage en avenir certain  $\frac{1 \text{ franc}}{P_t^c(2)} = (1 + R_t(1))(1 + R_{t+1}(1))$ . La distinction par Cox, Ingersoll et Ross de ces trois formulations a d'importantes conséquences sur la théorie des anticipations, car elles sont incompatibles dans un avenir incertain. Considérons un exemple. Si nous acceptons l'hypothèse des anticipations sans biais, nous avons

$$f_t(\tau) = E[r_{t+\tau} \mid \mathcal{F}_t] \quad (1.71)$$

ou encore

$$-\frac{\partial \ln P_t^c(\tau)}{\partial T} = E[r_T \mid \mathcal{F}_t] \quad (1.72)$$

En utilisant la formule d'intégration de Barrow, nous montrons que

$$P_t^c(\tau) = \exp \int_t^T -E[r_\theta \mid \mathcal{F}_t] d\theta \quad (1.73)$$

Les anticipations par période de détention coïncident avec l'hypothèse des anticipations sans biais si l'égalité suivante est vérifiée

$$\exp \int_t^T -E[r_\theta \mid \mathcal{F}_t] d\theta \times E \left[ \exp \int_t^T r_\theta d\theta \mid \mathcal{F}_t \right] = 1 \quad (1.74)$$

Or cette égalité n'est vérifiée que dans le cas certain  $E[r_\theta \mid \mathcal{F}_t] = r_\theta$ . Nous pouvons expliquer assez facilement l'incompatibilité de ces trois formulations par l'incertitude qui n'est pas la même. Dans les trois cas, elle concerne des niveaux différents. Par exemple, pour l'hypothèse des anticipations dite "locales", nous avons un risque de très court terme sur la variation de prix. La troisième forme présente un risque de plus long terme sur le facteur d'actualisation. Cette incompatibilité a une incidence sur la prime de terme. Considérons que le taux d'intérêt instantané est un processus de diffusion

$$dr_t = \sigma dW_t \quad (1.75)$$

L'hypothèse des anticipations par période de détention implique que

$$\frac{1}{P_t^c(\tau)} = \exp \left( r_t \tau + \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \right) \quad (1.76)$$

Nous en déduisons que la prime de terme est égale à

$$L_t(\tau, 0) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (1.77)$$

Puisque le taux d'intérêt instantané est une martingale, alors nous pouvions penser que la prime de terme serait nulle. Or, cela n'est pas le cas. Quelques chercheurs se sont intéressés à ces problèmes d'incompatibilité (GILLES et LEROY [1986,1987], LONGSTAFF [1990] et FISHER et GILLES [1996]). Dans un article intitulé "A defense of traditional hypotheses about the term structure of interest rates", CAMPBELL [1986b] estime que ces incompatibilités ne sont pas fondamentales, car la prime de terme a très peu d'effet sur la variation du prix du coupon zéro. Il est intéressant de noter que la théorie des anticipations employée par Campbell correspond à une théorie avec des primes de terme constantes. La théorie des anticipations, telle qu'elle est utilisée aujourd'hui, ne correspond donc pas à la théorie traditionnelle de Lutz ou Meiselman. La distinction entre les théories des anticipations, de la prime de liquidité ou de l'habitat préféré n'est plus pertinente parce qu'elles correspondent toutes à la théorie des anticipations. Il n'y a donc plus de définition précise de cette théorie qui est remplacée par une certaine idée : **ce sont les anticipations du taux court qui déterminent principalement les taux d'intérêt.**

### 1.5.1.2 L'apport empirique

C'est l'apport le plus significatif de Campbell et Shiller. Les premiers travaux de Shiller sont des travaux purement empiriques. Ainsi, l'article de 1973 "Inflation, rational expectations and the term structure of interest rates" écrit en collaboration avec Modigliani contient de nombreux résultats statistiques ; un paragraphe concerne l'approche bayésienne et les auteurs font des estimations linéaires sous contraintes. Cet article assez technique s'adressait à ce moment-là à des spécialistes. En 1979, Shiller écrit un article "The volatility of long-term interest rates and expectations models of the term structure". Avec le travail de Campbell et Shiller de 1987, c'est l'un des articles les plus importants sur la vérification empirique de la théorie des anticipations. De nombreuses recherches actuelles utilisent les outils méthodologiques de Campbell et Shiller. D'ailleurs, nous constatons que les recherches théoriques sur la structure par terme sont peu nombreuses<sup>14</sup>. En plus de ces deux articles de méthode, Campbell et Shiller ont fait de nombreuses études empiriques.

Dans les années 1960, il y a une adhésion totale de certains économistes à la théorie des anticipations. Aujourd'hui, il est difficile de trouver un économiste qui

---

<sup>14</sup>MCCAFFERTY [1986] considère une approche macroéconomique de la structure par terme. ARTUS et KAABI [1994] présentent un modèle de mimétisme pour expliquer la formation des taux longs. Dans ces deux approches, le taux court reste la variable pivot explicative.



accepte totalement cette théorie des anticipations. Néanmoins, nous pouvons considérer Campbell et Shiller comme des “partisans” ou des “représentants” de cette celle-ci. Même s’ils ne s’en réclament pas ouvertement, ils lui font toujours référence. Ainsi, CAMPBELL [1986b] conclue

*In this paper, I have tried to rehabilitate a unified view of the expectations theory of the term structure.*

mais rajoute en note de bas de page

*This should not be confused with a rehabilitation of the theory itself, as a good empirical description of the behavior of interest rates.*

## 1.5.2 Les tests de l’hypothèse d’anticipations rationnelles

Il existe trois grandes familles de tests de l’hypothèse d’anticipations rationnelles. Dans la première, nous modélisons le taux long par une relation linéaire avec les taux courts. Ce sont les tests les plus anciens mais ils sont toujours utilisés (voir par exemple l’article de CAMPBELL et GALBRAITH [1993]). Une importante littérature concerne les tests dans une économie linéaire récursive, comme ceux formulés par SARGENT [1979] et CAMPBELL et SHILLER [1987]. Enfin, nous trouvons les tests de volatilité à la Shiller.

### 1.5.2.1 Modélisation linéaire du taux long

Si nous supposons l’existence d’une prime de terme, la relation (1.60) devient

$$R_t(N\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E [R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] + L_t(0, N\tau) \quad (1.78)$$

De nombreux auteurs postulent que les anticipations sont rationnelles, c’est-à-dire que nous avons

$$R_{t+n\tau}(\tau) = E [R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] + u_{t+n\tau} \quad (1.79)$$

avec  $u_{t+n\tau}$  un bruit blanc. En combinant les relations (1.78) et (1.79), nous obtenons

$$R_t(N\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} R_{t+n\tau}(\tau) + L_t(0, N\tau) + v_t \quad (1.80)$$

avec

$$v_t = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_{t+n\tau} \quad (1.81)$$

Nous pouvons alors tester facilement l'hypothèse d'anticipations rationnelles à partir de la régression suivante

$$R_t(N\tau) = \alpha + \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n R_{t+n\tau}(\tau) + \varepsilon_t \quad (1.82)$$

Nous devons vérifier que  $\beta_n = \frac{1}{N}$  pour  $n = 0, \dots, N-1$ . Nous considérons  $\alpha$  comme une mesure de la prime de terme. Pour obtenir des estimateurs efficaces, il convient de faire certaines hypothèses sur la relation (1.79). En particulier, il est nécessaire que l'erreur de prévision  $u_{t+n\tau}$  soit orthogonale à l'ensemble de l'information disponible à l'instant  $t$ . Certains auteurs modifient la régression (1.82) pour deux raisons : d'abord, nous régressons une variable sur des variables futures et ensuite, les taux d'intérêt sont généralement intégrés d'ordre 1. C'est pourquoi de nombreux économistes utilisent des différences de taux d'intérêt, et non des niveaux pour faire apparaître des spreads. C'est par exemple le cas de MANKIW et MIRON [1986] ou d'HARDOUVELIS [1994].

Nous devons remarquer que la plupart des études utilisent des données de taux d'intérêt observés sur les marchés, qui ne sont pas des taux zéro. Cela pose aussi un problème pour des comparaisons entre différents pays : par exemple, HARDOUVELIS [1994] fait une comparaison internationale entre sept pays, mais les données qu'il utilise ne sont pas homogènes. Nous choisissons de tester l'hypothèse d'anticipations rationnelles avec les taux zéro construits à la section précédente. Pour cela, nous utilisons une version modifiée du test précédent. Considérons la relation (1.78) qui peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (E[R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] - R_t(\tau)) = (R_t(N\tau) - R_t(\tau)) - L_t(0, N\tau) \quad (1.83)$$

En utilisant la formulation (1.79), nous pouvons tester l'hypothèse d'anticipations rationnelles à partir de la régression suivante

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (R_{t+n\tau}(\tau) - R_t(\tau)) = \alpha + \beta S_t(\tau, N\tau) + \varepsilon_t \quad (1.84)$$

L'hypothèse nulle est  $\beta = 1$ . La mise en place du test pose quelques difficultés avec des données journalières. Prenons par exemple la journée comme période de référence, c'est-à-dire  $\tau = \frac{1}{365}$ . Supposons que l'horizon du test est 4 jours ( $N = 4$ ). Alors, nous devons disposer des données pour  $\{t + \frac{4}{365}n, n = 0, 1, 2, 3\}$ . C'est impossible du fait de données manquantes et des jours non ouvrables (par exemple, le samedi et le dimanche). La plupart des économètres évitent très facilement ce

problème, en éliminant les données manquantes. Considérons la base<sup>15</sup> de données journalières suivante formée par la variable  $x_t$

L	1.0	L	<i>nd</i>	L	15.0
M	2.0	M	9.0	M	<i>nd</i>
M	<i>nd</i>	M	10.0	M	17.0
J	4.0	J	11.0	J	18.0
V	5.0	V	12.0	V	19.0
S	<i>nd</i>	S	<i>nd</i>	S	<i>nd</i>
D	<i>nd</i>	D	<i>nd</i>	D	<i>nd</i>

Celle-ci devient :

(1)	1.0	(9)	12.0
(2)	2.0	(10)	15.0
(3)	4.0	(11)	17.0
(4)	5.0	(12)	18.0
(5)	9.0	(13)	19.0
(7)	10.0		
(8)	11.0		

Ils traitent ensuite cette nouvelle base de données comme si les journées se suivaient. Cela entraîne bien sûr de nombreux problèmes d'irrégularités. Par exemple, si nous désirons construire la base  $(x_t, x_{t+\frac{4}{365}})$ , nous obtenons

(1)	(1.0, 5.0)	(9)	(12.0, 18.0)
(2)	(2.0, 9.0)	(10)	(15.0, 19.0)
(3)	(4.0, 10.0)		
(4)	(5.0, 11.0)		
(5)	(9.0, 12.0)		
(7)	(10.0, 15.0)		
(8)	(11.0, 17.0)		

Les données construites  $(x_t, x_{t+\frac{4}{365}})$  sont très différentes des données réelles :

L	(1.0, 4.0)	L	( <i>nd</i> , 11.0)	L	(15.0, 18.0)
M	(2.0, 5.0)	M	(9.0, 12.0)	M	( <i>nd</i> , 19.0)
M	( <i>nd</i> , <i>nd</i> )	M	(10.0, <i>nd</i> )	M	(17.0, <i>nd</i> )
J	(4.0, <i>nd</i> )	J	(11.0, <i>nd</i> )	J	(18.0, <i>nd</i> )
V	(5.0, <i>nd</i> )	V	(12.0, 15.0)		
S	( <i>nd</i> , 9.0)	S	( <i>nd</i> , <i>nd</i> )		
D	( <i>nd</i> , 10.0)	D	( <i>nd</i> , 17.0)		

<sup>15</sup>*nd* indique que la donnée n'est pas disponible.

Il n'y a qu'une seule correspondance entre cette base et la précédente et nous observons de nombreux décalages. Le problème des données journalières se pose aussi lorsque la période de référence est plus longue. Prenons le mois comme période de référence. Pour tester l'hypothèse d'anticipations rationnelles avec un horizon de 2 mois, nous devons disposer des données pour  $\{t + \frac{1}{12}n, n = 0, 1\}$ . Par exemple, pour la date du 30 mars 1996, nous devons disposer des taux zéro pour cette date et celle du 30 avril 1996. Une difficulté se pose pour le 31 mars. **Ce n'est donc pas simple d'utiliser des données journalières.** Dans de nombreuses études, ce problème n'est pas abordé (voir par exemple ROBERDS, RUNKLE et WHITEMAN [1996]). La méthode que nous proposons pour le résoudre est très fréquente en analyse du signal. Nous transformons la base de données en une base "31 jours par mois" (372 jours par an). Cela revient à créer des données manquantes pour les 29, 30 et 31 février et le 31 des mois d'avril, juin, septembre et novembre. Nous construisons ensuite une fonction spline cubique avec les dates dont les données sont disponibles<sup>16</sup>. Puis, nous remplaçons les données manquantes par les valeurs prises par la fonction d'interpolation.

Nous testons l'hypothèse d'anticipations rationnelles pour différentes périodes de référence  $\tau$  et différents horizons  $N\tau$ . La valeur du test correspond à un test de student  $t_{\hat{\beta}} = \left(\hat{\beta} - 1\right) / \sigma\left(\hat{\beta}\right)$ . Nous présentons les résultats obtenus avec la méthode de PHILLIPS et HANSEN [1990], ainsi que le test avec la méthode des moindres carrés ordinaires. Dans le tableau suivant, la période de référence est la journée et nous considérons différents horizons (de deux à sept jours). Nous remarquons que l'hypothèse nulle n'est pas rejetée au seuil de confiance de 90%. Ceci s'explique par une grande variance de l'estimateur de Phillips et Hansen. Les valeurs du coefficient  $\beta$  sont proches de 4 et donc très différentes de l'unité.

$\tau = \frac{1}{365}$	$\hat{\alpha}^{\text{PH}}$	$\hat{\beta}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{MCO}}$
2 jours	$-1.1 \times 10^{-5}$ ( $8.6 \times 10^{-5}$ )	4.708 (4.111)	0.902 <sup>(***)</sup>	3.076
3 jours	$-2.3 \times 10^{-5}$ ( $1.4 \times 10^{-4}$ )	4.628 (3.333)	1.089 <sup>(***)</sup>	4.139
4 jours	$-3.6 \times 10^{-5}$ ( $1.7 \times 10^{-4}$ )	4.395 (2.772)	1.225 <sup>(***)</sup>	4.808
5 jours	$-4.9 \times 10^{-5}$ ( $2.0 \times 10^{-4}$ )	4.201 (2.376)	1.347 <sup>(***)</sup>	5.309
6 jours	$-6.4 \times 10^{-5}$ ( $2.2 \times 10^{-4}$ )	4.046 (2.102)	1.449 <sup>(***)</sup>	5.175
7 jours	$-8.0 \times 10^{-5}$ ( $2.4 \times 10^{-4}$ )	3.903 (1.902)	1.527 <sup>(***)</sup>	6.057

Les valeurs du coefficient  $\beta$  sont plus proches de l'unité si nous prenons la semaine

<sup>16</sup>Une très bonne référence sur les fonctions splines est l'ouvrage d'analyse numérique de STOER et BURLISCH [1980].

comme période de référence. Il est beaucoup plus difficile d'accepter l'hypothèse nulle, surtout si nous utilisons la méthode des moindres carrés ordinaires.

$\tau = \frac{7}{365}$	$\hat{\alpha}^{\text{PH}}$	$\hat{\beta}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{MCO}}$
2 semaines	$-9.8 \times 10^{-5}$ ( $2.2 \times 10^{-4}$ )	3.430 (1.510)	1.609(***)	6.555
3 semaines	$-1.9 \times 10^{-4}$ ( $2.9 \times 10^{-4}$ )	3.049 (1.032)	1.985(*)	7.906
4 semaines	$-2.7 \times 10^{-4}$ ( $3.5 \times 10^{-4}$ )	2.968 (0.838)	2.349(*)	9.269
5 semaines	$-3.7 \times 10^{-4}$ ( $3.9 \times 10^{-4}$ )	2.888 (0.707)	2.671	10.483
6 semaines	$-4.6 \times 10^{-4}$ ( $4.2 \times 10^{-4}$ )	2.839 (0.616)	2.987	11.686

Nous n'acceptons pas l'hypothèse d'anticipations rationnelles si la période de référence est le mois. Mais nous remarquons que le coefficient  $\beta$  se rapproche de 1 lorsque l'horizon augmente.

$\tau = \frac{1}{12}$	$\hat{\alpha}^{\text{PH}}$	$\hat{\beta}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{MCO}}$
2 mois	$-4.6 \times 10^{-4}$ ( $3.4 \times 10^{-4}$ )	2.846 (0.600)	3.079	11.914
3 mois	$-9.3 \times 10^{-4}$ ( $4.1 \times 10^{-4}$ )	2.805 (0.376)	4.804	18.560
4 mois	$-1.4 \times 10^{-3}$ ( $4.2 \times 10^{-4}$ )	2.635 (0.265)	6.167	23.845
5 mois	$-2.1 \times 10^{-3}$ ( $4.3 \times 10^{-4}$ )	2.455 (0.209)	6.964	26.871
6 mois	$-2.7 \times 10^{-3}$ ( $4.5 \times 10^{-4}$ )	2.239 (0.181)	6.863	26.499

$\tau = \frac{1}{12}$	$\hat{\alpha}^{\text{PH}}$	$\hat{\beta}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{MCO}}$
7 mois	$-3.3 \times 10^{-3}$ ( $4.7 \times 10^{-4}$ )	2.053 (0.160)	6.572	25.348
8 mois	$-4.0 \times 10^{-3}$ ( $5.0 \times 10^{-4}$ )	1.927 (0.149)	6.231	23.961
9 mois	$-4.9 \times 10^{-3}$ ( $5.7 \times 10^{-4}$ )	1.923 (0.156)	5.925	22.722
10 mois	$-5.5 \times 10^{-3}$ ( $6.9 \times 10^{-4}$ )	1.839 (0.172)	4.863	18.610
11 mois	$-5.8 \times 10^{-3}$ ( $8.4 \times 10^{-4}$ )	1.711 (0.190)	3.747	14.259
1 an	$-5.5 \times 10^{-3}$ ( $1.0 \times 10^{-3}$ )	1.431 (0.215)	2.005(*)	7.619

Il est difficile d'interpréter les résultats si la période de référence est le trimestre. En effet, nous rejetons l'hypothèse nulle pour les horizons courts (jusqu'à 1 an), puis nous ne la refusons pas au seuil de confiance de 90% pour les horizons 15 et 18 mois, enfin nous rejetons l'hypothèse pour les horizons plus longs. Nous remarquons une nouvelle fois que la valeur du coefficient  $\beta$  baisse avec l'horizon.

$\tau = \frac{1}{4}$	$\hat{\alpha}^{\text{PH}}$	$\hat{\beta}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{MCO}}$
6 mois	$-1.7 \times 10^{-3}$ ( $3.5 \times 10^{-4}$ )	2.519 (0.262)	5.796	22.381
9 mois	$-3.5 \times 10^{-3}$ ( $5.2 \times 10^{-4}$ )	1.874 (0.200)	4.375	16.868
1 an	$-5.8 \times 10^{-3}$ ( $8.6 \times 10^{-4}$ )	1.725 (0.236)	3.068 <sup>(•)</sup>	11.757
15 mois	$-5.4 \times 10^{-3}$ ( $1.4 \times 10^{-3}$ )	1.061 (0.292)	0.208 <sup>(•••)</sup>	0.776 <sup>(•••)</sup>
18 mois	$-4.6 \times 10^{-3}$ ( $1.8 \times 10^{-3}$ )	0.582 (0.299)	-1.399 <sup>(•••)</sup>	-5.241
21 mois	$-2.0 \times 10^{-3}$ ( $1.1 \times 10^{-3}$ )	-0.444 (0.152)	-9.508	-35.241
2 ans	$-6.5 \times 10^{-4}$ ( $1.2 \times 10^{-3}$ )	-0.370 (0.180)	-7.593	-29.251

Nous rencontrons les mêmes difficultés d'interprétation pour les périodes de référence 6 mois et 1 an. En particulier, il est curieux que l'hypothèse d'anticipations rationnelles soit acceptée dans des cas de long terme alors qu'elle est rejetée à court terme. Comme le font remarquer MANKIW et MIRON [1986], cela pose un problème de cohérence, car il semble plus logique que l'hypothèse d'anticipations rationnelles soit valide pour des horizons courts.

$\tau = \frac{1}{2}$	$\hat{\alpha}^{\text{PH}}$	$\hat{\beta}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{MCO}}$
1 an	$-3.5 \times 10^{-3}$ ( $6.6 \times 10^{-4}$ )	1.390 (0.306)	1.276 <sup>(•••)</sup>	4.907
18 mois	$-4.5 \times 10^{-3}$ ( $1.6 \times 10^{-3}$ )	0.488 (0.387)	-1.322 <sup>(•••)</sup>	-5.089
2 ans	$-2.9 \times 10^{-3}$ ( $1.4 \times 10^{-3}$ )	-0.945 (0.204)	-9.552	-35.414

$\tau = 1$	$\hat{\alpha}^{\text{PH}}$	$\hat{\beta}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{PH}}$	$t_{\hat{\beta}}^{\text{MCO}}$
2 ans	$-4.1 \times 10^{-3}$ ( $1.9 \times 10^{-3}$ )	-0.236 (0.544)	-2.271 <sup>(•)</sup>	-8.782

Ainsi, nous voyons que les résultats empiriques de cette étude ne sont pas favorables à l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Toutefois, la période d'étude est trop courte pour analyser l'impact des régimes monétaires, en particulier l'action des autorités monétaires. La période que nous considérons est marquée par de nombreuses interventions de la Banque de France sur les taux dans le cadre de sa politique de change. De nombreuses études suggèrent que ces interventions influencent "la puissance de prévision" du spread  $S_t(\tau, N\tau)$  de l'équation (1.84). En particulier, Mankiw et Miron montrent que le rejet de l'hypothèse avec des données américaines dépend de la politique de stabilisation de la FED. Ceci est confirmé par l'étude de ROBERDS, RUNKLE et WHITEMAN [1996] et, à une moindre mesure, par celle d'HARDOUVELIS [1988]. Le test de ce paragraphe est un test que nous pouvons facilement critiquer, puisqu'il utilise une formulation très naïve du mécanisme

des anticipations. Les représentations état-mesure sont mieux adaptées pour les modèles linéaires à anticipations rationnelles (voir par exemple l'ouvrage non publié "Recursive linear models of dynamic economies" de Lars Peter Hansen et Thomas Sargent). C'est pourquoi de nombreuses études adoptent ce cadre d'analyse.

### 1.5.2.2 Les tests dans une économie linéaire réursive

Nous considérons dans ce paragraphe un test de l'hypothèse d'anticipations rationnelles plus général que ceux formulé par SARGENT [1979] et CAMPBELL et SHILLER [1987]. Nous montrerons ainsi que ces deux tests en sont des cas particuliers. Avant de présenter ce test, nous spécifions la représentation espace-état et l'algorithme du filtre de Kalman, puis nous discutons de l'estimation des paramètres du modèle dans les domaines du temps et des fréquences. De nombreux éléments sont issus<sup>17</sup> de TSM [1996].

**Représentation et estimation des modèle espace-état.** Un modèle espace-état est défini par une équation de transition et par une équation de mesure. L'équation de mesure relie un vecteur de données observables à un vecteur d'état, tandis que l'équation de transition décrit la dynamique du vecteur d'état. Nous supposons que ce vecteur d'état  $\alpha_t$  suit un processus markovien du premier ordre<sup>18</sup>

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + \mathbf{c}_t + R_t \eta_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.85)$$

où  $\alpha_t$  est le vecteur d'état de dimension  $m$ ,  $T_t$  une matrice  $m \times m$ ,  $\mathbf{c}_t$  un vecteur  $m \times 1$  et  $R_t$  une matrice  $m \times g$ . L'équation de mesure est

$$\mathbf{y}_t = Z_t \alpha_t + \mathbf{d}_t + \epsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.86)$$

où  $\mathbf{y}_t$  est une série temporelle multivariée  $N \times 1$ ,  $Z_t$  une matrice  $N \times m$ ,  $\mathbf{d}_t$  un vecteur  $N \times 1$ .  $\eta_t$  et  $\epsilon_t$  sont supposés être des processus bruits blancs de dimensions respectives  $g \times 1$  et  $N \times 1$ . Les deux processus sont gaussiens de moyenne nulle et de matrices de covariance respectives  $Q_t$  et  $H_t$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E[\eta_t] &= 0 & \text{et} & & \text{var}[\eta_t] &= Q_t \\ E[\epsilon_t] &= 0 & \text{et} & & \text{var}[\epsilon_t] &= H_t \end{aligned} \quad (1.87)$$

Nous supposons que la position initiale du système est une variable gaussienne telle que

$$E[\alpha_0] = \mathbf{a}_0 \quad \text{et} \quad \text{var}[\alpha_0] = P_0 \quad (1.88)$$

---

<sup>17</sup>Les procédures d'estimation dans les domaines du temps et des fréquences, ainsi que le filtre de Kalman sont disponibles dans TSM.

<sup>18</sup>Nous utilisons la représentation de JAZWINSKY [1970] ou HARVEY [1989].

Considérons  $\mathbf{a}_t$  l'estimateur optimal de  $\alpha_t$  basé sur l'observation disponible à la période  $t$ , alors<sup>19</sup>

$$\mathbf{a}_t = E_t[\alpha_t] \quad (1.89)$$

La matrice de covariance  $P_t$  associée à  $\mathbf{a}_t$  est définie par

$$P_t = E_t \left[ (\mathbf{a}_t - \alpha_t) (\mathbf{a}_t - \alpha_t)^\top \right] \quad (1.90)$$

Le filtre de Kalman correspond aux équations récursives suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{t|t-1} = T_t \mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{c}_t \\ P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top \\ \tilde{\mathbf{y}}_{t|t-1} = Z_t \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t \\ \mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \tilde{\mathbf{y}}_{t|t-1} \\ F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t \\ \mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} \mathbf{v}_t \\ P_t = (I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t) P_{t|t-1} \end{cases} \quad (1.91)$$

$\mathbf{a}_{t|t-1}$  et  $P_{t|t-1}$  sont les meilleurs estimateurs de  $\alpha_t$  et  $P_t$  conditionnellement à l'information disponible à la période  $t - 1$ .  $\mathbf{v}_t$  est le processus d'innovation de la matrice de covariance  $F_t$ .  $\tilde{\mathbf{y}}_{t|t-1}$  est l'estimation conditionnelle de  $\mathbf{y}_t$  à la période  $t - 1$ .

Soit  $\theta$  les paramètres inconnus du modèle espace-état. Nous pouvons utiliser le filtre de Kalman pour estimer  $\theta$  par la méthode du maximum de vraisemblance. Le logarithme de la vraisemblance de l'observation  $t$  est exprimé en termes d'innovation et correspond à

$$\ell_t(\theta) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |F_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top F_t^{-1} \mathbf{v}_t \quad (1.92)$$

$\hat{\theta}$  l'estimateur du maximum de vraisemblance correspond alors à

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ell_t(\theta) \quad (1.93)$$

Nous pouvons aussi estimer les paramètres du modèle espace-état dans le domaine des fréquences. Soit la transformée discrète  $D$  de Fourier multidimensionnelle. Nous définissons celle-ci par

$$D(\lambda_j) = \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t e^{-it\lambda_j} \quad (1.94)$$

où  $\lambda_j$  est la fréquence de Fourier. Le périodogramme de l'échantillon  $\mathbf{y}_t$  ( $t = 1, \dots, \tau$ ) correspond alors à

$$I(\lambda_j) = \frac{1}{T} D(\lambda_j) D(\lambda_j)^* \quad (1.95)$$

---

<sup>19</sup>Nous utilisons la notation  $E_t[\cdot]$  pour l'expression  $E[\cdot | \mathcal{F}_t]$ .



Soit  $G(\theta, \lambda_j)$  la fonction de densité spectrale du modèle. Alors, l'estimateur du maximum de vraisemblance correspond à

$$\hat{\theta} = \arg \max -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{T-1} \ln \det G(\theta, \lambda_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{T-1} \text{trace} [G(\theta, \lambda_j)^{-1} I(\lambda_j)] \quad (1.96)$$

Dans le cas d'un modèle espace-état stationnaire invariant dans le temps, le fonction génératrice spectrale est définie par

$$G(\lambda_j) = Z \left[ (I_m - Te^{-i\lambda_j})^{-1} \right] RQR^\top \left[ (I_m - Te^{-i\lambda_j})^{-1} \right]^* Z^\top + H \quad (1.97)$$

Si le modèle n'est pas stationnaire, il est nécessaire de trouver une représentation stationnaire du modèle espace-état.

**Un test général de l'hypothèse d'anticipations rationnelles.** Nous supposons que le modèle admet la représentation espace-état invariant dans le temps suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t = Z\boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}_t \\ \alpha_t = T\alpha_{t-1} + \mathbf{c} + R\eta_t \end{cases} \quad (1.98)$$

Soit  $\mathbf{x}_t$  un vecteur de dimension  $k \times 1$ . Ce vecteur dépend linéairement des variables de mesure

$$\mathbf{x}_t = W\mathbf{y}_t \quad (1.99)$$

Nous supposons que la formation du processus  $\mathbf{x}_t$  obéit à un schéma d'anticipations rationnelles linéaires, tel que nous avons

$$\mathbf{x}_t = \sum_{s=0}^S w_s E_t [\mathbf{y}_{t+s}] \quad (1.100)$$

En prenant l'espérance mathématique conditionnelle en  $t-1$  des expressions (1.99) et (1.100), nous obtenons

$$WE_{t-1} [\mathbf{y}_t] = \sum_{s=0}^S w_s E_{t-1} [\mathbf{y}_{t+s}] \quad (1.101)$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} E_{t-1} [\mathbf{y}_t] &= E_{t-1} [Z\boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}_t] \\ &= ZE_{t-1} [T\alpha_{t-1} + \mathbf{c} + R\eta_t] + \mathbf{d} \\ &= ZT\alpha_{t-1} + Z\mathbf{c} + \mathbf{d} \end{aligned} \quad (1.102)$$

La représentation moyenne-mobile à l'ordre  $s$  de l'équation de transition est

$$\alpha_t = T^s \alpha_{t-s} + \sum_{j=0}^{s-1} T^j \mathbf{c} + \sum_{j=0}^{s-1} T^j R\eta_{t-j} \quad (1.103)$$

Nous en déduisons alors l'expression suivante de  $E_{t-1}[\mathbf{y}_{t+s}]$

$$\begin{aligned}
E_{t-1}[\mathbf{y}_{t+s}] &= E_{t-1}[Z\boldsymbol{\alpha}_{t+s} + \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}_{t+s}] \\
&= ZE_{t-1}\left[T^{s+1}\alpha_{t-1} + \sum_{j=0}^s T^j \mathbf{c} + \sum_{j=0}^s T^j R\eta_{t+s-j}\right] + \mathbf{d} \\
&= ZT^{s+1}\alpha_{t-1} + Z\sum_{j=0}^s T^j \mathbf{c} + \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{1.104}$$

L'égalité (1.101) s'écrit alors

$$WZT\alpha_{t-1} + WZ\mathbf{c} + W\mathbf{d} = \sum_{s=0}^S w_s ZT^{s+1}\alpha_{t-1} + \sum_{s=0}^S w_s \left( Z\sum_{j=0}^s T^j \mathbf{c} + \mathbf{d} \right)$$

Tester l'hypothèse d'anticipations rationnelles revient alors à tester les deux propositions suivantes :

$$\begin{cases} WZT - \sum_{s=0}^S w_s ZT^{s+1} = \mathbf{0} \\ WZ\mathbf{c} + W\mathbf{d} - \sum_{s=0}^S w_s \left( Z\sum_{j=0}^s T^j \mathbf{c} + \mathbf{d} \right) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1.105}$$

Posons

$$r(\theta) = \begin{bmatrix} \text{vec} \left( WZT - \sum_{s=0}^S w_s ZT^{s+1} \right) \\ \text{vec} \left( WZ\mathbf{c} + W\mathbf{d} - \sum_{s=0}^S w_s \left( Z\sum_{j=0}^s T^j \mathbf{c} + \mathbf{d} \right) \right) \end{bmatrix} \tag{1.106}$$

Nous pouvons utiliser le test de Wald<sup>20</sup> pour tester l'hypothèse d'anticipations rationnelles. L'expression de la statistique est

$$\mathbf{W} = r(\hat{\theta}_{\text{MV}})^\top \left[ \mathbf{R}(\hat{\theta}_{\text{MV}}) \left( \mathbf{I}_{\hat{\theta}_{\text{MV}}}^T \right)^{-1} \mathbf{R}(\hat{\theta}_{\text{MV}})^\top \right]^{-1} r(\hat{\theta}_{\text{MV}}) \tag{1.107}$$

où  $\mathbf{R}(\theta)$  est la matrice jacobienne  $\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta^\top}$  et  $\mathbf{I}$  la matrice d'information. Sous l'hypothèse nulle, la distribution de  $\mathbf{W}$  suit un chi-deux à  $2mk$  degrés de liberté. Dans le cas où  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{c}$  sont deux vecteurs nuls, le nombre de degrés de liberté devient  $mk$ .

Les tests de rationalité de SARGENT [1979] dans un modèle VAR et de CAMPBELL et SHILLER [1987] dans un cadre de cointégration vectorielle sont des cas particuliers du test précédent. Nous rappelons que nous avons

$$R_t(N\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] \tag{1.108}$$

<sup>20</sup>Le test de Wald est plus facile à mettre en place que les tests de rapport de vraisemblance ou de multiplicateur de Lagrange. Il ne nécessite pas le calcul de l'estimateur contraint qui est difficile à implémenter puisque les restrictions imposées ne sont pas linéaires et n'admettent donc pas une reparamétrisation implicite facile.

Nous supposons que la fréquence d'observation est égale à la maturité du taux de référence  $R_t(\tau)$ , c'est-à-dire que nous choisissons l'unité de mesure du temps telle que  $\tau$  soit égale à la différence entre deux dates successives  $(t+1) - t$ . Nous introduisons les notations suivantes :  $R_t$  est le taux zéro de référence (correspondant à  $R_t(\tau)$ ) et  $R_t^N$  est le taux zéro à  $N$  périodes (correspondant à  $R_t(N\tau)$ ). Sargent propose de modéliser le processus joint  $y_t = (R_t, R_t^N)$  par un processus VAR d'ordre  $p$

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1.109)$$

avec  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ . Ce processus admet la représentation espace-état suivante<sup>21</sup>

$$\begin{cases} y_t = Z\alpha_t \\ \alpha_t = T\alpha_{t-1} + R\varepsilon_t \end{cases} \quad (1.110)$$

avec

$$\alpha_t = \text{vec} \left( \begin{bmatrix} y_t & \dots & y_{t-p+1} \end{bmatrix} \right) \quad (1.111)$$

$$Z = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.112)$$

$$R = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

et

$$T = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.114)$$

Posons  $\mathbf{x}_t = R_t^N$ . Nous avons alors

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_t \quad (1.115)$$

L'hypothèse d'anticipations rationnelles implique que

$$\mathbf{x}_t = \sum_{s=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 \end{bmatrix} E_t[\mathbf{y}_{t+s}] \quad (1.116)$$

Les matrices  $W$  et  $w_s$  correspondent respectivement aux vecteurs lignes  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 \end{bmatrix}$ . Le paramètre  $S$  prend la valeur  $N - 1$ . Nous en déduisons que

$$WZ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2^\top \quad (1.117)$$

et

$$w_s Z = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{e}_1^\top \quad (1.118)$$

---

<sup>21</sup>voir LÜTKEPOHL [1991] page 418.

Les vecteurs canoniques  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont de dimension  $2p \times 1$ . L'expression de la restriction (1.105) est alors

$$\mathbf{e}_2^\top T - \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \mathbf{e}_1^\top T^{s+1} = \mathbf{0} \quad (1.119)$$

Nous retrouvons bien l'expression (9) de Sargent

$$\mathbf{e}_1^\top T - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_1^\top T^n = \mathbf{0} \quad (1.120)$$

ainsi que la distribution asymptotique du test, puisque le nombre de degrés de liberté est  $mk = 2p \times 1$ .

Le test de valeur présente de CAMPBELL et SHILLER [1987] est un prolongement du test de Sargent. Ils définissent le modèle de valeur présente des *actifs*  $p_t$  et  $P_t$  de la façon suivante

$$P_t = \zeta (1 - \delta) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i E [p_{t+i} | \mathcal{F}_t] \quad (1.121)$$

avec  $\zeta$  un coefficient de proportionnalité et  $\delta$  le facteur d'actualisation. Comme pour le test précédent, nous supposons que la période d'observation est égale à la maturité de l'*actif*  $p_t$ . Posons  $S_t = P_t - \theta p_t$ . Campbell et Shiller montrent alors la relation suivante

$$S_t = \zeta \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i E [\Delta p_{t+i} | \mathcal{F}_t] \quad (1.122)$$

Considérons la représentation espace-état précédente avec  $\mathbf{y}_t = (\Delta p_t, S_t)$ . En posant  $\mathbf{x}_t = S_t$ , les relations (1.99) et (1.100) deviennent

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_t \quad (1.123)$$

et

$$\mathbf{x}_t = \zeta \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s w_s^* E_t [\mathbf{y}_{t+s}] \quad (1.124)$$

avec

$$w_s^* = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{pour } s = 0 \\ & \text{pour } s \geq 1 \end{cases} \quad (1.125)$$

Nous avons alors

$$WZ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2^\top \quad (1.126)$$

et pour  $s \geq 1$

$$w_s^* Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1^\top \quad (1.127)$$

Les vecteurs canoniques  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont toujours de dimension  $2p \times 1$ . L'expression de la restriction (1.119) est alors

$$\mathbf{e}_2^\top T - \zeta \sum_{s=1}^{\infty} \delta^s \mathbf{e}_1^\top T^{s+1} = \mathbf{0} \quad (1.128)$$

En supposant que les valeurs propres de la matrice  $\delta T$  soient à l'extérieur du disque unité, nous obtenons

$$\mathbf{e}_2^\top - \zeta \mathbf{e}_1^\top \delta T (I - \delta T)^{-1} = \mathbf{0} \quad (1.129)$$

On retrouve bien l'expression des restrictions de Campbell et Shiller. Nous pouvons tester le modèle de valeur présente par le principe de Wald ou en utilisant les tests du rapport de vraisemblance ou du multiplicateur de Lagrange. Campbell et Shiller remarquent en effet que les restrictions précédentes peuvent s'écrire

$$\mathbf{e}_2^\top (I - \delta T) - \zeta \mathbf{e}_1^\top \delta T = \mathbf{0} \quad (1.130)$$

Nous obtenons un système de contraintes linéaires. Soit  $\theta$  le vecteur des paramètres à estimer. Soit  $\mathbb{P}$  la décomposition de Cholesky de  $\Sigma$ . Nous avons

$$\theta = \begin{bmatrix} \text{vec} [\Phi_1] \\ \vdots \\ \text{vec} [\Phi_p] \\ \text{vech} [\mathbb{P}] \end{bmatrix} \quad (1.131)$$

Nous remarquons que

$$\mathbf{e}_2^\top T = \theta^\top A \quad (1.132)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} I_{2p} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \mathbf{0}_{3,2p} \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

De même, nous avons

$$\mathbf{e}_1^\top T = \theta^\top B \quad (1.134)$$

avec

$$B = \begin{bmatrix} I_{2p} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \mathbf{0}_{3,2p} \end{bmatrix} \quad (1.135)$$

Nous en déduisons une nouvelle expression de la restriction (1.130)

$$\theta^\top A + \zeta \theta^\top B = \frac{1}{\delta} \mathbf{e}_2^\top \quad (1.136)$$

Nous en déduisons que  $\theta$  doit satisfaire le système de contraintes linéaires explicites  $C\theta = c$  avec  $C = A^\top + \zeta B^\top$  et  $c = \frac{1}{\delta} g$ . Nous pouvons facilement en déduire

la reparamétrisation implicite (voir l'annexe de ce chapitre). Nous pouvons donc estimer le modèle VAR contraint et utiliser les statistiques du rapport de vraisemblance ou du rapport de vraisemblance pour tester l'hypothèse (1.130).

Considérons une extension du test de Sargent pour nos données journalières. Nous devons modifier celui-ci car, jusqu'à présent, notre période de référence était l'année. Nous notons  $R_t$  et  $R_t^N$  les taux zéro  $R_t(\tau)$  et  $R_t(N\tau)$ . Nous prenons maintenant comme période de référence la journée car il s'agit de notre fréquence d'observation. Nous introduisons la notation  $\tau^*$  qui représente la maturité  $\tau$  en nombre de jours. La relation (1.108) s'écrit alors

$$R_t^N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[R_{t+n\tau^*} | \mathcal{F}_t] \quad (1.137)$$

La relation (1.115) ne change pas alors que la relation (1.116) devient

$$\mathbf{x}_t = \sum_{s=0}^{(N-1)\tau^*} w_s E_t[\mathbf{y}_{t+s}] \quad (1.138)$$

avec

$$w_s = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix} & \text{si } s\%_0\tau^* \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix} & \text{si } s\%_0\tau^* = 0 \end{cases} \quad (1.139)$$

La restriction (1.119) devient

$$\mathbf{e}_2^\top T - \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{(N-1)\tau^*} \mathbf{e}_{1,s}^\top T^{s+1} = \mathbf{0} \quad (1.140)$$

avec

$$\mathbf{e}_{1,s} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } s\%_0\tau^* \neq 0 \\ \mathbf{e}_1 & \text{si } s\%_0\tau^* = 0 \end{cases} \quad (1.141)$$

Nous remarquons que la restriction (1.140) est équivalente à

$$\mathbf{e}_2^\top T - \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \mathbf{e}_1^\top T^{\tau^*s+1} = \mathbf{0} \quad (1.142)$$

Lorsque la maturité du taux de référence n'est pas la fréquence d'observation, nous devons donc adapter les tests de Sargent et de Campbell et Shiller.

**Quelques résultats empiriques.** Nous mettons en œuvre le test précédent avec les taux zéro construits à la section 2 de ce chapitre. Nous prenons pour  $R_t$  le taux zéro de maturité une journée. Nous considérons  $N$  variant de deux à sept. Les résultats du test de stationnarité de KWIATKOWSKY, PHILLIPS, SCHMIDT et SHIN [1992] sont présentés dans l'annexe de ce chapitre. Pour l'ensemble des maturités considérées (de un à sept jours), l'hypothèse de stationnarité est rejetée pour les

taux zéro en niveau. Si nous considérons les séries en différence, nous ne rejetons pas l'hypothèse au seuil de confiance de 90%. C'est pourquoi nous choisissons de construire le test de Wald avec une estimation du processus VAR basée sur les différences de taux zéro. Nous notons que Sargent, dans l'article de 1979, utilise déjà des variables différenciées. Pour les différentes valeurs de  $N$ , le retard optimal<sup>22</sup> du processus VAR est 2. Dans le tableau suivant, nous présentons les valeurs du test de Wald. Une évidence s'impose : nous rejetons l'hypothèse d'anticipations rationnelles pour les maturités très courtes (de un à sept jours).

$\tau = \frac{1}{365}$	W
2 jours	188.61
3 jours	137.71
4 jours	135.38
5 jours	142.22
6 jours	145.36
7 jours	143.85

Lorsque nous avons mené pour la première fois le test de Wald précédent avec les taux zéro, nous avons été très surpris par l'ordre de grandeur des valeurs obtenues. Nous avons pensé dans un premier temps qu'il y avait une erreur de programmation. En fait, nous avons remarqué que cet ordre de grandeur était lié à la nature des taux utilisés.

Menons l'analyse précédente avec des taux du marché monétaire sur la même période d'étude.  $R_t$  représente maintenant le taux un mois. Le tableau suivant indique le retard optimal du processus VAR. Le résultat dépend crucialement du critère.

critère	BIC	AIC $\alpha$	AICc	SIC	FPE	AIC	HQ
$(R_t - R_{t-1}, R_t^3 - R_{t-1}^3)$	1	4	8	4	8	8	4
$(R_t - R_{t-1}, R_t^6 - R_{t-1}^6)$	1	4	7	1	7	7	3
$(R_t - R_{t-1}, R_t^{12} - R_{t-1}^{12})$	1	3	4	1	4	4	1

Puisque la sélection de l'ordre optimal du VAR pose des problèmes de cohérence, nous décidons de tester l'hypothèse d'anticipations rationnelles en considérant différents ordres  $p$  pour le polynôme autorégressif. Le tableau suivant présente les valeurs prises par le test de Wald.

$p$	1	2	3	4	5	6	7	8
$(R_t - R_{t-1}, R_t^3 - R_{t-1}^3)$	9.22	10.25 <sup>(•)</sup>	24.82	32.79	34.09	37.83	58.91	77.21
$(R_t - R_{t-1}, R_t^6 - R_{t-1}^6)$	9.86	16.65	34.88	36.50	47.25	51.05	59.98	64.83
$(R_t - R_{t-1}, R_t^{12} - R_{t-1}^{12})$	8.65 <sup>(•)</sup>	19.00	29.95	30.35	34.87	37.27	41.18	45.15

<sup>22</sup>Nous considérons sept critères de sélection : BIC, AIC $\alpha$ , AICc, SIC, FPE, AIC et HQ. Ces différents critères ont donné le même retard optimal.

Si nous utilisons des taux zéro, nous obtenons un ordre de grandeur pour le test de Wald très différent :

$p$	1	2	3	4	5	6	7	8
$(R_t - R_{t-1}, R_t^3 - R_{t-1}^3)$	89.37	157.42	158.01	157.86	159.00	172.97	182.21	183.65
$(R_t - R_{t-1}, R_t^6 - R_{t-1}^6)$	108.91	168.40	169.15	167.07	170.18	181.27	191.11	194.27
$(R_t - R_{t-1}, R_t^9 - R_{t-1}^9)$	124.80	177.35	178.80	178.95	179.91	187.33	197.75	202.97
$(R_t - R_{t-1}, R_t^{12} - R_{t-1}^{12})$	134.43	184.63	186.95	187.40	188.11	192.10	202.83	209.90

Cet ordre de grandeur est manifestement dû au caractère **coupon zéro** des taux d'intérêt. Une explication possible est la relative inertie des taux du marché monétaire par rapport aux taux zéro. Considérons la statistique  $S(x)$  définie de la façon suivante

$$S(x) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T 1_{\|x_t - x_{t-1}\| \leq \varepsilon} \quad (1.143)$$

Cette statistique prend les valeurs suivantes pour les taux précédents avec  $\varepsilon = 0.00001$ .

	Taux zéro	Taux monétaire
$R_t$	1.26%	19.65%
$R_t^3$	1.26%	13.15%
$R_t^6$	1.89%	9.40%
$R_t^{12}$	1.58%	10.94%

Les valeurs de la statistique sont plus élevées pour les taux monétaires que pour les taux zéro. Nous pouvons donc penser que les taux monétaires sont plus prévisibles que les taux zéro. Plusieurs auteurs, comme MANKIW et MIRON [1986], ont mis en évidence une relation étroite entre le non-rejet de l'hypothèse d'anticipations rationnelles et le caractère *prédictible* des taux. Nous pensons qu'elle peut expliquer les différences entre les résultats avec les taux zéro et ceux avec les taux monétaires.

Lorsque nous effectuons le test précédent pour des maturités plus élevées (et pour les taux des marchés monétaires et obligataires), l'hypothèse d'anticipations rationnelles n'est pas rejetée dans certains cas, même pour un seuil de confiance de 90%. Mais ces résultats s'expliquent par le fait que les coefficients autorégressifs pour le processus  $R_t^N - R_{t-1}^N$  ne sont pas significatifs. Dans ce cas, les matrices  $\Phi_i$  sont de la forme

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons donc

$$\mathbf{e}_2^\top T \simeq \mathbf{0} \quad (1.144)$$



Comme  $N$  est grand<sup>23</sup>, nous avons aussi

$$\frac{1}{N} \mathbf{e}_{1,s}^\top T^{s+1} \simeq \mathbf{0} \quad (1.145)$$

Nous ne refusons pas l'hypothèse d'anticipations rationnelles à cause des données. Il existe un deuxième cas qui conduit à l'acceptation automatique, mais artificielle, de l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Il est clair que si  $T$  est proche d'une matrice nulle, l'hypothèse n'est pas rejetée. Nous pouvons alors vérifier que la norme  $\|T\|$  est bien significativement différente de 0 en utilisant les tests de norme ou de valeurs singulières (qui est proche du test de norme de Froebenious).

Les tests de rationalité dans un cadre d'économie linéaire réursive sont fréquents<sup>24</sup>. Nous devons noter que certains auteurs, par exemple MACDONALD et TAYLOR [1990], les ont aussi employés pour tester l'effcience du marché des changes. Il est difficile de comparer ces nombreuses études parce qu'elles ne portent pas toutes sur les taux zéro. SARGENT [1979] ne rejette pas l'hypothèse d'anticipations rationnelles avec des données américaines sur la période 1953/1971. La fréquence d'observation est le trimestre. Les taux utilisés sont le taux de rendement des bons du Trésor 3 mois et le taux de rendement des obligations d'État 5 ans. L'hypothèse est rejetée par CAMPBELL et SHILLER [1987] avec des données de fréquence mensuelle pour la période 1959/1983. Toutefois, les taux employés ne sont pas les mêmes (taux de rendement des bons du Trésor 1 mois et taux zéro 20 ans calculé par Salomon Brothers). L'étude de COLLETAZ et GOURLAOUEN [1990] porte sur des données françaises mensuelles (taux au jour le jour entre effets privés et taux de rendement des obligations publiques) pour la période 1973-1988. Ces auteurs ne confirment pas les résultats de Sargent. Le travail de KUGLER [1990] est intéressant, puisqu'il considère une comparaison internationale entre les taux américains, suisses et allemands pour la période 1974/1988. Il accepte l'hypothèse d'anticipations rationnelles pour les taux allemands et aussi pour les taux américains pour la période d'octobre 1979 à septembre 1982. A partir de ces quatre études, il est difficile d'énoncer des conclusions. Nous pouvons seulement dire qu'en général l'hypothèse d'anticipations rationnelles est rejetée. Mais, comme le fait remarquer SHEA [1992], la validité de la théorie des anticipations semble liée aux maturités étudiées. Il semble notamment qu'il soit plus facile de ne pas rejeter l'hypothèse avec des maturités longues (voir par exemple l'étude de PRATS ALBENTOSA et BEYAERT [1996]). D'autre part, les résultats peuvent dépendre du pays étudié. JONDEAU [1997] constate par exemple que :

---

<sup>23</sup>Par exemple, si  $R_t$  est le taux mensuel et  $R_t^N$  est le taux 5 ans,  $N$  prend la valeur 60.

<sup>24</sup>HAMILTON [1988] et SOLA et DRIFFILL [1994] ont même proposé de prendre en compte les changements de régime.

les tests réalisés sur données américaines conduisent presque systématiquement au rejet de la théorie des anticipations... À l'inverse, la plupart des tests menés sur des données britanniques n'ont pas permis de rejeter la théorie des anticipations.

Ainsi, CUTHBERTSON [1996] ne rejete pas la théorie pour la Grande-Bretagne, ce qui n'est pas le cas de ELTON, GRUBER et MEI [1996] pour les États-Unis.

### 1.5.2.3 Les tests de volatilité

SHILLER [1979] considère la relation (1.62) pour les taux à long terme. Dans ce cas, nous avons

$$R_t(\infty) = (1 - \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n E [R_{t+n\tau}(\tau) | \mathcal{F}_t] \quad (1.146)$$

Considérons  $R_t^*(\infty)$  le taux d'intérêt "ex-post" défini par l'expression suivante

$$R_t^*(\infty) = (1 - \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n R_{t+n\tau}(\tau) \quad (1.147)$$

Nous remarquons que ce taux n'est pas observable, puisque nous ne pouvons connaître l'ensemble futur des taux  $R_t(\tau)$ . Mais Shiller remarque que nous pouvons le calculer à partir de la relation de récurrence

$$R_t^*(\infty) = \gamma R_{t+\tau}^*(\infty) + (1 - \gamma) R_t(\tau) \quad (1.148)$$

La relation (1.146) implique que

$$R_t(\infty) = E [R_t^*(\infty) | \mathcal{F}_t] \quad (1.149)$$

Sous l'hypothèse d'anticipations rationnelles, nous devons alors vérifier les inéquations

$$\text{var} [R_t(\infty)] \leq \text{var} [R_t^*(\infty)] \leq \text{var} [R_t(\tau)] \quad (1.150)$$

Considérons la variable  $\tilde{H}_t$  définie de la façon suivante

$$\tilde{H}_t = \frac{R_t(\infty) - \gamma R_{t+\tau}(\infty)}{1 - \gamma} \quad (1.151)$$

Shiller montre aussi que l'hypothèse d'anticipations rationnelles implique que les taux  $R_{t-i\tau}(\tau)$  et  $R_{t-i\tau}(\infty)$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) ne peuvent expliquer  $H_t - R_t(\tau)$  du fait de la relation (1.148). Nous pouvons bien sûr étendre l'analyse précédente dans le cas où  $N$  est différent de  $\infty$ .

Même si les tests de volatilité ne sont pas aussi *populaires* que les tests dans une économie linéaire récurrente, ils constituent une part importante des travaux

empiriques, notamment dans le domaine de l'efficience. Dans l'article de 1979, Shiller rejete l'hypothèse d'anticipations rationnelles avec des données américaines pour la période 1966-1977. Le test est basé sur le système d'inéquations suivant

$$\begin{cases} \text{var} \left[ \tilde{H}_t \right] \leq \frac{1}{(1-\gamma^2)} \text{var} [R_t(\tau)] \\ \text{var} \left[ \tilde{H}_t \right] \leq \frac{1}{(1-\gamma^2)} \text{var} \left[ \hat{R}_t(\tau) \right] \end{cases} \quad (1.152)$$

Nous pourrions citer des études en faveur du test de volatilité. Cependant, les résultats sont très hétérogènes. En particulier, ils dépendent de la période étudiée, de la nature des taux et de la maturité considérée. Par exemple, ARTUS [1987] obtient des conclusions différentes selon les taux de marché (monétaire ou obligataire) qu'il utilise. Shiller reconnaît d'ailleurs certains problèmes liés à ce test (voir par exemple les pages 1201-1202). C'est pourquoi les interprétations des tests de volatilité doivent être prudentes. En particulier, nous rappelons que les inégalités (1.150) ou (1.152) sont des conditions nécessaires, mais non suffisantes pour vérifier l'hypothèse d'anticipations rationnelles.

### 1.5.3 La prime de terme et la théorie des anticipations

#### 1.5.3.1 La pertinence d'une prime de terme

Nous rappelons que nous ne faisons pas de distinction entre prime de terme et prime de risque. Dans ce paragraphe, la prime de terme correspond à la différence entre le taux à terme et l'anticipation du taux au comptant futur. Il existe une littérature abondante sur l'existence d'une prime de terme. Ces dernières années, les nouvelles méthodes économétriques ont entraîné de nombreux travaux sur ce sujet. Cependant, ces études, qui mettent en évidence ou non l'existence d'une prime de terme, présentent un intérêt limité en dehors de la vérification de la théorie des anticipations. Avec la prise en compte d'effets ARCH, de racines fractionnaires, de méthodes de simulation ou d'autres techniques récentes, peut-être pouvons nous trouver plus de résultats favorables à la théorie des anticipations ? Néanmoins, nous doutons que ces méthodes aboutissent à des implications théoriques ou concrètes. En effet, les primes de terme estimées sont généralement variables, puisqu'elles sont basées sur des modèles de la famille ARCH (ENGLE et NG [1993], DOTSEY et OTROK [1995]) ou déduites de relation de cointégration fractionnaire (DUEKER et STARTZ [1994]). Il est alors difficile de justifier ces primes de terme qui sont très différentes de la prime de liquidité de Hicks. Comme le fait remarquer TAYLOR [1992], nous devons développer une théorie spécifique. Une approche alternative à ces méthodes purement statistiques est celle des modèles de choix de portefeuille, comme celui développé par ARTUS et KAABI [1995]. Cependant, le pouvoir explicatif

de ces modèles est assez faible. Une des raisons invoquées est la forte variabilité de la prime de terme (MANKIW et MIRON [1986]), ce qui nous ramène aux considérations précédentes.

### 1.5.3.2 La prime de terme est-elle monotone croissante ?

La question a intéressé peu de chercheurs, mais ses implications sont beaucoup plus intéressantes que, par exemple, la modélisation ARCH de la prime de terme. Le problème est de savoir s'il est pertinent de considérer une prime de liquidité. Dans un article de 1984 intitulé "Term premiums in bond returns", FAMA analyse la prime de risque des bons américains du Trésor et d'État. En particulier, il ne peut confirmer le caractère monotone croissant de la prime de terme. Cet article a donné naissance à deux travaux portant le même nom : "The monotonicity of the term premium". MCCULLOCH [1987] montre que les résultats de Fama peuvent s'expliquer par le comportement *anormal* des bons du trésor pour les maturités à neuf mois. RICHARDSON, RICHARDSON et SMITH [1992] proposent une méthodologie générale pour tester le caractère monotone de la prime de terme. À partir des mêmes données que Fama, ils ne rejettent pas l'hypothèse d'une prime de terme constante.

Considérons la prime de risque "par période de détention"  $L_t^{(2)}(\tau, m)$ . Nous pouvons montrer que la théorie de la prime de liquidité implique que si  $m' \geq m$ , alors l'inégalité  $L^{(2)}(\tau, m') \geq L^{(2)}(\tau, m)$  est vérifiée<sup>25</sup>. Soit  $L(\tau)$  la matrice  $T \times N$  des primes de risque observées définie de la façon suivante

$$L(\tau) = \begin{bmatrix} L_1^{(2)}(\tau, \tau) & & & & L_1^{(2)}(\tau, N\tau) \\ \vdots & & & & \vdots \\ L_t^{(2)}(\tau, \tau) & \cdots & L_t^{(2)}(\tau, n\tau) & \cdots & L_t^{(2)}(\tau, N\tau) \\ \vdots & & & & \vdots \\ L_T^{(2)}(\tau, \tau) & & & & L_T^{(2)}(\tau, N\tau) \end{bmatrix} \quad (1.153)$$

Tester la théorie de la prime de liquidité revient à tester l'hypothèse  $R\alpha \geq 0$  dans la régression

$$\text{vec}(L(\tau)) = (I_N \otimes \mathbf{1}_T)\alpha + u \quad (1.154)$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.155)$$

<sup>25</sup>Nous avons bien sûr  $L^{(2)}(\tau, m) = L_t^{(2)}(\tau, m)$ .

Nous pouvons résoudre le problème des régressions linéaires en imposant des contraintes d'inégalités sur les paramètres en considérant la programmation quadratique (WOLAK [1989]). Nous supposons que  $u \sim \mathcal{N}(0, \Sigma \otimes I_T)$ . Dans ce cas, l'estimateur contraint est défini par

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \arg \min [\mathbf{L} - (I_N \otimes \mathbf{1}_T) \alpha]^\top [\Sigma \otimes I_T]^{-1} [\mathbf{L} - (I_N \otimes \mathbf{1}_T) \alpha] \\ \text{s.c. } R\alpha &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.156)$$

avec  $\mathbf{L} = \text{vec}(L(\tau))$ . En utilisant les règles de calcul du produit de Kronecker, nous avons aussi<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \arg \min \frac{1}{2} \alpha^\top (2T\Sigma^{-1}) \alpha - \alpha^\top \left( 2\Sigma^{-1} L(\tau)^\top \mathbf{1}_T \right) \\ \text{s.c. } R\alpha &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.157)$$

Nous pouvons obtenir une estimation de la matrice de covariance  $\Sigma$  à partir de l'estimateur non contraint

$$\hat{\alpha} = \frac{L(\tau)^\top \mathbf{1}_T}{T} \quad (1.158)$$

Pour tester l'hypothèse que la prime de terme est monotone croissante, nous employons le test du rapport de vraisemblance

$$LR = 2(\ell(\hat{\alpha}) - \ell(\tilde{\alpha})) \quad (1.159)$$

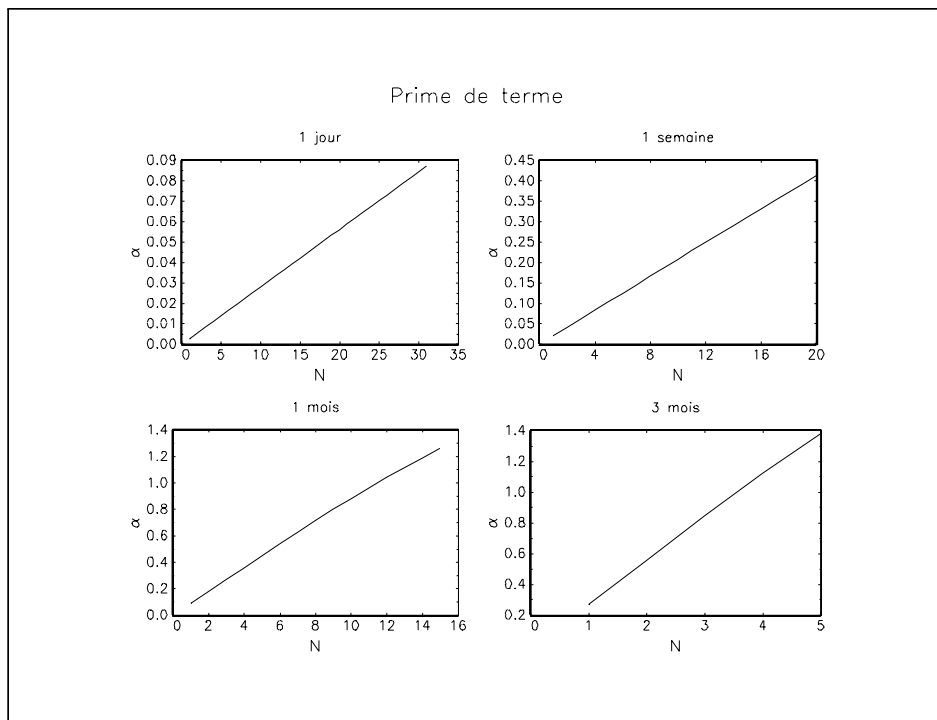
Pour la période globale de notre étude, nous ne refusons pas l'hypothèse que la prime de terme est monotone croissante pour  $\tau$  égal à 1 jour, 1 semaine, 1 mois et 3 mois. En fait, l'estimateur contraint  $\tilde{\alpha}$  est égal à l'estimateur non contraint  $\hat{\alpha}$ . La valeur du rapport de vraisemblance est donc nulle. Les valeurs de  $\tilde{\alpha}$  sont représentées sur la graphique (1.18). Nous pouvons refuser l'hypothèse nulle pour des sous-périodes et pour des maturités spécifiques, par exemple pour la période allant de février 1995 à octobre 1995 et pour les maturités 1 jour et 1 semaine, mais dans ce cas, la situation doit être très particulière, comme par exemple une inversion de courbe de taux et une prime de terme négative.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes théories de la structure par terme. Nous avons examiné plus profondément la théorie des anticipations. Pour ce faire, nous avons construit une base de données à partir du modèle de Nelson et Siegel pour obtenir les taux zéro. L'étude empirique que nous avons menée n'est

---

<sup>26</sup>Le détails des calculs est présenté dans l'annexe du chapitre.



Graphique 1.18

pas en faveur de l'hypothèse des anticipations. Cependant, cela n'implique pas que la courbe des taux ne contient pas d'information, comme HARDOUVELIS [1988] l'explique dans le début de son article :

*Most of the recent empirical literature on the term structure of interest rates is concerned with the informative content of forward rates. According to the expectations hypothesis, forward rates are, up to a constant, unbiased predictors of future realized spot rates. The expectations hypothesis has been tested extensively and rejected. However, rejection of the expectations hypothesis does not imply that there is no information in the term structure.*

Nous consacrons donc le second chapitre au contenu informationnel de la courbe des taux.

## 1.7 Annexes

### 1.7.1 L'optimisation sous contraintes linéaires

Considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \arg \min f(\theta) \\ \text{s.c. } C\theta &= c \end{aligned} \quad (1.160)$$

Pour résoudre un problème d'optimisation sous contraintes, nous utilisons généralement l'algorithme de programmation quadratique séquentielle (ou algorithme SQP). Dans le cas où les contraintes sont linéaires, il existe une méthode beaucoup plus efficace. Soit  $R$  la base orthonormale de la matrice  $C$ . Cette matrice vérifie les conditions  $CR = \mathbf{0}$  et  $R^\top R = I$ . Posons  $r = [C^\top C]^\dagger C^\top c$ . Alors il est équivalent de résoudre le problème (1.160) ou le problème d'optimisation libre suivant

$$\gamma_0 = \arg \min f(R\gamma + r) \quad (1.161)$$

La solution du problème originel est donnée par la relation suivante

$$\theta_0 = R\gamma_0 + r \quad (1.162)$$

Cette méthode de résolution est plus efficace que l'utilisation de l'algorithme SQP. En particulier, les temps de calcul sont beaucoup plus faibles et la solution obtenue plus stable (puisque'elle ne fait pas intervenir une linéarisation quadratique de la fonction non linéaire).

### 1.7.2 La méthode de PHILLIPS et HANSEN [1990]

Considérons le processus de génération de données suivant

$$\begin{cases} y_t &= x_{1,t}\beta_1 + x_{2,t}\beta_2 + u_t \\ x_{2,t} &= x_{2,t-1} + v_t \end{cases} \quad (1.163)$$

avec  $u_t$  et  $v_t$  deux aléas bruit blanc et  $x_{1,t}$  une série temporelle déterministe de dimension  $k_1$ . Soit le vecteur des innovations  $\varepsilon_t = (u_t, v_t)^\top$ . Notons  $\Omega$  la matrice de covariance de long terme des innovations. Nous avons

$$\Omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}^\top] \quad (1.164)$$

La matrice  $\Omega$  admet la décomposition suivante

$$\Omega = \Sigma + \Lambda + \Lambda^\top \quad (1.165)$$

avec  $\Sigma = E [\varepsilon_t \varepsilon_t^\top]$  et  $\Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} E [\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}^\top]$ . Considérons la matrice  $\Delta = \Sigma + \Lambda$ . Nous partitionnons les matrices  $\Omega$ ,  $\Sigma$ ,  $\Lambda$  et  $\Delta$  conformément au vecteur des innovations  $\varepsilon_t$ . Ainsi pour  $\Sigma$ , nous avons

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (1.166)$$

avec  $\Sigma_{11} = E [u_t u_t^\top]$ ,  $\Sigma_{12} = E [u_t v_t^\top]$ ,  $\Sigma_{21} = E [v_t u_t^\top]$  et  $\Sigma_{22} = E [v_t v_t^\top]$ .

L'équation (1.167) s'écrit

$$y_t = x_t \beta + u_t \quad (1.167)$$

avec

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} & x_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.168)$$

et

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (1.169)$$

L'écriture matricielle est

$$Y = X\beta + U \quad (1.170)$$

Soit  $\hat{\beta}$  l'estimateur des moindres carrés ordinaires de  $\beta$ . Nous avons

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y \quad (1.171)$$

ou encore

$$\hat{\beta} = \beta + (X^\top X)^{-1} X^\top U \quad (1.172)$$

Nous en déduisons que

$$E [\hat{\beta}] = \beta + (X^\top X)^{-1} E \begin{bmatrix} X_1^\top U \\ X_2^\top U \end{bmatrix} \quad (1.173)$$

En utilisant la représentation moyenne-mobile infinie du processus  $x_{2,t}$ , nous obtenons

$$E [X_2^\top U] = E \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{k=-\infty}^t v_k u_t^\top \right] = T \Delta_{21} \quad (1.174)$$

Comme nous supposons que  $x_{1,t}$  est exogène, nous avons

$$E [\hat{\beta}] = \beta + (X^\top X)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ T \Delta_{21} \end{bmatrix} \quad (1.175)$$

Cette relation montre que l'estimateur  $\hat{\beta}$  des moindres carrés ordinaires est un estimateur biaisé de  $\beta$ . Phillips et Hansen proposent alors un estimateur corrigé (*bias-corrected*) défini de la façon suivante

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} - (X^\top X)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ T \hat{\Delta}_{21} \end{bmatrix} \quad (1.176)$$



avec  $\hat{\Delta}_{21}$  un estimateur de  $\Delta_{21}$ . Cependant, Phillips et Hansen montrent que l'estimateur  $\hat{\beta}^*$  est non consistant.

La construction d'un estimateur consistant nécessite dans un premier temps de corriger la matrice de covariance. Nous définissons

$$u_t^+ = u_t - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}v_t \quad (1.177)$$

et

$$\varepsilon_t^+ = \begin{bmatrix} u_t^+ \\ v_t \end{bmatrix} \quad (1.178)$$

Nous avons alors

$$\varepsilon_t^+ = \begin{bmatrix} I & -\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \varepsilon_t \quad (1.179)$$

La matrice de covariance de long terme des innovations  $\varepsilon_t^+$  a pour expression

$$\Omega^+ = \begin{bmatrix} I & -\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}^\top \quad (1.180)$$

Après calcul, nous obtenons

$$\Omega^+ = \begin{bmatrix} \Omega_{11.2} & 0 \\ 0 & \Omega_{22} \end{bmatrix} \quad (1.181)$$

avec

$$\Omega_{11.2} = \Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21} \quad (1.182)$$

Soit  $\hat{\Omega}$  un estimateur consistant de la matrice de covariance de long terme des innovations. Nous définissons

$$y_t^+ = y_t - \hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1}\Delta x_{2,t} \quad (1.183)$$

Considérons alors la régression suivante

$$Y^+ = X\beta^+ + W \quad (1.184)$$

L'estimateur des moindres carrés ordinaires de  $\beta^+$  est

$$\hat{\beta}^+ = (X^\top X)^{-1} X^\top Y^+ \quad (1.185)$$

Nous en déduisons que

$$\hat{\beta}^+ = \beta + (X^\top X)^{-1} X^\top \left[ U - \hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1}V \right] \quad (1.186)$$

Nous pouvons montrer que

$$E \left[ \hat{\beta}^+ \right] = \beta + (X^\top X)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ T(\Delta_{21} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Delta_{22}) \end{bmatrix} \quad (1.187)$$

$\hat{\beta}^+$  est donc un estimateur biaisé de  $\beta$ . Phillips et Hansen proposent alors un estimateur complètement corrigé (*fully modified*) défini de la façon suivante

$$\hat{\beta}^{+*} = \hat{\beta}^+ - (X^\top X)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ T \left( \hat{\Delta}_{21} - \hat{\Omega}_{12} \hat{\Omega}_{22}^{-1} \hat{\Delta}_{22} \right) \end{bmatrix} \quad (1.188)$$

et dont la matrice de covariance est

$$\text{var} \left[ \hat{\beta}^{+*} \right] = \frac{\hat{\Omega}_{11.2}}{T} (X^\top X)^{-1} \quad (1.189)$$

### 1.7.3 Test de stationnarité

#### 1.7.3.1 Présentation du test KPSS

Afin de tester la stationnarité des séries, nous utilisons le test de KWIATKOWSKY, PHILLIPS, SCHMIDT et SHIN [1992]. Soit  $y_t$  une série temporelle de dimension  $T$ . Les auteurs supposent le modèle suivant comme processus de génération des données

$$\begin{cases} y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t \\ r_t = r_{t-1} + u_t \end{cases} \quad (1.190)$$

avec  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  et  $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$ . Si  $\sigma_u^2$  est égal à 0, il est évident  $y_t$  est stationnaire. Dans l'autre cas,  $y_t$  est un processus intégré d'ordre 1. Tester l'hypothèse de stationnarité de  $y_t$  équivaut donc à tester si  $\sigma_u^2$  est égal à 0 (c'est-à-dire si  $r_t$  est constant). Les auteurs proposent alors d'utiliser le test de multiplicateur de Lagrange

$$\hat{\eta} = \frac{1}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^T S_t^2 \quad (1.191)$$

avec  $S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\varepsilon}_i$  et  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  un estimateur de  $\sigma_\varepsilon^2$  défini par l'estimateur consistant de NEWBY et WEST [1987]

$$s^2(\ell) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 + \frac{2}{T} \sum_{s=1}^{\ell} w(s, \ell) \sum_{t=s+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-s} \quad (1.192)$$

avec  $w(s, \ell)$  le fenêtre de Bartlett. Ils considèrent alors deux tests  $\hat{\eta}_\mu$  (pour la régression  $y_t = \mu + \varepsilon_t$ ) et  $\hat{\eta}_\tau$  (pour la régression  $y_t = \mu + \xi t + \varepsilon_t$ ). Les valeurs critiques sont

	10%	5%	1%
$\hat{\eta}_\mu$	0.347	0.463	0.739
$\hat{\eta}_\tau$	0.119	0.146	0.216

### 1.7.3.2 Application du test KPSS aux taux zéro

Test KPSS pour le taux zéro 1 jour				
	$R_t(\tau)$		$R_t(\tau) - R_{t-1}(\tau)$	
$\ell$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$
0	36.430	15.042	0.0613	0.0287
1	18.324	7.5754	0.0503	0.0236
2	12.285	5.0856	0.0525	0.0246
3	9.2606	3.8385	0.0567	0.0266
4	7.4430	3.0884	0.0592	0.0277
5	6.2300	2.5875	0.0604	0.0283

Test KPSS pour le taux zéro 2 jours				
	$R_t(\tau)$		$R_t(\tau) - R_{t-1}(\tau)$	
$\ell$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$
0	36.542	15.069	0.0615	0.0287
1	18.380	7.5889	0.0505	0.0236
2	12.322	5.0945	0.0527	0.0246
3	9.2884	3.8451	0.0570	0.0265
4	7.4653	3.0937	0.0606	0.0277
5	6.2485	2.5919	0.0633	0.0283

Test KPSS pour le taux zéro 3 jours				
	$R_t(\tau)$		$R_t(\tau) - R_{t-1}(\tau)$	
$\ell$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$
0	36.653	15.096	0.0618	0.0287
1	18.436	7.6022	0.0507	0.0236
2	12.359	5.1034	0.0529	0.0246
3	9.3162	3.8517	0.0570	0.0266
4	7.4874	3.0990	0.0595	0.0277
5	6.2669	2.5963	0.0608	0.0283

Test KPSS pour le taux zéro 4 jours				
	$R_t(\tau)$		$R_t(\tau) - R_{t-1}(\tau)$	
$\ell$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$
0	36.765	15.123	0.0621	0.0288
1	18.491	7.6156	0.0509	0.0236
2	12.396	5.1123	0.0530	0.0246
3	9.3439	3.8583	0.0573	0.0265
4	7.5096	3.1043	0.0597	0.0277
5	6.2853	2.6007	0.0610	0.0283

Test KPSS pour le taux zéro 5 jours				
$\ell$	$R_t(\tau)$		$R_t(\tau) - R_{t-1}(\tau)$	
	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$
0	36.876	15.150	0.0623	0.0288
1	18.547	7.6289	0.0511	0.0236
2	12.433	5.1211	0.0533	0.0246
3	9.3715	3.8650	0.0575	0.0265
4	7.5316	3.1096	0.0599	0.0277
5	6.3037	2.6051	0.0612	0.0283

Test KPSS pour le taux zéro 6 jours				
$\ell$	$R_t(\tau)$		$R_t(\tau) - R_{t-1}(\tau)$	
	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$
0	36.987	15.176	0.0626	0.0288
1	18.602	7.6423	0.0513	0.0236
2	12.469	5.1300	0.0534	0.0246
3	9.3989	3.8716	0.0576	0.0265
4	7.5535	3.1148	0.0601	0.0277
5	6.3219	2.6095	0.0614	0.0283

Test KPSS pour le taux zéro 7 jours				
$\ell$	$R_t(\tau)$		$R_t(\tau) - R_{t-1}(\tau)$	
	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$	$\hat{\eta}_\mu$	$\hat{\eta}_\tau$
0	37.097	15.203	0.0628	0.0288
1	18.657	7.6555	0.0515	0.0236
2	12.506	5.1388	0.0536	0.0246
3	9.4263	3.8782	0.0578	0.0265
4	7.5754	3.1200	0.0603	0.0276
5	6.3402	2.6138	0.0616	0.0282

### 1.7.4 La programme quadratique associé à une régression en imposant des contraintes d'inégalités

Considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \arg \min [y - X\beta]^\top W^{-1} [y - X\beta] \\ \text{s.c. } & A\beta \geq b \end{aligned} \quad (1.193)$$

Comme nous avons

$$[y - X\beta]^\top W^{-1} [y - X\beta] = y^\top W^{-1} y - 2\beta^\top X^\top W^{-1} y + \beta^\top X^\top W^{-1} X\beta \quad (1.194)$$

le problème (1.193) est un problème quadratique

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \arg \min \frac{1}{2}\beta^\top Q\beta - \beta^\top r \\ \text{s.c. } & A\beta \geq b \end{aligned} \quad (1.195)$$

avec  $Q = 2X^\top W^{-1}X$  et  $r = 2X^\top W^{-1}y$ .

Pour le problème (1.156), nous avons

$$Q = 2(I_N \otimes \mathbf{1}_T)^\top (\Sigma \otimes I_T)^{-1} (I_N \otimes \mathbf{1}_T) \quad (1.196)$$

et

$$r = 2(I_N \otimes \mathbf{1}_T)^\top (\Sigma \otimes I_T)^{-1} \mathbf{L} \quad (1.197)$$

En utilisant les règles du produit de Kronecker (MAGNUS et NEUDECKER [1988]), nous en déduisons que

$$\begin{aligned} (I_N \otimes \mathbf{1}_T)^\top (\Sigma \otimes I_T)^{-1} &= (I_N^\top \otimes \mathbf{1}_T^\top) (\Sigma^{-1} \otimes I_T^{-1}) \\ &= (I_N \Sigma^{-1}) \otimes (\mathbf{1}_T^\top I_T) \\ &= \Sigma^{-1} \otimes \mathbf{1}_T^\top \end{aligned} \quad (1.198)$$

$$\begin{aligned} (I_N \otimes \mathbf{1}_T)^\top (\Sigma \otimes I_T)^{-1} \mathbf{L} &= (\Sigma^{-1} \otimes \mathbf{1}_T^\top) \text{vec}(L(\tau)) \\ &= \text{vec}(\mathbf{1}_T^\top L(\tau) \Sigma^{-1}) \\ &= \Sigma^{-1} L(\tau)^\top \mathbf{1}_T \end{aligned} \quad (1.199)$$

$$\begin{aligned} (I_N \otimes \mathbf{1}_T)^\top (\Sigma \otimes I_T)^{-1} (I_N \otimes \mathbf{1}_T) &= (\Sigma^{-1} \otimes \mathbf{1}_T^\top) (I_N \otimes \mathbf{1}_T) \\ &= (\Sigma^{-1} I_N) \otimes (\mathbf{1}_T^\top \mathbf{1}_T) \\ &= T \Sigma^{-1} \end{aligned} \quad (1.200)$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \arg \min \frac{1}{2} \alpha^\top (2T \Sigma^{-1}) \alpha - \alpha^\top (2 \Sigma^{-1} L(\tau)^\top \mathbf{1}_T) \\ \text{s.c. } R\alpha &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.201)$$

# Chapitre 2

## Le contenu informationnel de la structure par terme

### 2.1 Introduction

Refuser l'hypothèse d'anticipations rationnelles n'implique pas nécessairement que la courbe des taux ne contient aucune information. C'est la position de nombreux économistes (STAMBAUGH [1988], SVENSSON [1994a], FRANKEL et LOWN [1994]). Depuis quelques années, différentes études s'intéressent aux liens entre les propriétés des actifs financiers et les règles de conduite de la politique monétaire. La littérature sur le contenu informationnel de la courbe des taux en fait partie. En réalité, le terme "contenu informationnel des taux à terme" serait plus juste. Comme le montre Svensson, sous certaines hypothèses, les taux à terme peuvent être des **indicateurs** pour les anticipations d'inflation, la reprise économique ou encore les anticipations de change. Dans cette optique, la courbe des taux révèle une information pertinente pour les autorités monétaires qui doivent décider de la politique à mener. C'est pourquoi de nombreuses banques centrales (par exemple, la Banque d'Angleterre ou la Banque de France) suivent très attentivement l'évolution de la courbe des taux. Parfois, les auteurs abandonnent la notion d'*indicateur avancé* et préfèrent la notion de mesure de la **crédibilité** de la politique monétaire. Dans ce cas, la courbe des taux révèle la perception des mesures prises par les agents économiques, mais il est souvent difficile de distinguer la notion d'indicateur de celle de crédibilité. Nous devons noter que l'enthousiasme des premiers travaux sur le contenu informationnel de la courbe des taux est moins important aujourd'hui pour trois raisons :

1. les résultats positifs obtenus sont valables sur des courtes périodes ;
2. L'évidence du contenu informationnel concerne principalement les périodes d'inversion de la courbe des taux ;

3. La lecture d'information sur les marchés dérivés semble beaucoup plus intéressante.

Dans cette section consacrée au contenu informationnel, il est difficile de ne pas évoquer cette troisième raison. En effet, la lecture d'information sur les marchés dérivés (et plus particulièrement sur les marchés des options) occupe une place prépondérante pour l'extraction d'information. La méthode est prometteuse (voir par exemple les articles d'ABKEN [1995], BAHRA [1996], BATES [1991] ou MALZ [1996]) et intéresse beaucoup les banques centrales.

## 2.2 Une nouvelle vision de la structure par terme

De nombreuses études utilisent ou font référence à la structure par terme des taux d'intérêt. Ce sont des études aussi bien théoriques qu'empiriques. Cependant, nombreuses sont celles qui posent des problèmes dans l'utilisation même de la terminologie "structure par terme des taux d'intérêt". Nous rappelons que celle-ci est définie par l'ensemble  $\mathfrak{R} = \{R_t(\tau), \tau \in \mathbb{R}_+\}$ . Cela implique que les taux étudiés sont les taux **zéro**. De plus, nous ne pouvons assimiler la structure par terme à un ensemble fini de taux (par exemple, les taux court, moyen et long) ou encore à un spread de taux. Il n'est pourtant pas rare de voir des articles publiés sur la courbe des taux modélisant celle-ci par un spread de taux non zéro.

La manipulation de la courbe des taux est donc relativement complexe. Considérons un exemple simple comme une analyse factorielle de la courbe des taux. Dans ce cas, l'analyse doit porter sur un ensemble fini de taux. Quelles sont les maturités que nous devons retenir ? Cette complexité est plus grande encore pour l'analyse temporelle de la courbe des taux, puisque dans ce cas,  $\tau \in \mathbb{R}_+$  et  $t \in \mathbb{N}$ . C'est pourquoi nous proposons dans cette section quelques outils pour essayer d'appréhender de façon rigoureuse la structure par terme. Ces outils sont le spread  $S_t$ , la pente  $p_t$  et le niveau  $\bar{R}_t$  de la courbe des taux. Pour comprendre la courbe des taux  $\mathfrak{R}$  et aussi pour comparer les courbes de taux française et allemande, nous pourrions donc utiliser le triplé  $\{S_t, p_t, \bar{R}_t\}$ .

### 2.2.1 Le spread de la courbe des taux

Nous définissons le spread de taux d'intérêt  $S_t(\tau_1, \tau_2)$  par la différence entre les taux zéro  $R_t(\tau_2)$  et  $R_t(\tau_1)$ . Il est important de noter que ce spread se calcule à partir des taux **zéro** et non à partir d'autres taux d'intérêt, comme par exemple les taux Pibor ou les taux du marché monétaire. Nous noterons  $S_t$  le spread entre le taux

long et le taux court, c'est-à-dire

$$S_t = R_t(\infty) - R_t(0) \quad (2.1)$$

De nombreuses études font référence à ce spread. Le graphique (2.1) représente le spread français calculé de trois manières différentes. Nous obtenons les deux premières mesures à partir de la structure par terme calculée dans le premier chapitre. Dans le cas du modèle de NELSON et SIEGEL [1987], nous avons

$$S_t = -\mu_2 \quad (2.2)$$

La deuxième mesure est la différence entre les taux zéro 1 mois et 10 ans. Le troisième spread correspond à la différence entre le taux long de référence calculé par Datastream (similaire au taux actuariel d'une obligation d'état 10 ans) et le taux Pibor 1 mois. Graphiquement, nous remarquons que ces trois mesures sont fortement liées. Ceci est confirmé par la matrice de corrélation de ces trois mesures

$$\text{var} \left( \begin{bmatrix} S_t \\ S_t \left( \frac{1}{12}, 10 \right) \\ \text{LT} - \text{Pibor} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.979 & 1 & \\ 0.883 & 0.911 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

mais cela n'implique pas que les trois mesures sont équivalentes. Nous remarquons en particulier que la mesure LT–Pibor est inférieure à la mesure  $S_t$  pour la période que nous considérons. Ces écarts ne sont pas simplement une translation uniforme. Nous pouvons donc penser que les mesures de spread non issues de la courbe des taux zéro peuvent modifier les résultats. Dans de nombreux cas, nous utilisons la différence de spread de taux dans la modélisation et non le niveau<sup>1</sup>. La matrice de corrélation des variations est alors

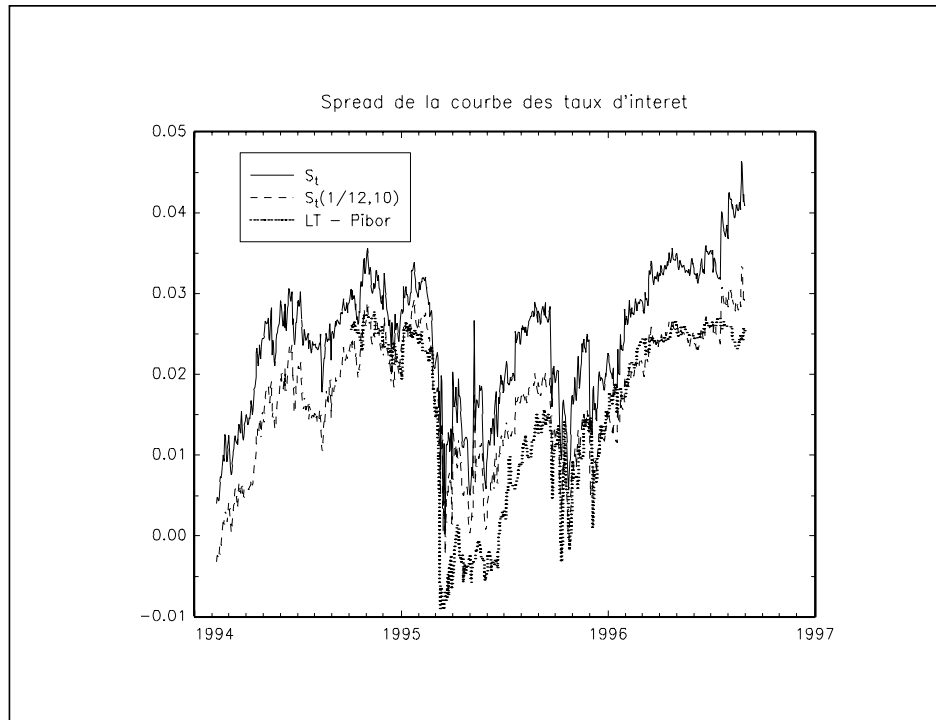
$$\text{var} \left( \begin{bmatrix} \Delta S_t \\ \Delta S_t \left( \frac{1}{12}, 10 \right) \\ \Delta (\text{LT} - \text{Pibor}) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.978 & 1 & \\ 0.099 & 0.097 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Nous remarquons que la troisième mesure est faiblement corrélée avec celles issues de la courbe des taux zéro. Les résultats ne seront donc pas les mêmes. Il existe d'autres différences entre ces mesures. Par exemple, la volatilité de la mesure LT–Pibor est plus importante que celle de  $S_t$ . Nous avons  $\sigma(\text{LT} - \text{Pibor}) = 1.07\%$  et  $\sigma(S_t) = 0.83\%$ . Avec les données en différence, nous obtenons  $\sigma(\Delta(\text{LT} - \text{Pibor})) = 0.126\%$  et  $\sigma(\Delta S_t) = 0.151\%$ . Utiliser une mesure à partir des taux observés sur les marchés monétaire et obligataire introduit non seulement une approximation mais aussi une déformation. Néanmoins, nous avons conscience que les économistes utilisent ces taux de marché, car le problème est la disponibilité des taux zéro.

---

<sup>1</sup>Ceci s'explique par l'importance des analyses économétriques basées sur des données non stationnaires.





Graphique 2.1

### 2.2.2 La pente de la courbe des taux

La notion de pente de la courbe des taux est mal explicitée par la littérature existante. On considère généralement que la courbe des taux est inversée lorsque la pente des taux est négative, mais la plupart du temps, nous assimilons cette pente à un spread de taux. En fait, il serait plus juste de définir la pente des taux  $p_t(\tau_1, \tau_2)$  de la façon suivante

$$p_t(\tau_1, \tau_2) = \frac{R_t(\tau_2) - R_t(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \quad (2.5)$$

Assimiler une courbe des taux inversée à un spread ou à une pente négative, c'est-à-dire  $S_t(\tau_1, \tau_2) < 0$  ou  $p_t(\tau_1, \tau_2) < 0$ , pose dans certains cas un problème. Supposons que la courbe des taux soit effectivement inversée, mais que les taux longs soient plus élevés que les taux courts. Dans ce cas, le spread ou la pente sont positifs. C'est pourquoi il convient de définir la pente des taux d'une autre façon en ne tenant compte que de la partie courte de la courbe. Nous proposons de définir la pente de la façon suivante

$$p_t = \lim_{\tau \rightarrow 0} p_t(\tau) \quad (2.6)$$

avec

$$p_t(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_t(\tau + h) - R_t(\tau)}{h} \quad (2.7)$$

Le pente de la courbe des taux est le coefficient directeur de la tangente de cette courbe pour une maturité nulle. Pour le modèle de Nelson et Siegel, nous pouvons vérifier<sup>2</sup> que

$$p_t = \frac{\mu_3 - \mu_2}{2\tau_1} \quad (2.10)$$

Sur le graphique (2.2), nous avons représenté la pente  $p_t$  et le spread  $S_t$ . Nous notons que la courbe des taux est inversée plusieurs fois pendant la période étudiée :

1. au début de l'année 1994, du mois de février au mois d'avril ;
2. du mois d'avril au mois de juillet 1995 ;
3. et du mois d'octobre 1995 au mois de juillet 1996.

Pendant ces périodes d'inversion, le spread de taux  $S_t$  est resté positif. Bien sûr, les mouvements entre le spread et la pente ne sont pas indépendants, mais nous ne pouvons pas utiliser la mesure  $S_t$  pour identifier les périodes d'inversion.

### 2.2.3 Le niveau de la courbe des taux

Peu d'auteurs étudient le niveau de la courbe des taux. C'est sûrement l'un des concepts les plus difficiles à définir et surtout à quantifier. Lorsque nous parlons de taux bas ou hauts, nous faisons référence implicitement au niveau de la courbe des taux. Le niveau est donc lié au taux d'intérêt *moyen*. Une mesure possible de ce niveau est de considérer un certain nombre de maturités  $\{\tau_i, i = 1, \dots, N\}$  et de calculer une moyenne arithmétique pondérée

$$\bar{R}_t = \sum_{i=1}^N \alpha_i R_t(\tau_i) \quad (2.11)$$

La difficulté est alors de choisir les maturités des taux coupon zéro. C'est pourquoi nous proposons de calculer le niveau de la courbe des taux par la formule suivante

$$\bar{R}_t(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} R_t(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

Nous pouvons interpréter  $\bar{R}_t(\tau_1, \tau_2)$  comme le taux moyen de la courbe sur la partie  $[\tau_1, \tau_2]$ . Nous notons  $\bar{R}_t(\tau)$  le taux moyen correspondant à  $\bar{R}_t(0, \tau)$ . Ainsi,  $\bar{R}_t(10)$

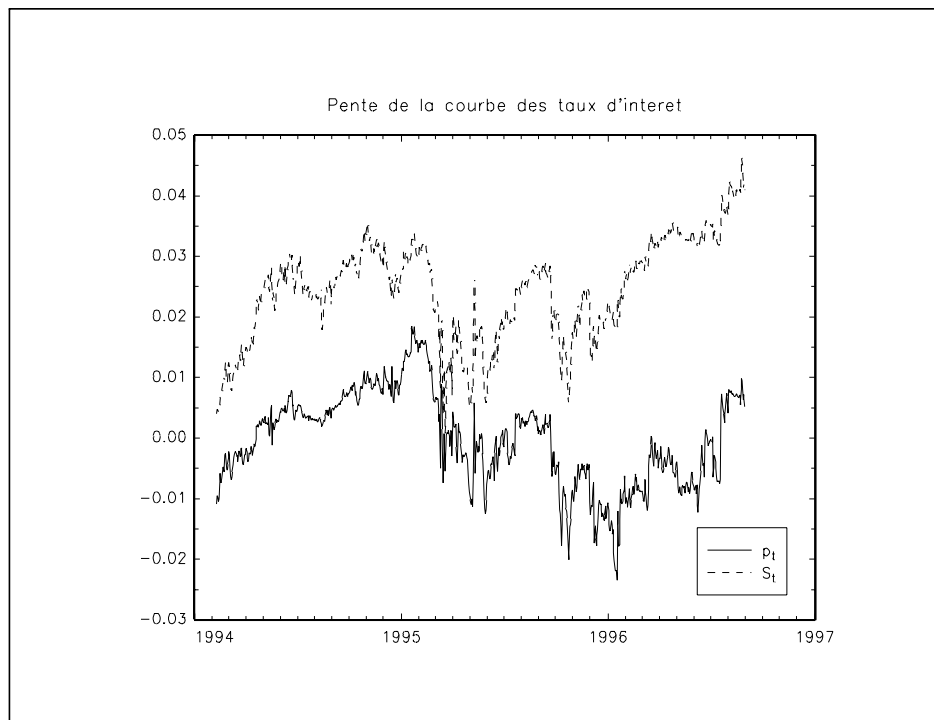
---

<sup>2</sup>Nous avons

$$p_t(\tau) = \frac{\partial R_t(\tau)}{\partial \tau} = (\mu_2 + \mu_3) \left( \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_1}{\tau^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) \right) + \frac{\mu_3}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad (2.8)$$

et

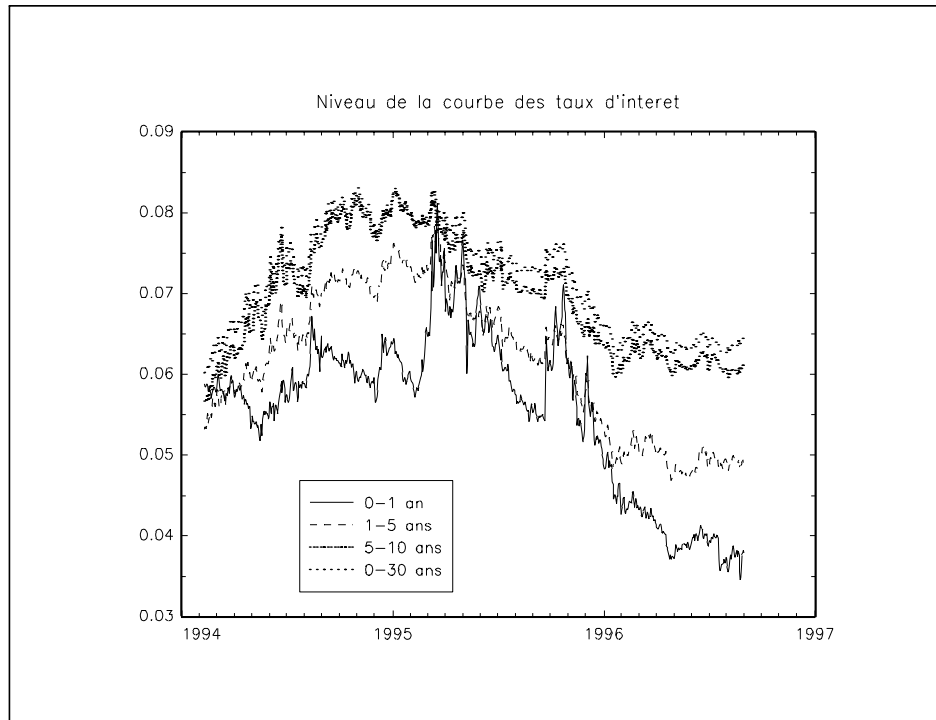
$$\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) = 1 - \frac{\tau}{\tau_1} + \frac{\tau^2}{2\tau_1^2} + o(\tau^3) \quad (2.9)$$



Graphique 2.2

représente le niveau de la courbe pour la partie inférieure à 10 ans. Il est difficile de proposer une seule mesure du niveau de la courbe des taux. En effet, si nous considérons la courbe des taux dans son intégralité,  $\bar{R}_t(\infty)$  sera sensiblement égal à  $R_t(\infty)$ . Dans ce cas, nous assimilons le niveau de la courbe des taux et le taux zéro de long terme et le niveau de la courbe n'est plus une nouvelle information. Nous pouvons cependant indiquer quelques mesures pertinentes. Ainsi,  $\bar{R}_t(1)$  représente le niveau de la partie courte de la structure par terme (pour les maturités inférieures à un an). Nous pouvons assimiler  $\bar{R}_t(1, 5)$  au niveau de la partie intermédiaire, c'est-à-dire le moyen terme. Pour une mesure plus globale, nous pouvons utiliser  $\bar{R}_t(10)$ .

Pour calculer l'expression (2.12), nous utilisons un algorithme numérique d'intégration (par exemple l'algorithme de Simpson). Le graphique (2.3) représente le niveau de la courbe des taux estimée au premier chapitre. Nous remarquons qu'une estimation du niveau de la courbe des taux basée sur les maturités allant de 0 à 30 ans revient à une estimation de la partie longue de la courbe, par exemple  $\bar{R}_t(5, 10)$ . Il existe une différence importante entre  $\bar{R}_t(1)$  et les trois autres mesures,



Graphique 2.3

puisque la matrice de corrélation est

$$\text{var} \left( \begin{bmatrix} \Delta \bar{R}_t(1) \\ \Delta \bar{R}_t(1, 5) \\ \Delta \bar{R}_t(5, 10) \\ \Delta \bar{R}_t(30) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.542 & 1 & & \\ 0.319 & 0.863 & 1 & \\ 0.396 & 0.869 & 0.975 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Dans cette thèse, nous privilégierons le niveau de la partie courte car c'est sûrement la mesure qui apporte le plus d'information pertinente par rapport au taux long.

## 2.2.4 Les relations entre le spread, la pente et le niveau de la courbe des taux

Pour étudier la structure par terme des taux d'intérêt  $\mathfrak{R}$ , nous pouvons analyser l'information contenue dans l'ensemble  $\{r_t, R_t(\infty), S_t, p_t, \bar{R}_t(1)\}$ . Cet ensemble est plus facile à manipuler que l'ensemble  $\mathfrak{R}$  car il est fini. L'idée est donc de définir des statistiques ou des mesures qui *résumant* la courbe des taux et qui permettent de mieux l'appréhender. Nous pouvons supposer que la création des mesures du spread, de la pente et du niveau génère une information plus riche que celle donnée par les taux court et long. Cependant, même si ces trois mesures  $\{S_t, p_t, \bar{R}_t(1)\}$  apportent sûrement un éclairage nouveau sur la courbe des taux, celui-ci reste un éclairage **partiel**. La première raison est que ces mesures s'intéressent aux parties

extrêmes de la courbe des taux, c'est-à-dire la partie courte et la partie longue. Elles ne permettent donc pas d'appréhender les phénomènes de moyen terme. En fait, ces phénomènes sont peu étudiés dans la littérature existante. Par exemple, dans les modèles financiers, les taux de moyen terme dépendent de facteurs qui peuvent être le taux court, le taux long ou la volatilité du taux court (voir par exemple l'article de BRENNAN et SCHWARTZ [1982]). Nous expliquons alors la position des taux moyens par la position courante des facteurs et la valeur des paramètres du modèle. L'analyse des taux moyens ne révèle donc pas d'information supplémentaire. De même, de nombreux modèles macro-économiques ignorent la partie intermédiaire de la courbe des taux. C'est le cas par exemple des modèles de BLANCHARD [1981], MCCAFFERTY [1986] ou ARTUS [1990]. En fait, nous pouvons justifier ce choix. Nous remarquons en général que la structure par terme  $\mathfrak{R}$  est une fonction relativement lissée<sup>3</sup>. Il est rare d'observer des courbes présentant plusieurs inversions (comme celle de la figure cinq de NELSON et SIEGEL [1987]) ou dont la dérivée seconde n'est pas monotone (comme la courbe de la figure un de SHEA [1985]).

Une deuxième raison qui explique le caractère partiel de l'éclairage de ces mesures est leur interdépendance. Même si elles sont définies différemment, elles restent étroitement liées. Nous rappelons que dans le modèle de Nelson et Siegel, nous avons<sup>4</sup>  $r_t = \mu_1 + \mu_2$ ,  $R_t(\infty) = \mu_1$ ,  $S_t = -\mu_2$  et  $p_t = (\mu_3 - \mu_2)/(2\tau_1)$ . Le coefficient  $\mu_2$  joue donc un rôle important. En général, comme  $|\mu_3| \ll |\mu_2|$  et  $\tau_1 \geq 0$ , le spread et la pente peuvent présenter une information commune, comme le montre la matrice de corrélation empirique suivante pour la période étudiée

$$\text{var} \left( \begin{bmatrix} \Delta S_t \\ \Delta p_t \\ \Delta \bar{R}_t(1) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.861 & 1 & \\ -0.822 & -0.639 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Le degré de corrélation entre les variations du spread  $S_t$  et de la pente  $p_t$  est important. Une augmentation du spread est donc généralement accompagnée par une pente plus forte. Cela implique qu'une hausse du taux long a une influence sur la partie courte de la courbe. Nous retrouvons l'idée que la structure par terme est une fonction *lissée*. S'il n'y a pas d'influence du spread sur la pente, alors une hausse du taux long a un effet local (nous retrouvons l'opposition entre *smoothing function* et *step function*). Nous remarquons aussi que les variations du spread sont corrélées négativement avec celles du niveau  $\bar{R}_t(1)$ . Ceci est dû à la plus faible volatilité des taux longs. Nous avons

$$\Delta S_t = \Delta R_t(\infty) - \Delta r_t \quad (2.15)$$

<sup>3</sup>Les anglais emploient le terme *smoothing function*.

<sup>4</sup>La solution symbolique de  $\bar{R}_t(1)$  est assez complexe, puisqu'elle dépend de la fonction intégrale exponentielle  $Ei$ .

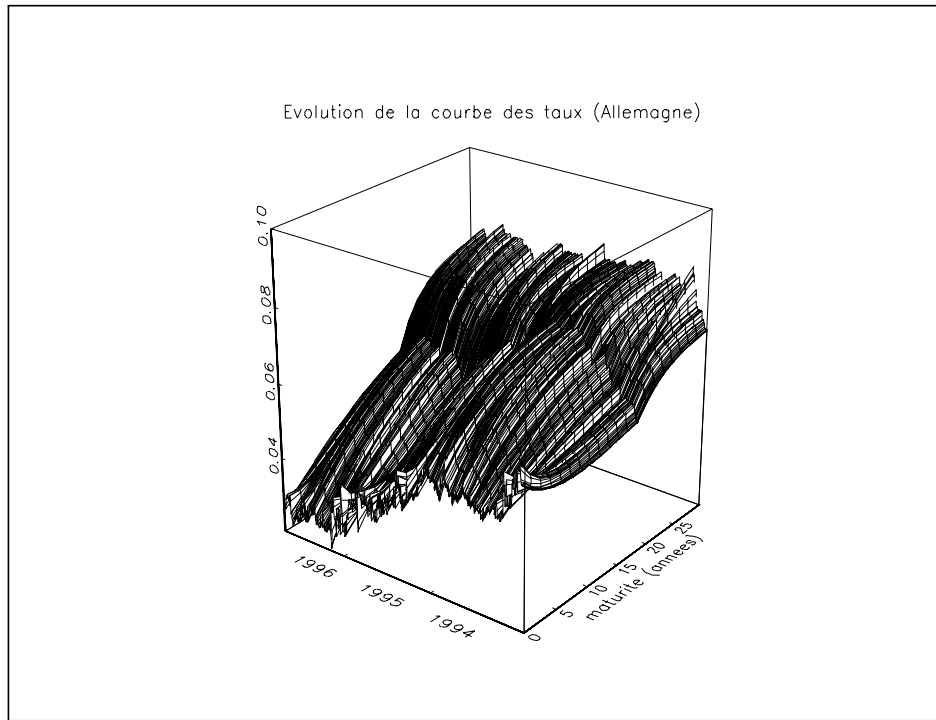
Comme nous expliquons les variations du spread principalement par les variations du taux court, nous en déduisons alors une corrélation négative assez forte entre  $\Delta S_t$  et  $\Delta \bar{R}_t(1)$ .

### 2.2.5 Comparaison des courbes de taux française et allemande

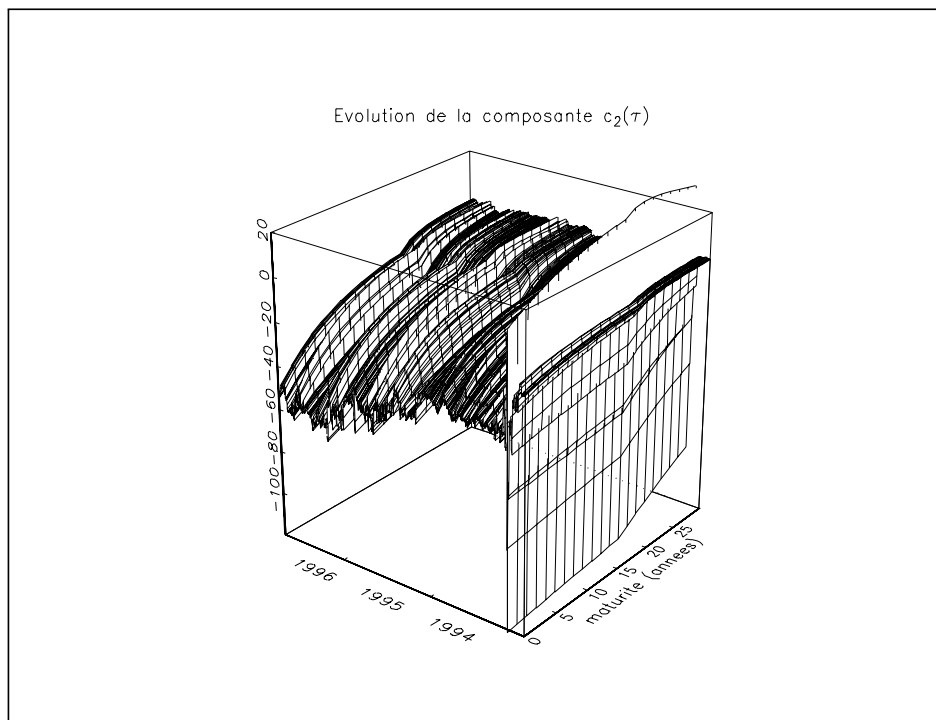
Pour analyser l'évolution des courbes de taux française et allemande, nous pouvons comparer le graphique (2.4) avec le graphique (1.11) de la page 44 du premier chapitre. La tâche est cependant difficile car l'analyse doit être transversale **et** temporelle. La courbe des taux allemande présente des similitudes avec la courbe française. Nous avons ainsi l'impression que les taux ont globalement diminué pendant la période février 1994 - octobre 1996. Nous retrouvons aussi la "cassure" transversale, mais celle-ci est plus prononcée. Toutefois, d'importantes différences existent. Par exemple, il semble que la courbe allemande ne présente pas de phénomènes d'inversion, alors que nous observons sur la courbe des taux française deux inversions particulièrement marquées. La baisse des taux courts apparaît alors plus monotone dans le cas allemand. Les taux allemands sont d'ailleurs beaucoup plus inertes, alors que les taux français sont plus volatiles. Nous observons ceci particulièrement pour les taux longs qui semblent constants. Il ressort de cette analyse que les taux zéro allemands sont beaucoup moins influencés par les événements conjoncturels, par exemple les crises monétaires de février et octobre 1995.

Les courbes de taux (2.4) et (1.11) sont basées sur le modèle de Nelson et Siegel. Comme le suggère Svensson, nous pouvons donc les analyser à partir des décompositions du taux zéro. Nous représentons les composantes  $c_2(\tau)$  et  $c_3(\tau)$  des taux zéro allemands sur les graphiques (2.5) et (2.6). Cependant, une analyse temporelle de ces graphiques est beaucoup plus difficile qu'une analyse transversale (voir les graphiques (1.13) et (1.14) relatifs à la structure par terme française). En fait, ces graphiques en trois dimensions posent des problèmes de lecture, car ils procèdent d'une double analyse. Si nous utilisons les mesures définies dans les sections précédentes, nous éliminons la coupe transversale, c'est-à-dire l'influence de la maturité.

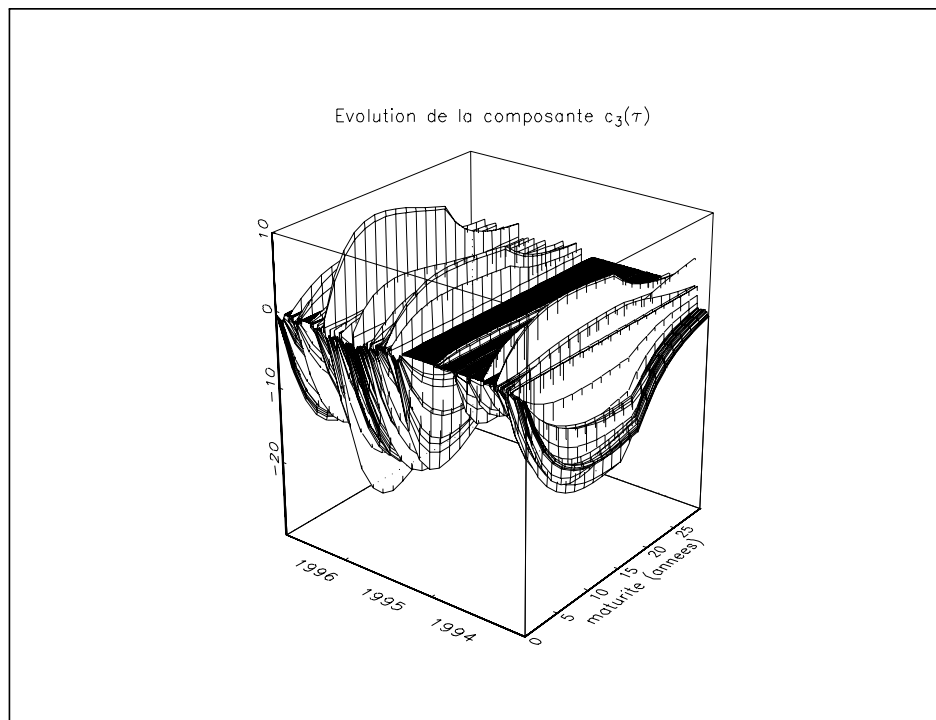
Le graphique (2.7) présente l'évolution des taux zéro court et long. Nous remarquons que l'évolution du taux court allemand est beaucoup moins erratique que celle du taux français. La baisse de taux allemand est continue et progressive. Pour le taux court zéro français, nous observons trois hausses importantes qui correspondent toutes à une inversion de la courbe des taux. A la fin de l'année 1996, l'écart entre



Graphique 2.4



Graphique 2.5

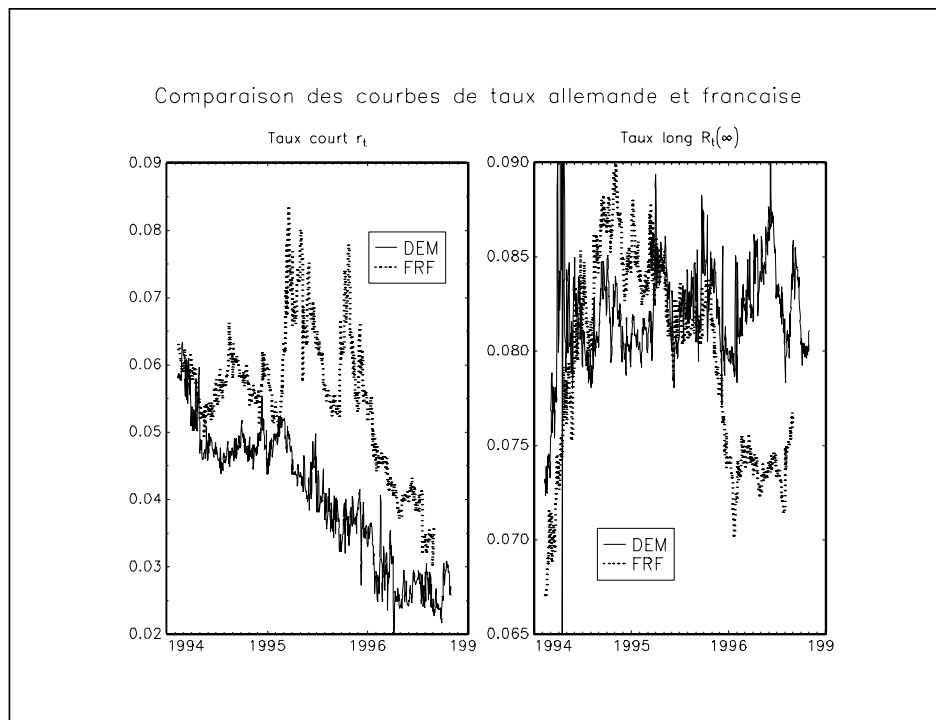


Graphique 2.6

le taux français et le taux allemand tend à se réduire. Cela s'explique par le calme relatif du marché des changes au premier semestre 1996. L'évolution du taux court français semble dépendre fortement de la situation du marché des changes, et en particulier des modifications des taux directeurs de la Banque de France. Les taux longs présentent des caractéristiques différentes. Ils sont beaucoup moins volatiles que les taux courts et nous n'observons pas de tendance à la baisse. Ces taux zéro ont donc un comportement assez singulier qui les distingue des autres taux de rendements. Au début de 1996, les économistes s'accordaient à penser que les taux longs étaient exceptionnellement faibles (voir par exemple l'article "Taux longs, jusqu'où la baisse ?" de la revue *Éclairages*). Ce n'était pas le cas des taux zéro. Nous observons cependant une baisse assez importante (10 points de base) du taux long français au début de l'année 1996. La situation est donc originale puisque le taux allemand est plus élevé.

L'évolution du spread et de la pente de la courbe des taux est représentée sur le graphique (2.8). D'une façon générale, le spread allemand est plus élevé que le spread français. Ceci s'explique par les différences entre les taux courts allemands et français. L'analyse de la pente fournit des informations intéressantes par rapport à celles que nous pouvons observer sur le graphique (2.4). La courbe des taux allemande est plusieurs fois inversée, de février à avril 1994, au mois de juin 1995





Graphique 2.7

et à la fin de l'année 1995. Ces inversions sont généralement peu prononcées et localisées sur la partie très courte de la courbe<sup>5</sup>. Nous observons aussi une évolution similaire des pentes en 1994 alors que ces pentes sont très différentes en 1995 et 1996.

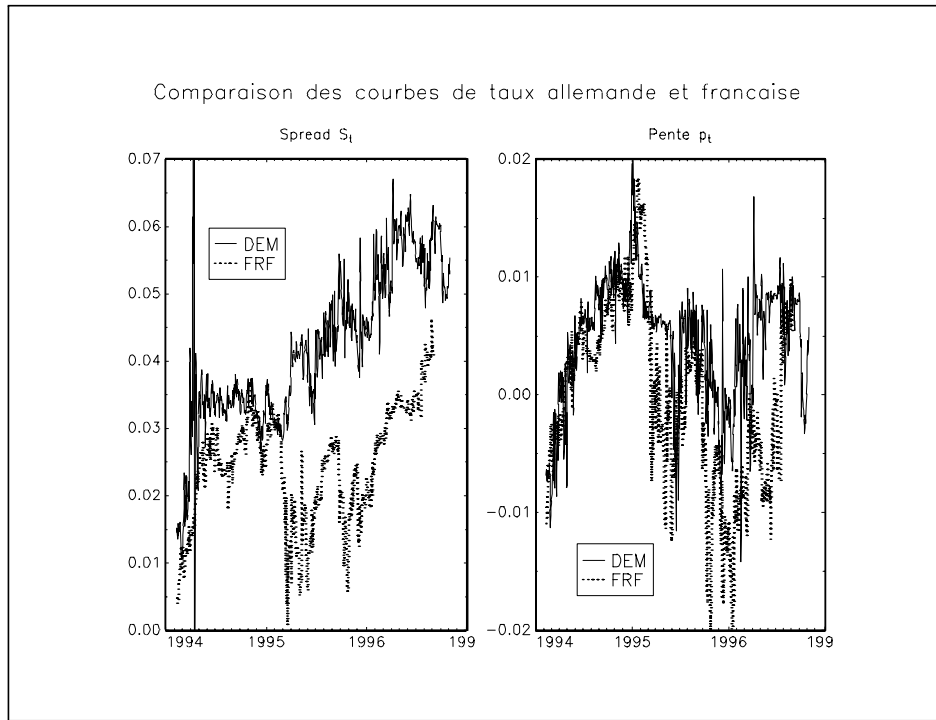
Le niveau des taux  $\bar{R}_t(1)$  est représenté sur le graphique (2.9). Ce niveau est bien sûr très proche du taux court  $r_t$ . Il n'est donc pas surprenant que les taux courts français soient plus élevés que les taux courts allemands.

## 2.3 Les taux à terme implicites

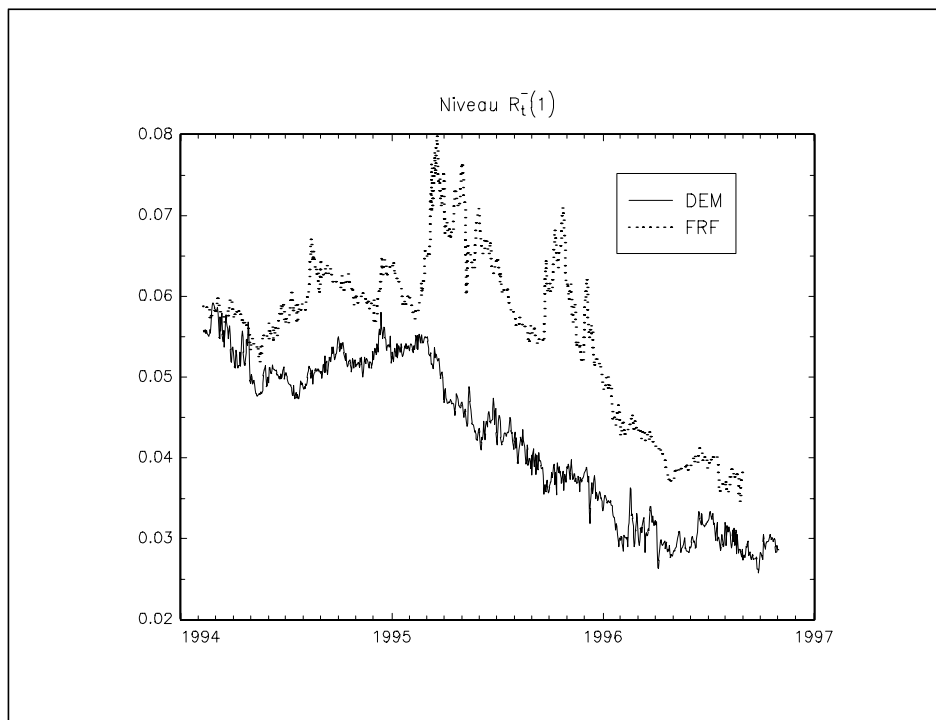
A partir des taux zéro, nous pouvons construire les taux à terme implicites. Ceux-ci jouent un rôle déterminant dans l'extraction de l'information de la courbe des taux. Dans le résumé non technique, SVENSSON [1994b] justifie l'utilisation des taux à terme de la façon suivante :

*Forward interest rates can, under specified assumptions, be interpreted as indicating market expectations of future short interest rates, inflation rates and currency depreciation rates. Forward rates contain the same*

<sup>5</sup>Nous voyons ici l'intérêt de la mesure  $p_t$  par rapport à celle du spread  $S_t$ .



Graphique 2.8



Graphique 2.9

*information as the standard yield curve. Indeed, the forward rate curve is related to the yield curve as the marginal cost curve is to the average cost curve. Forward rates present the information in a way more easily interpreted for monetary policy purposes, however. Whereas the yield curve can be interpreted as expected future averages of the variables in focus, the forward rate curve can be interpreted as indicating the expected time path of these variables. Therefore forward rates more easily allow a separation of expectations for the short, medium and long term than the yield curve. This is the main advantage of forward rates.*

Les taux à terme n'apportent donc pas plus d'information que les taux zéro, mais il est plus facile de les interpréter. Dans un premier paragraphe, nous présentons la méthode pour déterminer les taux à terme dans le modèle de Nelson et Siegel. Avant de se poser la question "Des taux à terme Pour quoi faire ?" (RICART et SICSIC [1995b]), nous essayerons dans un second paragraphe d'appréhender ces taux à terme dans le cadre d'une analyse dynamique.

### 2.3.1 La détermination des taux à terme dans le modèle de Nelson et Siegel

Ce paragraphe est un prolongement de la section 1.4.2.3 (page 47) du premier chapitre. Nous rappelons que  $F_t(\tau, m)$  représente le taux de rendement à la date  $t$  d'un contrat à terme pour la période  $[t + \tau, t + \tau + m]$ . Pour calculer  $F_t(\tau, m)$ , nous utilisons la relation

$$F_t(\tau, m) = \frac{(\tau + m)R_t(\tau + m) - \tau R_t(\tau)}{m} \quad (2.16)$$

Cette relation est particulièrement intéressante puisque nous pouvons exprimer les taux à terme uniquement à partir des taux zéro. Ils contiennent donc la même information mais codée de façon différente. Nous remarquons que la relation (2.16) peut s'écrire

$$R_t(\tau + m) = \frac{m}{\tau + m}F_t(\tau, m) + \frac{\tau}{\tau + m}R_t(\tau + m) \quad (2.17)$$

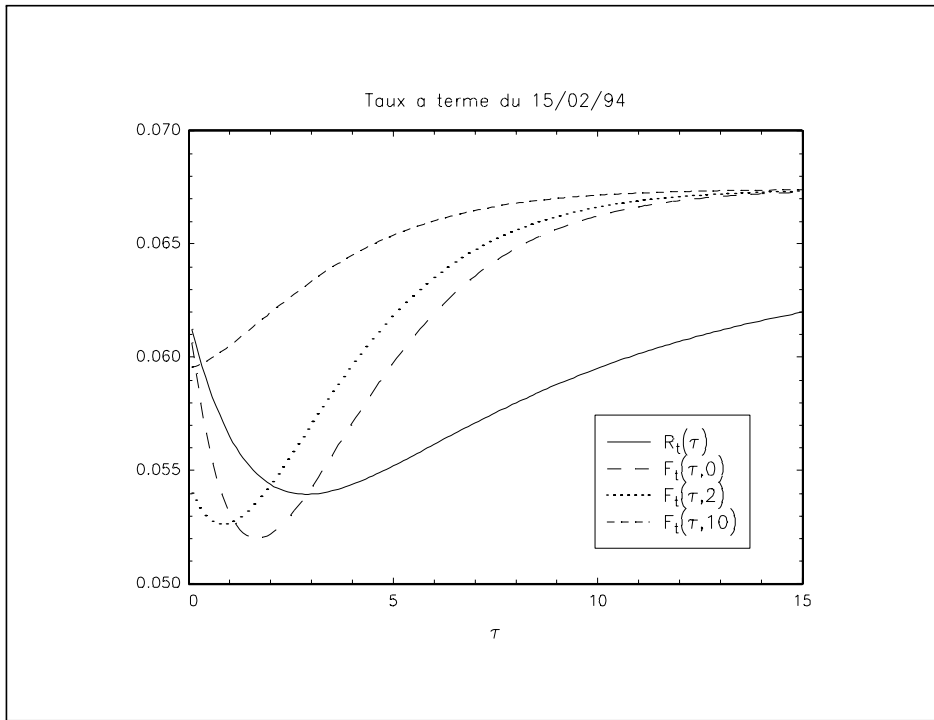
Comme le fait remarquer SVENSSON [1994b], les taux zéro sont donc des taux à terme moyens. De ce fait, l'interprétation des différents segments de la courbe des taux est plus difficile. Dans le cas du modèle de NELSON et SIEGEL [1987], l'expression du taux à terme est

$$F_t(\tau, m) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} \right] + \mu_3 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} - \frac{(\tau + m) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) - \tau}{m} \right] \quad (2.18)$$

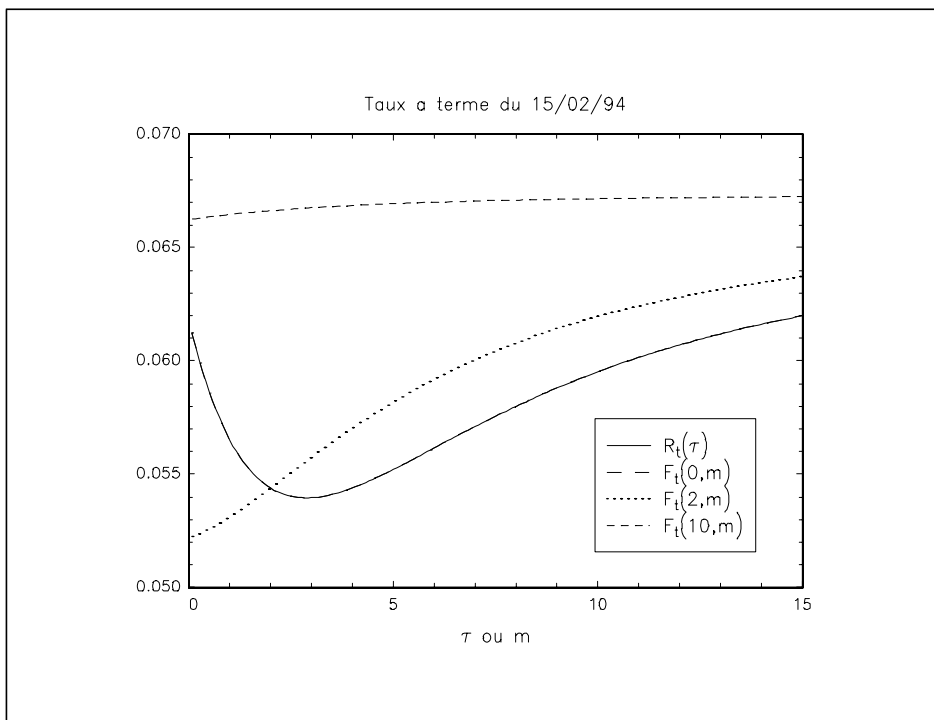
Le graphique (2.10) représente différentes courbes de taux à terme pour le 15 février 1994. Comme le font remarquer RICART et SICSIC [1995b], les taux à terme permettent de mieux mesurer les anticipations des agents. Supposons pour l'instant qu'ils soient des estimateurs sans biais des taux au comptant futurs. Dans ce cas, à la lecture du graphique (2.10), nous pouvons penser que les agents anticipent une baisse des taux. Le point de retournement de  $R_t(\tau)$  correspond à une maturité de 3 ans. Nous pouvons alors supposer que les agents anticipaient cette baisse jusqu'au début de l'année 1997. Cependant, les taux à terme  $F_t(\tau, 0)$  indiquent une anticipation de baisse du taux court pour un peu moins de 2 ans. La lecture des taux à terme est donc plus directe et plus immédiate.  $F_t(1, 2)$  est le taux à terme pour la période allant du 15 février 1995 au 15 février 1997. Nous pouvons le comparer avec le taux zéro dans 1 an de maturité 2 ans  $R_{t+1}(2)$ . Pour bien comprendre ces taux à terme, nous devons parfaitement maîtriser les concepts sous-jacents à  $\tau$  et  $m$ .  $F_t(\tau, 2)$  représente le taux de rendement d'un prêt à terme pour une durée de 2 ans qui commence à la date  $t + \tau$ . Pour des valeurs faibles de  $\tau$ , ce taux à terme est moins élevé que le taux à terme instantané. Pour qu'il soit plus élevé, il faut attendre que la baisse sur les taux courts se fasse sentir, c'est-à-dire pour des valeurs de  $\tau$  plus grandes. Les courbes de taux à terme avec  $m$  fixe pour une date  $t$  donnée permettent alors une lecture des anticipations d'évolution des taux.

Nous pouvons aussi fixer  $\tau$  et faire varier  $m$ . Dans ce cas, l'interprétation est totalement différente : nous n'avons plus une évolution temporelle mais une évolution de la maturité des taux. Si nous supposons l'hypothèse des anticipations vérifiée, nous pouvons alors comparer la structure par terme actuelle avec des anticipations futures de la courbe des taux. Le graphique (2.11) présente différentes courbes de taux à terme  $F_t(0, m)$ ,  $F_t(2, m)$  et  $F_t(10, m)$  pour la date du 15 février 1994. Les courbes  $F_t(0, m)$  et  $R_t(\tau)$  sont bien sûr confondues.  $F_t(2, m)$  est lié à l'anticipation de la courbe des taux dans deux ans. Nous observons donc l'impact de la baisse des taux courts. Ce type de graphique ( $m$  est fixe et  $\tau$  varie) est moins fréquent dans la littérature que le précédent car les économistes sont plus habitués aux évolutions temporelles qu'aux évolutions de structure.

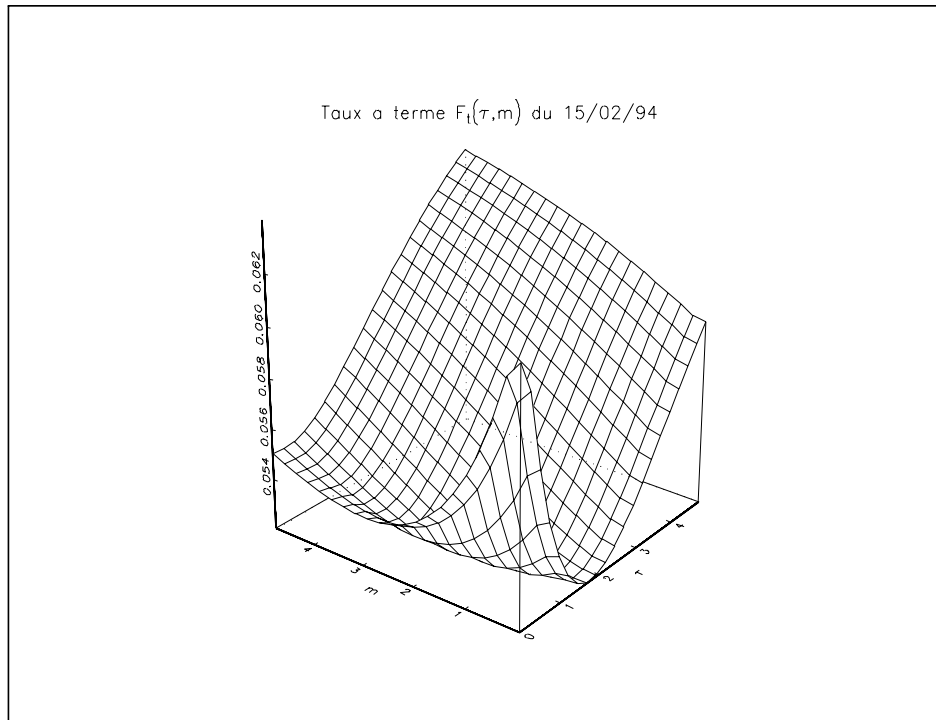
Nous pouvons aussi faire varier  $\tau$  et  $m$ . Même si les taux à terme et les taux zéro contiennent la même information, elle n'occupe pas la même place. Pour une date donnée, nous pouvons représenter la structure par terme dans un espace à deux dimensions, alors que les taux à terme nécessitent un espace à trois dimensions (voir le graphique (2.12)). Cela implique qu'une analyse dynamique des taux à terme sera plus complexe et aussi plus riche.



Graphique 2.10



Graphique 2.11



Graphique 2.12

### 2.3.2 Prédiction des taux d'intérêt futurs

Selon l'hypothèse des anticipations rationnelles, nous avons

$$F_t(\tau, m) = E_t[R_{t+\tau}(m) | \mathcal{F}_t] \quad (2.19)$$

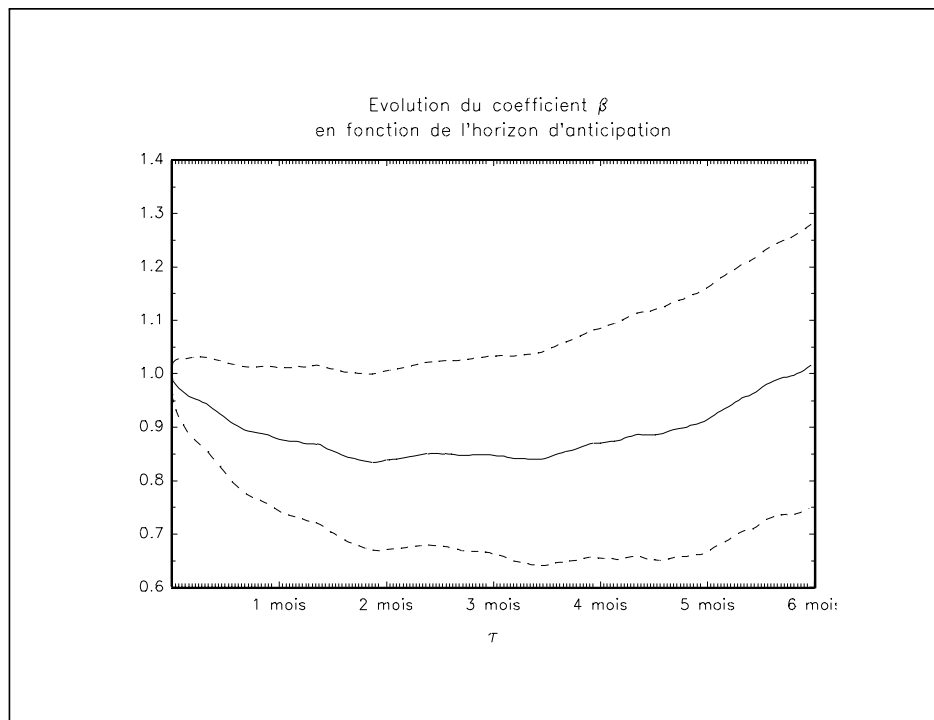
Le taux à terme est un prédictor sans biais du taux au comptant futur. Dans le premier chapitre, nous avons présenté des tests de l'hypothèse d'anticipations basés sur la décomposition du taux d'intérêt long. Dans ce paragraphe, nous étudions la relation entre les taux à terme et les taux zéro. Nous pouvons considérer deux approches. La première concerne les anticipations d'évolution des taux : pour une maturité donnée, nous analysons comment évoluent les anticipations pour un horizon donné. Dans la seconde approche, nous étudions l'évolution des anticipations<sup>6</sup> pour un taux à une date donnée, c'est-à-dire comment convergent les anticipations vers le taux observé.

#### 2.3.2.1 Anticipations d'évolution des taux

Nous pouvons associer le modèle économétrique suivant à la relation (2.19) :

$$R_{t+\tau}(m) = \alpha + \beta F_t(\tau, m) + u_{t+\tau} \quad (2.20)$$

<sup>6</sup>Cette terminologie (anticipations d'évolution et évolution des anticipations) est employée par RICART et SICSIC [1995b].

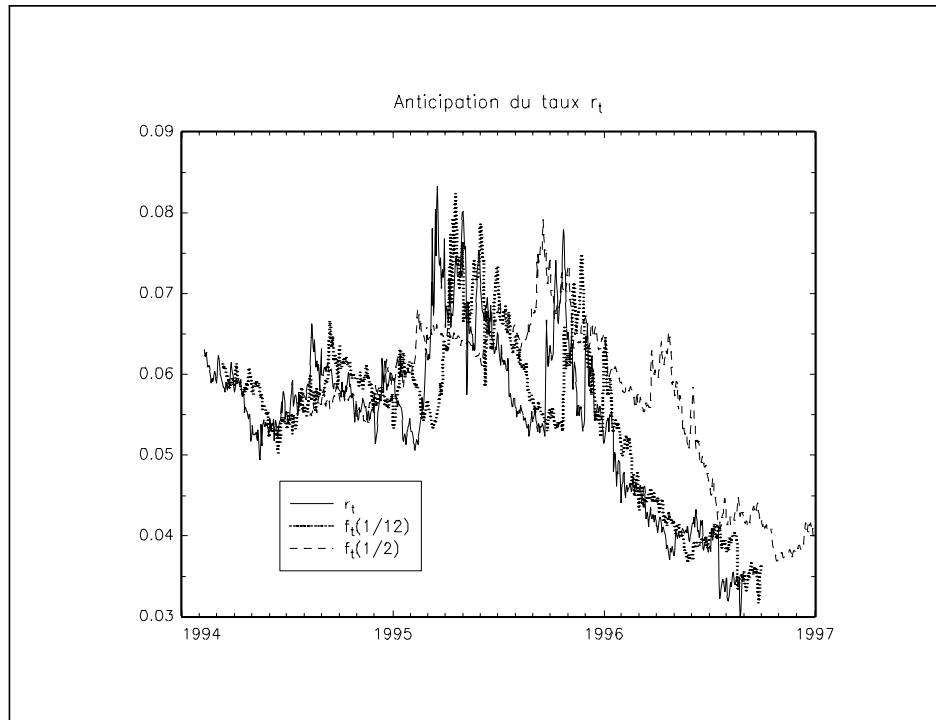


Graphique 2.13

avec  $u_t$  un bruit blanc. L'hypothèse d'anticipations rationnelles est donnée par le test  $H_0 : \alpha = 0$  et  $\beta = 0$ . Ce type de test est très courant dans la littérature de l'efficiency du marché des changes. La vérification du test  $H_0$  implique que  $R_{t+\tau}(m) - F_t(\tau, m)$  est un bruit blanc. Ce test introduit donc une restriction supplémentaire, puisque la relation (2.19) implique seulement que  $R_{t+\tau}(m) - F_t(\tau, m)$  est un "fair game".

En reprenant les courbes de taux construites dans le premier chapitre, nous entreprenons de tester l'hypothèse  $H_0$  pour  $m = 0$  et pour différentes valeurs de  $\tau$ . Ce dernier paramètre est l'horizon d'anticipation. Nous estimons les coefficients par la méthode *fm*. Le graphique (2.13) montre l'évolution du coefficient  $\hat{\beta}_{fm}$  et de l'intervalle de confiance à 95% associé. Nous remarquons que la valeur du coefficient décroît dans un premier temps, pour des horizons d'anticipations courts. Pour des horizons plus élevés,  $\hat{\beta}_{fm}$  croît pour atteindre une valeur très proche de l'unité pour une valeur de  $\tau$  égale à six mois. Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse  $\beta = 1$  pour les horizons en question. Nous pouvons donc considérer que les taux à terme contiennent de l'information sur les taux futurs.

Cette proposition pose quelques problèmes si nous analysons de plus près les résultats. Le graphique (2.14) représente le taux instantané  $\{t, r_t\}$  et les taux à terme  $\{t + 30 \text{ jours}, f_t(\frac{1}{12})\}$  et  $\{t + 180 \text{ jours}, f_t(\frac{1}{2})\}$ . C'est-à-dire que nous visualisons



Graphique 2.14

pour chaque date le taux zéro instantané et les anticipations de ce taux calculées respectivement un et six mois avant à partir des taux à terme. Nous observons un décalage entre les taux  $r_t$  et  $f_{t-\frac{1}{12}}\left(\frac{1}{12}\right)$ . En fait, nous avons l'impression que l'évolution du taux à terme est plus proche de celle du taux zéro courant que du taux zéro valable dans un mois. Les résultats des régressions  $fm$  confirment cette remarque. Nous avons

$$r_t = 0.0058 + 0.8794^{(*)} f_{t-\frac{1}{12}}\left(\frac{1}{12}\right) + \varepsilon_t \quad (2.21)$$

et

$$r_t = 0.0002 + 0.9963^{(*)} f_t\left(\frac{1}{12}\right) + \varepsilon_t \quad (2.22)$$

Cela implique une connexion très forte entre les taux zéro et à terme courants. Le fait que les taux zéro sont intégrés d'ordre un peut alors expliquer les résultats précédents. Considérons le graphique (2.15). Celui-ci représente les erreurs de prévisions ex-post pour les horizons un et six mois. Nous constatons des périodes assez longues de sur ou sous-évaluation, notamment pour l'horizon six mois. Ces erreurs peuvent donc apparaître localement très importantes. Soit  $e_t(\tau)$  l'erreur de prévision ex-post. Nous avons

$$e_t = f_{t-\tau}(\tau) - r_t \quad (2.23)$$



Nous calculons l'erreur moyenne  $\bar{e}(\tau)$  et l'écart-type  $\sigma_{\bar{e}(\tau)}$  pour différents horizons  $\tau$ . La statistique  $e_+(\tau)$  indique la proportion des erreurs positives. Nous regroupons les résultats dans le tableau suivant.

$\tau$	$\bar{e}(\tau)$	$\sigma_{\bar{e}(\tau)}$	$e_+(\tau)$
7 jours	0.027%	0.33%	57%
1 mois	0.045%	0.65%	59%
2 mois	0.172%	0.71%	67%
3 mois	0.273%	0.74%	68%
4 mois	0.289%	0.82%	65%
5 mois	0.463%	0.82%	70%
6 mois	0.549%	0.83%	71%
7 mois	0.690%	0.85%	74%
8 mois	0.891%	0.95%	78%
9 mois	0.842%	1.12%	75%
10 mois	1.05%	1.28%	77%
11 mois	1.22%	1.38%	77%
1 an	1.04%	1.54%	72%

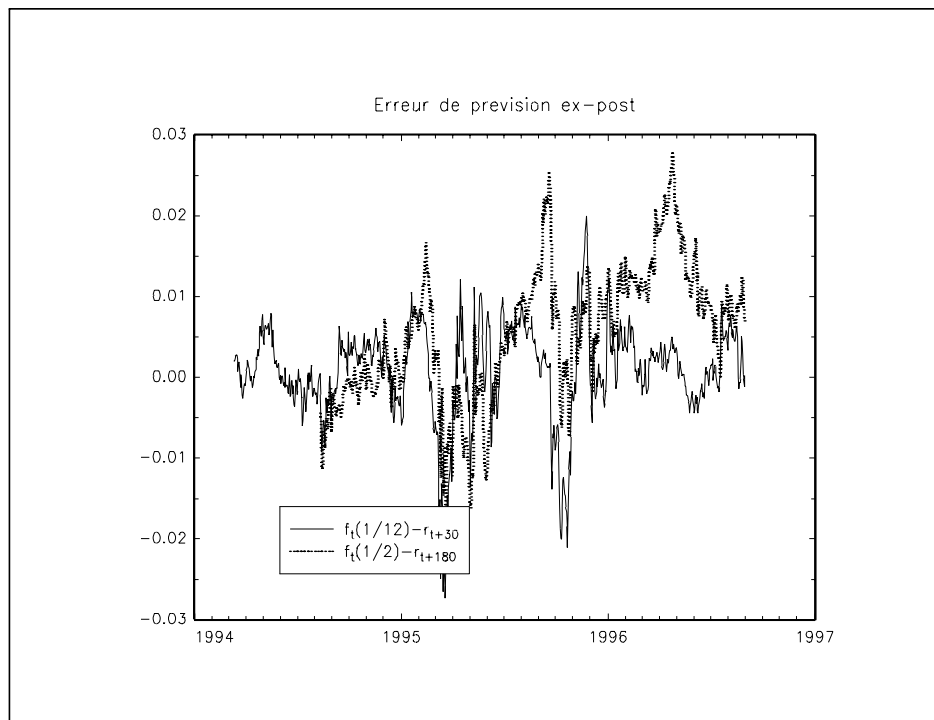
Il est clair que l'erreur de prévision moyenne croît de façon importante avec l'horizon d'anticipation<sup>7</sup>. Ces nouveaux résultats remettent partiellement en cause ceux des régressions précédentes. Avec le graphique (2.13), nous avons l'impression que l'hypothèse que le taux à terme est un prédicteur sans biais du taux zéro futur *fonctionnait* mieux par exemple pour un horizon de six mois que pour un horizon de trois mois. Or, nous remarquons aussi que pour la période étudiée (c'est-à-dire du mois de février 1994 au mois de septembre 1996), les taux à terme instantanés sont généralement supérieurs aux taux zéro effectifs. Il y a une explication simple à ce phénomène. Pour de nombreuses dates, nous observons une courbe des taux ascendante, c'est-à-dire une courbe des taux **normale**. Nous ne pouvons pas considérer que les agents anticipent systématiquement une hausse des taux. Il est plus naturel d'expliquer cette courbe normale par une prime de risque ou par la topologie du marché. Nous ne pouvons donc traiter **symétriquement** les courbes de taux ascendante et inversée.

Nous pouvons étendre l'analyse précédente dans le cas où  $m$  est différent de 0. Nous acceptons en général l'hypothèse nulle  $H_0$ . Cependant, à partir d'une certaine maturité, nous n'observons plus la remontée du coefficient  $\hat{\beta}_{\text{tm}}$  (voir par exemple le graphique (2.16)). Nous définissons l'erreur de prévision ex-post par

$$e_t = F_t(\tau, m) - R_{t+\tau}(m) \quad (2.24)$$

Le tableau suivant correspond à une maturité  $m$  d'une année. En règle générale, les résultats sont similaires à ceux qui concernent les taux instantanés.

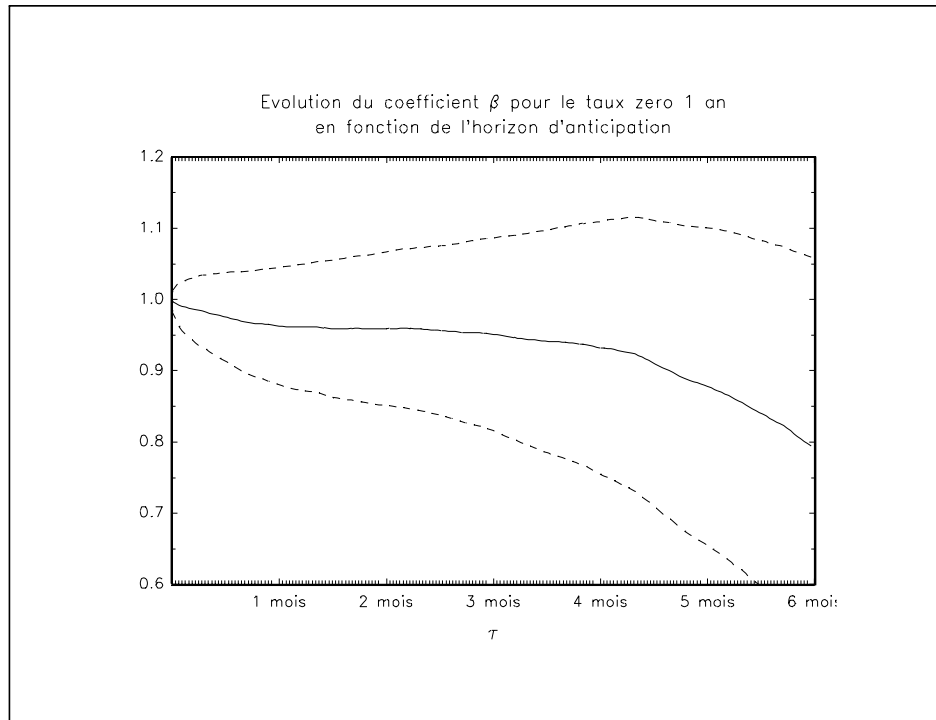
<sup>7</sup>Il suffit de comparer les résultats pour les horizons une semaine et un an !



Graphique 2.15

$\tau$	$\bar{e}(\tau)$	$\sigma_e$	$e_+(\tau)$
7 jours	0.024%	0.23%	61%
1 mois	0.059%	0.48%	62%
2 mois	0.184%	0.54%	65%
3 mois	0.300%	0.61%	71%
4 mois	0.357%	0.71%	70%
5 mois	0.509%	0.79%	70%
6 mois	0.634%	0.86%	73%
7 mois	0.781%	0.95%	74%
8 mois	0.960%	1.07%	73%
9 mois	0.987%	1.16%	74%
10 mois	1.20%	1.35%	72%
11 mois	1.38%	1.43%	76%
1 an	1.27%	1.59%	75%

Ce chapitre s'intitule "le contenu informationnel de la courbe des taux". Nous cherchons donc à savoir si la structure par terme apporte une information pertinente. Cela n'est pas la même chose que vérifier l'hypothèse d'estimateur sans biais. Nous pouvons très bien rejeter le test et montrer que les taux à terme sont utiles pour la prévision. Une question se pose alors : quel critère devons-nous employer pour mesurer l'efficacité de la prévision ? Le critère le plus souvent mis en œuvre est

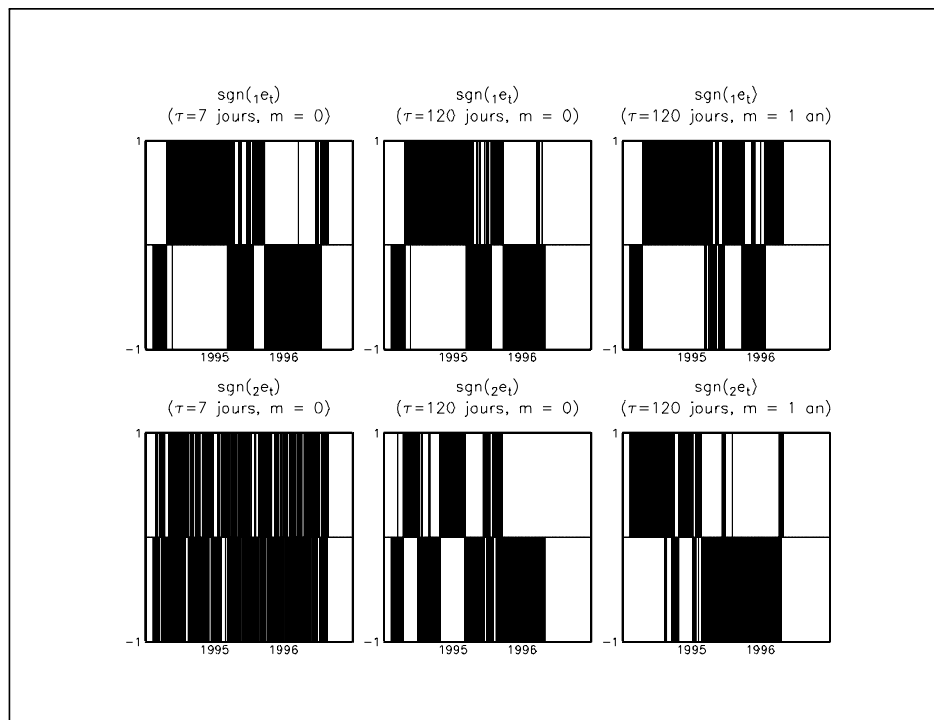


Graphique 2.16

celui de l'erreur quadratique moyenne. Quelques économistes et financiers ont remis en cause la pertinence de ce critère. Nous rappelons que l'erreur de prévision est  $e_t = F_t(\tau, m) - R_{t+\tau}(m)$ . Nous notons  $e_t^i$  l'erreur de prévision de l'agent  $i$ . Pouvons-nous considérer que le premier agent fait une meilleure prévision que le second si l'inégalité  $|e_t^1| \geq |e_t^2|$  est respectée ? Dans de nombreux cas, le problème de la prévision n'est pas d'être le plus proche de la valeur réalisée mais d'avoir bien anticipé le sens de variation. Considérons les deux mesures  ${}_1e_t$  et  ${}_2e_t$  définies par  $F_t(\tau, m) - R_t(m)$  et  $R_{t+\tau}(m) - R_t(m)$ . Nous pouvons considérer que le cours à terme contient de l'information sur les taux futurs s'il permet d'anticiper correctement le sens de variation, c'est-à-dire si  ${}_1e_t$  et  ${}_2e_t$  sont du même signe. Nous représentons sur le graphique (2.17) les signes de  ${}_1e_t$  et  ${}_2e_t$  pour différentes valeurs de  $\tau$  et  $m$ . L'anticipation à sept jours du sens de variation du taux zéro instantané est très décevante. Le tableau suivant indique les pourcentages de mauvaise et bonne anticipations du sens de variation.

	$(\tau = \frac{7}{365}, m = 0)$	$(\tau = \frac{120}{365}, m = 0)$	$(\tau = \frac{120}{365}, m = 1)$
$\text{sgn}({}_1e_t) \neq \text{sgn}({}_2e_t)$	45.7%	26.0%	44.7%
$\text{sgn}({}_1e_t) = \text{sgn}({}_2e_t)$	54.3%	74.0%	55.3%

Pour un horizon d'anticipation à 120 jours, nous obtenons de bons résultats pour le taux zéro instantané. Cependant, il est difficile de généraliser cette conclusion. Les



Graphique 2.17

résultats dépendent donc de l’horizon d’anticipation et de la maturité des taux.

Que pouvons-nous conclure des analyses précédentes ? Pouvons-nous affirmer que la courbe des taux (ou les taux à terme) contient de l’information sur les taux futurs ? Nous ne pouvons pas donner une réponse claire à cette question pour deux raisons. D’une part, nous n’avons pas de résultats homogènes. Par exemple, certains dépendent du critère choisi. La deuxième raison concerne l’exhaustivité de l’analyse. Notre étude porte sur quelques valeurs de  $\tau$  et  $m$ . A cause de la période prise en compte, nous n’avons pas considéré les taux longs. Nous devons aussi rappeler que nos données sont journalières. La plupart des autres études sont basées sur des données de fréquence plus basse (par exemple mensuelles). L’utilisation de données de haute fréquence peut conduire à rejeter plus facilement l’hypothèse de contenu informationnel à cause du masquage des tendances. Avec des données mensuelles françaises, JONDEAU et RICART [1996] obtiennent des résultats mitigés pour la période 1980-1995. Même s’ils ne rejettent pas l’hypothèse des anticipations, “la capacité de la pente des taux à prévoir l’évolution à court terme des taux longs s’avère extrêmement faible”. Cependant, les auteurs nuancent cette affirmation selon la sous-période étudiée, la maturité considérée ou encore la méthode économétrique employée. Finalement, ils affichent une extrême prudence dans leurs conclusions. Les résultats de FAMA [1984a], de DAHLQUIST et JONSSON [1995] et de DEAVES

[1996] sont plus favorables à l'hypothèse de contenu informationnel pour des taux et des horizons relativement courts (un mois). En utilisant la méthodologie employée par Fama, les résultats de FAMA et BLISS [1997] sont beaucoup moins convaincants pour les taux plus longs (de un an à cinq ans). Ils mettent aussi en évidence que la puissance de prévision des taux à terme dépend des propriétés statistiques des taux d'intérêt.

### 2.3.2.2 Evolution des anticipations des taux

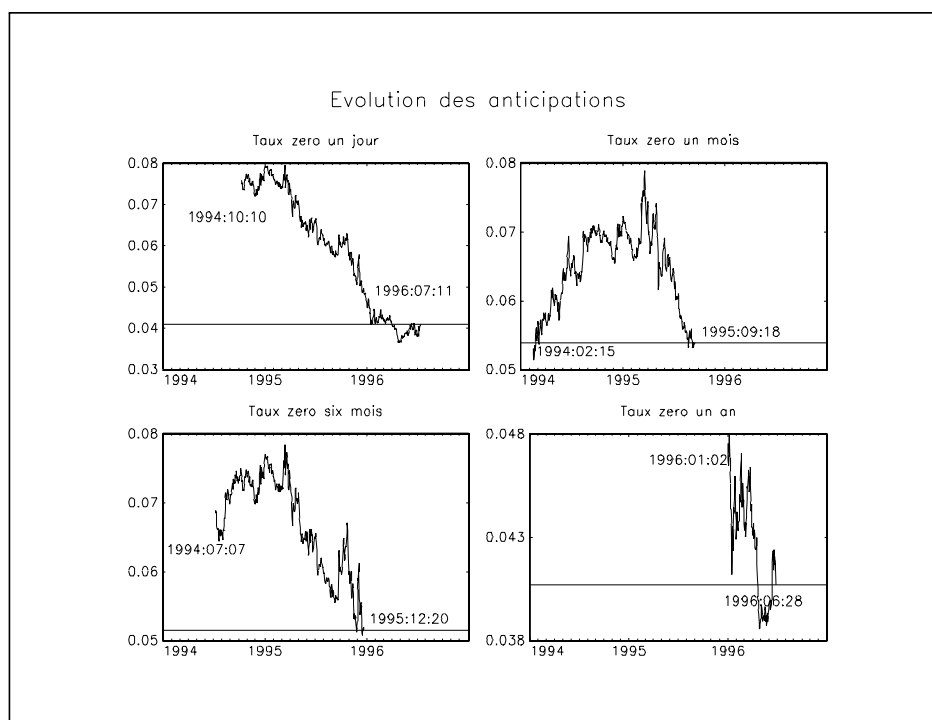
Soit  $R_{\bar{t}}(\bar{\tau})$  un taux zéro pour une maturité et une date données. Supposons que les taux à terme reflètent les anticipations des agents. Nous pouvons analyser l'évolution des anticipations en considérant l'ensemble des taux à terme  $\{F_t(\tau, \bar{\tau}); t + \tau = \bar{t}, \tau \geq 0\}$ . Le graphique (2.18) illustre l'évolution des anticipations pour quatre dates. La lecture est la suivante : la première figure montre la révision des anticipations pour le taux zéro un jour du 11 juillet 1997 durant la période 10/10/94-11/07/96, etc. Nous remarquons en particulier la forte variabilité de ces anticipations. L'évolution des anticipations est une analyse ex-post qui semble, au premier abord, peu liée aux méthodes d'extraction d'information. En fait, il n'en est rien. Car cette analyse nous interpelle sur la nature même du contenu informationnel de la courbe des taux. Nous pouvons interpréter les révisions d'anticipation par des réactions à la politique monétaire. De ce point de vue, les autorités monétaires peuvent alors comprendre comment est perçue la politique monétaire.

### 2.3.3 Les taux à terme et la politique monétaire

Le paragraphe précédent nous interpelle sur la lecture d'une courbe des taux. Deux questions sont posées : la courbe des taux permet-elle de prévoir certaines variables économiques ou financières et/ou celle-ci explique-t-elle la crédibilité de la politique monétaire menée par la Banque de France ? Il est largement admis à présent que nous devons privilégier cette lecture à partir des taux à terme. Très peu d'économistes continuent de raisonner avec les taux zéro<sup>8</sup>. Nous pouvons alors résumer les questions posées en une seule : comment la Banque de France doit-elle utiliser ces taux à terme ? La réponse ne peut être sans ambiguïtés, si nous relisons attentivement l'article de Svensson présenté à la treizième conférence Banque de France-Université en novembre 1993. Les premières sections de l'article sont consacrées aux anticipations d'inflation et de cours de change. La septième section est une comparaison des politiques monétaires menées en Europe. Svensson a écrit l'article dans le but de montrer que la courbe des taux peut être un indicateur très

---

<sup>8</sup>Nous pouvons citer par exemple l'étude de BENAÏM et OHEIX [1997] sur la crédibilité des politiques monétaires en Europe.



Graphique 2.18

intéressant pour les autorités monétaires. Il ne fait pas référence à une possible utilisation par les banques commerciales ou les agents privés à des fins de spéculation. Cette possibilité est d'ailleurs généralement écartée par la littérature sur la structure par terme des taux d'intérêt. Les anticipations déduites de la courbe des taux possèdent donc un caractère particulier. Ce sont des anticipations qui permettent de **mesurer** la perception qu'ont les agents privés de la politique monétaire actuelle ou future.

La lecture que nous privilégions concerne davantage la crédibilité de la politique monétaire que les anticipations de certaines variables. L'utilisation de la courbe des taux par la Banque de France ne peut alors qu'être passive. Les signaux émis par la banque centrale et la politique monétaire sont interprétés par les agents privés. La structure par terme des taux reflète alors la crédibilité de cette politique monétaire. Dans ce cadre, ce sont les actions ou l'absence d'action des autorités monétaires qui influencent la formation et la déformation de la courbe des taux. Cela est notamment le cas pour la partie courte des taux qui est directement influencée par les interventions de la banque centrale sur ses instruments. L'influence sur la partie longue dépend de nombreux facteurs comme par exemple la marge de manœuvre ou encore les objectifs finals des autorités. Face aux problèmes rencontrés par les objectifs intermédiaires, la banque centrale peut utiliser entre autres la courbe des

taux comme un **indicateur**<sup>9</sup>.

Les trois sections suivantes sont consacrées au contenu informationnel sur l'inflation, l'activité et les cours de change. Il nous est difficile de mettre en évidence des liaisons entre la courbe des taux et les variables économiques comme l'inflation et l'activité car la période que nous étudions est relativement courte (deux ans et demi) et les fréquences d'observation différentes. C'est pourquoi les deux prochaines sections sont plus des revues de la littérature.

## 2.4 Les anticipations d'inflation

La mise en évidence empirique d'une relation entre l'inflation et les taux d'intérêt est assez ancienne. Depuis les écrits de Fisher, de nombreux travaux théoriques soulignent l'importance des anticipations d'inflation dans la formation des taux. La connexion entre l'inflation et la courbe des taux est beaucoup plus récente puisqu'elle date des années mille neuf cent soixante dix. L'article de MODIGLIANI et SHILLER [1973], intitulé "Inflation, rational expectations and the term structure of interest rates", tente d'expliquer la formation du taux long nominal par les anticipations sur le taux court réel et les variations de prix. L'inflation occupe aussi une place très importante dans le modèle théorique d'équilibre des prix des actifs financiers développé par LONG [1974]. Aujourd'hui, il existe de nombreux travaux sur le sujet. Nous consacrerons le troisième paragraphe de cette section à une revue de ces travaux.

Nous présenterons dans le premier paragraphe la relation de Fisher, qui est la justification la plus utilisée pour lier courbe des taux et inflation. Une lecture naïve de cette relation serait de croire que nous pouvons extraire des anticipations d'inflation à partir de la courbe des taux. Considérer une asymétrie entre une courbe normale et une courbe inversée nous pousse à penser que la structure par terme nous indique seulement les périodes de prise de conscience de tensions inflationnistes.

### 2.4.1 La relation de Fisher

De nombreux travaux ont exploré la connexion entre la relation de Fisher et la courbe des taux. Nous pouvons citer par exemple l'article de BENNINGA et PROTOPADAKIS [1983] sur l'influence de la politique monétaire sur la structure par terme des taux nominaux ou encore l'importante étude économétrique de HUIZINGA

---

<sup>9</sup>L'utilisation de la courbe des taux comme indicateur est clairement affirmé par la Banque d'Angleterre.

et MISHKIN [1984] sur les taux réels américains dans les années soixante et soixante-dix. Notons  $\mathbf{R}_t(m)$  le taux d'intérêt **réel** à la date de maturité  $m$  et  $\pi_t(m)$  le taux d'inflation pour la période  $[t, t + m]$ . La relation de Fisher est alors

$$R_t(m) = \mathbf{R}_t(m) + E_t[\pi_t(m)] \quad (2.25)$$

avec  $E_t[\pi_t(m)]$  l'anticipation correspondante du taux d'inflation. Elle indique que le taux nominal est la somme du taux d'intérêt réel et du taux d'inflation anticipé. Cette relation est souvent employée pour définir et mesurer les taux réels, mais son interprétation la plus courante concerne la formation des taux d'intérêt nominaux. Ceux-ci dépendent de facteurs réels (qui déterminent les taux réels) et monétaires. L'*effet Fisher* suppose l'indépendance du taux réel et du taux d'inflation anticipé. De ce point de vue, expliquer le niveau des taux nominaux revient à expliquer le niveau des taux réels et les anticipations d'inflation. Nous associons souvent à l'*effet Fisher* l'hypothèse que le taux réel est constant, c'est pourquoi certains économistes ont utilisé la relation de Fisher pour expliquer le paradoxe de Gibson (corrélation positive entre les taux d'intérêt nominaux et le niveau général des prix).

Si nous supposons que  $\mathbf{R}_t(m)$  est constant toute révision des anticipations d'inflation conduit alors à modifier le niveau des taux nominaux. A partir de la structure par terme des taux d'intérêt nominaux, nous pouvons estimer des anticipations d'inflation en faisant des hypothèses supplémentaires (voir par exemple MISHKIN [1990]). La relation (2.25) devient

$$E_t[R_{t+\tau}(m)] - R_t(m) = E_t[\pi_{t+\tau}(m)] - E_t[\pi_t(m)] \quad (2.26)$$

La différence entre le taux à terme et le taux zéro représente la variation des anticipations d'inflation, puisque nous avons

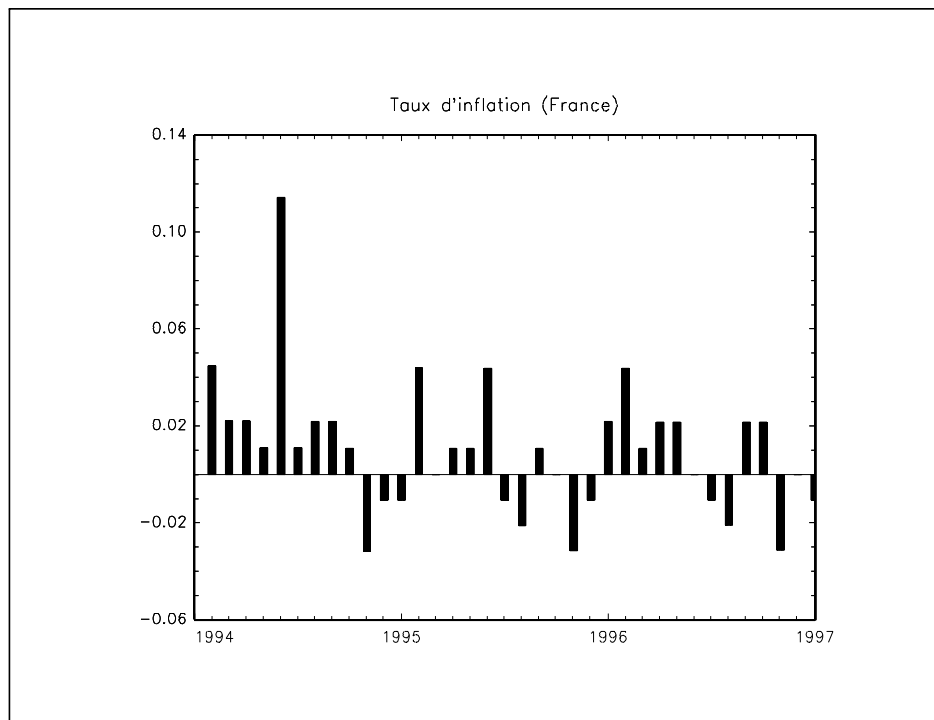
$$F_t(\tau, m) - R_t(m) = E_t[\pi_{t+\tau}(m)] - E_t[\pi_t(m)] \quad (2.27)$$

En supposant connue l'anticipation du taux d'inflation pour la période  $[t, t + m]$ , nous en déduisons l'évolution des anticipations d'inflation par la relation  $E_t[\pi_{t+\tau}(m)] = E_t[\pi_t(m)] + [F_t(\tau, m) - R_t(m)]$ . Nous pouvons utiliser cette expression pour calculer les anticipations de différentiels d'inflation

$$\begin{aligned} E_t[\pi_{t+\tau}(m) - \pi_{t+\tau}^*(m)] &= E_t[\pi_t(m)] - E_t[\pi_t^*(m)] \\ &\quad + [F_t(\tau, m) - F_t^*(\tau, m)] \\ &\quad + [R_t^*(m) - R_t(m)] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les anticipations de différentiels d'inflation dépendent donc des différentiels des taux à terme et des taux zéro. Nous rappelons que ce résultat est valable sous l'hypothèse





Graphique 2.19

que les taux réels sont constants et qu'il n'existe pas de prime de terme. SVENSSON [1994a] donne une formulation plus complète<sup>10</sup> de l'anticipation du différentiel d'inflation :

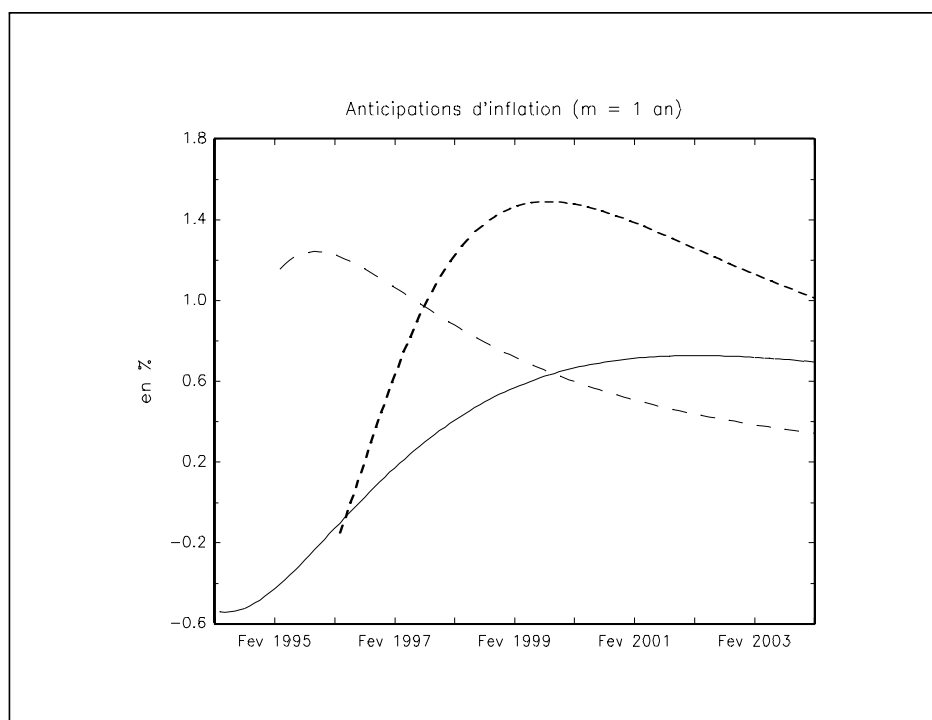
*The expected inflation rate differential is equal to the difference between the forward rates, less the difference between the expected real rates, less the difference between the term premia, less the difference between the inflation risk premia.*

Cette relation est peu opérationnelle car elle nécessite les valeurs de composantes inobservables. Dans le cas où ces valeurs sont similaires entre deux pays, Svensson propose d'employer la différence entre les taux à terme comme indicateur de l'anticipation du différentiel d'inflation.

La graphique (2.19) représente l'évolution du taux d'inflation français mensuel annualisé<sup>11</sup> pour les années 1994, 1995 et 1996. C'est une période caractérisée par une faible progression des prix à la consommation. Certains mois, nous avons même observé une décroissance des prix. Il est difficile de vérifier le pouvoir prédictif de la

<sup>10</sup>formule (13), page 316

<sup>11</sup>source : Datastream



Graphique 2.20

courbe des taux sur cette période très stable. Comment interpréter alors les mesures extraites de la structure par terme ? Ces mesures nous renseigneraient sur les anticipations des agents et sur leurs craintes de tensions inflationnistes. Le graphique (2.20) contient l'évolution<sup>12</sup> du taux d'inflation anticipé  $E_t[\pi_{t+\tau}(1)]$  pour trois dates différentes, les 15 février 1994, 1995 et 1996. Nous remarquons en particulier une anticipation positive de la variation d'inflation pour l'année 2004 quelle que soit la date de formation des anticipations. Cela s'explique par le fait que lorsque la courbe des taux présente une pente positive, le taux à terme  $F_t(\tau, m)$  est systématiquement supérieur aux taux zéro  $R_t(m)$ . Mis à part une configuration particulière de la structure par terme (décroissance continue), il existera toujours un horizon  $\bar{\tau}$  tel que  $F_t(\tau, m) > R_t(m)$ . Cette méthode présente donc un inconvénient majeur puisque nous anticipons toujours une inflation plus forte à long terme.

L'étude de SVENSSON [1994a] portait plus particulièrement sur les courbes de taux françaises et anglaises. Il montrait par exemple que le 22 septembre 1993, on anticipait dans un premier temps un différentiel d'inflation positif entre la France et l'Angleterre (une année environ) puis, dans un deuxième temps, un différentiel négatif pouvant atteindre 2%. Le graphique (2.21) présente la même analyse ap-

<sup>12</sup>Nous supposons que  $E_t[\pi_t(1)]$  est nul.

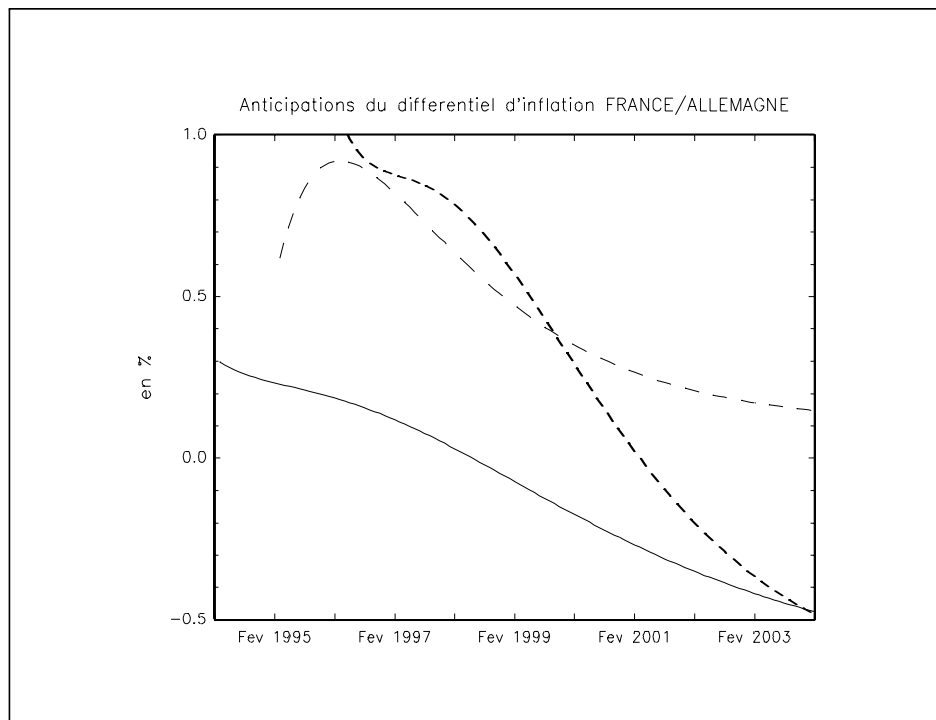
pliquée à la France et à l'Allemagne pour les trois dates précédentes. Nous remarquons que les agents anticipent au début de l'année 1994 une baisse du différentiel d'inflation. Au début de l'année 1995, l'anticipation du différentiel d'inflation croît jusqu'à la moitié de l'année 1996 pour ensuite diminuer. Contrairement à l'anticipation précédente, celle-ci est positive pour l'année 2004. Au début de l'année 1996, la situation est légèrement différente puisque l'on anticipe une baisse continue du différentiel. Pour l'année 2004, la valeur anticipée est de nouveau négative pour se situer autour de -0.5%. Il y a donc une tendance commune pour les anticipations de court terme puisque l'anticipation du différentiel d'inflation français est systématiquement supérieur à celui allemand. L'explication est que la partie courte de la courbe française est au dessus de celle allemande. Au début de l'année 1994, l'Allemagne est toujours soumise aux effets de la réunification. Les craintes de tension inflationniste ne sont pas dissipées. La valeur positive de l'anticipation du différentiel provient donc d'autres facteurs. Nous pouvons avancer l'idée de l'existence d'une prime de risque sur les taux courts. S'il existe aujourd'hui un consensus sur l'objectif final de la politique monétaire (GOODHART [1993]), les objectifs intermédiaires et les instruments diffèrent selon les autorités monétaires, ce qui peut expliquer que la partie courte de courbe française soit au dessus de celle allemande. Nous développerons cette analyse dans la section consacrée aux anticipations de change.

## 2.4.2 Mesure des tensions inflationnistes

Dans le paragraphe précédent, un niveau élevé du taux d'intérêt est implicitement associé à un niveau élevé du taux d'inflation (*effet fisher*). Nous remarquons aussi que les anticipations du niveau d'inflation dépendent de la portion de la courbe des taux correspondant à l'analyse. Des taux courts élevés n'ont pas la même signification que des taux longs élevés. Nous pouvons considérer que la partie courte de la courbe est directement influencée par les autorités monétaires du fait de la "politique du franc fort". Nous devons donc définir des mesures localisées dans différents segments de la courbe des taux. L'utilisation du spread de taux pose des problèmes puisqu'il fait appel à deux maturités. Nous privilégions donc la notion mieux localisée : la pente de taux. Nous rappelons que son expression est

$$p_t(\tau) = \frac{\partial R_t(\tau)}{\partial \tau} = (\mu_2 + \mu_3) \left( \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_1}{\tau^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) \right) + \frac{\mu_3}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad (2.29)$$

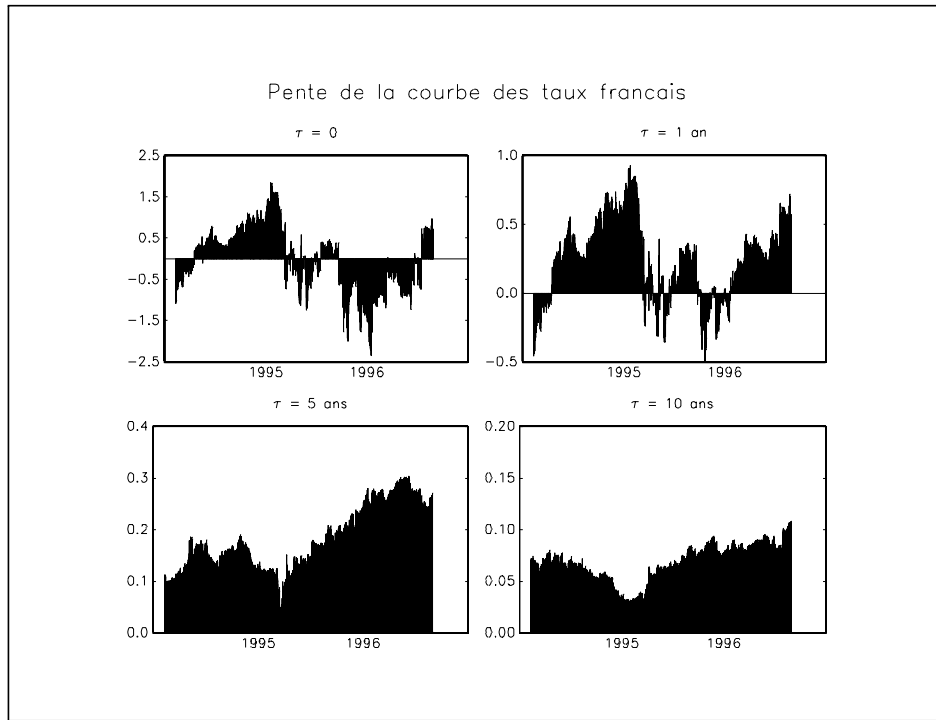
Nous pouvons alors comparer cette pente pour différentes maturités. Le graphique (2.22) correspond à la pente (en pourcentages) des taux français. Celle des taux allemands est représentée sur le graphique (2.23). Nous distinguons parfaitement deux



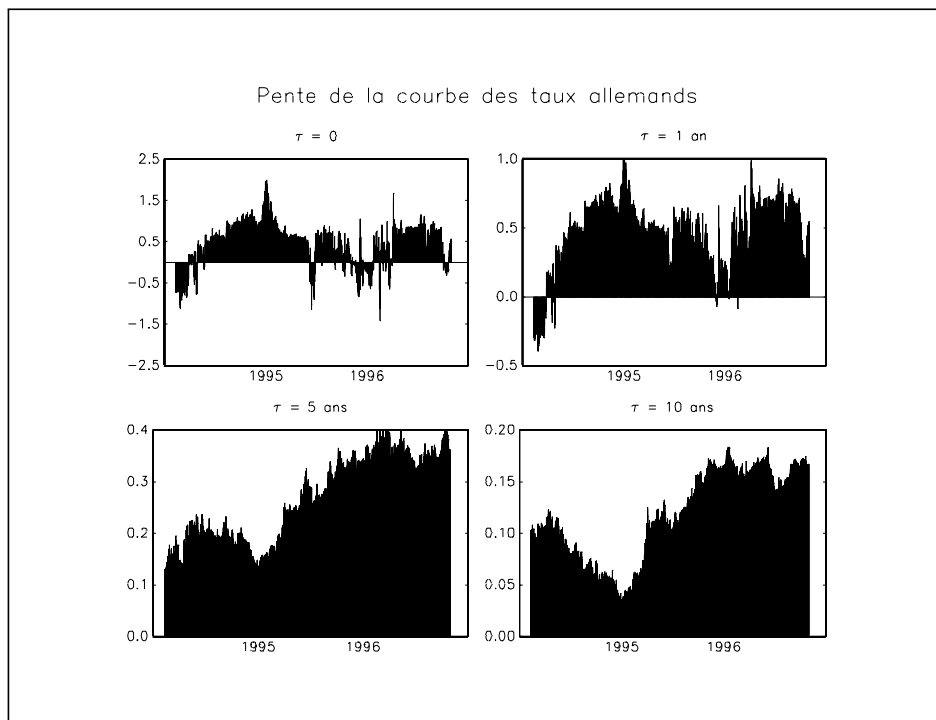
Graphique 2.21

périodes. La première période concerne l'année 1994, durant laquelle nous remarquons certaines liaisons entre la pente des taux français et celle des taux allemands. À partir de 1995, ces liaisons disparaissent. Cela est particulièrement évident pour les maturités instantané et un an. L'élection d'un nouveau président et la mise en place d'un gouvernement dont la priorité principale est la lutte contre les déficits publics est un facteur qui a pu contribuer à ce changement. Si nous menons une analyse en terme de différentiels, nous obtenons des résultats très différents puisque les taux français sont structurellement plus élevés que les taux allemands. L'analyse en terme de pente de taux (qui indique le **sens** et la **force** de la variation instantanée du taux zéro) nous fait plutôt penser que les agents n'appréhendent pas une augmentation du différentiel d'inflation France/Allemagne pour la période 1995-1996.

Jusqu'à présent, nous avons analysé de façon symétrique une courbe des taux normale et une courbe des taux inversée. Cependant, nous pouvons considérer que l'information contenue n'est pas la même d'un point de vue quantitatif et qualitatif. Une courbe inversée est beaucoup plus **intéressante**. Elle révèle certaines tensions et reflète bien sûr la politique monétaire. Ainsi, les décisions de celle-ci en matière de taux directeurs peuvent être amplifiées ou amorties. La pente est une première mesure de ces tensions. Un des inconvénients de cette mesure est sa nature instantanée. Nous pouvons construire une seconde mesure plus globale  $\tau^\#$  qui permet



Graphique 2.22



Graphique 2.23

d'évaluer l'horizon d'inversion. Dans le cas où la courbe des taux à terme n'est pas inversée,  $\tau^\#$  prend une valeur nulle. Sinon,  $\tau^\#$  sera égal à la période d'anticipation de la baisse du taux zéro. Nous rappelons que l'expression du taux à terme instantané dans le modèle de NELSON et SIEGEL [1987] est

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad (2.30)$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial f_t(\tau)}{\partial \tau} = \left[ \frac{\mu_3 - \mu_2}{\tau_1} - \mu_3 \frac{\tau}{\tau_1^2} \right] \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad (2.31)$$

Les agents anticipent une baisse du taux zéro instantané si

$$\left. \frac{\partial f_t(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \left( \frac{\mu_3 - \mu_2}{\tau_1} \right) < 0 \quad (2.32)$$

Cette condition est vérifiée si la pente de la courbe des taux est négative. Comme  $\tau^\#$  est défini de la façon suivante

$$\tau^\# = \left\{ \tau : \frac{\partial f_t(\tau)}{\partial \tau} = 0 \right\} \quad (2.33)$$

nous obtenons finalement

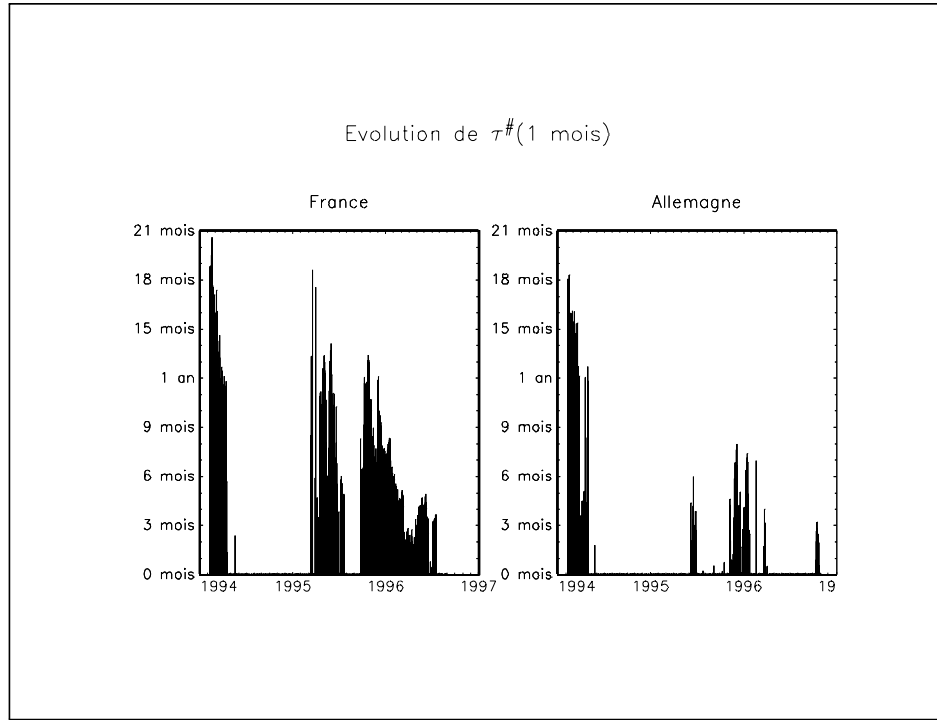
$$\tau^\# = \begin{cases} 0 & \text{si } \left( \frac{\mu_3 - \mu_2}{\tau_1} \right) \geq 0 \\ (\mu_3 - \mu_2) \frac{\tau_1}{\mu_3} & \text{si } \left( \frac{\mu_3 - \mu_2}{\tau_1} \right) < 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

La mesure  $\tau^\#$  privilégie un horizon extrêmement court, puisque la maturité du taux zéro est instantanée. MISHKIN [1990] met en évidence que le lien entre la courbe des taux et les tensions inflationnistes dépend de l'horizon des agents. Supposons que l'horizon d'anticipation pertinent des agents (pour l'inflation) soit un mois. Il est alors préférable d'étudier les taux à terme implicites  $F_t(\tau, \frac{1}{12})$  et non les taux à terme instantanés. Nous pouvons prolonger l'analyse précédente pour le cas où  $m$  est différent de 0. Nous avons alors

$$\begin{aligned} F_t(\tau, m) &= \mu_1 + (\mu_2 + \mu_3) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} \right) \\ &\quad + \mu_3 \left[ \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} \right) - \exp\left(-\frac{\tau+m}{\tau_1}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t(\tau, m)}{\partial \tau} &= - \left( \frac{\mu_2 + \mu_3}{\tau_1} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} \right) \\ &\quad + \mu_3 \left[ \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{\tau}{\tau_1^2} \right) + \frac{1}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau+m}{\tau_1}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$



Graphique 2.24

Nous remarquons que la courbe des taux à terme décroît pour  $\tau = 0$  si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\frac{\mu_3 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) - \mu_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}}\right)}{\tau_1} < 0 \quad (2.37)$$

Nous définissons  $\tau^\#(m)$  de la façon suivante :

$$\tau^\#(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\mu_3 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) - \mu_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}}\right)}{\tau_1} \geq 0 \\ \left\{ \tau : \frac{\partial F_t(\tau, m)}{\partial \tau} = 0 \right\} & \text{si } \frac{\mu_3 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) - \mu_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}}\right)}{\tau_1} < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

$\tau^\#(m)$  mesure l'horizon pendant lequel les agents anticipent une baisse du taux zéro  $R_t(m)$ . L'équation  $\left\{ \tau : \frac{\partial F_t(\tau, m)}{\partial \tau} = 0 \right\}$  est non linéaire et n'admet pas de solution analytique. La procédure NelsonSiegel-Inversion donne une solution numérique de  $\tau^\#(m)$  en utilisant l'algorithme de la sécante.

Le graphique (2.24) représente l'évolution de  $\tau^\# \left(\frac{1}{12}\right)$ . Elle diffère selon le pays. Pour la France, nous observons six périodes distinctes. La première période (du 10 février au 19 avril 1994) est marquée par une inversion assez forte de la courbe des taux. L'horizon d'inversion est élevé, puisque les valeurs prises par  $\tau^\# \left(\frac{1}{12}\right)$  sont

généralement supérieures à l'année. Nous retrouvons ce phénomène pour l'Allemagne. A partir du début de l'année 1995, il existe des différences importantes entre la France et l'Allemagne comme pour la pente des taux. La France connaît deux nouvelles périodes d'inversion (du 9 mars au 20 juillet 1995 et du 25 septembre 1995 au 18 juillet 1996). La peur d'une reprise de l'inflation est une explication peu satisfaisante. Nous verrons dans la sixième section que d'autres facteurs (les objectifs intermédiaires des autorités monétaires) affectent la courbe des taux, ce qui entrave la lecture informationnelle de la courbe des taux.

### 2.4.3 Des études empiriques non consensuelles

“Short-term interest rates as predictors of inflation” de FAMA [1975] n'est pas le premier article qui étudie de façon empirique la relation entre les taux d'intérêt et l'inflation, mais c'est l'un des premiers à analyser l'influence de la maturité des taux. C'est pourquoi nous le considérons généralement comme une étude sur le pouvoir prédictif de la partie courte de la courbe des taux pour la prévision de l'inflation. La même année, le professeur Hendershott préside un séminaire intitulé “The changing effect of inflation on financial returns”. De nombreuses études apparaissent alors pour tenter de comprendre le niveau élevé des taux d'intérêt aux Etats-Unis et en Europe. L'utilisation du terme *predictor* est révélateur de la position dominante des économistes de cette époque. La sophistication des méthodes, l'amélioration des données et l'abondance des études empiriques peuvent conduire à **tout** prévoir, c'est pourquoi la plupart des études s'attachent à vérifier le caractère prévisionnel de la courbe des taux, et non à l'utiliser comme un simple **indicateur** des tensions inflationnistes (ou des anticipations d'inflation<sup>13</sup>).

FAMA [1990] (avec des données américaines mensuelles de juin 1952 à décembre 1988) obtient des résultats qui ne sont pas en faveur de la liaison entre la structure par terme et l'inflation. La partie de la courbe analysée est le moyen terme (un an à cinq ans). HAFER et HEIN [1990] montrent qu'un modèle de séries temporelles permet, dans de nombreux cas, de faire des prévisions aussi bonnes (et même meilleures) qu'un modèle basé sur l'information déduite de la courbe des taux. L'inconvénient avec les modèles de séries temporelles (comme avec ceux de marche aléatoire) est que l'horizon d'anticipation considéré est généralement court puisque les auteurs évaluent la prévision pour la période suivante. Ces résultats contrastent avec ceux de MISHKIN [1990] ou GERLACH [1995]. MISHKIN [1990] montre

---

<sup>13</sup>Il existe deux approches pour définir ces anticipations. La première utilise les données fournies par les professionnels. WOODWARD [1990] présente une seconde approche en postulant la schéma de formation des anticipations. Ce qui lui permet d'en déduire le taux d'intérêt réel et la valeur anticipée de l'inflation.



que les taux zéro nominaux peuvent contenir de l'information sur l'inflation future pour certaines maturités. Pour les maturités courtes, il confirme la faible puissance de prévision de la courbe des taux<sup>14</sup>. Mishkin reprend cet argument dans un article publié la même année "The information in the longer maturity term structure about future inflation". Il est cependant difficile de comparer ces études car elles n'utilisent pas les mêmes données. MISHKIN [1992] remarque que les conclusions dépendent fortement du pays et de la période étudiés. Il met en évidence que les propriétés statistiques des séries jouent un rôle important dans l'acceptation ou non de l'effet Fisher. Ceci est confirmé par une autre analyse, menée par PENG [1995], avec des données différentes.

Il existe un problème majeur dans les études que nous venons de citer. Même si la plupart se réfèrent explicitement à la notion de structure par terme, les taux considérés ne sont pas des **taux zéro**, et les variables explicatives prises en compte se résument généralement à une différence de taux. Nous avons vu dans la première section de ce chapitre que la notion de spread est différente de la notion de pente des taux. Dans ce cas, il est difficile de justifier le terme de structure par terme des taux dans ces études. L'article de JONDEAU et RICART [1996] est l'un des rares à employer les taux zéro pour évaluer le contenu en information sur l'évolution future de l'inflation. Les résultats qu'ils obtiennent ne sont pas en faveur de l'hypothèse de contenu informationnel.

## 2.5 Activité et courbe des taux

FAMA [1990] remarque que l'information contenue dans la courbe des taux est également liée au cycle des affaires. Ceci se comprend assez facilement si nous considérons que les anticipations d'inflation dépendent de la position de l'économie dans le cycle des affaires. Même si les études sur courbe des taux et activité sont moins importantes que celles sur structure par terme et inflation, il existe de nombreux articles empiriques sur le sujet. Quelques auteurs ont aussi proposé des analyses théoriques.

### 2.5.1 Des éléments empiriques

La relation entre activité et courbe des taux est avant tout une observation empirique. Dans l'article "Un indicateur avancé de la conjoncture : la structure des taux d'intérêt", CHERIF [1994] montre graphiquement que

---

<sup>14</sup>voir aussi les résultats de JORION et MISHKIN [1991].

... aussi bien en France qu'aux États-Unis, le point de retournement de l'écart entre les taux longs et les taux courts précède celui du Produit Interieur Brut de quelques trimestres.

Cette observation est confirmée par de nombreux travaux (ESTRELLA et HARDOUVELIS [1991], HU [1993], DUBOIS et JANCI [1994], SMETS et TSATSARONIS [1997]). Une des explications les plus courantes est que les tensions inflationnistes trouvent leur origine dans la surchauffe de l'économie. La baisse des taux courts<sup>15</sup> (avec la fin de l'inversion de la structure par terme) produit un effet cumulatif (sur l'investissement et la consommation) qui permet la reprise de l'économie. ARTUS et KAABI [1993b] montrent que la relation traditionnelle courbe des taux – inflation – activité ne s'applique pas à tous les pays. Ils distinguent par exemple *les pays où l'inflation est liée au cycle* (comme les États-Unis et l'Allemagne) des autres pays. Ainsi, pour la France, ils n'observent de relation qu'entre la courbe des taux et l'activité.

ESTRELLA et HARDOUVELIS [1991] proposent une méthode pour évaluer la probabilité d'une récession. Ils considèrent un modèle de réponse qualitative de type probit ou logit<sup>16</sup>. Soient  $y_i$  une variable binomiale indiquant la présence d'une récession ( $y_i = 1$ ) ou son absence ( $y_i = 0$ ) et  $x_i$  un vecteur de  $k$  variables explicatives. Nous supposons que la probabilité d'une récession est définie par l'expression suivante

$$\Pr \{y_i = 1\} = F(x_i^\top \beta) \quad (2.39)$$

où  $\beta$  est un vecteur  $k \times 1$  de paramètres inconnus et  $F$  une fonction (fonction de répartition normale pour le modèle probit ou fonction logistique pour le modèle logit). La méthode la plus populaire pour estimer le vecteur  $\beta$  est la méthode du maximum de vraisemblance. Disposant de  $N$  observations, l'estimateur  $\hat{\beta}_{\text{ML}}$  est défini par

$$\hat{\beta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\beta} \sum_{i=1}^N \ell_i \quad (2.40)$$

avec

$$\ell_i = y_i \ln F(x_i^\top \beta) + (1 - y_i) \ln (1 - F(x_i^\top \beta)) \quad (2.41)$$

Estrella et Hardouvelis emploient la méthode probit que nous venons de décrire avec des données trimestrielles américaines pour la période 1955-1988. Pour chaque date  $t$ , les auteurs construisent la variable  $y_t$  en se référant aux observations du NBER.

<sup>15</sup>En général, ce sont les déplacements de la partie court terme qui entraînent les inversions de la courbe des taux.

<sup>16</sup>AMEMYIA [1985] et GOURIÉROUX [1989] sont deux très bonnes références sur les modèles de réponse qualitative.

Ils considèrent une constante et le spread entre le taux dix ans et le taux trois mois retardé de quatre trimestres comme variables explicatives. Nous avons donc

$$\Pr \{y_t = 1\} = F \left( \beta_0 + \beta_1 S_{t-4} \left( 10, \frac{1}{4} \right) \right) \quad (2.42)$$

Les valeurs estimées des paramètres par Estrella et Hardouvelis sont -0.56 pour  $\hat{\beta}_0$  et -0.78 pour  $\hat{\beta}_1$ . Ces coefficients sont significatifs au seuil de confiance de 95%. Une hausse de la valeur du spread implique donc une baisse de la probabilité de récession quatre trimestres plus tard. Les auteurs présentent aussi l'évolution temporelle de la probabilité de récession (voir la figure 2 de la page 565). Nous pouvons affirmer que les prévisions obtenues sont extrêmement bonnes (en particulier après 1970). ESTRELLA et MISHKIN [1995] et BERNARD et GERLACH [1996] ont appliqué cette méthodologie à d'autres pays. L'étude d'Estrella et Mishkin concerne la France, l'Allemagne, l'Italie, le Royaume-Uni et les États-Unis pour la période 1974-1994. Ils obtiennent de très bons résultats pour l'Allemagne et les États-Unis (et pour le Royaume-Uni en une moindre mesure), mais les résultats pour l'Italie et surtout pour la France sont très mauvais. L'analyse de Bernard et Gerlach concerne huit pays. Elle confirme partiellement les résultats précédents, mais les résultats sont meilleurs pour la France.

Ces trois études sont intéressantes pour plusieurs raisons. D'une part, elles présentent des résultats très favorables pour le contenu informationnel de la courbe des taux. Ensuite, elles s'intéressent beaucoup plus à la fonction d'indicateur avancé pour la politique monétaire qu'au caractère prévisionnel. Enfin, la procédure est facile à mettre en œuvre par rapport à d'autres procédures qui proposent de construire un indicateur avancé (par exemple, STOCK et WATSON [1991,1992]). Elles souffrent cependant d'un problème méthodologique majeur puisqu'elles utilisent un modèle probit avec des données temporelles qui sont fortement corrélées. Dans ce modèle, les observations sont supposées indépendantes<sup>17</sup>. Cela implique que l'estimation basée sur un rééchantillonnage de la série  $\{y_i, x_i\}$  est la même que celle obtenue avec l'échantillon original. **L'ordre temporel de la série  $\{y_t, S_{t-4} (10, \frac{1}{4})\}$  n'a aucune importance.** Nous ne pouvons donc pas mener une analyse temporelle des probabilités estimées puisque elles dépendent uniquement de l'état du système et non de sa position dans le temps.

---

<sup>17</sup>C'est pourquoi nous avons préféré présenter le modèle avec l'indice  $i$  et non avec l'indice temporel  $t$ .

## 2.5.2 Des éléments théoriques

L'article de DUBOIS et JANCI [1994] intitulé "Prévision du PIB par la courbe des taux : une constatation empirique en quête de théorie" résume la position suivante : il existe de nombreux éléments empiriques en faveur de cette hypothèse et d'autre part, les études théoriques sur le lien entre l'activité et la structure par terme ne sont pas nombreuses. Dubois et Janci présentent trois justifications théoriques. La première dérive des résultats de modèles micro-économiques de type CCAPM (HARVEY [1988] présente une justification similaire). L'objectif du consommateur est de maximiser son utilité qui est une fonction de sa consommation. Pour ce faire, il modifie à chaque instant la composition en actifs (physiques et financiers) de son portefeuille. A l'équilibre, les auteurs obtiennent une relation entre l'espérance de rendement du portefeuille de marché, le spread de taux et les moments conditionnels du taux de croissance de l'économie. Les deux autres justifications sont d'ordre monétaire et concernent les "anticipations de politique monétaire des marchés" ainsi que les "effets de la politique monétaire". Il est clair que les décisions prises par les autorités monétaires ont un effet sur la structure par terme. Ainsi, nous pouvons expliquer de nombreuses inversions par des taux courts élevés, eux-mêmes fortement influencés par le taux des prises en pension. Toutefois, le lien avec l'activité économique est difficile à établir et ceci pour deux raisons : l'influence sur les taux longs n'est pas très importante et ces inversions sont dans de nombreux cas le signe de tensions sur le marché des changes et non le signe de tensions concernant l'inflation ou l'activité. Cependant, Dubois et Janci n'excluent pas la possibilité d'une causalité des taux courts vers l'activité :

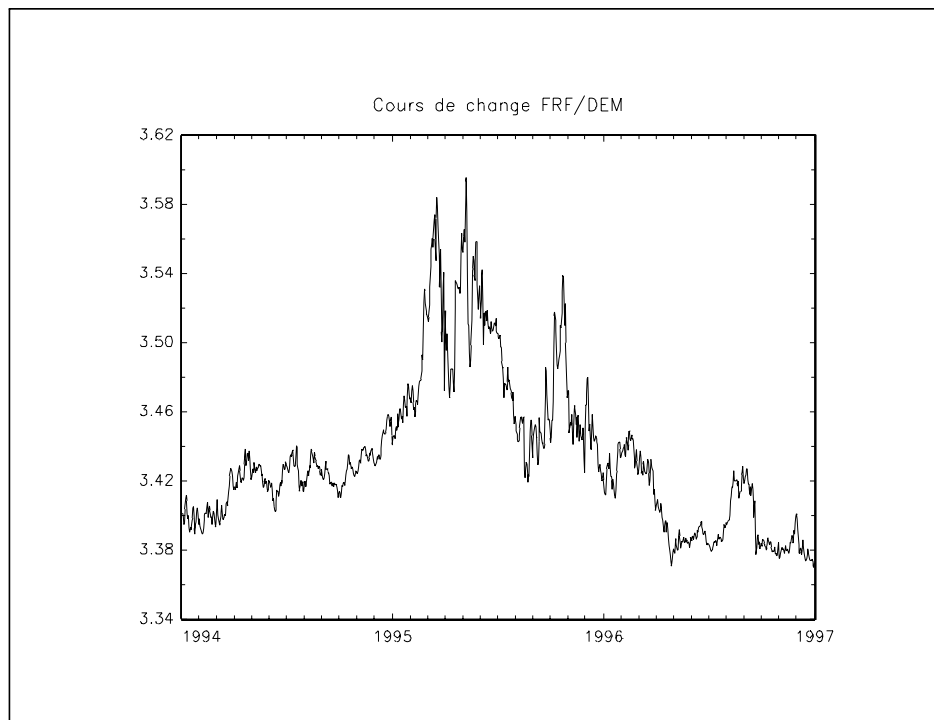
*Ainsi, une politique monétaire restrictive se traduira par une hausse des taux d'intérêt à court terme. Cette hausse des taux courts aura successivement deux effets : d'abord, une hausse des taux d'intérêt à long terme, mais plus modérée que la hausse des taux à court terme, si bien que la différence entre entre taux à court terme et taux à long terme s'amointrira ; ensuite, une baisse de la production, dans la mesure où une politique monétaire restrictive pèse sur l'activité. Ainsi, on observera d'abord une tendance à l'inversion de la pente de la courbe des taux, puis un ralentissement de l'activité conforme à ce que l'on observe en réalité.*

Dans une série d'articles (ARTUS [1990], ARTUS et KAABI [1993a], ARTUS et KAABI [1993b]), Patrick Artus et Moncef Kaabi mettent l'accent sur les déterminants macro-économiques de la courbe des taux. ARTUS [1990] présente

un modèle macro-économique relativement simple (le modèle de très court terme est composé de quatre équations) d'inspiration IS-LM. L'auteur analyse les effets de différents chocs sur le spread de taux. Il est frappant de constater la possibilité de nombreuses configurations, parmi lesquelles nous retrouvons les deux configurations classiques (augmentation du spread en cas de hausse exogène de l'offre ou de la demande de biens et baisse du spread en cas de politique monétaire plus expansionniste). Néanmoins, l'effet dépend en général de nombreux paramètres (MCCAFFERTY [1986] avait déjà mis en évidence ce problème dans un cadre similaire). Le modèle macro-monnaire d'ARTUS et KAABI [1993a] suppose que l'objectif des autorités monétaires est la stabilité des prix et le plein-emploi. Pour cela, elle dispose d'un seul instrument, le taux d'intérêt de court terme. Dans ce cadre, nous pouvons aussi bien associer l'inversion de la courbe des taux à un recul de l'activité qu'à la reprise de celle-ci. Cela dépend des anticipations de la politique économique et des préférences des autorités. La séquence classique pente positive de la courbe des taux – reprise de l'activité – inversion – recul de l'activité n'est donc pas systématique.

## 2.6 Les anticipations de change

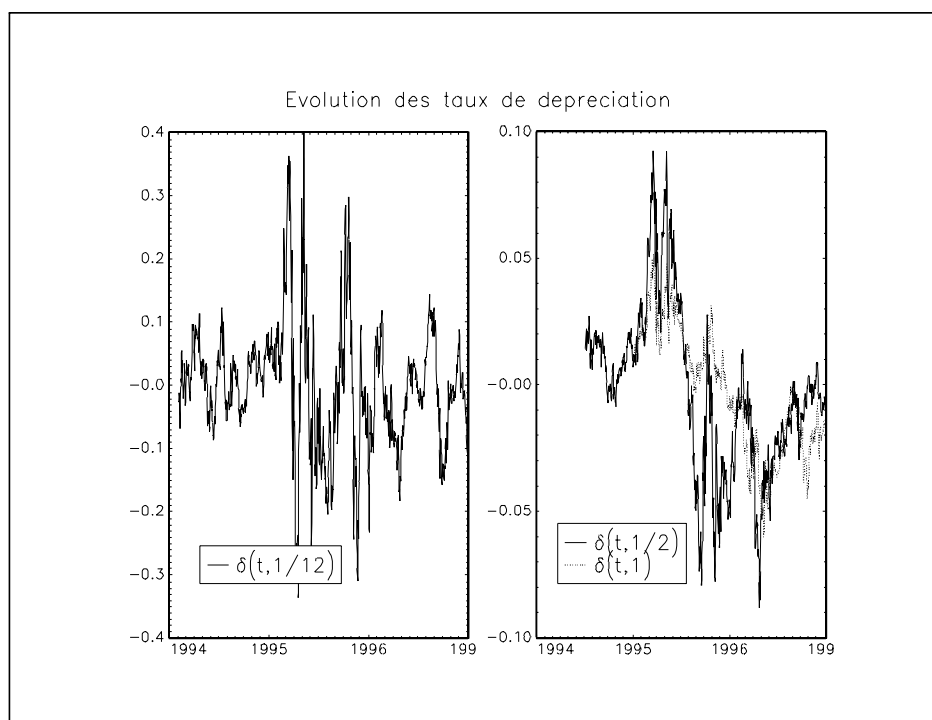
Nous avons consacré les deux sections précédentes à fournir des pistes de recherche sur le lien entre la courbe des taux, l'inflation et l'activité. Même s'il existe de nombreuses études qui confirment ce lien, il est difficile d'associer **systématiquement** inversion de la courbe et ralentissement de l'activité. La raison la plus évidente est que la principale cause de l'inversion de la structure par terme française pendant la période février 1994-août 1996 est la hausse des taux courts. Les inversions peuvent donc traduire des tensions de court terme, comme par exemple celles sur le marché des changes. A côté du canal traditionnel keynésien de transmission monétaire des taux d'intérêt sur l'activité (MISHKIN [1996]), il existe d'autres canaux de transmission, par exemple celui concernant le cours de change. Dans un cadre de courbe de Phillips verticale, GOODHART [1993] rappelle que le seul objectif final de la politique macro-monnaire est la stabilité des prix. Les autorités monétaires ont alors plusieurs choix possibles d'objectif intermédiaire pour atteindre ce résultat, comme par exemple “un agrégat monétaire”, “un taux de change” ou encore “la visée directe d'un taux d'inflation”. Certains pays, comme la France, utilisent le taux de change. Comme l'un des instruments les plus courants de la politique monétaire est le taux d'intérêt court, il y a donc un lien entre la courbe des taux et le cours de change (et aussi l'inflation). De ce point de vue, l'inversion de la structure par terme résulte de la politique monétaire qui cherche à maintenir le cours de change à un niveau désiré. L'influence de la politique de change sur la courbe des taux se



Graphique 2.25

vérifie notamment dans le cas français. Le graphique (2.25) présente l'évolution du cours de change FRF/DEM pour la période janvier 1994-décembre 1996. Pendant la crise monétaire d'octobre 1995, de fortes tensions pèsent sur la devise française, ce qui oblige la Banque de France à relever ses taux directeurs. C'est sûrement le facteur qui expliquerait le mieux l'inversion à ce moment-là de la structure par terme française.

Certains auteurs complètent la séquence politique de change  $\rightarrow$  courbe des taux que nous venons d'exposer. En effet, si les taux à terme mesurent les anticipations des taux d'intérêt futurs, nous pouvons utiliser la courbe des taux pour appréhender les anticipations de change à cause de la relation de parité des taux d'intérêt non couverte. A partir de l'analyse des taux de dépréciation ex-post, SVENSSON [1994a] montre comment employer l'information dans les taux à terme pour construire les anticipations de change. Certains auteurs voient dans ces anticipations une appréciation par le marché de la politique de change (ou de la **crédibilité** des autorités monétaires en matière de change).



Graphique 2.26

### 2.6.1 Définition des taux de dépréciation ex-post

Soit  $e(t)$  le taux de change coté au certain. SVENSSON [1994a] définit le taux de dépréciation  $\delta(t, \tau)$  entre les dates  $t$  et  $t + \tau$  par la relation suivante

$$e(t + \tau) = e(t) e^{\tau \delta(t, \tau)} \quad (2.43)$$

Pour calculer le taux de dépréciation ex-post, nous utilisons alors la formulation

$$\delta(t, \tau) = \frac{\ln e(t + \tau) - \ln e(t)}{\tau} \quad (2.44)$$

Nous constatons une dépréciation de la monnaie nationale entre les dates  $t$  et  $t + \tau$  si la valeur du cours du change a augmenté, ou encore si  $\delta(t, \tau) > 0$ . Nous remarquons que  $\delta(t, \tau)$  dépend de deux paramètres : la date courante  $t$  et l'horizon  $\tau$ . Il est donc intéressant d'étudier la dynamique temporelle du taux de dépréciation  $\delta(t, \tau)$  selon la valeur prise par  $\tau$ . Par exemple, nous pouvons considérer différents horizons, qui peuvent être courts (1 jour, 1 semaine ou 1 mois) ou plus longs (3 mois, 6 mois et 1 an).

Le graphique (2.26) représente l'évolution des taux de dépréciation pour les horizons de un mois, six mois et un an. Afin de faciliter sa lecture, les abscisses correspondent à la date  $t + \tau$ , et non à la date  $t$ . Si nous prenons des horizons très

faibles (un jour ou une semaine), les taux de dépréciation varient fortement et peuvent atteindre des niveaux très élevés. C'est pourquoi nous choisissons des horizons plus longs. A première vue, nous remarquons une différence très nette entre, d'une part, l'horizon un mois et, d'autre part, les horizons six mois et un an. Le taux de dépréciation un mois semble présenter une propriété intéressante, puisqu'il apparaît cyclique. Nous n'observons pas ce phénomène pour des horizons plus longs.

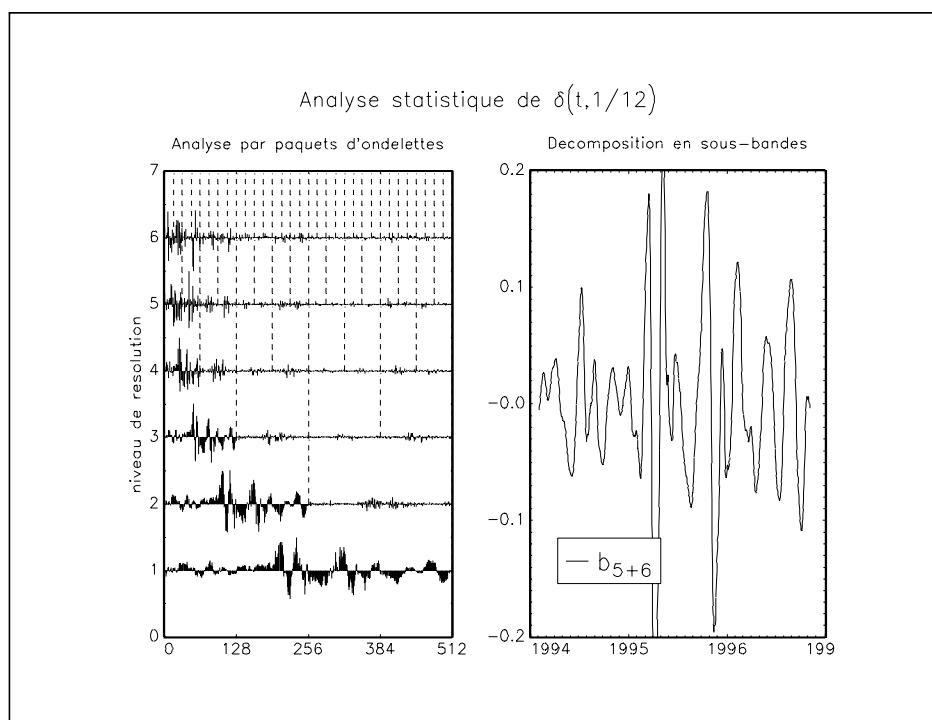
Nous cherchons à confirmer statistiquement la présence d'un cycle pour le taux de dépréciation un mois, car l'existence de celui-ci impliquerait que le cours de change n'est pas aussi "*imprédictible*" que de nombreuses études le laissent penser. La série présente de nombreuses irrégularités, du point de vue de l'amplitude et de la période. Il est donc difficile de mener une analyse spectrale, c'est pourquoi nous choisissons d'utiliser les méthodes temps-fréquences qui sont plus appropriées. La représentation des coefficients de la transformée par paquets d'ondelettes<sup>18</sup> confirme le caractère cyclique de cette série (voir le graphique (2.27)). Le scalogramme des coefficients de l'ondelette est le suivant

$$\begin{pmatrix} c_0^2 \\ \mathbb{E}(0) \\ \mathbb{E}(1) \\ \mathbb{E}(2) \\ \mathbb{E}(3) \\ \mathbb{E}(4) \\ \mathbb{E}(5) \\ \mathbb{E}(6) \\ \mathbb{E}(7) \\ \mathbb{E}(8) \\ \mathbb{E}(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00358 \\ 0.32034 \\ 0.42351 \\ 0.91228 \\ 0.70740 \\ 2.30520 \\ 3.81271 \\ 1.13642 \\ 0.48165 \\ 0.36577 \\ 0.16224 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

La répartition de l'énergie montre clairement que  $\delta(t, \frac{1}{12})$  **n'est pas une marche aléatoire**. La concentration de l'énergie sur les niveaux de résolution intermédiaires apporte une information supplémentaire sur la localisation du cycle dans les domaines du temps et des fréquences. Nous avons donc effectué un codage en sous-bandes des niveaux de résolution qui présentent les énergies les plus importantes, c'est-à-dire les niveaux 5 et 6. Le graphique (2.27) montre la décomposition en sous-bandes de ces deux niveaux. L'approche par ondelettes permet d'éliminer de nombreux problèmes concernant l'irrégularité des périodes (mais subsistent des problèmes d'amplitude). A partir de la fonction de densité spectrale (que nous estimons par la fenêtre de Tukey), nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'un cycle par le test de Fisher (PRIESTLEY, [1994]). La fréquence du cycle est alors égale à 0.086,

<sup>18</sup>Nous utilisons les filtres miroir en quadrature de Daubechies d'ordre 8 pour les filtres passe-haut et passe-bas.





Graphique 2.27

c'est-à-dire que nous avons une période de 73-74 jours. Néanmoins, l'explication de ce cycle est sans réponse.

### 2.6.2 L'utilisation des taux à terme pour la prévision du cours de change

Sous certaines conditions et si la parité des taux d'intérêt non couverte est vérifiée, SVENSSON [1994a] montre que

$$E_t[\delta(t + \tau, m)] = E_t[R_{t+\tau}(m)] - E_t[R_{t+\tau}^*(m)] \quad (2.46)$$

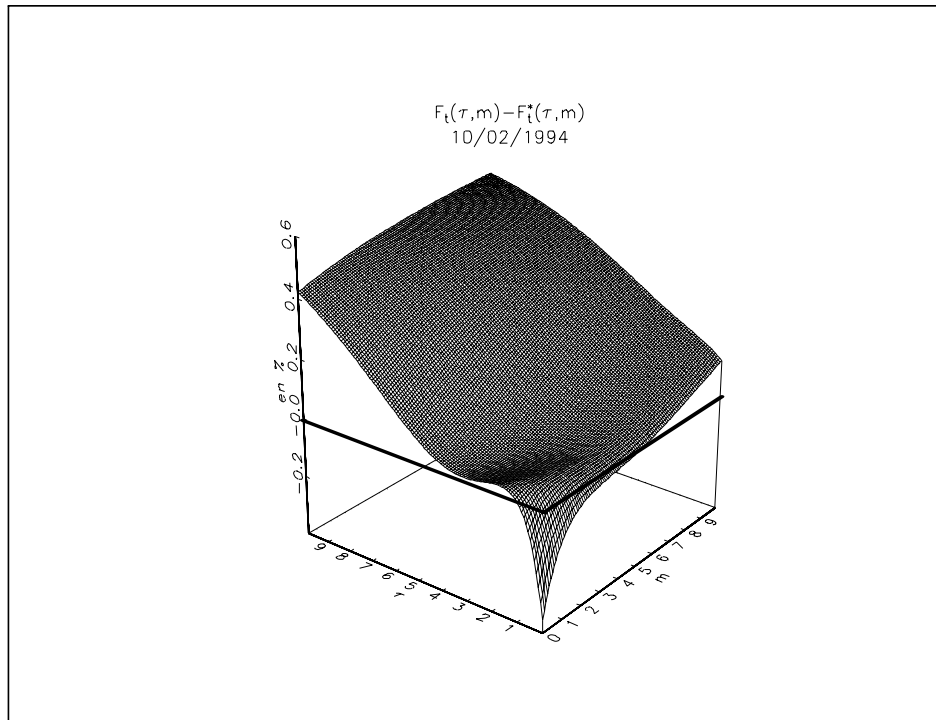
En utilisant la relation (2.19), nous avons

$$E_t[\delta(t + \tau, m)] = F_t(\tau, m) - F_t^*(\tau, m) \quad (2.47)$$

La position de la courbe des taux à terme nationaux par rapport à celle des taux à terme étrangers est donc une source d'information pour les anticipations de change. Nous définissons  $\varphi(t, \tau, m)$  par la fonction suivante :

$$\varphi(t, \tau, m) = F_t(\tau, m) - F_t^*(\tau, m) \quad (2.48)$$

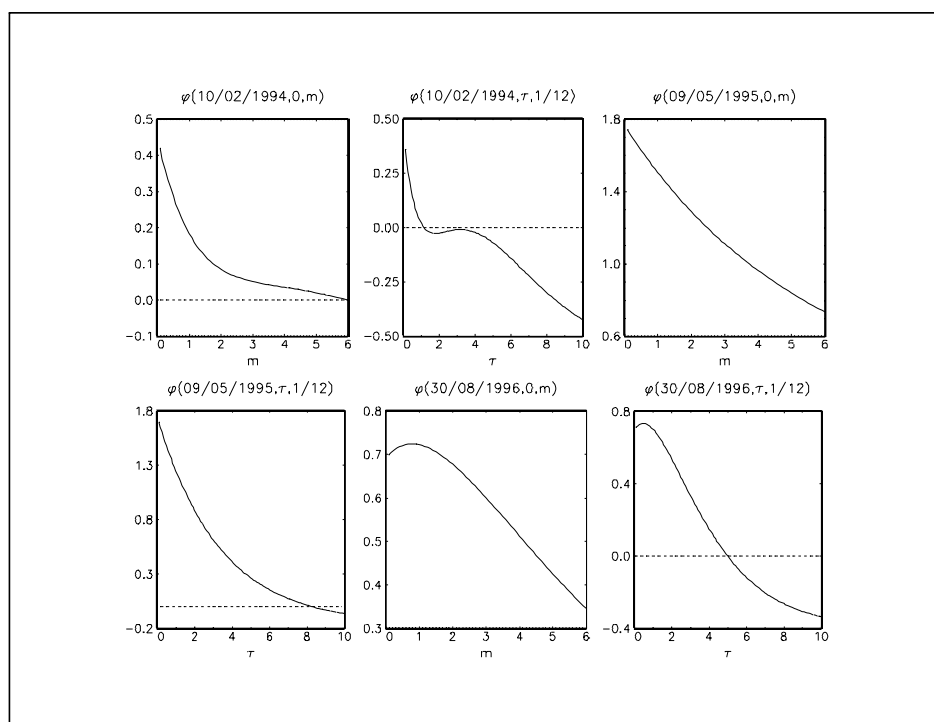
Les valeurs prises par  $\varphi(t, \tau, m)$  nous permettent d'appréhender les anticipations des taux de dépréciation. Elle est caractérisée par trois paramètres :  $t$  est la date



Graphique 2.28

courante (c'est-à-dire la date à laquelle sont formées les anticipations),  $m$  est l'horizon d'anticipation (par exemple, si  $m$  est égal à un, nous cherchons à évaluer les anticipations des taux de dépréciation à un an) et  $\tau$  indique la date pour laquelle les anticipations sont valables. Par exemple,  $\varphi(10/02/1994, 1/2, 1)$  correspond aux anticipations à la date du 10/02/1994 des taux de dépréciation entre le 10/08/1994 et le 10/08/1995. Cette fonction est représentée sur le graphique (2.28). Nous observons un taux de dépréciation négatif pour des valeurs de  $m$  et  $\tau$  très faibles. Cela indique qu'à très court terme, les agents anticipaient une baisse du cours de change FRF/DEM, c'est-à-dire une appréciation du franc français. A plus long terme, le signe de  $\varphi(t, \tau, m)$  est positif indiquant une anticipation de dépréciation du franc français.

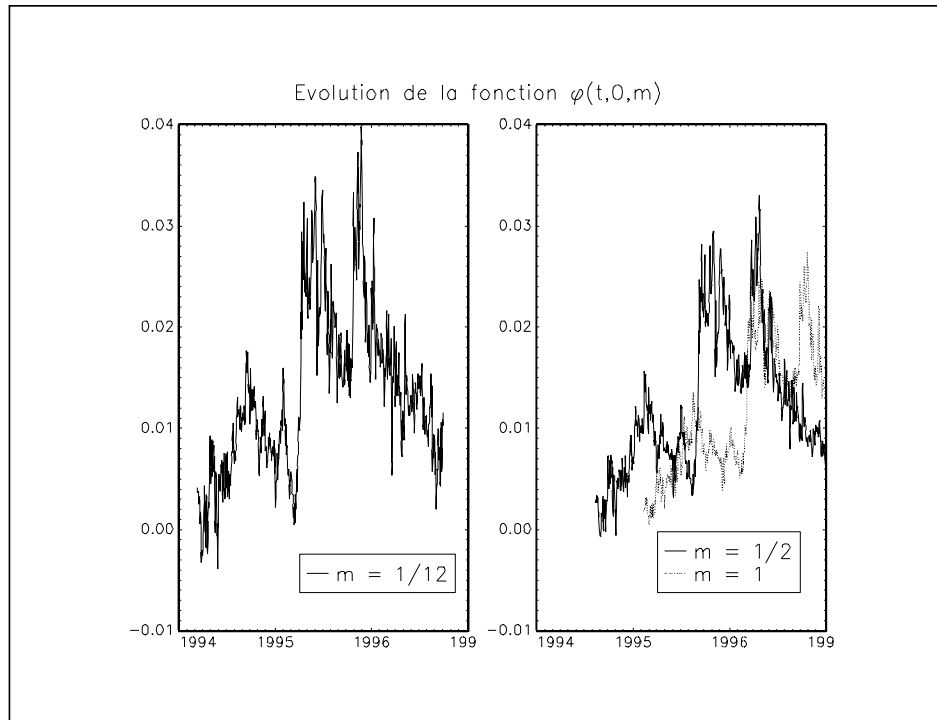
Comme la lecture du graphique (2.28) est extrêmement difficile, il est intéressant d'analyser la fonction  $\varphi(t, \tau, m)$  pour des valeurs particulières des paramètres  $\tau$  ou  $m$ . Le graphique (2.29) représente  $\varphi(t, 0, m)$  et  $\varphi(t, \tau, \frac{1}{12})$  pour trois dates différentes : le 10 février 1994, le 9 mars 1995 et le 30 août 1996. Le 10 février 1994, le taux de dépréciation  $\varphi(t, 0, m)$  est positif pour les six prochaines années et tend à s'annuler. Les agents anticipent clairement une dépréciation du Franc français. Cela est globalement vérifié puisqu'il faudra attendre avril 1996 pour que le Franc français revienne à son niveau. L'évolution de  $\varphi(t, \tau, \frac{1}{12})$  montre de plus qu'il y a dans un



Graphique 2.29

premier temps anticipation d'une dépréciation de la devise française (pendant un an et un mois) puis, dans un second temps, anticipation d'une appréciation. Le point de rupture se situe au début du mois de mars 1996. Dans une large mesure, nous avons observé ce phénomène, même s'il est difficile de dater le point de retournement. La date du 9 mai 1995 correspond au niveau le plus haut du cours de change FRF/DEM. Si nous analysons le graphique (2.29), le Franc français devrait continuer à se déprécier. Cette prévision n'est pas confirmée par l'observation des faits. Voici donc deux dates pour lesquelles les résultats ne sont pas homogènes, mais nous rappelons que dans le cadre d'une lecture d'information, ces outils permettent de révéler les anticipations et qu'il est tout à fait possible que ces anticipations ne se réalisent pas. De plus, la fonction  $\varphi(t, \tau, m)$  ne tient pas compte de la prime de terme et de la prime de risque de change (SVENSSON [1994a]). Dans cette analyse, nous les supposons négligeables. Or, la période 1994-1996 est marquée par des taux de dépréciation presque toujours positifs. L'existence de primes peut expliquer ce résultat. Sinon, cela voudrait dire que les agents anticipaient presque toujours une dépréciation du Franc français !

Il est intéressant d'étudier temporellement l'évolution de  $\varphi(t, 0, m)$  et de la comparer avec celle de  $\delta(t, m)$ . Graphiquement, il semble difficile de dégager des tendances communes (voir les figures (2.26) et (2.30)). Pour appréhender la relation



Graphique 2.30

entre  $\Delta\delta\left(t, \frac{1}{12}\right)$  et  $\Delta\varphi\left(t, 0, \frac{1}{12}\right)$ , nous utilisons un processus vectoriel autorégressif. Le tableau suivant indique le retard optimal selon le critère de sélection :

critère	BIC	AIC $\alpha$	AIC $c$	SIC	FPE	AIC	HQ
$\left(\Delta\delta\left(t, \frac{1}{12}\right), \Delta\varphi\left(t, 0, \frac{1}{12}\right)\right)$	2	2	8	2	8	8	2

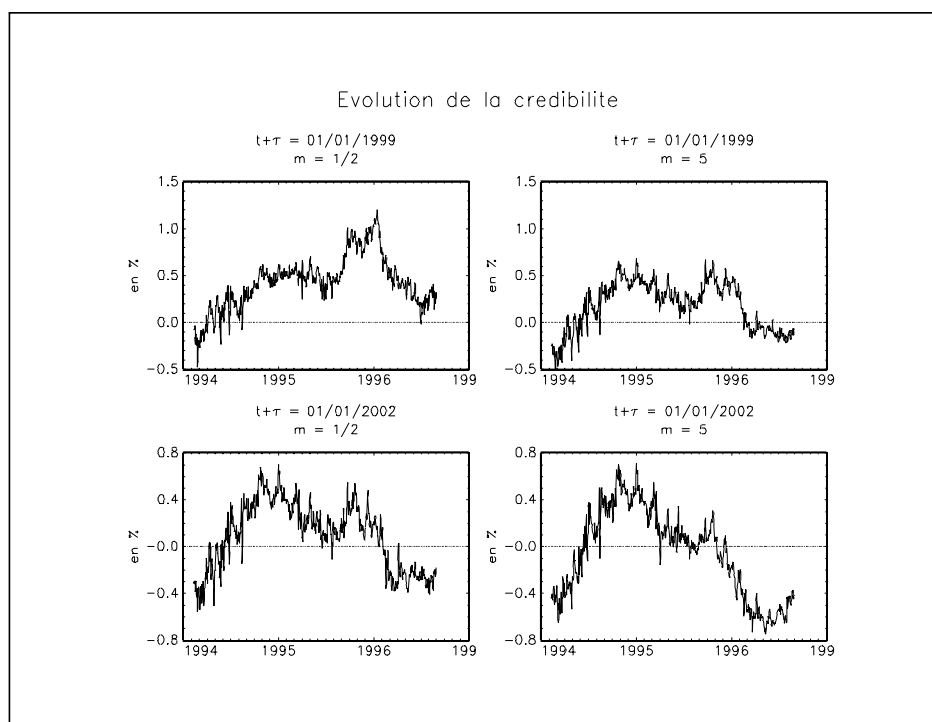
En choisissant le retard court pour l'ordre du VAR, nous obtenons l'estimation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \Delta\delta\left(t, \frac{1}{12}\right) \\ \Delta\varphi\left(t, 0, \frac{1}{12}\right) \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0.2307^{(*)} & -1.2673^{(**)} \\ 0.0005 & 0.1857^{(*)} \\ -0.1835^{(*)} & -0.5590 \\ -0.0025 & -0.2223^{(*)} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta\delta\left(t-1, \frac{1}{12}\right) \\ \Delta\varphi\left(t-1, 0, \frac{1}{12}\right) \\ \Delta\delta\left(t-2, \frac{1}{12}\right) \\ \Delta\varphi\left(t-2, 0, \frac{1}{12}\right) \end{array} \right] = \varepsilon_t \end{array} \right. \quad (2.49)$$

avec

$$\hat{\Sigma} = \left[ \begin{array}{cc} 102.3 & \\ -3.314 & 3.175 \end{array} \right] \times 10^{-6} \quad (2.50)$$

Les signes des coefficients de  $\Delta\varphi\left(t, 0, \frac{1}{12}\right)$  dans l'équation  $\Delta\delta\left(t, \frac{1}{12}\right)$  sont négatifs ! Empiriquement, nous ne pouvons pas confirmer le lien entre les taux à terme et les taux de dépréciation **observés**.



Graphique 2.31

### 2.6.3 Crédibilité de la politique de change

Plusieurs études mettent en évidence l'influence de la politique monétaire sur les actifs financiers (FUHRER et MOORE [1992], SMETS [1997]) et aussi sur la structure par terme (COOK et HAHN [1989,1990], RUDEBUSH [1995]). BESANCENOT, VRANCEANU et WARIN [1997] montrent que non seulement la politique de change menée par la banque centrale, mais aussi la perception par les agents privés des véritables intentions de celle-ci sont des déterminants explicatifs des taux d'intérêt. Ils concluent leur article de la façon suivante :

*Cette analyse propose une interprétation de l'expérience de la banque centrale française, qui a combattu l'inflation avec succès. Alors que les anticipations d'inflation élevée se sont presque évanouies, les anticipations d'une probable dévaluation du franc français durant les quelques semaines avant l'accession à l'union monétaire sont toujours présentes et peuvent peser sur les taux d'intérêt.*

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas pu confirmer le lien entre les taux à terme et les taux de dépréciation **observés**. Le travail original de Svensson utilise la courbe des taux pour construire des anticipations. Quelques auteurs ont abandonné le point de vue prévision pour se pencher sur le problème de la crédibilité

des autorités monétaires. BENAÏM et OHEIX [1997] expliquent ainsi la formation des taux longs par des variables qui représentent cette crédibilité. Des études plus originales sont celles de DE GRAUWE [1996] et BELLANDO, PFISTER et POLLIN [1997a,1997b]. Elle porte sur la crédibilité de l'union monétaire (et non sur celle d'une autorité monétaire particulière). Comme le rappellent les auteurs, "si les marchés sont convaincus de la réalisation de l'union au premier janvier 1999, les taux à terme français et allemands devraient être identiques à cette échéance". Cela implique que, quelle que soit la valeur prise par  $m$ , la fonction  $\varphi(t, \tau, m)$  est nulle pour toutes les valeurs de  $t + \tau$  supérieures ou égales au premier janvier 1999. Le graphique (2.31) montre que la crédibilité FRF/DEM dépend de la maturité retenue. Le graphe pour la maturité six mois est assez différent de celui de la maturité cinq ans. Pour la date du premier janvier 1999, nous distinguons deux grandes périodes. Pendant la première période (de 1994 au début de l'année 1996), la crédibilité a diminué. Celle-ci augmente ensuite, puisque la fonction  $\varphi(t, \tau, m)$  tend à être nulle. Pour la date du premier janvier 2002, nous n'observons pas les mêmes faits. Une des explications possibles est l'existence de primes de terme différentes puisque nous nous situons sur des segments plus éloignés de la courbe des taux.

## 2.7 Conclusion

Dans la lignée des travaux de Svensson, ce chapitre montre les utilisations de la courbe des taux. L'extraction de l'information n'a pas pour but la prévision. L'objectif est de construire des indicateurs pour la politique monétaire et de révéler comment celle-ci est perçue. Disposant de données journalières pour une période relativement courte, nous n'avons pu mener une étude économétrique robuste qui justifie cet objectif. Les banques centrales n'ont pas attendu la publication de résultats positifs pour utiliser la courbe des taux comme indicateur. En 1988, Manuel Johnson, vice-gouverneur du système de réserve fédérale, annonce que la pente de la courbe des taux sera un des trois indicateurs pour la politique monétaire (voir l'introduction de FRANKEL et LOWN [1994]). Depuis, de nombreuses banques centrales ont fait de même (parmi lesquelles la Banque d'Angleterre, la Banque de Suède et la Banque de France). Des groupes de recherche (comme celui de la Banque des règlements internationaux) se sont mis en place. Le problème posé n'est pas de savoir si la courbe des taux contient de l'information (nous pouvons répondre à cette question par l'affirmative), mais d'identifier l'information **pertinente** à un instant **donné**. Une des difficultés majeures est alors de réduire la complexité de la notion de la structure par terme, puisque nous rappelons que la courbe des taux correspond à un espace à deux dimensions et qu'une analyse temporelle fait intervenir

trois dimensions. Nous consacrons donc le chapitre suivant à l'analyse factorielle de la structure par terme.

# Chapitre 3

## Une analyse factorielle de la structure par terme

### 3.1 Introduction

Nous avons consacré le chapitre précédent au contenu informationnel de la courbe des taux et nous avons rencontré une difficulté majeure : le traitement statistique de la structure par terme. Dans ce chapitre, nous cherchons à extraire des facteurs qui permettent de résumer cette courbe des taux. L'étude de la structure par terme se ramène alors à l'analyse de ces facteurs, que nous supposons plus *lisibles* que la courbe des taux. Nous présentons deux types de méthode pour élaborer ces facteurs. La première est l'analyse factorielle des données, en particulier l'analyse en composantes principales. La seconde privilégie l'estimation de composantes inobservables. Dans une troisième section, nous montrerons comment la prise en compte des relations multilatérales permet de compléter ces facteurs.

Cette étude **économique** de la structure par terme a des prolongements naturels dans la deuxième partie de ce travail. En effet, l'analyse **financière** fait largement appel à la notion de facteurs. Comprendre quels sont les facteurs qui déforment la courbe des taux permet donc de mieux appréhender les forces et les faiblesses des modèles financiers.

### 3.2 Une analyse en terme de corrélation

Le principe de l'analyse factorielle repose sur l'existence d'une relation linéaire entre  $k$  variables observées  $y_i$  et  $l$  facteurs  $F_i$ . Nous avons

$$y_i - \mu = \Lambda F_i + \varepsilon_i \quad (3.1)$$

avec  $\mu$  le vecteur des moyennes de  $y_i$ ,  $\varepsilon_i$  un vecteur d'erreur de variance  $\Sigma$ . La matrice  $\Lambda$  décrit comment les variables observées sont influencées par ces facteurs.



A moins de poser certaines hypothèses, il n'est pas possible d'identifier parfaitement les facteurs  $F_i$ . Soit  $V$  la matrice de variance-covariance de  $y_i$ . Dans le cas où les facteurs sont centrés et réduits, nous avons

$$V = \Lambda\Lambda^\top + \Sigma \quad (3.2)$$

L'analyse factorielle permet cependant d'identifier une structure factorielle basée sur la décomposition de la matrice  $V$ . L'une des méthodes les plus connues est l'analyse en composantes principales.

### 3.2.1 Le principe de l'analyse en composantes principales

Considérons  $n$  observations de  $k$  variables. Nous pouvons alors représenter chaque observation par un point de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^k$ . Lorsque  $k$  est supérieur à trois, il est très difficile de décrire graphiquement ces données. **BOUROCHE** et **SAPORTA** [1992] définissent alors l'analyse en composantes principales (ACP) comme "une méthode de réduction du nombre de caractères". Nous obtenons ainsi une reformulation de l'information de manière à ce qu'elle soit plus facile à interpréter.

Soit  $y_i^j$  la valeur prise par la  $j$ -ième variable pour la  $i$ -ième observation. Nous notons

$$y_i = \begin{bmatrix} y_i^1 \\ \vdots \\ y_i^j \\ \vdots \\ y_i^k \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Soient  $\mathcal{J}$  un axe factoriel et  $y$  un point de  $\mathbb{R}^k$ . Nous définissons l'axe factoriel par la combinaison linéaire suivante :

$$\mathcal{J}(y) = v^\top y \quad (3.4)$$

avec  $v$  un vecteur de dimension  $k \times 1$ . L'analyse factorielle correspond à une projection linéaire des points  $y_i^j$  sur le sous-espace vectoriel engendré par les  $l$  axes factoriels. Pour l'analyse en composantes principales, nous choisissons les  $l$  vecteurs  $v$  de telle façon que l'inertie du nuage projeté soit maximal (**SAPORTA** [1990]). Nous pouvons les obtenir de façon récursive : le premier facteur est le sous-espace vectoriel de dimension un d'inertie maximale, pour le second facteur, nous cherchons le sous-espace vectoriel d'inertie maximale orthogonal au précédent, etc. Si nous utilisons la métrique  $\mathbf{D}_{1/s}$  pour caractériser la distance entre deux points, les vecteurs  $v$  sont les vecteurs propres associés à la matrice de covariance des données centrées et réduites  $\tilde{y}_i^j$ .

Si nous définissons la variance totale par la somme des variances des différentes variables, celle-ci est égale à  $k$  pour les données  $\tilde{y}_i^j$ . Soit  $\lambda_j$  la variance associée au  $j$ -ième facteur. Nous avons<sup>1</sup>

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n \mathcal{J}_j (\tilde{y}_i)^2 \quad (3.6)$$

et

$$k = \sum_{j=1}^k \lambda_j \quad (3.7)$$

avec la décomposition ordonnée  $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$ . Nous pouvons alors mesurer la qualité de représentation d'un axe factoriel par l'expression suivante

$$\varphi_j = \frac{\lambda_j}{k} \quad (3.8)$$

L'intérêt de l'analyse en composantes principales consiste à construire un nombre relativement petit d'axes factoriels permettant d'expliquer le maximum de la variance. Ces axes factoriels constituent le plan principal, que nous analysons avec différents outils.

Nous notons  $v_j$  le  $j$ -ième vecteur propre. Le tableau de saturation est constitué par les  $k$  vecteurs  $v_j \sqrt{\lambda_j}$ . Il permet de construire le cercle des corrélations, la qualité de représentation et la contribution des variables à la construction des axes. Pour les observations, la qualité de représentation peut être fort intéressante.

### 3.2.2 Une analyse factorielle de la courbe des taux française

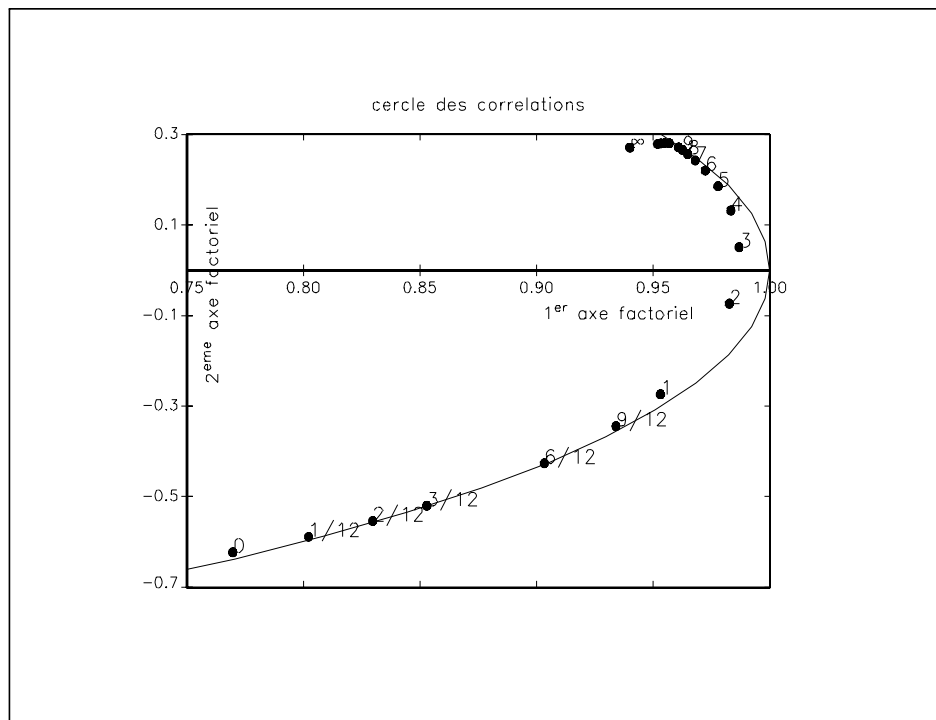
L'article de LITTERMAN et SCHEINKMAN [1991] est l'un des premiers<sup>2</sup> à utiliser les méthodes factorielles pour analyser la structure par terme des taux d'intérêt. DE BANDT et LESNE [1991] appliquent cette méthodologie aux données françaises pour concevoir des stratégies de couverture et d'immunisation. A partir des données construites dans le premier chapitre, nous cherchons à élaborer des facteurs linéaires représentatifs pour la période d'étude. Nous rappelons que la structure par terme  $\mathfrak{R}$  est une courbe continue, c'est pourquoi nous ne pouvons pas mener une analyse en composantes principales sur  $\mathfrak{R}$  et nous devons par conséquent plutôt considérer un ensemble fini  $\mathfrak{R}^-$ , sous-ensemble de  $\mathfrak{R}$ , pour effectuer ce type d'analyse. Nous

---

<sup>1</sup>car les axes factoriels sont centrés

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{J}_j (\tilde{y}_i) = 0 \quad (3.5)$$

<sup>2</sup>La méthode avait déjà été utilisée par LOGUE et SWEENEY [1984].



Graphique 3.1

choisissons

$$\mathfrak{R}^- = \left\{ R(0), R\left(\frac{1}{12}\right), R\left(\frac{2}{12}\right), R\left(\frac{3}{12}\right), R\left(\frac{6}{12}\right), R\left(\frac{9}{12}\right), R(1), R(2), R(3), R(4), R(5), R(6), R(7), R(8), R(9), R(10), R(15), R(20), R(25), R(30), R(\infty) \right\} \quad (3.9)$$

Il n'existe pas de méthode générale pour justifier le choix des maturités. Nous pensons que les maturités sélectionnées permettent de bien rendre compte des différentes parties (courte, moyenne et longue) de la courbe des taux, mais cela reste un choix *arbitraire* et nous verrons dans le paragraphe suivant que celui-ci influence les résultats. Nous reportons dans le tableau suivant les statistiques relatives aux cinq premiers axes factoriels de  $\mathfrak{R}^-$ .

Facteur n°	valeur propre	% d'inertie	% cumulé
1	18.2994	87.14	87.14
2	2.4553	11.69	98.83
3	0.1929	0.92	99.75
4	0.0503	0.24	99.99
5	0.0020	0.01	100

La qualité de représentation du quatrième axe est très faible (de l'ordre de 0.25%). Aussi, nous ne décidons de retenir que les trois premiers axes factoriels comme facteurs significatifs. Nous remarquons que cet espace factoriel explique 99.75% de la variance totale ! Cependant, nous notons que la qualité de représentation est

très différente selon le facteur considéré. Le premier axe factoriel a une qualité de représentation importante : c'est le facteur majeur. Celle du second facteur n'est pas négligeable<sup>3</sup>, proche de 12% : on peut le nommer "facteur complémentaire". Le troisième axe factoriel est marginal, puisqu'il explique un peu moins de 1% de la variance totale. Le graphique (3.1) représente le cercle des corrélations pour les deux axes principaux (que nous appelons aussi le plan principal). Nous remarquons que les maturités sont parfaitement ordonnées. Nous distinguons déjà deux groupes, les taux dont la maturité est inférieure ou égale à deux ans et ceux de maturités plus élevées. DE BANDT et LESNE [1991] obtiennent des résultats similaires<sup>4</sup>.

### 3.2.2.1 Interprétation du premier facteur

C'est le facteur prépondérant qui explique une très grande partie de la variance de la courbe des taux. L'expression de ce facteur est

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_1(\mathfrak{R}^-) = & 0.180 \times R(0) + 0.188 \times R\left(\frac{1}{12}\right) + 0.194 \times R\left(\frac{2}{12}\right) + 0.200 \times R\left(\frac{3}{12}\right) \\
 & + 0.211 \times R\left(\frac{6}{12}\right) + 0.218 \times R\left(\frac{9}{12}\right) + 0.223 \times R(1) + 0.230 \times R(2) \\
 & + 0.230 \times R(3) + 0.230 \times R(4) + 0.229 \times R(5) + 0.227 \times R(6) \\
 & + 0.226 \times R(7) + 0.226 \times R(8) + 0.225 \times R(9) + 0.225 \times R(10) \\
 & + 0.224 \times R(15) + 0.223 \times R(20) + 0.223 \times R(25) + 0.223 \times R(30) \\
 & + 0.220 \times R(\infty)
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Nous pouvons dégager une première interprétation de ce facteur. Il apparaît qu'il dépend positivement de l'**ensemble** des taux d'intérêt zéro de  $\mathfrak{R}^-$  et que les coefficients qui le déterminent sont assez proches les uns des autres, puisqu'ils varient entre 0.180 et 0.230. Aussi, nous interprétons cet axe factoriel comme un "facteur de niveau" de la courbe des taux. L'expression, employée par De Bandt et Lesne, a l'avantage d'être explicite. Si les taux sont bas d'une façon générale (c'est-à-dire plus faibles que ceux observés en moyenne), alors le score du facteur est négatif. En revanche, il est positif pour des taux élevés. Nous pouvons considérer la valeur prise par ce facteur comme un indicateur du niveau *global* de la courbe des taux.

Qualité de représentation des variables						
$R(0)$	$R\left(\frac{1}{12}\right)$	$R\left(\frac{2}{12}\right)$	$R\left(\frac{3}{12}\right)$	$R\left(\frac{6}{12}\right)$	$R\left(\frac{9}{12}\right)$	$R(1)$
59.25	64.35	68.84	72.75	81.59	87.22	90.84
$R(2)$	$R(3)$	$R(4)$	$R(5)$	$R(6)$	$R(7)$	$R(8)$
96.56	97.37	96.69	95.59	94.54	93.70	93.08
$R(9)$	$R(10)$	$R(15)$	$R(20)$	$R(25)$	$R(30)$	$R(\infty)$
92.64	92.33	91.58	91.19	90.87	90.61	88.35

<sup>3</sup>ce qui contraste avec les 1.35% obtenus par GRESSE [1994].

<sup>4</sup>Dans cette étude, les auteurs utilisent l'écart entre les taux zéro et le taux instantané pour déterminer les facteurs.

La qualité de représentation dépend de la portion de la courbe des taux à laquelle appartient la maturité. Pour les maturités de moins d'un an, la qualité de représentation est toujours inférieure à 90%. Elle est même relativement faible (moins de 60%) pour le taux zéro instantané. Le tableau des contributions confirme cette singularité de la partie courte de la courbe des taux (nous indiquons que la contribution moyenne est  $\frac{1}{21}$ , c'est-à-dire 4.76%). Une explication possible est la volatilité plus importante des taux courts. C'est pourquoi les taux plus longs sont davantage représentatifs pour construire un indicateur du niveau.

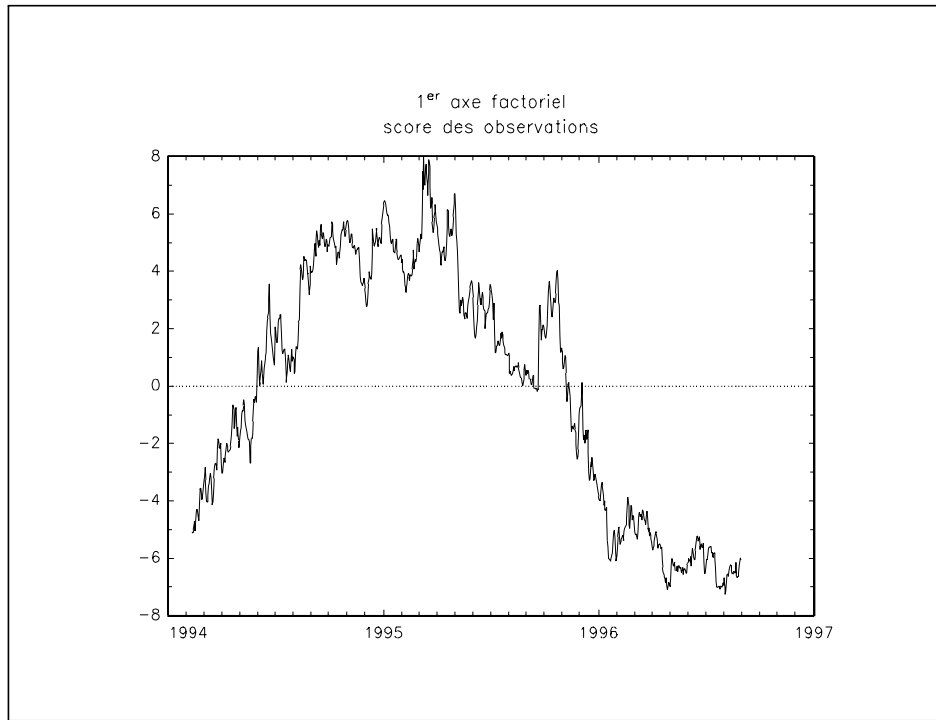
Contribution des variables						
$R(0)$	$R\left(\frac{1}{12}\right)$	$R\left(\frac{2}{12}\right)$	$R\left(\frac{3}{12}\right)$	$R\left(\frac{6}{12}\right)$	$R\left(\frac{9}{12}\right)$	$R(1)$
3.24	3.52	3.76	3.98	4.46	4.77	4.96
$R(2)$	$R(3)$	$R(4)$	$R(5)$	$R(6)$	$R(7)$	$R(8)$
5.28	5.32	5.28	5.22	5.17	5.12	5.09
$R(9)$	$R(10)$	$R(15)$	$R(20)$	$R(25)$	$R(30)$	$R(\infty)$
5.06	5.05	5.00	4.98	4.97	4.95	4.83

Dans la section (2.2.3), nous étudions le niveau de la courbe des taux. Si nous comparons les graphiques (2.3) et (3.2), nous remarquons que la mesure définie par cet axe factoriel est fortement corrélée avec la mesure  $\bar{R}_t(1,5)$ . Cela est logique, puisque le taux le plus sensible à cet axe factoriel est le taux zéro trois ans. C'est le taux le mieux représenté et aussi celui qui contribue le plus à la formation de l'axe. L'analyse graphique du score et de la qualité de représentation permet de dégager plusieurs périodes. Au début de la période étudiée, nous observons un score négatif. Il est positif du mois de juin 1994 jusqu'à la fin de l'année 1995, puis redevient négatif. Pour ces trois périodes, la qualité de représentation est différente (voir le graphique (3.3)). En particulier, la première partie est relativement mal représentée. Mais, il ne semble pas y avoir de corrélation entre le signe du score et la qualité de représentation.

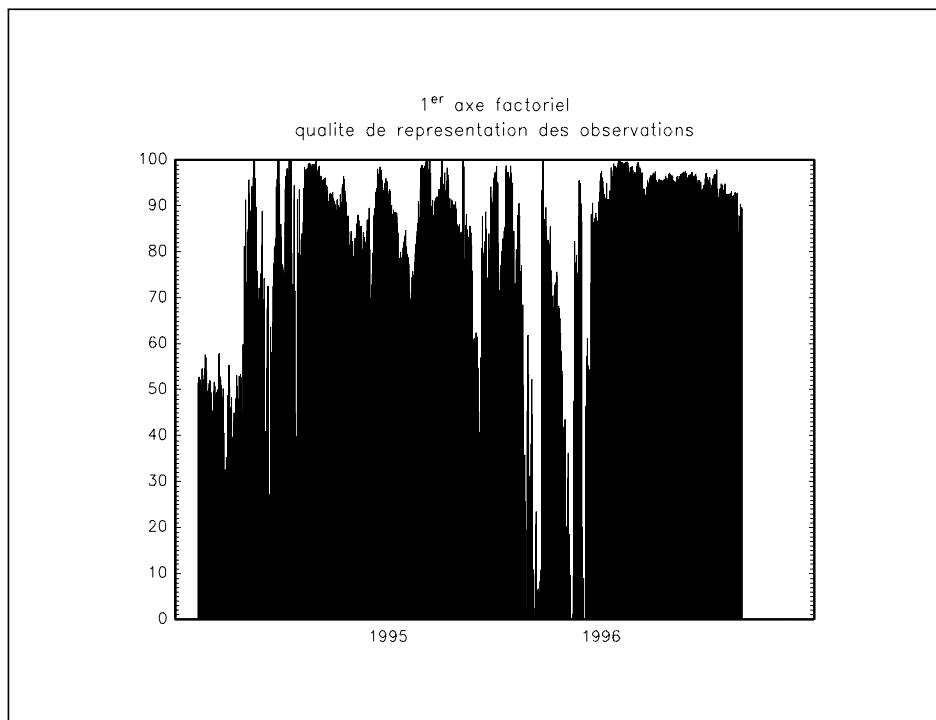
### 3.2.2.2 Interprétation du second facteur

Nous rappelons que le second axe factoriel est un axe relativement important, puisqu'il représente presque 12% de la variance. L'expression de ce facteur est

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2(\mathfrak{R}^-) = & -0.398 \times R(0) - 0.376 \times R\left(\frac{1}{12}\right) - 0.354 \times R\left(\frac{2}{12}\right) - 0.332 \times R\left(\frac{3}{12}\right) \\
& - 0.272 \times R\left(\frac{6}{12}\right) - 0.220 \times R\left(\frac{9}{12}\right) - 0.175 \times R(1) - 0.047 \times R(2) \\
& + 0.032 \times R(3) + 0.084 \times R(4) + 0.118 \times R(5) + 0.141 \times R(6) \\
& + 0.155 \times R(7) + 0.164 \times R(8) + 0.170 \times R(9) + 0.173 \times R(10) \\
& + 0.179 \times R(15) + 0.179 \times R(20) + 0.179 \times R(25) + 0.179 \times R(30) \\
& + 0.173 \times R(\infty)
\end{aligned} \tag{3.11}$$



Graphique 3.2



Graphique 3.3

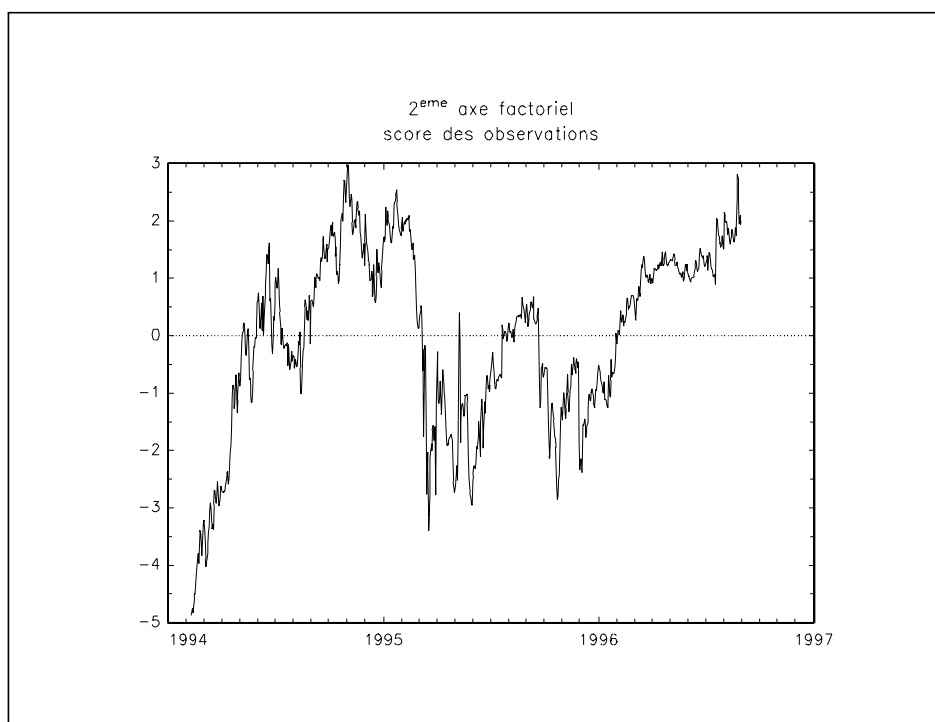
Les coefficients de cet axe sont presque monotones croissants avec la maturité. Ils sont négatifs pour les maturités courtes, et deviennent positifs pour les maturités plus longues. La valeur du score dépend donc de la position des taux courts par rapports aux taux longs. Si les taux courts augmentent ou si les taux longs diminuent, le score diminue. Nous pouvons donc penser que ce score sera négatif si la courbe des taux est inversée. C'est donc un "facteur de pente" de courbe des taux. Nous obtenons des résultats similaires à ceux de LITTERMAN et SCHEINKMAN [1991], DE BANDT et LESNE [1991], BÜLHER et ZIMMERMANN [1996] et BLISS [1997].

Qualité de représentation des variables						
$R(0)$	$R(\frac{1}{12})$	$R(\frac{2}{12})$	$R(\frac{3}{12})$	$R(\frac{6}{12})$	$R(\frac{9}{12})$	$R(1)$
38.87	34.67	30.74	27.12	18.21	11.89	7.53
$R(2)$	$R(3)$	$R(4)$	$R(5)$	$R(6)$	$R(7)$	$R(8)$
0.55	0.25	1.74	3.44	4.85	5.88	6.59
$R(9)$	$R(10)$	$R(15)$	$R(20)$	$R(25)$	$R(30)$	$R(\infty)$
7.07	7.38	7.87	7.89	7.84	7.79	7.34

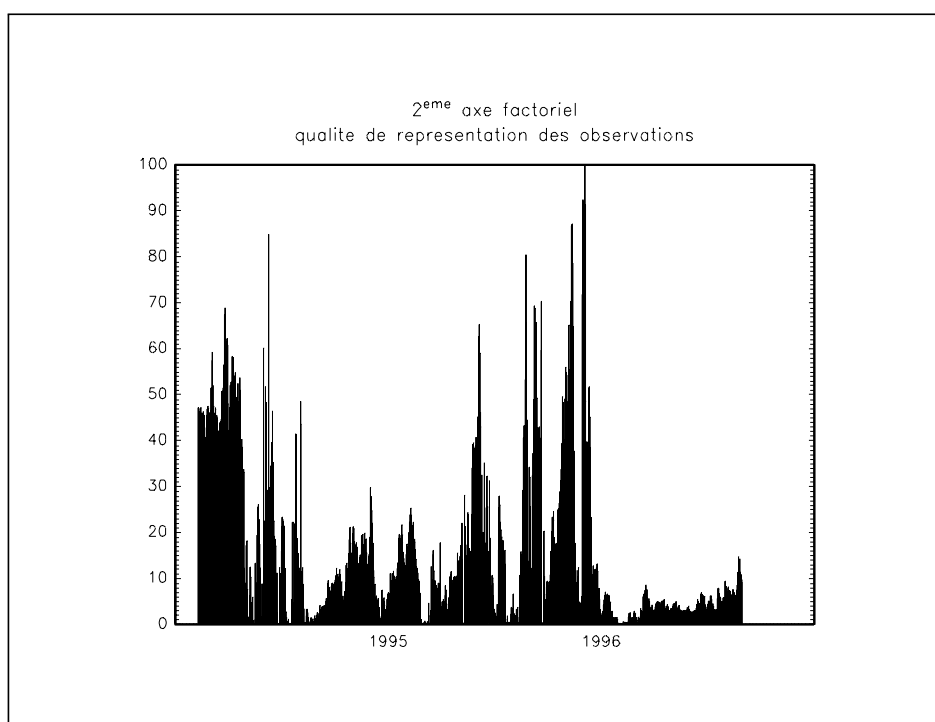
Nous avons vu, dans le deuxième chapitre, que les économistes confondent souvent les notions de pente et de spread. Les résultats laissent penser que ce facteur est bien un facteur lié à la pente et non au spread. Nous remarquons qu'il y a une asymétrie entre les taux courts et les taux longs, et donc entre  $R(0)$  et  $R(\infty)$ . Ainsi, l'intensité des coefficients associés aux taux courts est plus élevée. La qualité de représentation dépend du segment de la courbe des taux. Les taux courts (jusqu'à un an) sont les mieux représentés, les taux moyens (de deux à sept ans) ont une qualité de représentation très faible et celle des taux longs (plus de sept ans) est proche de 7%. Si nous comparons les contributions des différentes maturités, nous retrouvons ce découpage. En particulier, on constate une différence importante entre les taux courts et les taux longs. La contribution des taux courts est deux fois plus importante que celle des taux longs. Cet axe factoriel privilégie donc la partie courte, c'est-à-dire la partie qui détermine la pente de la courbe des taux.

Contribution des variables						
$R(0)$	$R(\frac{1}{12})$	$R(\frac{2}{12})$	$R(\frac{3}{12})$	$R(\frac{6}{12})$	$R(\frac{9}{12})$	$R(1)$
15.83	14.12	12.52	11.05	7.42	4.84	3.07
$R(2)$	$R(3)$	$R(4)$	$R(5)$	$R(6)$	$R(7)$	$R(8)$
0.22	0.10	0.71	1.40	1.97	2.39	2.68
$R(9)$	$R(10)$	$R(15)$	$R(20)$	$R(25)$	$R(30)$	$R(\infty)$
2.88	3.00	3.21	3.21	3.19	3.17	2.99

Dans le second chapitre, nous avons identifié trois périodes d'inversion de la courbe des taux, du 10 février au 19 avril 1994, du 9 mars au 20 juillet 1995 et du 25 septembre 1995 au 18 juillet 1996. Nous remarquons sur le graphique (3.4)



Graphique 3.4



Graphique 3.5



qu'un score négatif correspond bien à une inversion de la courbe des taux. Et nous pouvons affirmer que l'intensité de ce score dépend fortement de l'intensité de la pente (il suffit d'observer le graphe de  $\tau^\# \left(\frac{1}{12}\right)$  de la page 117 pour s'en convaincre). Pour les deux périodes d'inversion les plus récentes, la qualité de représentation varie énormément. D'une façon générale, elle est relativement faible lorsque se produit l'inversion (moins de 20%) et augmente au fur et à mesure que l'inversion se prolonge. Pour la période que nous étudions, le prolongement de l'inversion de la courbe des taux coïncide avec un rapprochement des taux courts vers les taux longs. Nous pouvons plutôt nous attendre à une qualité de représentation maximale lorsque l'inversion était plus marquée. Toutefois, il faut rappeler que l'analyse factorielle basée sur les composantes principales est une méthode séquentielle. La détermination des facteurs n'est pas influencée par leur nombre. En particulier, cela veut dire que le  $j$ -ième facteur est un facteur marginal ou résiduel, basé sur la variance résiduelle non expliquée par les  $j - 1$  premiers facteurs. Les débuts d'inversion de courbe de taux sont fortement marqués par une volatilité importante qui résulte pour la période étudiée de l'incertitude sur les marchés. Cet accroissement de la volatilité peut s'expliquer par la combinaison d'une modification du niveau des taux et de la déformation de la structure des taux. Une partie de cette volatilité est donc prise en compte par le premier facteur. Ceci peut expliquer la qualité de représentation de certaines observations.

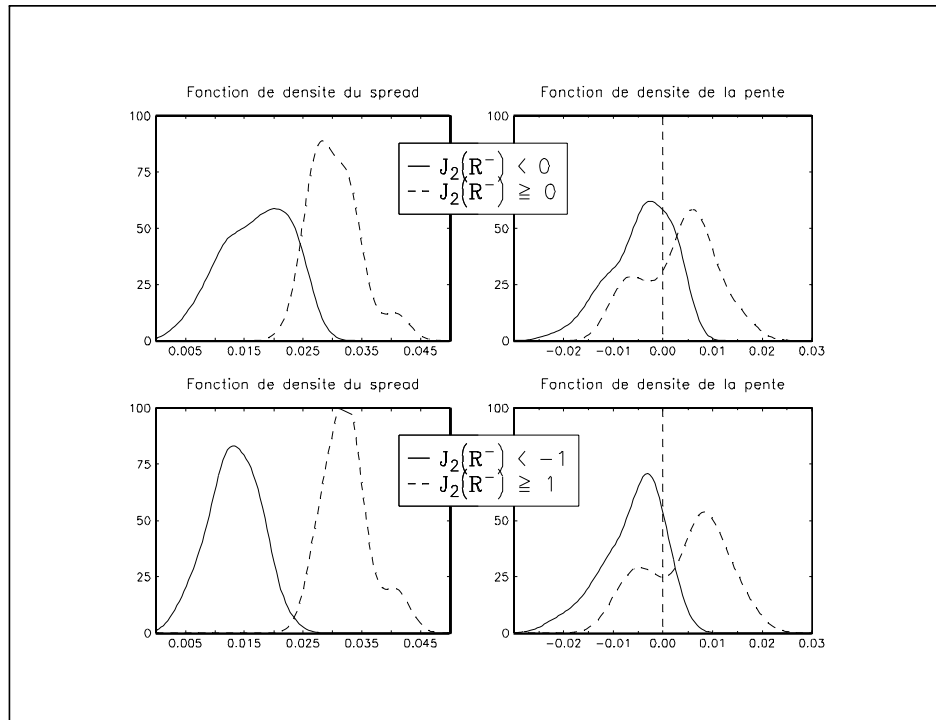
L'analyse du deuxième facteur conduit DE BANDT et LESNE [1991] à la conclusion suivante :

*En ce qui concerne le facteur 2, il est négativement corrélé avec les taux courts et positivement avec les taux longs : nous dirons que ce facteur s'interprète comme un facteur de pente de la courbe des taux, puisqu'une réalisation positive de ce facteur à une date donnée contribue, ceteris paribus, à accroître l'écart entre taux courts et longs.*

Même si la pente et le spread sont des notions extrêmement liées, nous pouvons nous demander si le facteur que nous obtenons est **effectivement** un "facteur de pente". Pour De Bandt et Lesne, la distinction ne semble pas pertinente. Sur le graphique (3.6), nous représentons les fonctions de densité<sup>5</sup> du spread et de la pente pour des échantillons différents. La construction de ces échantillons dépend de la valeur prise par le score du deuxième axe factoriel. Ainsi, pour la partie supérieure du graphique, le premier échantillon correspond aux observations dont le score est négatif, et le second échantillon concerne les observations avec un score positif. Pour

---

<sup>5</sup>Nous utilisons la méthode non paramétrique du noyau pour estimer ces fonctions.



Graphique 3.6

la partie inférieure du graphique, seules les observations qui présentent une intensité importante ( $|\mathcal{J}_2(\mathcal{R}^-)| \geq 1$ ) sont utilisées. Il apparaît en fait que ce deuxième facteur n'est pas un "facteur de pente" mais un facteur de spread. En effet, la classification des scores permet de distinguer très nettement les courbes de taux dont le spread est faible de celles dont le spread est élevé. Elle permet aussi d'évaluer la valeur limite qui permet de distinguer un faible spread d'un spread élevé. Celle-ci vaut 2.5%. Pour la pente, les scores opèrent une classification beaucoup moins précise.

### 3.2.2.3 Interprétation du troisième facteur

Ce troisième facteur est un facteur marginal, puisqu'il explique moins de 1% de l'inertie totale. Son expression est

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_3(\mathcal{R}^-) = & 0.278 \times R(0) + 0.206 \times R\left(\frac{1}{12}\right) + 0.140 \times R\left(\frac{2}{12}\right) + 0.080 \times R\left(\frac{3}{12}\right) \\
 & - 0.067 \times R\left(\frac{6}{12}\right) - 0.173 \times R\left(\frac{9}{12}\right) - 0.247 \times R(1) - 0.365 \times R(2) \\
 & - 0.347 \times R(3) - 0.282 \times R(4) - 0.206 \times R(5) - 0.134 \times R(6) \\
 & - 0.072 \times R(7) - 0.020 \times R(8) + 0.022 \times R(9) + 0.057 \times R(10) \\
 & + 0.162 \times R(15) + 0.215 \times R(20) + 0.247 \times R(25) + 0.269 \times R(30) \\
 & + 0.387 \times R(\infty)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Du fait même de sa qualité de représentation, nous devons être très prudents dans l'interprétation de ce facteur. Pour LITTERMAN et SCHEINKMAN [1991], il s'agit d'un facteur lié à la volatilité des taux. DE BANDT et LESNE [1991] estiment que c'est un "facteur de courbure" de la structure par terme. La sensibilité des différents taux à ce facteur décroît dans un premier temps, jusqu'à la maturité trois ans. Dans un second temps, elle croît et atteint sa valeur maximale pour une maturité infinie. L'intensité du score du facteur est donc maximale pour des courbes de taux qui présentent une forme  $\cup$  ou  $\cap$ .

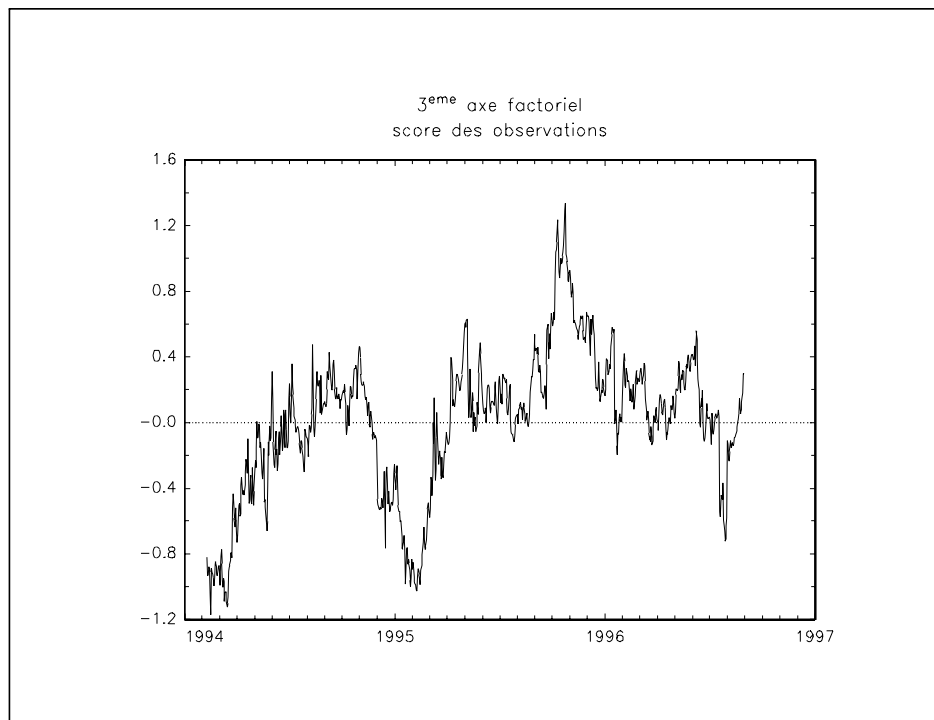
Qualité de représentation des variables						
$R(0)$	$R(\frac{1}{12})$	$R(\frac{2}{12})$	$R(\frac{3}{12})$	$R(\frac{6}{12})$	$R(\frac{9}{12})$	$R(1)$
1.49	0.82	0.38	0.12	0.09	0.57	1.18
$R(2)$	$R(3)$	$R(4)$	$R(5)$	$R(6)$	$R(7)$	$R(8)$
2.56	2.32	1.54	0.82	0.35	0.10	0.01
$R(9)$	$R(10)$	$R(15)$	$R(20)$	$R(25)$	$R(30)$	$R(\infty)$
0.01	0.06	0.51	0.89	1.18	1.40	2.88

Les résultats de la qualité de représentation et de la contribution des variables sont assez singuliers. Les maturités les mieux représentées sont les maturités zéro, un, deux, trois, quatre, vingt-cinq et trente ans et la maturité infinie. Ce sont ces mêmes maturités qui contribuent le plus à la formation de l'axe factoriel.

Contribution des variables						
$R(0)$	$R(\frac{1}{12})$	$R(\frac{2}{12})$	$R(\frac{3}{12})$	$R(\frac{6}{12})$	$R(\frac{9}{12})$	$R(1)$
7.75	4.25	1.96	0.64	0.45	2.98	6.10
$R(2)$	$R(3)$	$R(4)$	$R(5)$	$R(6)$	$R(7)$	$R(8)$
13.29	12.04	7.96	4.25	1.80	0.52	0.04
$R(9)$	$R(10)$	$R(15)$	$R(20)$	$R(25)$	$R(30)$	$R(\infty)$
0.05	0.32	2.64	4.63	6.12	7.26	14.95

Le graphe (3.7) indique le score des observations pour ce troisième axe factoriel. Il est difficile de relier cet axe à un phénomène propre à la structure par terme des taux d'intérêt. La première période d'inversion correspond à des scores négatifs. Ils redeviennent négatifs pour la période qui précède la deuxième inversion. Si nous analysons le graphe (3.8) des contributions, nous remarquons qu'il y a peu d'observations "bien représentées". Le graphique (3.9) présente les trois courbes de taux les mieux représentées. Le point commun de ces trois courbes est la valeur du spread, qui se situe autour de la valeur critique 2.5%. Le troisième axe est donc un axe complémentaire au second facteur.

Vu la difficulté d'interprétation de ce troisième facteur, nous pensons qu'il est préférable de ne pas en tenir compte. **Finalement, deux facteurs influencent**



Graphique 3.7

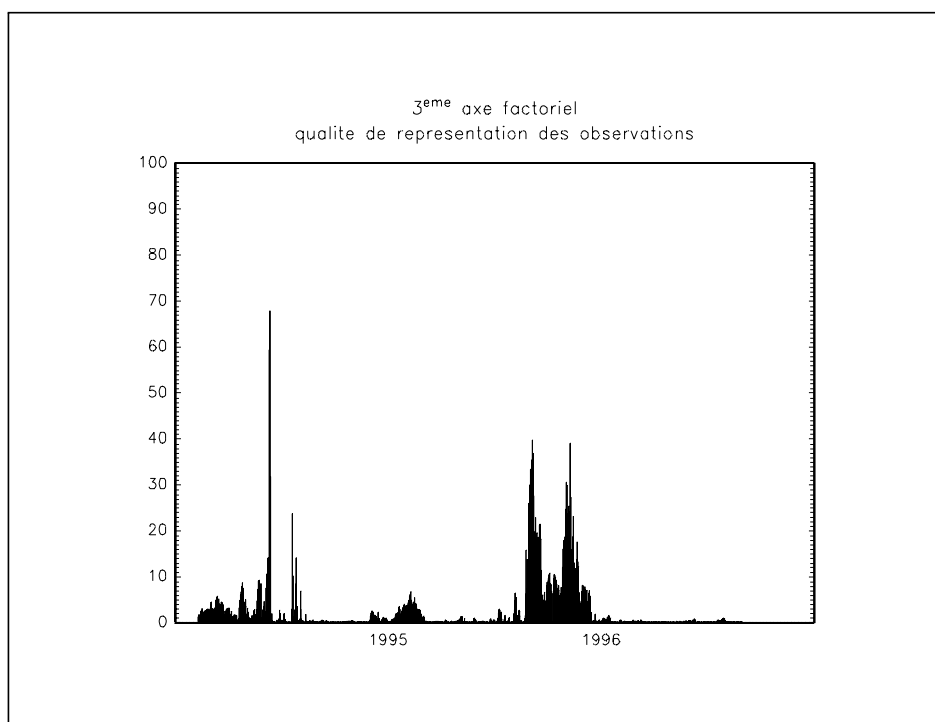
la courbe des taux : un facteur de niveau et un facteur de spread<sup>6</sup>.

### 3.2.3 Considération de différents segments de la courbe des taux

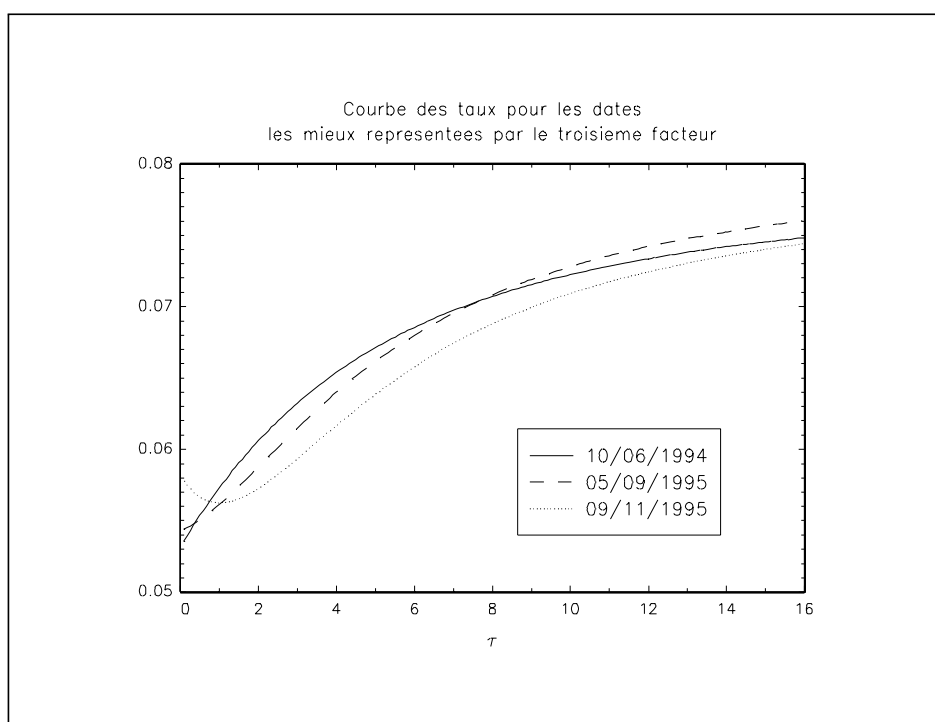
Dans ce paragraphe, nous cherchons s'il existe des facteurs spécifiques aux différents segments (court, moyen et long) de la courbe des taux. Pour la partie courte de la courbe des taux,  $\mathfrak{R}^-$  correspond aux taux zéro dont la maturité appartient à l'ensemble  $\{0 : \frac{1}{12} : 2\}$ . Pour la partie moyenne et longue, les maturités sont égales respectivement à  $\{2 : \frac{1}{2} : 8\}$  et  $\{10 : 5 : 50\}$ . Nous obtenons les résultats suivants :

Partie courte de la courbe des taux			
Facteur n°	valeur propre	% d'inertie	% cumulé
1	24.0387	96.15	96.15
2	0.9513	3.81	99.96
3	0.0099	0.04	100

<sup>6</sup>D'autres études présentent des résultats en faveur du modèle à deux facteurs, comme par exemple celle de FRACHOT et LESNE [1995] ("le Modèle Linéaire Gaussien estimé avec deux facteurs donne des résultats intéressants qui semblent rejeter l'idée de considérer trois facteurs") ou celle de STEELEY [1996] (qui relie le deuxième facteur à l'hypothèse de retour à la moyenne).



Graphique 3.8



Graphique 3.9

Partie moyenne de la courbe des taux			
Facteur n°	valeur propre	% d'inertie	% cumulé
1	10.8534	98.67	98.67
2	0.1438	1.31	99.97
3	0.0027	0.02	100

Partie longue de la courbe des taux			
Facteur n°	valeur propre	% d'inertie	% cumulé
1	8.9754	99.73	99.73
2	0.0243	0.27	100
3	0.0003	0.00	100

Pour chacune des parties, nous retrouvons le facteur de niveau<sup>7</sup>. L'existence d'un second facteur est problématique, puisque nous obtenons une qualité de représentation très en deçà de celle du paragraphe précédent. Dans tous les cas, nous ne sommes pas en mesure d'extraire un facteur spécifique. Pourtant, nous aurions pu penser qu'une analyse sur la partie courte permettrait de révéler un facteur de pente. Ces résultats confirment que le deuxième facteur mis en évidence dans le paragraphe précédent est bien un "facteur de spread", puisqu'il existe du fait de l'interaction des différents segments de la structure par terme.

### 3.3 Une analyse en terme de composantes inobservables

Dans cette section, nous cherchons à identifier **directement** les facteurs sous-jacents. Les données que nous avons construites sont alors soumises à deux structures : la structure factorielle et la structure temporelle. Ces données forment donc une représentation espace-état. GOURIÉROUX et MONFORT [1995a] rappellent que "la représentation d'états se révèle souvent adaptée à l'analyse des problèmes d'agrégation" et que nous pouvons considérer les facteurs comme des composantes inobservables. AOKI [1987] définit la notion d'état de la façon suivante :

*States are summaries of the information contained in the exogenous signal that is transmitted by the dynamics generating the time series. The state vector of a deterministic dynamic system is a minimal collection of information necessary to determine uniquely the future evolution of the dynamic system, given future time paths of all relevant exogenous variables affecting the system, including decision or control variables.*

---

<sup>7</sup>Pour des raisons de lisibilité, nous n'avons pas rapporté les différentes statistiques.

Certains problèmes apparaissent dans le cas d'un système stochastique, en particulier la spécification de la loi de probabilité. Si celle-ci est normale, le filtre de Kalman permet une estimation de ces composantes inobservables. Le filtre GFLS est une méthode possible si nous levons l'hypothèse de normalité. Cependant, nous devons prendre certaines précautions lors de l'utilisation de ces techniques car il peut exister des problèmes d'identification.

### 3.3.1 La modélisation espace-état

Nous avons déjà présenté celle-ci dans le paragraphe 1.5.2.2 du premier chapitre. Considérons un des modèles les plus classiques à composantes inobservables : le modèle de croissance linéaire stochastique d'HARRISON et STEVENS [1976]. Si nous reprenons les notations d'HARVEY [1989], celui-ci est défini par le système suivant :

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \end{cases} \quad (3.13)$$

avec  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$  et  $\zeta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta^2)$ . Nous supposons que ces trois bruits blancs sont indépendants. La représentation espace-état de ce modèle est

$$\begin{cases} y_t = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t \\ \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{bmatrix} \\ H = \sigma_\varepsilon^2 \\ Q = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.14)$$

La variable mesurée ou observée  $y_t$  dépend d'un vecteur d'état de dimension 2 et d'un bruit. Les composantes du vecteur d'état  $\mu_t$  et  $\beta_t$  ont une interprétation intuitive (GOURIÉROUX et MONFORT [1995a], page 608) :

*La variable  $\mu_t$  s'interprète comme un "niveau aléatoire" et la variable  $\beta_t$  comme une "pente aléatoire" ; lorsque  $\mu_t$  et  $\beta_t$  ont des valeurs initiales non nulles et lorsque  $\sigma_\eta^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$ ,  $\mu_t$  et  $\beta_t$  deviennent déterministes et le modèle se réduit au modèle de croissance linéaire déterministe :*

$$y_t = \beta_0 t + \mu_0 + \varepsilon_t.$$

Cette représentation espace-état permet donc de décomposer la série observée en deux composantes inobservables et le filtre de Kalman fournit une estimation de ces deux composantes. Nous obtenons une estimation du vecteur des paramètres  $(\sigma_\varepsilon \ \sigma_\eta \ \sigma_\zeta)^\top$  par les méthodes du maximum de vraisemblance dans le domaine du temps ou de Whittle dans le domaine des fréquences.

Considérons maintenant deux séries  $y_{1,t}$  et  $y_{2,t}$ . Celles-ci dépendent linéairement d'une composante spécifique  $s_{1,t}$  ou  $s_{2,t}$  et d'une composante commune  $c_t$ . Nous avons

$$\begin{cases} y_{1,t} = s_{1,t} + c_t + \varepsilon_{1,t} \\ y_{2,t} = s_{2,t} + c_t + \varepsilon_{2,t} \end{cases} \quad (3.15)$$

avec  $\varepsilon_{1,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$  et  $\varepsilon_{2,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$  deux bruits blancs indépendants. Supposons que les composantes spécifiques et communes sont des marches aléatoires. Le processus joint  $\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix}$  admet alors la représentation espace-état suivante

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t} \\ s_{2,t} \\ c_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s_{1,t} \\ s_{2,t} \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t-1} \\ s_{2,t-1} \\ c_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{3,t} \\ \varepsilon_{4,t} \\ \varepsilon_{5,t} \end{bmatrix} \\ H = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \\ Q = \begin{pmatrix} \sigma_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_5^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.16)$$

Nous pourrions bien sûr multiplier les exemples, introduire des variables exogènes, etc. Mais ces deux applications illustrent la simplicité et la puissance de la modélisation espace-état.

Dans le cas d'un modèle factoriel simple (connu sous le terme anglais "generalized dynamic factor models", NERLOVE, GREYER et CARVALHO [1979]), nous supposons que le vecteur observé  $y_t$  de dimension  $N$  est lié au vecteur des facteurs  $F_t$  de dimension  $m$  par un processus markovien d'ordre un. Nous avons, par exemple

$$\begin{cases} y_t = ZF_t + \varepsilon_t \\ F_t = TF_{t-1} + R\eta_t \end{cases} \quad (3.17)$$

avec  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, H)$  et  $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, Q)$ . En général, nous supposons que les facteurs sont indépendants entre eux (GOURIÉROUX et MONFORT [1995a]). C'est pourquoi la matrice  $Q$  est souvent diagonale. Dans le modèle (3.17), la dynamique des facteurs est un processus vectoriel autorégressif. Nous pouvons enrichir ce modèle de base par exemple en considérant un processus VARX. L'abandon du cadre gaussien implique l'utilisation d'outils relativement compliqués et peu performants d'un point de vue numérique. Dans ce cas, il est préférable de changer de cadre d'analyse.

Nous indiquons aussi que CLÉMENT, GOURIÉROUX et MONFORT [1993a] proposent d'estimer les facteurs à partir des prix des obligations et non à partir des



taux zéro. Soient  $P_t$  le vecteur des prix des obligations et  $P_t^c$  celui des obligations à coupon zéro. Ils considèrent le modèle suivant :

$$\begin{cases} P_t = \alpha_t P_t^c \\ P_t^c = AF_t + b + u_t \\ F_t = \Phi F_{t-1} + v_t \end{cases} \quad (3.18)$$

avec  $u_t$  et  $v_t$  deux bruits blancs indépendants de matrice de covariance  $\Omega$  et  $\Sigma$ . Ce modèle admet plusieurs représentations espace-état, par exemple

$$\begin{cases} P_t = [\alpha_t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} P_t^c \\ F_t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_t^c \\ F_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t^c \\ F_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & A \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} \\ H = \mathbf{0} \\ Q = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.19)$$

ou

$$\begin{cases} P_t = (\alpha_t A) F_t + (\alpha_t b) + u_t \\ F_t = \Phi F_{t-1} + v_t \\ H = \alpha_t \Omega \alpha_t^\top \\ Q = \Sigma \end{cases} \quad (3.20)$$

D'un point de vue numérique, la deuxième représentation est préférable.

### 3.3.2 Une analyse en terme de systèmes approximativement linéaires

KALABA et TEFATSION [1990] proposent un algorithme de filtrage pour les systèmes approximativement linéaires. L'équation de transition correspond approximativement à un processus de Markov d'ordre un

$$\alpha_{t+1} \simeq F_t \alpha_t + \mathbf{d}_t \quad (3.21)$$

où  $\alpha_t$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ ,  $F_t$  une matrice  $n \times n$  et  $\mathbf{d}_t$  un vecteur  $n \times 1$ . Les auteurs supposent que la relation entre la mesure et l'état est approximativement linéaire

$$\mathbf{y}_t \simeq H_t \alpha_t + \mathbf{m}_t \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{y}_t$  est un vecteur de dimension  $m$ ,  $H_t$  une matrice  $m \times n$  et  $\mathbf{m}_t$  un vecteur  $m \times 1$ . La dynamique du système (3.21-3.22) est proche de celle d'un modèle espace-état. Néanmoins, nous remarquons qu'il ne comporte pas de composantes stochastiques.

Pour déduire l'algorithme GFLS (generalized flexible least squares), Kalaba et Tefatsion définissent deux fonctions de coût dynamique  $c_D^2(\alpha)$  et de mesure  $c_M^2(\alpha)$ .

L'expression de celles-ci est

$$c_D^2(\alpha) = \sum_{t=1}^{Nobs-1} [\alpha_{t+1} - F_t \alpha_t - \mathbf{d}_t]^\top D_t [\alpha_{t+1} - F_t \alpha_t - \mathbf{d}_t] \quad (3.23)$$

et

$$c_M^2(\alpha) = \sum_{t=1}^{Nobs} [y_t - H_t \alpha_t - \mathbf{m}_t]^\top M_t [y_t - H_t \alpha_t - \mathbf{m}_t] \quad (3.24)$$

où  $D_t$  et  $M_t$  sont respectivement des matrices p.d.s. de dimension  $n \times n$  et  $m \times m$ . Soit  $c_I^2(\alpha)$  la fonction de coût associée à la position initiale du vecteur d'état. Nous avons

$$c_I^2(\alpha) = \alpha_1^\top Q_0 \alpha_1 - 2\alpha_1^\top \mathbf{p}_0 \quad (3.25)$$

Notons  $\mathbf{a}_t$  l'estimateur GFLS du vecteur d'état  $\alpha_t$  solution du problème suivant

$$\min_{\alpha} c_I^2(\alpha) + c_M^2(\alpha) + \mu c_D^2(\alpha) \quad (3.26)$$

Kalaba et Tesfatsion montre que le filtre GFLS est défini par les équations de récurrence suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t = H_t^\top M_t H_t + Q_{t-1} \\ V_t = [\mu F_t^\top D_t F_t + U_t]^{-1} \\ \mathbf{z}_t = H_t^\top M_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{m}_t) + \mathbf{p}_{t-1} \\ G_t = \mu V_t F_t^\top D_t \\ Q_t = \mu D_t (I_n - F_t G_t) \\ \mathbf{p}_t = G_t^\top \mathbf{z}_t + Q_t^\top \mathbf{d}_t \\ \mathbf{s}_t = V_t (\mathbf{z}_t - \mu F_t^\top D_t \mathbf{d}_t) \\ \mathbf{a}_t = U_t^{-1} \mathbf{z}_t \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Le filtre GFLS (que certains auteurs nomment "filtre de Kalman généralisé") est relativement peu employé<sup>8</sup>. Pourtant, il permet d'estimer de nombreux modèles structurels. Reprenons le modèle de croissance linéaire stochastique. Celui-ci peut être vu comme un système linéaire approximativement linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \beta_{t+1} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

### 3.3.3 Le problème d'identification d'un système linéaire

HARVEY [1989] commence la section 4.4 de son livre par les phrases suivantes :

<sup>8</sup>KALABA et TESFATSION [1996] indique une liste des quelques utilisations du filtre GFLS en économie.

*The question of identifiability is a fundamental one in statistical modelling. It is particularly important in the context of unobserved components models since it is **very easy to set up models which are not identifiable**.*

La question de l'identification est une question très technique mais fondamentale si nous désirons que les facteurs obtenus ont une signification. Elle fait appel à d'autres concepts qui sont par exemple l'unicité de la solution, l'observabilité du système ou la multiplicité des représentations. Sans approfondir cette question, voyons quelques exemples qui posent des problèmes d'identification.

Considérons le modèle espace-état suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = [1 \ 1] \begin{bmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t \\ \begin{bmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \mu_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{bmatrix} \\ H = \sigma_\varepsilon^2 \\ Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Il est évident que ce modèle pose un problème d'identification, puisque les états  $\mu_{1,t}$  et  $\mu_{2,t}$  jouent "le même rôle". La fonction d'autocovariance du processus  $(1 - L)y_t$  est

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 &= -\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_k &= 0 \quad \forall k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nous avons un système de deux équations linéairement indépendantes à trois variables. Il n'est pas possible d'obtenir une valeur unique pour les trois paramètres du modèle  $(\sigma_\varepsilon \ \sigma_1 \ \sigma_2)^\top$ . Nous sommes confrontés à un problème d'identification.

Supposons maintenant que, dans le modèle espace-état précédent, les composantes inobservables ont le même bruit. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = [1 \ 1] \begin{bmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t \\ \begin{bmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \mu_{2,t-1} \end{bmatrix} + \eta_t \\ H = \sigma_\varepsilon^2 \\ Q = \sigma_\eta^2 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Si nous calculons la fonction d'autocovariance du processus  $(1 - L)y_t$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 4\sigma_\eta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 &= -\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_k &= 0 \quad \forall k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dans ce cas, le système (3.32) admet une solution unique. Nous n'avons plus le problème d'identification précédent.

D'une façon générale, les problèmes d'identification sont liés aux nombres de paramètres, de variables observées et d'états. Par exemple, si le nombre d'états est supérieur au nombre de variables observées ou si le nombre de paramètres est important, on risque davantage de rencontrer un problème d'identification. Voyons un exemple avec un modèle factoriel de dimension deux. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ f_{1,t} \\ f_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t} \\ f_{2,t} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_{1,t} \\ f_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t-1} \\ f_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{bmatrix} \\ H = \mathbf{0} \\ Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

La forme stationnaire du modèle est

$$y_t^+ = \begin{bmatrix} y_{1,t} - y_{1,t-1} \\ y_{2,t} - y_{2,t-1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Si nous calculons la fonction génératrice spectrale de la forme stationnaire, nous obtenons

$$G(\lambda_j) = \begin{pmatrix} z_{11}^2 \sigma_1^2 + z_{12}^2 \sigma_2^2 & z_{21} z_{11} \sigma_1^2 + z_{12} z_{22} \sigma_2^2 \\ z_{21} z_{11} \sigma_1^2 + z_{12} z_{22} \sigma_2^2 & z_{21}^2 \sigma_1^2 + z_{22}^2 \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Trois paramètres suffisent à définir cette fonction génératrice. Or le modèle comporte six paramètres. Le modèle (3.33) n'est donc pas identifié.

Dans certains cas, nous pouvons aussi être confrontés au problème de l'estimation des composantes inobservables parce que les valeurs initiales du filtre  $\mathbf{a}_0$  et  $P_0$  sont inconnues et qu'il n'est pas possible d'utiliser la règle de JONES [1980] pour initialiser le filtre de Kalman. Il existe théoriquement des méthodes pour remédier à ce problème (filtre d'information, filtre de Kalman diffus) mais elles donnent des résultats peu satisfaisants en pratique. Reprenons l'exemple précédent et considérons le processus  $f_t^\bullet$  défini par

$$f_t^\bullet = f_{1,t} + f_{2,t} \quad (3.36)$$

Il est facile de montrer que le modèle (3.33) admet la représentation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ f_{1,t} \\ f_t^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} - z_{12} & z_{12} \\ z_{21} - z_{22} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t} \\ f_t^\bullet \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_{1,t} \\ f_t^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t-1} \\ f_{t-1}^\bullet \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{3,t} \end{bmatrix} \\ H = \mathbf{0} \\ Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.37)$$

L'estimation des composantes inobservables dans ce modèle dépend fortement de l'initialisation du filtre et donc de la connaissance a priori sur les états dans la position initiale.

### 3.3.4 Quelques résultats empiriques

Dans le second chapitre, nous avons analysé différentes mesures de spread : celles-ci dépendent des maturités considérées. D'une façon générale, la notion de spread fait référence à la différence entre un taux long et un taux court. Le filtre GFLS permet de construire un spread tendanciel correspondant à la différence entre la tendance de long terme et celle de court terme des taux zéro. Reprenons les données  $\mathfrak{R}^-$  de la première section. Nous supposons que  $\mathfrak{R}^-$  dépend de facteurs qui suivent approximativement une marche aléatoire, c'est-à-dire

$$\alpha_{t+1} \simeq \alpha_t \quad (3.38)$$

Nous avons deux états, le premier représentant la tendance courte et le second la tendance longue :

$$\mathfrak{R}^- = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1,t} \\ \alpha_{2,t} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

avec

$$j_{1,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq i^* \\ 0 & \text{si } i > i^* \end{cases} \quad \text{et} \quad j_{2,i} = 1 - j_{1,i} \quad (3.40)$$

Nous rappelons que  $\mathfrak{R}^-$  comprend les taux zéro de vingt et une maturités.  $i^*$ , qui définit la frontière entre le court terme et le long terme, peut donc prendre une valeur dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 20, 21\}$ . Nous considérons que la valeur optimale de  $i^*$  est celle pour laquelle la part de la variance totale expliquée est maximale. Nous obtenons  $i^*$  égal à 10. Dans cette analyse, la maturité quatre ans représente la frontière entre les taux courts et les taux longs. Nous représentons sur le graphique (3.10) le spread  $a_{2,t} - a_{1,t}$ . Pour la période étudiée, celui-ci a tendance à croître. Nous remarquons aussi qu'il est très différent de ceux obtenus dans le deuxième chapitre. Nous pouvons étendre cette analyse en prenant en compte trois segments ou faire dépendre un état de variables exogènes.

L'étude de GONG et REMOLONA [1996] utilise pour cadre d'analyse les modèles espace-état. Ils proposent trois modèles factoriels différents. Pour le premier modèle, ces auteurs supposent que les taux zéro (trois mois, six mois, un an, deux ans, cinq ans et dix ans) dépendent linéairement de deux facteurs  $f_{1,t}$  et  $f_{2,t}$ . Chacun de ces facteurs est un processus autorégressif d'ordre un satisfaisant l'hypothèse de retour à la moyenne. Il y a un seul facteur  $f_t$  pour les second et troisième modèles, mais le paramètre d'attraction  $\bar{f}$  varie dans le temps. Cet article est



Graphique 3.10

intéressant pour au moins deux raisons. D'abord, avec celle de JEGADEESH et PENNACCHI [1996], c'est l'une des rares études à présenter des résultats empiriques sur la modélisation factorielle de la structure par terme en utilisant la technique du filtre de Kalman. Ensuite, les auteurs concluent que leurs modèles à deux facteurs ont des difficultés pour expliquer la totalité de la courbe des taux puisque chacun des modèles appréhende seulement un segment particulier (en général, court ou long) de la structure par terme.

L'hypothèse d'un facteur de retour à la moyenne est assez courante en finance, mais beaucoup moins en économie. Considérons le modèle espace-état suivant à un seul facteur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} r_t \\ R_t(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f_t + \varkappa \\ f_t = (1 - a) f_{t-1} + ab + \eta_t \\ H = \mathbf{0} \\ Q = \sigma^2 \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Nous avons

$$E_{t-1} [f_t - f_{t-1}] = a(b - f_{t-1}) \quad (3.42)$$

Le paramètre  $b$  est la valeur d'attraction du facteur et le paramètre  $a$  mesure la

vitesse de convergence. Avec nos données, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{ML}} \\ \hat{b}_{\text{ML}} \\ \hat{\varkappa}_{\text{ML}} \\ \hat{\sigma}_{\text{ML}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0078 \\ 0.0403 \\ 6.5035^{(*)} \\ 0.0964^{(*)} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Nous rejetons l'hypothèse d'un facteur de retour à la moyenne puisque les coefficients  $a$  et  $b$  ne sont pas significatifs au seuil de rejet de 1%. Si nous supposons maintenant que le facteur n'agit pas directement sur les deux taux mais sur le spread, nous pouvons formuler le modèle suivant

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} r_t \\ R_t(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} f_t + \varkappa \\ f_t = (1-a)f_{t-1} + ab + \eta_t \\ H = \mathbf{0} \\ Q = \sigma^2 \end{cases} \quad (3.44)$$

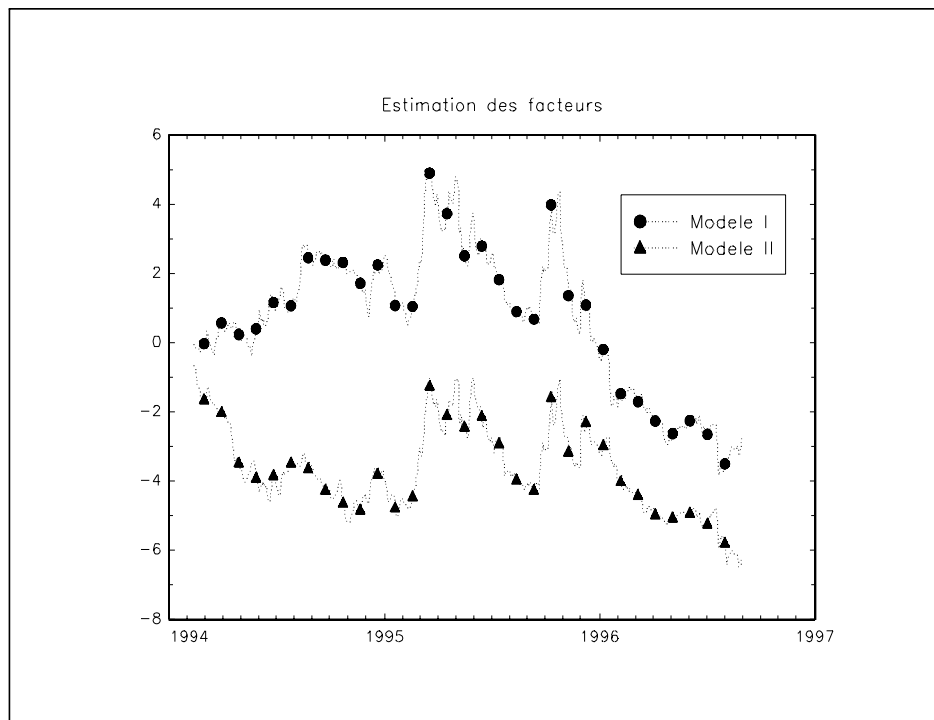
Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{ML}} \\ \hat{b}_{\text{ML}} \\ \hat{\varkappa}_{\text{ML}} \\ \hat{\sigma}_{\text{ML}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0307064^{(**)} \\ -1.327938^{(*)} \\ 6.5034^{(*)} \\ 0.0955^{(*)} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Au seuil de confiance de 95%, nous ne pouvons plus refuser l'hypothèse d'un facteur de retour à la moyenne. Cependant, le coefficient d'attraction n'est pas très élevé. A titre de comparaison, nous reportons sur le graphique (3.11) l'estimation du facteur pour les deux modèles. Pour mettre en évidence un tel facteur, GONG et REMOLONA [1996] supposent que la moyenne  $b$  varie dans le temps et que la variance de  $f_t$  est hétéroscédastique, mais avec des modélisations complexes, il est difficile d'imputer aux seules données l'existence de facteurs.

### 3.4 La prise en compte de relations multilatérales

Dans les sections précédentes, nous ne tenions pas compte des relations multilatérales. Or, plusieurs facteurs de nature internationale peuvent influencer la structure par terme nationale d'un pays. Par exemple, la diversification d'un portefeuille conduit l'investisseur à répartir sa richesse entre les actifs nationaux et les actifs étrangers (ADLER et DUMAS [1983]). Même si les coupons zéro (ou les obligations d'état) étrangers ne sont pas de parfaits substituts des coupons zéro (ou des obligations d'état) nationaux, il existe une interdépendance entre les rendements de ces titres. Dans ce cadre d'analyse, JOHNSON [1993] étudie les liens entre les courbes de taux. Une autre raison pour prendre en compte le caractère multilatéral est l'interdépendance des politiques monétaires, en particulier en matière de change. Cet



Graphique 3.11

argument, avancé par BISIGANO [1983], est souvent repris par les économistes. L'hypothèse d'égalisation internationale des rendements est généralement rejetée, c'est pourquoi nous ne développerons que ce deuxième argument. Le premier paragraphe est consacré à la mise en évidence d'un facteur multilatéral pour les structures par terme française et allemande.

### 3.4.1 Mise en évidence d'un facteur multilatéral

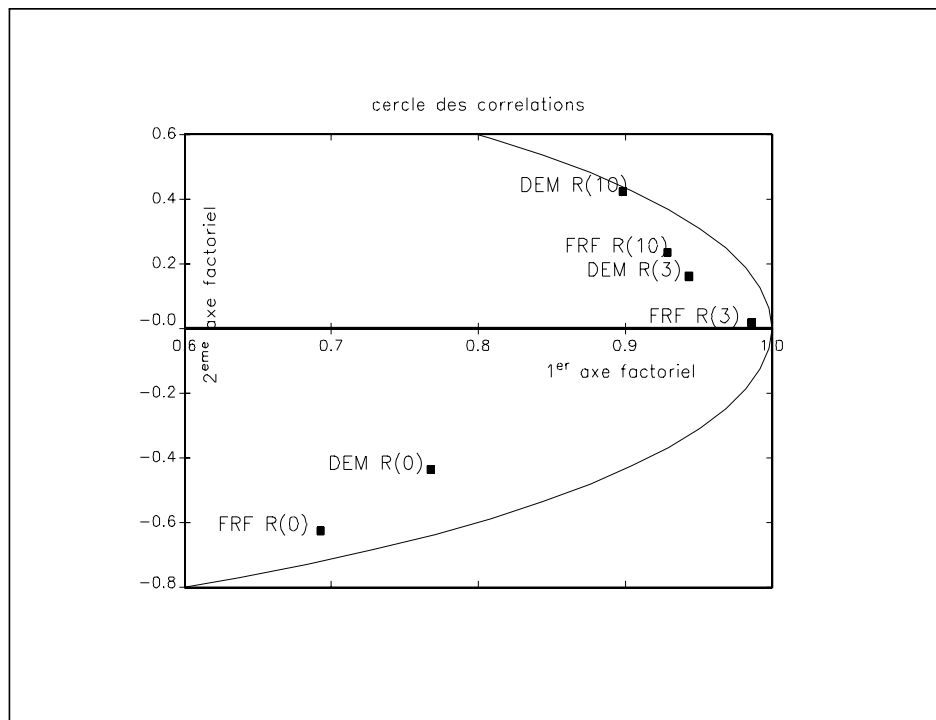
Nous reprenons le cadre d'analyse de la première section de ce chapitre, et nous l'appliquons aux courbes de taux allemands et français. Nous considérons la série multidimensionnelle  $\mathfrak{E}$  comprenant les taux zéro courts, moyens et longs des deux pays. Nous avons

$$\mathfrak{E} = \{R(0), R(3), R(10), R^*(0), R^*(3), R^*(10)\} \quad (3.46)$$

Le choix de la maturité dix ans est particulier. Nous avons effectué l'analyse qui suit avec les taux longs  $R(\infty)$  et  $R^*(\infty)$  et nous avons obtenus des résultats assez curieux. Un des facteurs concernait uniquement le taux long allemand. C'est pourquoi nous avons préféré prendre un taux long avec une maturité finie<sup>9</sup>. Nous

<sup>9</sup>Nous obtenons en général des résultats similaires pour des maturités plus grandes que dix ans (par exemple vingt ou trente ans).





Graphique 3.12

obtenons les résultats suivants :

Facteur n°	valeur propre	% d'inertie	% cumulé
1	4.6011	76.68	76.68
2	0.8429	14.05	90.73
3	0.4903	8.17	98.90
4	0.0416	0.69	99.60

Nous pouvons considérer qu'il existe trois facteurs significatifs. Nous remarquons que, même si le premier facteur explique une grande part de l'inertie, les deux autres facteurs sont relativement importants. Le cercle de corrélation du plan principal correspond au graphique (3.12). Une première comparaison avec le graphique (3.1) indique une certaine similarité. En fait, nous allons voir que les deux premiers facteurs s'interprètent de la même façon que dans le cas unidimensionnel. L'existence de ce troisième facteur est beaucoup plus intéressante.

Le premier axe factoriel représente 76% de la variance. Son expression est

$$\mathcal{J}_1(\mathcal{E}) = 0.323 \times R(0) + 0.460 \times R(3) + 0.433 \times R(10) + 0.358 \times R^*(0) + 0.440 \times R^*(3) + 0.419 \times R^*(10) \quad (3.47)$$

Nous remarquons que les coefficients des taux allemands sont proches de ceux des taux français et qu'ils sont tous positifs. C'est un axe classique de niveau de la

courbe des taux. Les tableaux de qualité de représentation des variables et de contribution des variables donnent quelques informations supplémentaires. Ainsi, la maturité la mieux représentée est celle de trois ans. Le taux qui contribue le moins à la formation de l'axe et qui a la plus faible représentation est le taux zéro français court  $R(0)$ . C'est aussi le taux le plus variable.

1 <sup>er</sup> axe factoriel					
Qualité de représentation des variables					
$R(0)$	$R(3)$	$R(10)$	$R^*(0)$	$R^*(3)$	$R^*(10)$
47.96	97.23	86.26	58.94	89.03	80.69
Contribution des variables					
$R(0)$	$R(3)$	$R(10)$	$R^*(0)$	$R^*(3)$	$R^*(10)$
10.42	21.13	18.75	12.81	19.35	17.54

L'expression du deuxième axe factoriel est

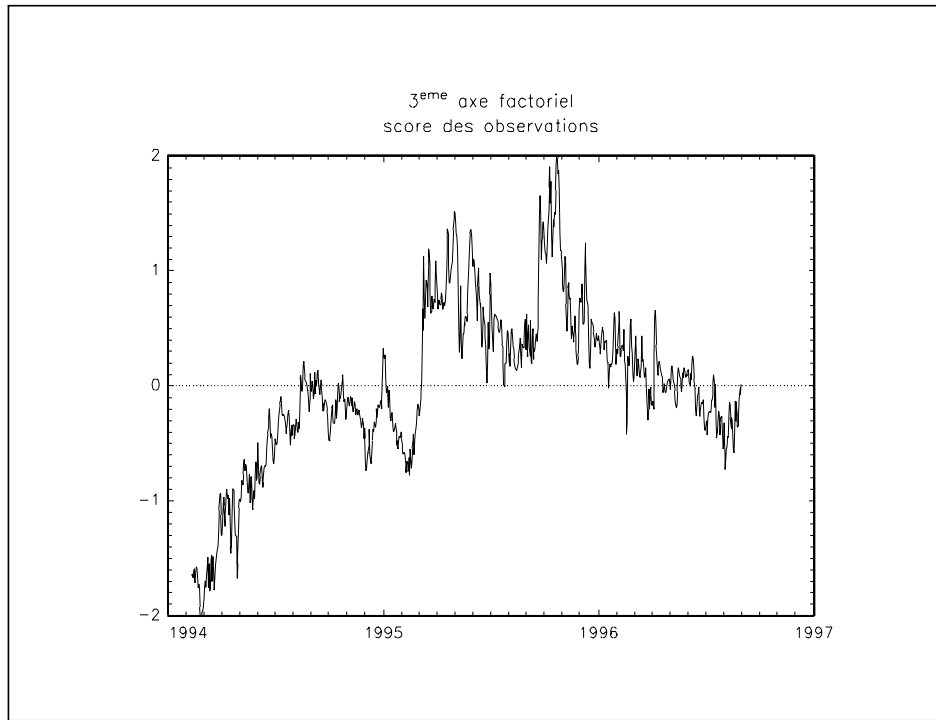
$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(\mathfrak{E}) = & -0.681 \times R(0) + 0.020 \times R(3) + 0.256 \times R(10) \\ & -0.475 \times R^*(0) + 0.175 \times R^*(3) + 0.462 \times R^*(10) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nous vérifions l'opposition entre les taux court le long. C'est donc un "facteur de spread". Cependant, il existe des différences notables entre les taux français et allemands. Pour les taux allemands, nous avons une opposition presque parfaite (les valeurs des taux court et long sont relativement proches en valeur absolue). Nous n'observons pas cette symétrie pour les taux français puisque l'intensité du coefficient du taux court est au moins deux fois plus grande que celle du taux long. Dans cet axe, ce taux court occupe d'ailleurs une place particulière puisque sa qualité de représentation et sa contribution sont relativement élevée par rapport aux autres taux zéro.

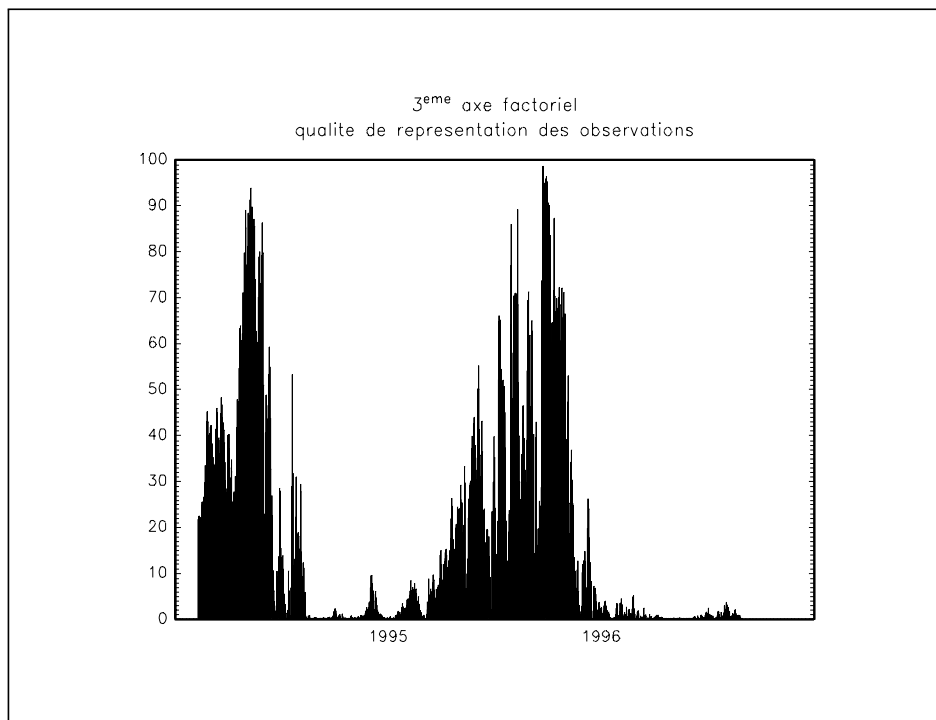
2 <sup>ème</sup> axe factoriel					
Qualité de représentation des variables					
$R(0)$	$R(3)$	$R(10)$	$R^*(0)$	$R^*(3)$	$R^*(10)$
39.13	0.03	5.51	19.06	2.59	17.97
Contribution des variables					
$R(0)$	$R(3)$	$R(10)$	$R^*(0)$	$R^*(3)$	$R^*(10)$
46.43	0.04	6.54	22.61	3.07	21.32

Nous retrouvons plus ou moins les deux facteurs mis en évidence dans le cas unidimensionnel : un facteur de niveau et un facteur de spread. Le troisième facteur est lié au caractère multidimensionnel de cette analyse. Il explique plus de 8% de l'inertie et son expression est

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3(\mathfrak{E}) = & 0.499 \times R(0) + 0.185 \times R(3) + 0.375 \times R(10) \\ & -0.660 \times R^*(0) - 0.375 \times R^*(3) - 0.017 \times R^*(10) \end{aligned} \quad (3.49)$$



Graphique 3.13



Graphique 3.14

Le troisième facteur oppose les taux français aux taux allemands. Cependant, l'intensité des coefficients des taux allemands n'est pas la même que celle des taux français. Si cette intensité avait été la même, nous aurions pu considérer ce troisième facteur comme un indicateur simple d'écart de taux. Il faut rappeler que les taux français sont généralement plus élevés (du moins pour la période considérée) que ceux allemands. Nous pensons que ceci explique cette différence d'intensité. Nous remarquons que les maturités sont différemment représentées. En fait, le score sur cet axe est très proche de l'expression suivante :

$$\widehat{\mathcal{J}}_3(\mathfrak{E}) = 0.499 \times R(0) - 0.660 \times R^*(0) + 0.375 \times R(10) - 0.375 \times R^*(3) \quad (3.50)$$

Tout se passe comme si nous avons une opposition entre le taux court français et le taux court allemand d'une part, et le taux long français et le taux moyen allemand d'autre part.

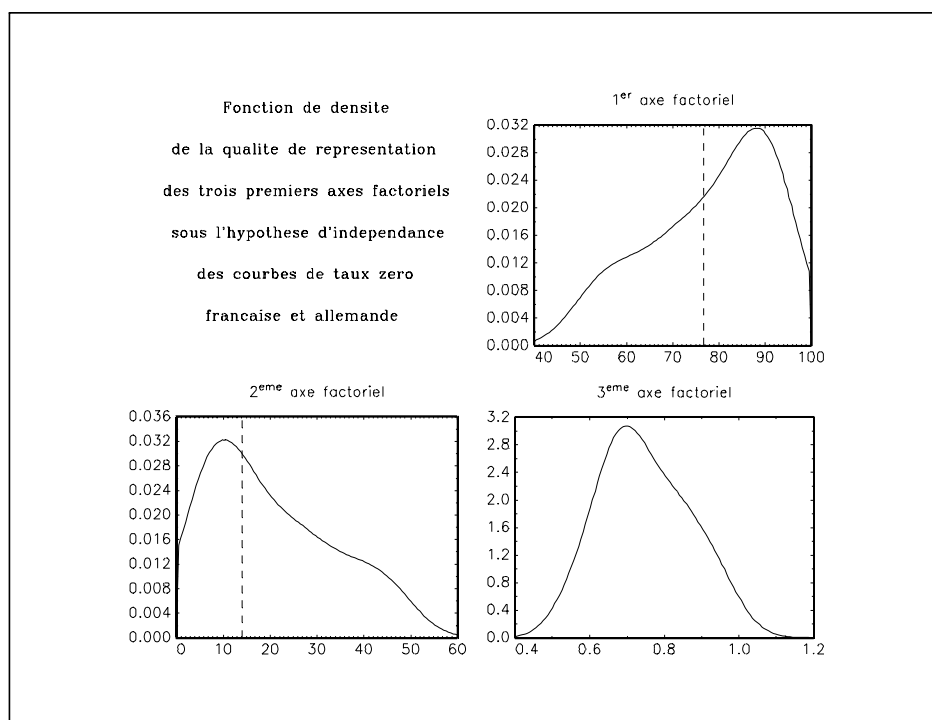
3 <sup>ème</sup> axe factoriel					
Qualité de représentation des variables					
$R(0)$	$R(3)$	$R(10)$	$R^*(0)$	$R^*(3)$	$R^*(10)$
12.19	1.67	6.89	21.35	6.91	0.01
Contribution des variables					
$R(0)$	$R(3)$	$R(10)$	$R^*(0)$	$R^*(3)$	$R^*(10)$
24.87	3.41	14.06	43.54	14.09	0.03

L'existence de ce troisième facteur est-elle réellement imputable à l'approche multilatérale ? Pour répondre à cette question, nous menons une étude de Monte Carlo. Considérons la partition suivantes  $\mathfrak{E} = \{\mathfrak{E}_{\text{FRF}}, \mathfrak{E}_{\text{DEM}}\}$  des taux zéro. Pour chaque élément de cette partition, nous engendrons des données de substitution avec un algorithme de rééchantillonnage spectral (en anglais, l'algorithme *FT surrogate*). Cet algorithme a l'avantage de conserver le spectre multidimensionnel de la série. Pour chaque simulation, nous menons ensuite une analyse en composantes principales. Le graphe (3.15) présente les fonctions de densité des qualités de représentation des trois premiers axes factoriels<sup>10</sup>. Il est clair que le troisième axe factoriel mis en évidence dans l'analyse précédente dépend de l'interdépendance entre les courbes de taux français et allemands.

### 3.4.2 L'interdépendance des taux zéro

Il existe de nombreuses études sur l'interdépendance des taux d'intérêt mais peu font référence aux taux zéro. Même si on considère généralement que l'article de

<sup>10</sup>Nous estimons ces fonctions de densité par la méthode du noyau avec 250 simulations.



Graphique 3.15

PORTER [1971] est l'une des premières analyses sur l'interdépendance des courbes de taux, l'objectif de l'auteur est avant tout d'expliquer les prévisions du cours de change à partir des structures par terme. L'idée que les déplacements de courbes de taux ne sont pas indépendants à cause des anticipations de change est reprise par BISIGNANO [1983]. Pour mettre en évidence cette interdépendance, deux types d'approches ont été considérées. La première concerne les relations entre les taux d'intérêt **nominaux**. La seconde est basée sur la structure par terme des **spreads** de taux.

### 3.4.2.1 Une approche en terme du taux nominal

Nous rappelons que l'analyse des relations entre les taux d'intérêt nominaux est fortement liée à la théorie des anticipations rationnelles. D'après cette théorie, les variations des taux d'intérêt de long terme peuvent être expliquées par les anticipations des variations des taux courts. En acceptant l'hypothèse de parité non couverte des taux d'intérêt, ces variations dépendent alors des anticipations de change. Si nous supposons que les anticipations du cours de change sont exogènes (cela revient à transformer la relation de parité non couverte des taux en une relation causale), les variations des taux d'intérêt longs domestique et étranger ne sont pas indépendantes (BISIGNANO [1983]). Cependant, nous remarquons qu'il n'existe pas d'études em-

piriques basées sur les taux **zéro**. Et en général, les travaux ne concernent pas les taux français (voir par exemple KROL [1986]). Les résultats suivants sont donc doublement intéressants.

Dans un premier temps, nous cherchons à vérifier l'interdépendance des taux zéro pour la partie courte. Nous choisissons de modéliser les taux zéro allemands et français instantanés et de maturité six mois selon un processus VAR. Les critères de choix du retard optimal indiquent un retard égal à un.

BIC	AIC $\alpha$	AIC $c$	SIC	FPE	AIC	HQ
1	1	1	1	1	1	1

Nous obtenons alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \Delta r_t \\ \Delta R_t \left(\frac{1}{2}\right) \\ \Delta r_t^* \\ \Delta R_t^* \left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cccc} -0.628^{(*)} & 0.795^{(*)} & 0.288^{(**)} & -0.537^{(**)} \\ -0.346^{(*)} & 0.458^{(*)} & 0.147 & -0.294^{(***)} \\ -0.185 & 0.296 & -0.383^{(*)} & 0.0268 \\ -0.157^{(**)} & 0.251^{(**)} & -0.141^{(***)} & -0.0922 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta r_{t-1} \\ \Delta R_{t-1} \left(\frac{1}{2}\right) \\ \Delta r_{t-1}^* \\ \Delta R_{t-1}^* \left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \right] = \varepsilon_t \\ \hat{\Sigma} = \left[ \begin{array}{cccc} 31.0 & & & \\ 19.3 & 13.4 & & \\ 1.37 & 1.04 & 31.5 & \\ 1.06 & 0.95 & 16.8 & 9.74 \end{array} \right] \times 10^{-7} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Nous observons des différences importantes entre les taux allemands et les taux français. Les variations du taux instantané français dépendent significativement des variations des taux zéro allemands. En revanche, les variations du taux instantané allemand ne dépendent pas de façon significative des variations des taux zéro français. Les variations du taux six mois allemand s'expliquent en partie par les variations des taux français. Ces résultats indiquent clairement que ces taux sont liés et que les parties courtes allemande et française de la structure par terme ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

Il est plus difficile de constater l'indépendance pour les parties moyenne et longue. Considérons par exemple les taux de maturité un et cinq ans. Nous avons

BIC	AIC $\alpha$	AIC $c$	SIC	FPE	AIC	HQ
1	1	2	1	3	3	1

En prenant un retard optimal égal à un, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \Delta R_t(1) \\ \Delta R_t(5) \\ \Delta R_t^*(1) \\ \Delta R_t^*(5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.0653 & 0.346^{(*)} & -0.0930 & -0.138 \\ 0.100^{(*)} & -0.0721 & -0.0086 & 0.115^{(***)} \\ 0.0224 & 0.0036 & -0.238^{(*)} & 0.309^{(*)} \\ -0.0265 & 0.188^{(*)} & 0.118^{(*)} & 0.0567 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_{t-1}(1) \\ \Delta R_{t-1}(5) \\ \Delta R_{t-1}^*(1) \\ \Delta R_{t-1}^*(5) \end{bmatrix} = \varepsilon_t \\ \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 7.55 \\ 3.26 & 4.22 \\ 0.94 & 0.81 & 3.37 \\ 1.13 & 2.04 & 0.58 & 4.97 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Il est tentant de conclure que l'interdépendance des structures par terme française et allemande ne concerne que la partie courte. En fait, le problème est beaucoup plus complexe. A partir des résultats de l'analyse en composantes principales, nous avons eu l'idée de mélanger des taux qui appartiennent à des segments différents :

$$\Delta R_t(10) + 0.102353^{(*)} \times \Delta R_t(10) - 0.554610^{(*)} \times \Delta R_t^*(3) = \varepsilon_t \quad (3.53)$$

Les variations du taux zéro français dix ans dépendent très fortement des variations du taux zéro allemand trois ans. Cela implique que la partie de moyen terme de la courbe des taux français réagit à la partie de long terme de la courbe des taux allemands.

### 3.4.2.2 Une approche en terme de spread de taux

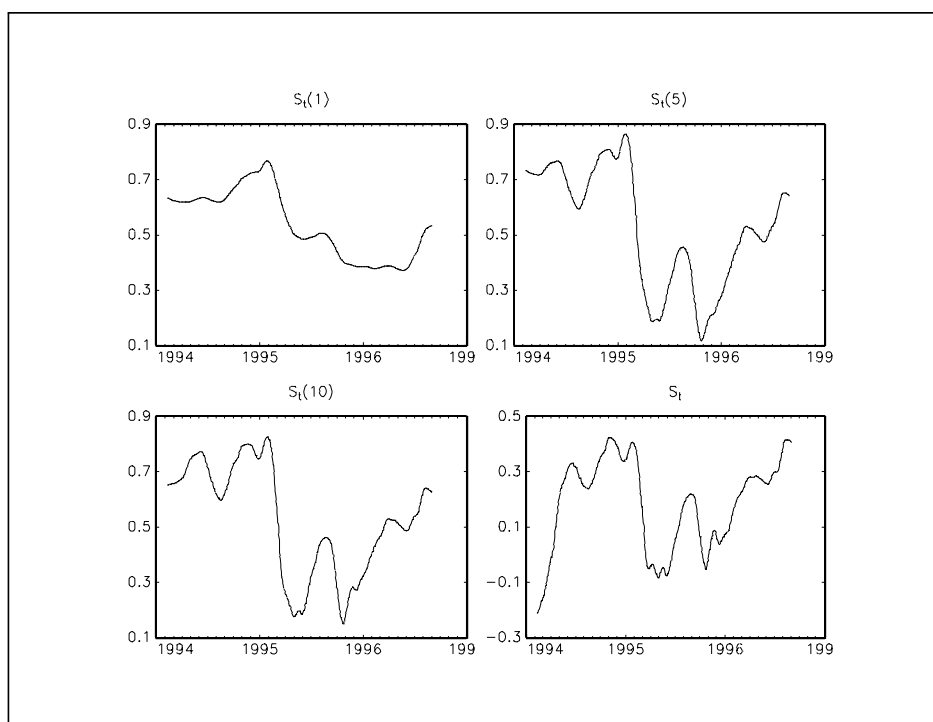
Considérons la régression suivante pour différentes valeurs prises par  $\tau$

$$S_t(\tau) = \alpha + \beta S_t^*(\tau) + \varepsilon_t \quad (3.54)$$

En utilisant la méthode de Phillips et Hansen, nous remarquons que la valeur du coefficient  $\beta$  diminue avec la maturité du spread.

$\tau$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
1	0.003 <sup>(*)</sup>	0.880 <sup>(*)</sup>
5	-0.003	0.767 <sup>(*)</sup>
10	-0.003	0.628 <sup>(*)</sup>
$\infty$	-0.011 <sup>(*)</sup>	0.325 <sup>(*)</sup>

Ces résultats sont compatibles avec ceux obtenus dans le paragraphe précédent. Cependant, l'approche en terme de spread de taux présente un problème de stabilité des coefficients. Le graphique (3.16) présente l'évolution du coefficient  $\beta$  de l'équation (3.54) estimé par les moindres carrés flexibles (Kalaba et Tesfatsion [1989]). La relation entre le spread de taux français et celui allemand varie dans le temps assez fortement. Une analyse en terme de variation de spread donnerait des résultats très pauvres. Nous pouvons donc affirmer (pour nos données) que l'interdépendance des courbes est avant tout une interdépendance en terme de taux nominal et non en terme de spread de taux.



Graphique 3.16

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous montrons que la formation et la déformation de la structure par terme des taux d'intérêt dépend de deux facteurs, un facteur de niveau et un facteur de spread. Nous montrons aussi qu'une analyse de la courbe des taux doit s'inscrire dans un cadre international. Nous pouvons prolonger cette étude principalement dans deux directions. Il serait intéressant de chercher quels sont les déterminants des deux facteurs mis en exergue par nos analyses, en particulier du second. La mise en évidence de l'interdépendance des courbes de taux allemands et français concerne principalement le court terme. Est-ce dû à la fonction de réaction des autorités monétaires ? La question de l'explication de ce phénomène reste posée.



## Partie II

Aspects financiers de la structure  
par terme ou une approche de la  
structure par terme théorique

# Chapitre 4

## Modèle financier de structure par terme — Le cas d'une seule variable d'état

### 4.1 Introduction

Contrairement à l'analyse économique, l'analyse financière de la structure par terme est relativement unifiée. Même s'il existe de nombreux modèles, ils présentent des caractéristiques communes et sont considérés comme des cas particuliers d'un modèle plus général. En fait, il existe deux approches distinctes en finance pour modéliser la structure par terme : l'une est fondée sur le concept d'absence d'opportunité d'arbitrage et l'autre est caractérisée par l'équilibre entre l'offre et la demande des actifs. Nous avons donc deux types de modèle : le modèle d'arbitrage et le modèle d'équilibre intertemporel. Dans le chapitre suivant, nous verrons qu'ils présentent de fortes similarités. Avant d'aborder le cas général, nous consacrons ce chapitre au modèle d'arbitrage à une seule variable d'état (ou à un seul facteur).

Le principe de résolution est relativement ancien, puisqu'il a été utilisé par BLACK et SCHOLLES [1973] et MERTON [1973] pour la valorisation des options européennes. Nous verrons ainsi que, sous certaines conditions, le prix d'une obligation à coupon zéro satisfait une Équation Différentielle Partielle, qui est un cas particulier de l'équation fondamentale de la finance<sup>1</sup>. La difficulté majeure est la résolution de cette EDP. Dans des cas particuliers (correspondant chacun à un modèle précis), il est possible de résoudre analytiquement cette EDP mais, dans la plupart des cas, il n'existe pas de solution symbolique à ce problème. L'objet principal de ce chapitre est de proposer des méthodes de résolution numérique. Nous envisageons deux types de méthodes : les méthodes d'approximation et de simulation.

---

<sup>1</sup>que nous définissons dans le dernier chapitre.

## 4.2 Quelques notions préliminaires

Dans ce chapitre, ainsi que dans le prochain, nous utilisons une modélisation en temps continu, mais avant d'aborder le modèle d'arbitrage, nous précisons quelques notions nécessaires à la bonne compréhension de ce modèle.

### 4.2.1 La notion de structure par terme en temps continu

Soient  $P_t^c(n)$  le prix à l'instant  $t$  d'une obligation à coupon zéro de nominal un franc et de maturité  $n$  périodes (ou d'échéance  $T = t + n$ ) et  $R_t(n)$  le taux actuariel de ce coupon zéro. En temps discret, ils sont reliés par la fonction d'actualisation suivante

$$P_t^c(n) = \frac{1}{[1 + R_t(n)]^n} \quad (4.1)$$

Nous considérons la partition  $\Delta$  de  $[t, t + n]$  telle que nous avons

$$\Delta = \{t = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t + n = T\} \quad (4.2)$$

avec  $t_{i+1} - t_i = k = \frac{n}{m}$ . Le passage du temps discret au temps continu revient à faire tendre  $m$  vers l'infini. Nous avons alors

$$P_t^c(n) = \frac{1}{\left[1 + \frac{R_t(n)}{m}\right]^{mn}} \quad (4.3)$$

Nous en déduisons que le prix d'une obligation à coupon zéro et son taux actuariel sont reliés en temps continu par la formule suivante<sup>2</sup>

$$P_t^c(T - t) = e^{-(T-t)R_t(T-t)} \quad (4.8)$$

ou encore en notant  $\tau = T - t$

$$P_t^c(\tau) = e^{-\tau R_t(\tau)} \quad (4.9)$$

---

<sup>2</sup>Considérons la fonction  $f(y) = \exp(xy)$ . L'expansion de Taylor de la fonction  $f$  à l'ordre 1 au point  $y = y_0$  est

$$\exp(xy) = \exp(xy_0) + x(y - y_0)\exp(xy_0) + \epsilon(y - y_0) \quad (4.4)$$

avec

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \epsilon(y - y_0) = 0 \quad (4.5)$$

Posons  $y_0 = 0$  et faisons tendre  $y$  vers  $0^+$ . Nous avons alors

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \exp(xy) = 1 + yx \quad (4.6)$$

En posant  $m = \frac{1}{y}$ , nous en déduisons que

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \exp x \quad (4.7)$$

Nous définissons la structure par terme des coupons zéro à un instant  $t$  donné par l'ensemble

$$\mathfrak{P} = \{P_t^c(\tau), \tau \in \mathbb{R}_+\} \quad (4.10)$$

Comme la maturité  $\tau$  est continue, nous émettons l'hypothèse implicite que les transactions sont continues. Cela implique aussi que  $t$  est continu, c'est-à-dire que le marché des obligations à coupon zéro fonctionne de manière continue, ce qui n'est pas le cas dans la réalité. L'utilisation d'une modélisation en temps continu se justifie avant tout par la disponibilité d'outils mathématiques très puissants.

### 4.2.2 La notion d'arbitrage

Dans un article fondamental en finance, HARRISON et KREPS [1979] proposent une formalisation remarquable de théorie de l'arbitrage. Dans le paragraphe suivant, nous présentons cette formalisation telle qu'elle est présentée dans VARIAN [1988] et les implications pour la valorisation des obligations à coupon zéro.

Considérons  $N$  actifs (indice  $n$ ) et  $M$  états de la nature (indice  $m$ ). Nous notons  $R$  la matrice des paiements

$$R_{(M \times N)} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & \cdots & R_{1,n} & \cdots & R_{1,N} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & R_{m,n} & & R_{m,N} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & R_{M,N} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

avec  $R_{m,n}$  la valeur de l'actif  $n$  si l'état de la nature  $m$  se réalise. Soit  $\theta$  un portefeuille d'actifs (ou une stratégie). Nous avons

$$\theta_{(N \times 1)} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec  $\theta_n$  le nombre d'actifs  $n$  détenus. Nous notons aussi  $\mathbf{p}$  le vecteur des prix des actifs ( $p_n$  est la valeur actuelle de l'actif  $n$ )

$$\mathbf{p}_{(N \times 1)} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

La valeur actuelle du portefeuille est  $\langle \mathbf{p}, \theta \rangle = \mathbf{p}^\top \theta$ . Dans l'état de la nature  $m$ , ce portefeuille rapporte le revenu  $\mathcal{W}_m = \sum_{n=1}^N \theta_n R_{m,n}$ . Si nous notons  $\mathcal{W}$  le vecteur de richesse pour tous les états de la nature, nous avons

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_m \\ \vdots \\ \mathcal{W}_M \end{bmatrix} = R\theta \quad (4.14)$$

**Définition 1** *Il y a absence d'opportunité d'arbitrage si*

$$\mathcal{W} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}^\top \theta \geq 0 \quad (4.15)$$

Si, quel que soit l'état de la nature, le portefeuille dégage un paiement positif, alors la valeur actuelle du portefeuille doit être positive. L'opportunité d'arbitrage est donc une situation dans laquelle l'agent est sûr de dégager un rendement net positif sans prise de risque ( $\mathcal{W} \geq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{p}^\top \theta < 0$ ). En utilisant le lemme de Farkas, nous montrons alors le théorème suivant<sup>3</sup>.

**Théorème 2** *Il y a absence d'opportunité d'arbitrage si et seulement si*

$$\exists \pi \in \mathbb{R}_+^M : \mathbf{p} = R^\top \pi \quad (4.16)$$

Comment interpréter le vecteur  $\pi$  ? Supposons l'existence d'un actif sans risque de rendement  $r$  (correspondant au premier actif). En l'absence d'arbitrage, nous avons ( $p_1 = 1$  et  $R_{m,1} = 1 + r$ )

$$1 = \sum_{m=1}^M \pi_m (1 + r) \quad (4.17)$$

Notons  $\pi'_m = \pi_m (1 + r)$ . Nous obtenons alors

$$p_n = \frac{1}{1 + r} \sum_{m=1}^M \pi'_m R_{m,n} \quad (4.18)$$

L'interprétation de  $\pi'$  dépend des deux remarques suivantes :

1.  $\pi'$  est une mesure de probabilité, puisque nous avons

$$\begin{cases} \pi' \geq \mathbf{0} \\ \pi' \mathbf{1} = 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

---

<sup>3</sup>VARIAN [1988] démontre l'existence du vecteur  $\pi$  en considérant le programme dual du problème de l'agent : *minimiser la valeur du portefeuille sous la contrainte que le rendement de celui-ci est toujours positif quelque soit l'état de la nature.*

2. Dans un marché sans opportunité d'arbitrage (ou marché viable), le prix de tout actif est égal à son espérance de gain actualisé sous la mesure de probabilité  $\pi'$ .

Sous cette mesure de probabilité, tout se passe comme si tous les agents étaient neutres au risque. Dans la littérature financière,  $\pi'$  est appelé "la mesure de probabilité neutre au risque".

**Définition 3** *Un marché est complet si tout vecteur de richesse est accessible*

$$\forall \mathcal{W} \in \mathbb{R}^M, \exists \theta \in \mathbb{R}^N : \mathcal{W} = R\theta \quad (4.20)$$

Cette définition est fondamentale pour la valorisation. Elle implique que nous pouvons simuler (ou dupliquer) un actif par un portefeuille équivalent. Dans un marché complet et viable, il est facile de valoriser les actifs contingents, puisqu'il suffit de valoriser le portefeuille de duplication et que celui-ci est égal à l'espérance de gain actualisé sous la mesure de probabilité neutre au risque. Si le marché n'est pas viable, il n'existe pas de mesure de probabilité neutre au risque et il n'est donc pas possible de valoriser le portefeuille simulé. Si le marché n'est pas complet, nous pouvons valoriser les stratégies mais l'existence du portefeuille de duplication n'est pas assurée.

Dans cette thèse, nous supposons systématiquement que les hypothèses de viabilité et de complétude des marchés sont vérifiées. L'abandon de l'hypothèse de complétude pose de nombreux problèmes de résolution et ne permet plus d'obtenir une formulation du prix de l'obligation à coupon zéro. Dans des cas très précis, nous ne pouvons fournir qu'une fourchette de prix (DANA et JEANBLANC-PICQUÉ [1994]).

## 4.3 Le modèle d'arbitrage de la structure par terme des obligations à coupon zéro

### 4.3.1 Présentation du modèle

Nous cherchons à valoriser une obligation à coupon zéro à l'instant  $t_0$  de nominal un Franc et d'échéance  $T$ . Quatre hypothèses définissent le modèle :

1. Le marché est viable et complet. Nous supposons en plus qu'il est parfaitement efficient et sans friction (absence de coût de transaction).

2. Le prix de l'obligation à coupon zéro  $P_t^c(\tau)$  est entièrement déterminé par la variable d'état  $x(t)$ . Nous avons

$$P_t^c(\tau) = P(t, x(t)) \quad (4.21)$$

3. La variable d'état  $x(t)$  est un processus de diffusion dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu(t, x) dt + \sigma(t, x) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.22)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ .

4. Il existe un actif sans risque dont le rendement  $r$  dépend de la variable d'état  $x(t)$

$$r = r(t, x(t)) \quad (4.23)$$

Ce modèle (qui est une adaptation de celui de BLACK et SCHOLLES [1973]) est proche de l'APT de Ross. C'est pourquoi nous assimilons la variable d'état du modèle à un facteur.

### 4.3.2 Dérivation de l'équation de valorisation

Pour déterminer le prix de l'obligation, nous considérons la première hypothèse du modèle et construisons un portefeuille d'arbitrage  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \alpha_1 P_1(t, x(t)) + \alpha_2 P_2(t, x(t)) \quad (4.24)$$

avec  $\alpha_i$  la proportion de l'actif  $i$ . D'après les deuxième et troisième hypothèses du modèle, la dynamique du prix de l'actif  $i$  est donnée par le lemme d'Itô

$$\begin{aligned} dP_i(t, x(t)) &= \left[ \frac{\partial P_i(t, x(t))}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial P_i(t, x(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 P_i(t, x(t))}{\partial x^2} \right] dt \\ &+ \sigma(t, x) \frac{\partial P_i(t, x(t))}{\partial x} dW(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Considérons que l'agent emprunte au taux sans risque  $r$ . Le rendement instantané net du portefeuille est

$$R[\mathcal{P}] = -r(t, x(t)) \mathcal{P} dt + d\mathcal{P} \quad (4.26)$$

$\mathcal{P}$  est un portefeuille d'arbitrage (nous savons qu'il existe d'après la première hypothèse) si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} E[R[\mathcal{P}] | \mathcal{F}_t] = 0 \\ \text{var}[R[\mathcal{P}] | \mathcal{F}_t] = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Cela implique que si l'agent ne prend pas de risque, il ne peut pas faire de profit. Pour caractériser le portefeuille d'arbitrage, nous devons trouver la stratégie  $\alpha^*$  qui satisfait le système d'équations (4.27).

Si  $\text{var}[R[\mathcal{P}]|\mathcal{F}_t] = 0$ ,  $R[\mathcal{P}]$  est une variable aléatoire *certaine*. Nous en déduisons que la première condition implique que l'expression suivante est nulle

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left[ \frac{\partial P_1(t, x(t))}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial P_1(t, x(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 P_1(t, x(t))}{\partial x^2} - r(t, x(t)) P_1(t, x(t)) \right] \\ & + \alpha_2 \left[ \frac{\partial P_2(t, x(t))}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial P_2(t, x(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 P_2(t, x(t))}{\partial x^2} - r(t, x(t)) P_2(t, x(t)) \right] \end{aligned}$$

et que la deuxième condition devient

$$\alpha_1 \sigma(t, x) \frac{\partial P_1(t, x(t))}{\partial x} + \alpha_2 \sigma(t, x) \frac{\partial P_2(t, x(t))}{\partial x} = 0 \quad (4.28)$$

Il existe une solution évidente  $\alpha^* = \mathbf{0}$ . Cela implique que le portefeuille d'arbitrage  $\mathcal{P}$  n'existe pas, ce qui est contraire à l'hypothèse de viabilité. Pour qu'il existe une solution non nulle, le mineur d'ordre deux doit être nul. Dans ce cas, il existe une fonction  $\lambda(t)$  qui vérifie

$$\lambda(t) = \frac{\frac{\partial P_i(t, x(t))}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial P_i(t, x(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 P_i(t, x(t))}{\partial x^2} - r(t, x(t)) P_i(t, x(t))}{\sigma(t, x) \frac{\partial P_i(t, x(t))}{\partial x}} \quad (4.29)$$

Cette relation est valable pour  $i$  égal à un ou deux. Comme les actifs du portefeuille sont quelconques, cette relation est vérifiée pour toute obligation à coupon zéro. Nous en déduisons le théorème suivant.

**Théorème 4** *Dans un modèle d'arbitrage à un seul facteur  $x(t)$  vérifiant les quatre hypothèses précédentes, le prix d'une obligation à coupon zéro vérifie l'équation de valorisation suivante*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) P_{xx} + [\mu(t, x) - \lambda(t) \sigma(t, x)] P_x + P_t - r(t, x) P = 0 \\ P_T^c(0) = P(T, x(T)) = 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

### 4.3.3 Interprétation de la fonction $\lambda(t)$

En posant

$$\alpha(t, x) = P_t + \mu(t, x) P_x + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) P_{xx} \quad (4.31)$$

et

$$\beta(t, x) = \sigma(t, x) P_x \quad (4.32)$$

Nous en déduisons une nouvelle expression de  $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{\alpha(t, x) - r(t, x) P(t, x)}{\beta(t, x)} \quad (4.33)$$



Nous obtenons alors la relation suivante

$$\frac{\alpha(t, x)}{P(t, x)} - r(t, x) = \lambda(t) \times \frac{\beta(t, x)}{P(t, x)} \quad (4.34)$$

Or, nous pouvons interpréter  $\alpha(t, x)$  comme l'espérance de gain instantané due à la variation du prix de l'actif et  $\beta(t, x)$  comme le risque associé à cette variation du prix de l'actif. L'équation (4.34) indique que l'espérance de rendement unitaire net est proportionnelle au risque unitaire.  $\lambda(t)$  est justement le coefficient de proportionnalité et indique de combien doit croître le taux de rendement espéré pour une unité supplémentaire de risque.

#### 4.3.4 La mesure de probabilité neutre au risque et la solution de l'EDP

Le problème (4.30) n'est pas un problème de Feynman-Kac, puisque nous avons

$$\begin{cases} -P_t + r(t, x)P = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)P_{xx} + [\mu(t, x) - \lambda(t)\sigma(t, x)]P_x \\ P(T, x(T)) = 1 \end{cases} \quad (4.35)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t P &= \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)P_{xx} + \mu(t, x)P_x \\ &\neq \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)P_{xx} + [\mu(t, x) - \lambda(t)\sigma(t, x)]P_x \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pour nous ramener à une représentation de Feynman-Kac, nous devons changer d'espace probabilisable. Appliquons le théorème de Girsanov avec  $\phi(s) = -\lambda(s)$ . Si nous supposons que la condition  $E\left[\exp\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \lambda^2(s) ds\right] < +\infty$  est vérifiée, alors  $W'(t) = W(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$  est un processus de Wiener sous une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$  donnée par le théorème de Radon-Nikodym. Comme nous avons

$$dW'(t) = dW(t) + \lambda(t) dt \quad (4.37)$$

l'équation différentielle stochastique (4.22) devient

$$\begin{cases} dx(t) = [\mu(t, x) - \lambda(t)\sigma(t, x)] dt + \sigma(t, x) dW'(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.38)$$

avec  $W'(t)$  un processus de Wiener sous  $\mathbb{P}'$ . Sous cette nouvelle mesure de probabilité, l'expression du générateur infinitésimal de la diffusion est

$$\mathcal{A}'_t P = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)P_{xx} + [\mu(t, x) - \lambda(t)\sigma(t, x)]P_x \quad (4.39)$$

Notre problème (4.30) est dans ce cas un problème de Feynman-Kac, puisque nous avons

$$\begin{cases} -P_t + r(t, x)P = \mathcal{A}'_t P \\ P(T, x(T)) = 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

Nous supposons que les conditions d'application de théorème de Feynman-Kac sont vérifiées et nous en déduisons le théorème suivant

**Théorème 5** Dans un modèle d'arbitrage à un seul facteur  $x(t)$  vérifiant les quatre hypothèses de départ, le prix d'une obligation à coupon zéro est donné par la formule suivante

$$P_{t_0}^c(\tau) = E' \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t, x(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (4.41)$$

Sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ , le prix de l'obligation à coupon zéro est égal à l'espérance de gain actualisé.  $\mathbb{P}'$  est donc la mesure de "probabilité neutre au risque". Nous pouvons aussi obtenir une autre formulation en considérant le théorème de Radon-Nikodym. Nous avons alors

$$P_{t_0}^c(\tau) = E \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t, x(t)) dt - \int_{t_0}^T \lambda(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \lambda^2(t) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (4.42)$$

## 4.4 Résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles

Dans cette section, nous cherchons une solution numérique du prix de l'obligation à coupon zéro  $P(t, x(t))$  qui satisfait l'équation (4.30) pour  $t \in [t_0, T]$  et  $x(t) \in [x^-, x^+]$ . Pour cela, nous utilisons la méthode des différences finies, qui est particulièrement adaptée aux problèmes d'EDP paraboliques d'ordre 2 en  $x$ .

### 4.4.1 La méthode des différences finies

Nous discrétisons le processus  $P(t, x)$  dans l'espace et dans le temps. Soient  $J$  et  $N$  le nombre de points de discrétisation correspondants et  $u(t, x)$  la solution de l'équation (4.30). Nous notons  $k$  le pas de discrétisation associé à  $t$  et  $h$  celui associé à  $x$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} k &= (T - t_0) / (N - 1) \\ h &= (x^+ - x^-) / (J - 1) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Et nous notons  $u_j^n$  la solution numérique de  $u(t_n, x_j)$  avec

$$\begin{aligned} t_n &= t_0 + nk \\ x_j &= x^- + jh \end{aligned} \quad (4.44)$$

#### 4.4.1.1 Discrétisation dans l'espace

Si nous employons la méthode des différences centrales pour l'approximation d'une dérivée, nous obtenons

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \quad (4.45)$$

et

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \quad (4.46)$$

Or l'équation parabolique s'écrit

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mathbf{A}_t u - r(t, x) u(t, x) = 0 \quad (4.47)$$

avec  $\mathbf{A}$  l'opérateur différentiel du second ordre. Si nous posons  $\mathbf{A}_t^\bullet u = \mathbf{A}_t u - r(t, x) u(t, x)$ , l'équation (4.47) devient

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mathbf{A}_t^\bullet u = 0 \quad (4.48)$$

Soit  $\mathbf{A}_j^n$  la discrétisation de  $\mathbf{A}_t^\bullet u$ . Nous avons

$$\mathbf{A}_j^n = \frac{1}{2} (\sigma_j^n)^2 \left( \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right) + (\mu_j^n - \lambda^n \sigma_j^n) \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) - r_j^n u_j^n \quad (4.49)$$

avec  $\mu_j^n = \mu(t_n, x_j)$ ,  $\sigma_j^n = \sigma(t_n, x_j)$ ,  $r_j^n = r(t_n, x_j)$  et  $\lambda^n = \lambda(t_n)$ .

#### 4.4.1.2 Discrétisation dans le temps

La méthode la plus classique pour résoudre l'équation (4.48) est d'utiliser le schéma d'Euler. Nous avons

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \simeq \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} \quad (4.50)$$

Nous en déduisons que l'équation (4.48) devient

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} + \mathbf{A}_t^\bullet u = 0 \quad (4.51)$$

Comme la fonction  $\mathbf{A}_t^\bullet u$  dépend du temps et de l'espace, nous ne pouvons pas utiliser l'algorithme classique d'Euler

$$u_j^{n-1} = u_j^n - k \mathbf{A}_t^\bullet u \quad (4.52)$$

Nous remplaçons alors la fonction  $\mathbf{A}_t^\bullet u$  par son approximation numérique  $\mathbf{A}_j^n$  et nous obtenons

$$u_j^{n-1} = u_j^n - k \mathbf{A}_j^n \quad (4.53)$$

#### 4.4.1.3 La méthode des $\theta$ -schémas

Dans le paragraphe précédent, nous utilisons la méthode des différences à gauche pour l'approximation des dérivées. Il existe d'autres algorithmes, comme celui des différences à droite, des différences centrales ou de l'extrapolation de Richardson.

La méthode des  $\theta$ -schémas est une combinaison des différences à droite et à gauche. Soit  $\theta \in [0, 1]$ . Nous avons

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} + [\theta \mathbf{A}_j^{n-1} + (1 - \theta) \mathbf{A}_j^n] = 0 \quad (4.54)$$

En remplaçant  $\mathbf{A}_j^n$  par son expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} & u_{j+1}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_j^{n-1}}{h} \right)^2 \theta k + \frac{1}{2h} (\mu_j^{n-1} - \lambda^{n-1} \sigma_j^{n-1}) \theta k \right] \\ & \quad + u_j^{n-1} \left[ -1 - \left( \frac{\sigma_j^{n-1}}{h} \right)^2 \theta k - r_j^{n-1} \theta k \right] \\ & + u_{j-1}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_j^{n-1}}{h} \right)^2 \theta k - \frac{1}{2h} (\mu_j^{n-1} - \lambda^{n-1} \sigma_j^{n-1}) \theta k \right] \\ & u_{j+1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_j^n}{h} \right)^2 (1 - \theta) k + \frac{1}{2h} (\mu_j^n - \lambda^n \sigma_j^n) (1 - \theta) k \right] \\ & \quad + u_j^n \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_j^n}{h} \right)^2 (1 - \theta) k - r_j^n (1 - \theta) k \right] \\ & + u_{j-1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_j^n}{h} \right)^2 (1 - \theta) k - \frac{1}{2h} (\mu_j^n - \lambda^n \sigma_j^n) (1 - \theta) k \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

#### 4.4.2 Les différents algorithmes de résolution

Dans la suite de cette section, nous notons

$$\vartheta_j^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_j^n}{h} \right)^2 k + \frac{1}{2h} (\mu_j^n - \lambda^n \sigma_j^n) k \quad (4.56)$$

$$\varrho_j^n = 1 - \left( \frac{\sigma_j^n}{h} \right)^2 k - r_j^n k \quad (4.57)$$

$$\varpi_j^n = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_j^n}{h} \right)^2 k - \frac{1}{2h} (\mu_j^n - \lambda^n \sigma_j^n) k \quad (4.58)$$

##### 4.4.2.1 Le schéma explicite

Ce schéma correspond à  $\theta = 0$ . Nous avons alors

$$-u_j^{n-1} + u_{j+1}^n \vartheta_j^n + u_j^n \varrho_j^n + u_{j-1}^n \varpi_j^n = 0 \quad (4.59)$$

La solution numérique s'obtient de manière itérative en imposant les conditions de Dirichlet aux bornes ( $u_{-1}^n = 0$  et  $u_j^n = 0$ ) et en prenant en compte la condition



et

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_j^n \\ \vdots \\ u_{j-2}^n \\ u_{j-1}^n \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Les matrices  $\Upsilon_n$  et  $\Lambda_n$  correspondent à

$$\Upsilon_n = \begin{bmatrix} a_0^n + b_0^n & c_0^n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1^n & b_1^n & c_1^n & 0 & & & & \vdots \\ 0 & a_2^n & b_2^n & c_2^n & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_j^n & b_j^n & c_j^n & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & a_{j-2}^n & b_{j-2}^n & c_{j-2}^n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{j-1}^n & b_{j-1}^n + c_{j-1}^n \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

et

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} e_0^n & f_0^n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ d_1^n & e_1^n & f_1^n & 0 & & & & \vdots \\ 0 & d_2^n & e_2^n & f_2^n & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & d_j^n & e_j^n & f_j^n & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & d_{j-2}^n & e_{j-2}^n & f_{j-2}^n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{j-1}^n & e_{j-1}^n \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

### 4.4.3 Etude de la stabilité des schémas

Il existe plusieurs méthodes pour étudier la stabilité des méthodes numériques des équations aux dérivées partielles. Par exemple, RAVIART et THOMAS [1983] présentent une méthode simple d'analyse de stabilité en étudiant l'équation différentielle

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \lambda u(t, x) = 0 \quad (4.70)$$

Ils montrent que la méthode des  $\theta$ -schémas est stable pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$ . Pour  $\theta < \frac{1}{2}$ , la stabilité de la méthode dépend du pas de discrétisation du temps. Nous pouvons aussi étudier la stabilité par l'analyse de von Neumann qui est exposée dans PRESS, FLANNERY, TEUKOLSKY et VETTERLING [1992]. Considérons que les valeurs prises

par  $\mathbf{A}_j^n$  varie peu dans le temps et l'espace. La solution du problème est alors de la forme  $u_j^n = \xi^n e^{izjh}$ . La méthode numérique est alors instable<sup>4</sup> dans le cas où  $|\xi| \leq 1$ . Pour l'équation (4.64), nous obtenons

$$\xi = -\frac{a_j^{n-1}e^{-izh} + b_j^{n-1} + c_j^{n-1}e^{izh}}{d_j^n e^{-izh} + e_j^n + f_j^n e^{izh}} \quad (4.71)$$

En utilisant les expressions précédentes de  $a_j^{n-1}$ ,  $b_j^{n-1}$ ,  $c_j^{n-1}$ ,  $d_j^n$ ,  $e_j^n$  et  $f_j^n$ , nous obtenons

$$\xi = -\frac{\theta \phi_j^{n-1}(z)k - 1}{(1-\theta)\phi_j^n(z)k + 1} \quad (4.72)$$

avec

$$\phi_j^n(z) = \left(\frac{\sigma_j^n}{h}\right)^2 (\cos(zh) - 1) - r_j^n + i \cdot \frac{1}{h} (\mu_j^n - \lambda^n \sigma_j^n) \sin(zh) \quad (4.73)$$

Le schéma est stable si  $|\xi| > 1$  quel que soit la valeur de  $z$  appartenant à l'ensemble  $\mathbb{R}$ . La condition de stabilité est difficile à interpréter dans le cas général. Si nous considérons le problème stationnaire (les fonctions  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  et  $r$  ne dépendent pas du temps), nous en déduisons alors le théorème suivant.

**Théorème 6** *Dans le cas stationnaire, le  $\theta$ -schéma est stable au sens de von Neumann si*

$$F_j(z) < 0 \quad \forall z \in \left[0, \frac{2\pi}{h}\right], j = 0, \dots, J-1 \quad (4.74)$$

avec

$$F_j(z) = (1 - 2\theta) (\alpha_j^2(z) + \beta_j^2(z)) + 2\alpha_j(z) \quad (4.75)$$

$$\alpha_j(z) = \left(\frac{\sigma_j}{h}\right)^2 (\cos(zh) - 1)k - r_j k \quad (4.76)$$

et

$$\beta_j(z) = \frac{1}{h} (\mu_j - \lambda \sigma_j) \sin(zh)k \quad (4.77)$$

Nous remarquons que  $r_j \geq 0$  est une condition suffisante<sup>5</sup> pour que le  $\theta$ -schéma soit stable pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$ . Pour  $\theta < \frac{1}{2}$ , la stabilité dépend des pas de discrétisation  $h$  et  $k$ . Nous retrouvons notamment la proposition classique d'analyse numérique :

**Proposition 7** *Nous vérifions la propriété de stabilité<sup>6</sup> si*

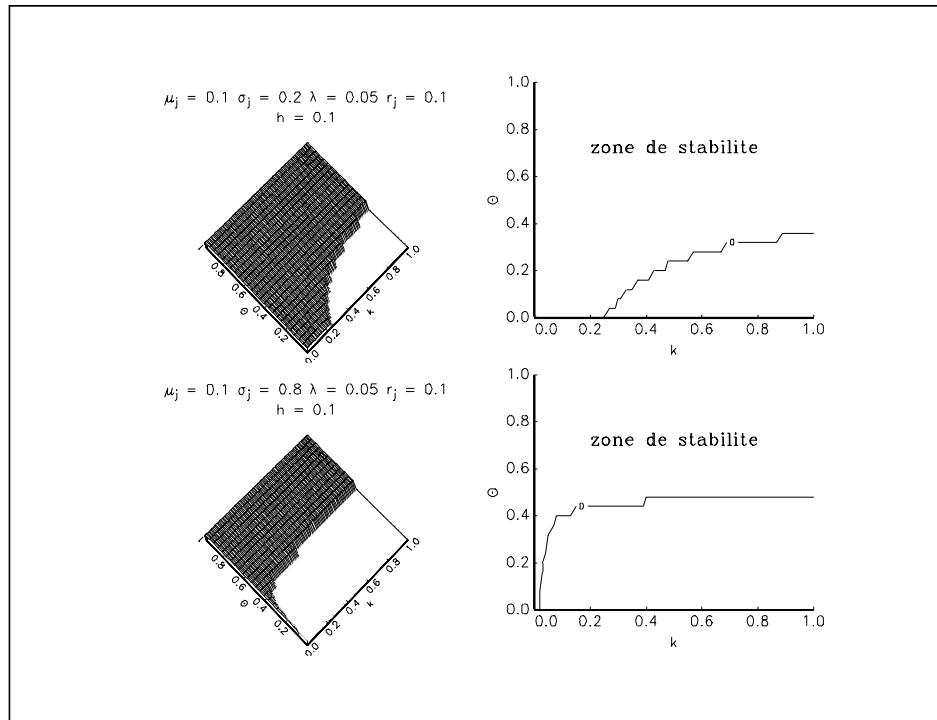
$$h \rightarrow 0 \bigwedge k \rightarrow 0 \bigwedge \frac{k}{h^2} \rightarrow 0 \quad (4.78)$$

---

<sup>4</sup>PRESS, FLANNERY, TEUKOLSKY et VETTERLING [1992] considère un problème de type "initial value". Le nôtre est de type "final value", ce qui explique que nous avons une condition de stabilité opposée.

<sup>5</sup>Dans ce cas, nous avons  $\alpha_j(z) \leq 0$  et  $1 - 2\theta \leq 0$ .

<sup>6</sup>car  $\cos(zh) - 1 \leq 0$ .



Graphique 4.1

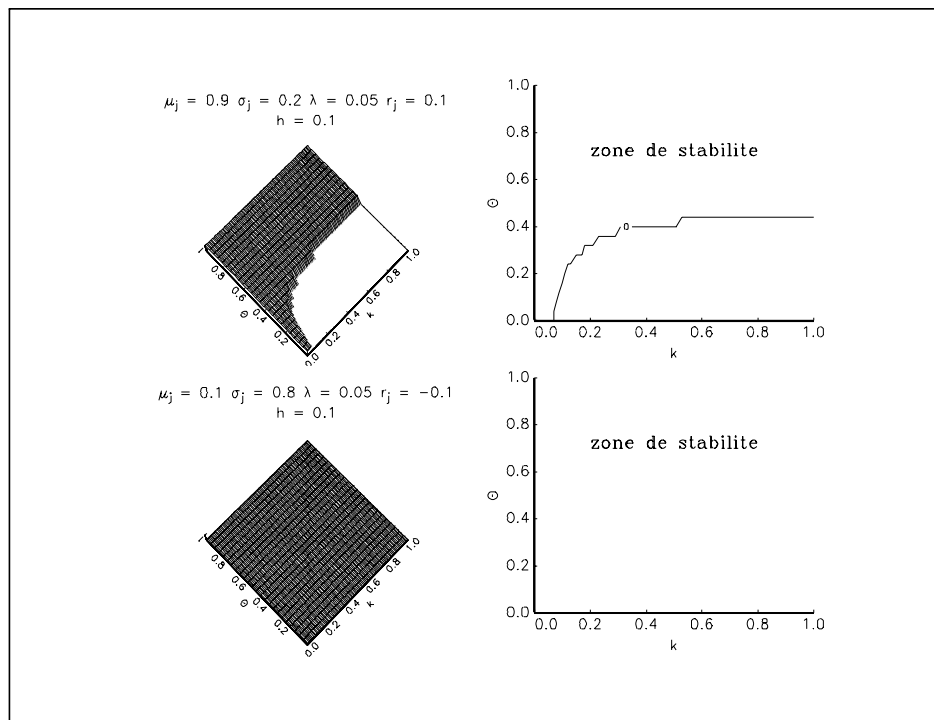
Nous étudions la condition de stabilité (4.74) sur un exemple. Soient  $F_j^+ = \max_z F_j(z)$  et  $F_j^* = \mathbf{1}_{[F_j^+ < 0]}$ . Le  $\theta$ -schéma est stable si  $F_j^* = 1$ . Prenons  $\mu_j = 0.1$ ,  $\sigma_j = 0.2$ ,  $r_j = 0.1$  et  $\lambda = 0.05$ . Nous posons  $h$  égal à 0.1. Les graphiques (4.1) et (4.2) représentent  $F_j^*$  en fonction de  $\theta$  et  $k$ . Nous remarquons que la stabilité est vérifiée pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$ . Pour  $\theta < \frac{1}{2}$ , les valeurs prises par les pas de discrétisation  $h$  et  $k$  sont déterminantes. Mais ce ne sont pas les seuls paramètres qui influencent la condition de stabilité. Ainsi, elle est plus difficile à vérifier si  $\sigma_j$  ou  $\mu_j$  sont élevées. Nous remarquons aussi que la condition  $r_j \geq 0$  n'est pas une condition nécessaire pour assurer la stabilité (voir le graphique (4.2)).

#### 4.4.4 Programmation efficace des algorithmes

Nous rappelons que la solution numérique du problème (4.30) nécessite  $N - 1$  résolutions du système  $\Upsilon_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} = -\Lambda_n \mathbf{u}_n$  de rang  $J$ . Cela peut prendre beaucoup de temps dans le cas d'une mauvaise programmation. Dans ce paragraphe, nous présentons diverses considérations pour rendre la programmation plus efficace :

- Il est inutile de calculer le produit matriciel  $\Lambda_n \mathbf{u}_n$  de façon directe. Le stockage en mémoire de la matrice  $\Lambda_n$  peut poser quelques difficultés et il est préférable de calculer  $\Lambda_n \mathbf{u}_n$  en ne considérant que les termes non nuls.





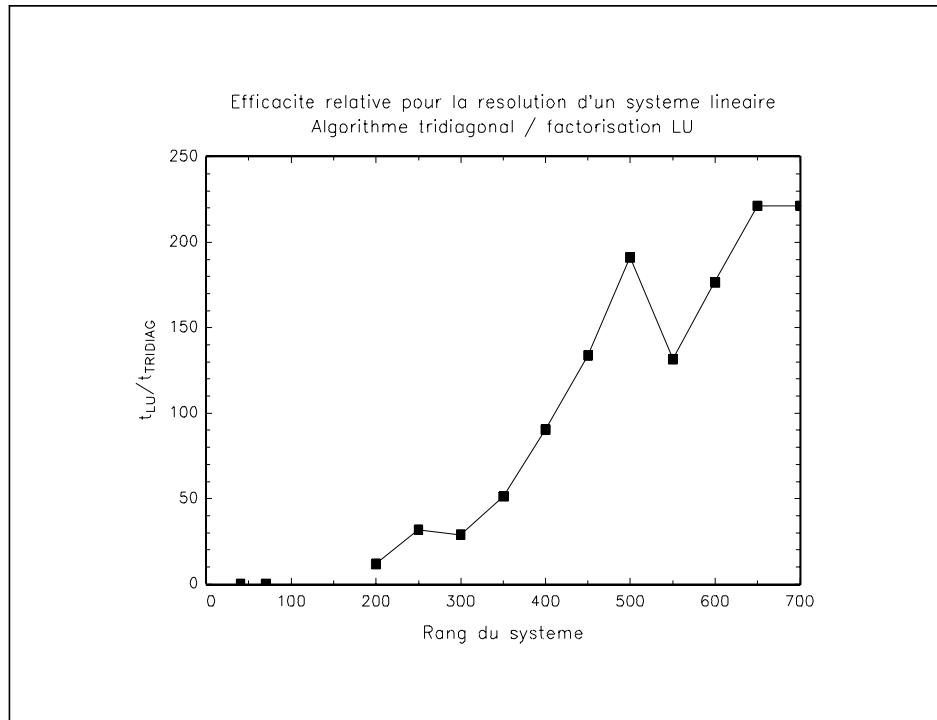
Graphique 4.2

- Pour résoudre le système linéaire, nous pouvons utiliser la factorisation LU (GOLUB et VAN LOAN [1989]). Soit la décomposition  $\Upsilon_n = L_n U_n$  avec  $L_n$  une matrice carrée triangulaire inférieure et  $U_n$  une matrice carrée triangulaire supérieure. Nous avons alors

$$\begin{aligned} L_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} &= -\Lambda_n \mathbf{u}_n \\ U_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} &= \mathbf{v}_{n-1} \end{aligned} \quad (4.79)$$

On peut résoudre facilement ces deux systèmes linéaires triangulaires grâce à la méthode du pivot. Toutefois, cette méthode est relativement peu efficace, si nous remarquons que nous avons un système linéaire **tridiagonal**. Dans ce cas, nous pouvons employer l'algorithme présenté dans l'annexe. Pour montrer l'efficacité relative de ce dernier algorithme, nous comparons les temps de calcul pour des systèmes de rangs différents. Nous notons  $t_{LU}$  et  $t_{TRIDIAG}$  les temps de calcul respectifs pour le langage GAUSS. Le graphique (4.3) présente le rapport  $\frac{t_{LU}}{t_{TRIDIAG}}$ . Ainsi, pour un système linéaire tridiagonal de dimension 700, l'algorithme TRIDIAG est plus de deux cents fois plus rapide<sup>7</sup> que l'algorithme LU !

<sup>7</sup>En fait, le rapport est encore plus grand dans un langage de type C++ ou Fortran.



Graphique 4.3

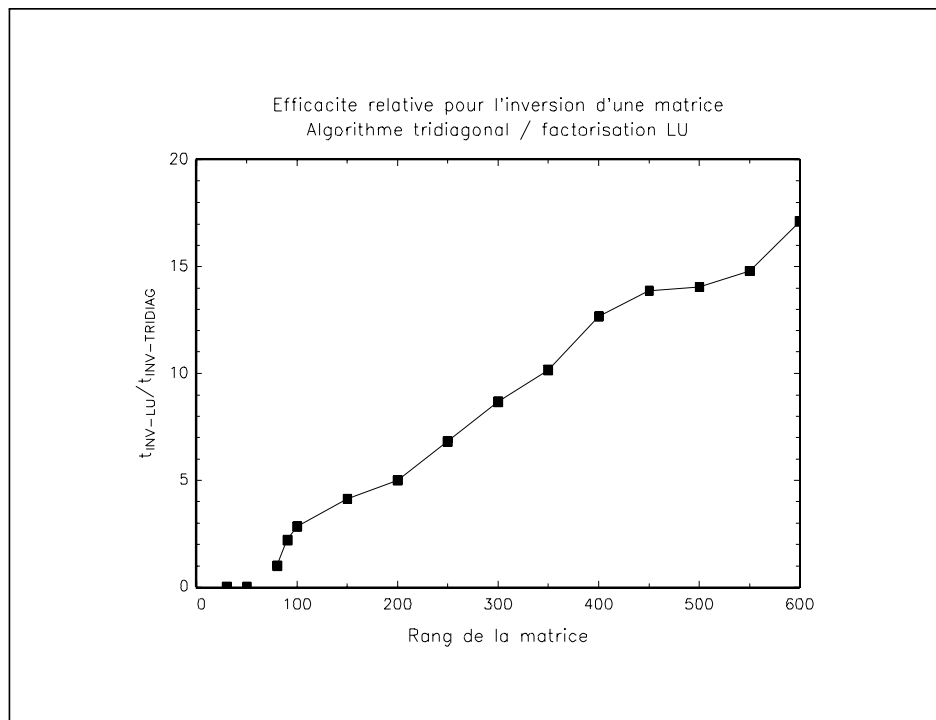
- Si nous utilisons l'algorithme TRIDIAG, il est préférable de stocker les éléments de la matrice  $\Upsilon_n$  avec trois vecteurs pour minimiser l'espace mémoire occupé.
- Dans le cas stationnaire (les fonctions  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  et  $r$  ne dépendent pas du temps), les matrices  $\Upsilon_{n-1}$  et  $\Lambda_n$  sont constantes. Dans certains cas (par exemple si nous employons un langage compilé matriciel), il est préférable de transformer le système linéaire en simple produit matriciel

$$\mathbf{u}_{n-1} = \Psi \mathbf{u}_n \quad (4.80)$$

avec  $\Psi = -\Upsilon_{n-1}^{-1} \Lambda_n$ . La solution numérique du problème (4.30) nécessite alors  $N - 1$  produits matriciels de dimensions  $J \times J$  et  $J \times 1$  et une inversion de matrice  $J \times J$ . Pour obtenir l'inverse de  $\Upsilon_{n-1}$ , nous conseillons d'utiliser l'algorithme tridiagonal en remarquant que cela revient à résoudre  $J$  systèmes tridiagonaux. En effet, si nous notons  $\Upsilon_{n-1}^{-1} = [ \Upsilon_1^* \ \cdots \ \Upsilon_j^* \ \cdots \ \Upsilon_J^* ]$ , nous avons

$$\Upsilon_{n-1} \Upsilon_j^* = \mathbf{e}_j \quad (4.81)$$

Le graphique (4.4) présente le rapport  $\frac{t_{INV-LU}}{t_{INV-TRIDIAG}}$  pour le langage GAUSS. Une nouvelle fois, il est préférable d'utiliser l'algorithme tridiagonal.



Graphique 4.4

#### 4.4.5 Un exemple

Considérons le modèle de Vasicek. Celui-ci est déterminé par quatre paramètres :  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$  et  $\lambda$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
 \mu(t, x) &= a(b - x) & (4.82) \\
 \sigma(t, x) &= \sigma \\
 \lambda(t) &= \lambda \\
 r(t, x) &= x
 \end{aligned}$$

Dans ce modèle, la variable d'état est donc le taux d'intérêt instantané. Nous utilisons les valeurs numériques  $a = 0.95$ ,  $b = 0.10$ ,  $\sigma = 0.2$  et  $\lambda = 0.05$ .

Le code suivant permet de résoudre par la méthode des  $\theta$ -schémas le problème dans le cas non homogène par rapport au temps. U1 et U2 correspondent aux solutions numériques de  $P(t, x)$  pour  $x_{60} = 0.18$  et  $t_{101} = 1$ .

```

new;
library spt;
SPTset

```

```

a = 0.95; b = 0.10; sigma_ = 0.2; lambda_ = 0.05;

proc mu(t,x);
  retp(a*(b-x));

endp;

proc sigma(t,x);
  retp(sigma_);
endp;

proc lambda(t,x);
  retp(lambda_);
endp;

proc r(t,x);
  retp(x);
endp;

call SPT(&mu,&sigma,&lambda,&r,0,5,1);

{t,x,k,h} = solution_EDP(-1,1,101,501,0.5,"sol");

U1 = Lire_EDP("sol","x"|x[60]);
U2 = Lire_EDP("sol","t"|t[101]);

```

Le modèle de Vasicek est un modèle homogène par rapport au temps. Nous pouvons alors exprimer les fonctions uniquement avec l'argument  $x$ . Ce programme est donc équivalent au programme suivant (remarquez que `cn` prend la valeur 0 dans la ligne de commande `call SPT(&mu,&sigma,&lambda,&r,0,5,0);`).

```

new;
library spt;
SPTset

a = 0.95; b = 0.10; sigma_ = 0.2; lambda_ = 0.05;

proc mu(x);
  retp(a*(b-x));

```

```

endp;

proc sigma(x);
    retp(sigma_);
endp;

proc lambda(x);
    retp(lambda_);
endp;

proc r(x);
    retp(x);
endp;

call SPT(&mu,&sigma,&lambda,&r,0,5,0);

{t,x,k,h} = solution_EDP(-1,1,101,501,0.5,"sol");

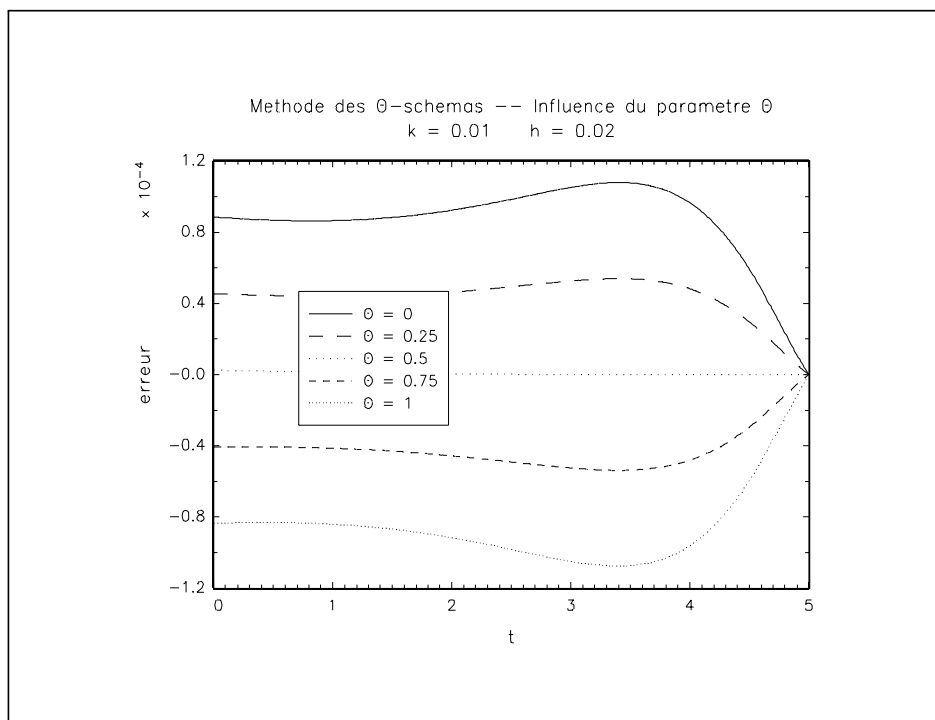
U1 = Lire_EDP("sol","x"|x[60]);
U2 = Lire_EDP("sol","t"|t[101]);

```

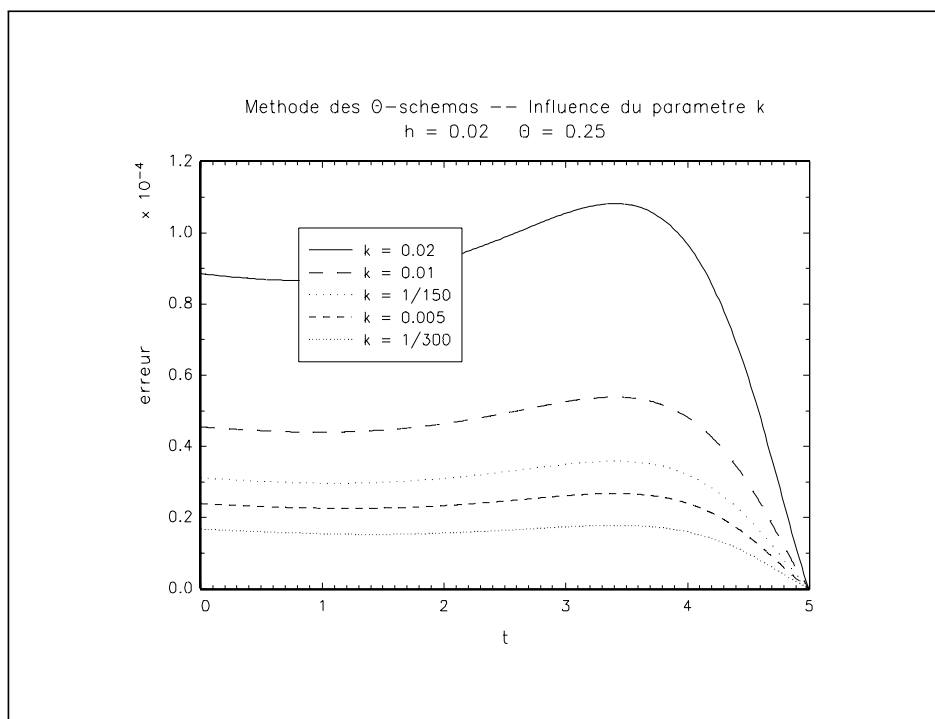
Nous choisissons de résoudre numériquement l'EDP pour  $x \in [-1, 1]$  et  $t \in [0, 5]$ . Nous prenons en général  $k = 0.01$ ,  $h = 0.02$  et  $\theta = \frac{1}{4}$ . Nous cherchons ensuite à analyser l'erreur de la solution numérique par rapport à la solution analytique en fonction des différents paramètres. Les graphiques (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8) présentent les différents résultats.

Nous observons plusieurs phénomènes :

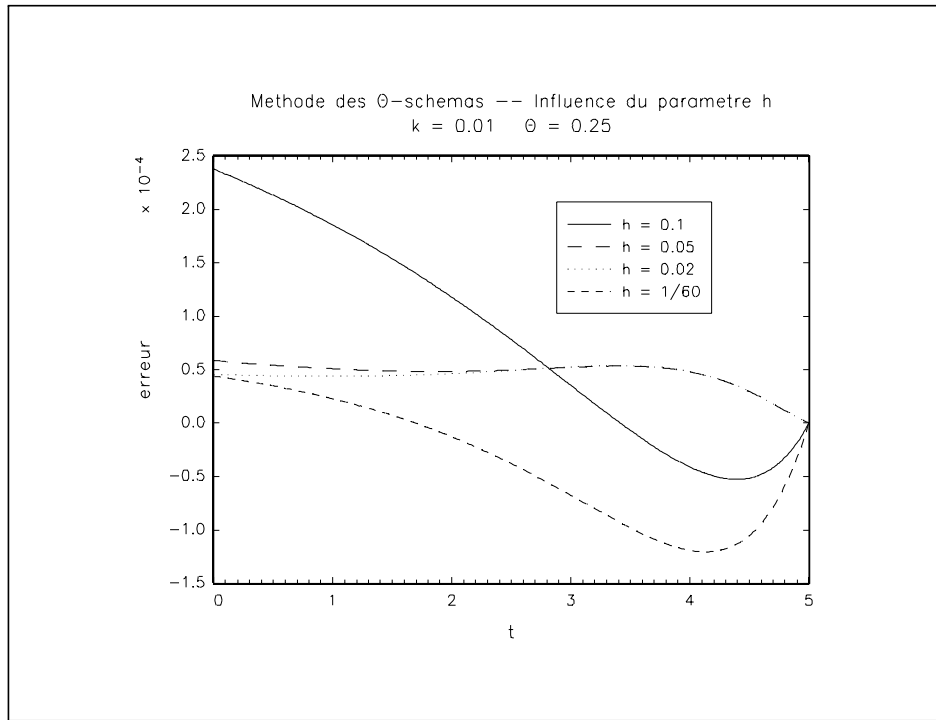
1. L'erreur numérique est minimale pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , le schéma de Crank-Nicholson.
2. Le choix du pas de discrétisation du temps  $k$  est important. Dans notre exemple, nous remarquons que l'erreur croît de façon monotone avec la valeur prise par  $k$ .
3. La relation entre la précision des résultats et le pas de discrétisation de l'espace  $h$  est difficile à appréhender. Ainsi, l'erreur ne diminue pas forcément si  $h$  devient plus petit. En fait, cela dépend aussi du rapport  $k/h^2$ . Dans notre



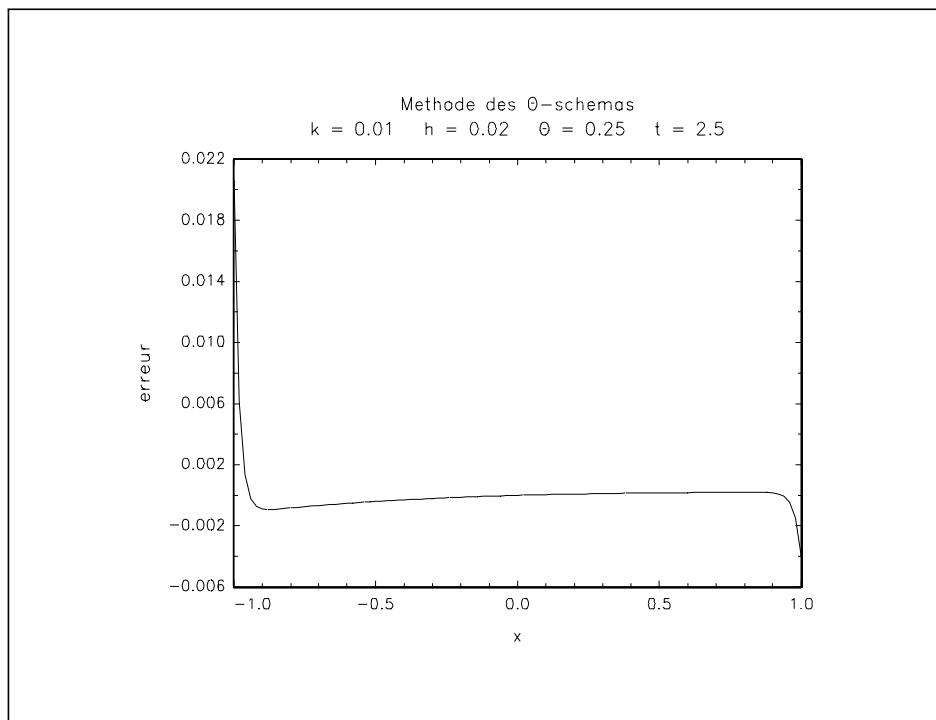
Graphique 4.5



Graphique 4.6



Graphique 4.7



Graphique 4.8

exemple, nous avons

$h$	$k/h^2$
0.1	1
0.05	4
0.02	25
$\frac{1}{60}$	36

C'est pourquoi, si nous désirons diminuer le pas de discrétisation  $h$ , nous devons aussi diminuer le pas de discrétisation  $k$  pour que le rapport  $k/h^2$  soit *raisonnable*.

4. Dans la pratique, nous constatons que les erreurs les plus faibles sont pour les valeurs de  $x$  les plus proches du milieu du segment  $[x^-, x^+]$ . Si nous cherchons la solution numérique pour une valeur particulière  $x^*$ , il est donc préférable de choisir l'intervalle de telle façon que  $x^*$  corresponde au milieu du segment  $[x^-, x^+]$ .

## 4.5 Résolution numérique de la solution par martingale

Nous rappelons que le prix à l'instant  $t_0$  d'une obligation à coupon zéro d'échéance  $T$  est égal à

$$P_{t_0}^c(\tau) = E' \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t, x(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (4.83)$$

avec, sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ ,

$$\begin{cases} dx(t) &= [\mu(t, x) - \lambda(t) \sigma(t, x)] dt + \sigma(t, x) dW'(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Dans cette section, nous exposons deux méthodes pour résoudre numériquement l'équation (4.83) : la première est celle de Monte Carlo et la seconde est basée sur l'approximation de l'équation différentielle stochastique (4.84) par une chaîne de Markov<sup>8</sup>.

### 4.5.1 Méthode de Monte Carlo

#### 4.5.1.1 L'estimateur classique

Soit  $f(x)$  une fonction de densité définie sur  $\Delta$  et dont la mesure de mesure de probabilité est  $\mathbb{P}$ . L'intégration de Monte Carlo permet de trouver la valeur numérique

---

<sup>8</sup>Il existe une troisième méthode basée sur les arbres binomiaux (NELSON et RAMASWANY [1990] et HESTON [1995]).



de l'expression suivante<sup>9</sup>

$$\int_{\Delta} g(x) f(x) dx \quad (4.85)$$

Soit  $X$  la variable aléatoire dont la loi de probabilité est  $\mathbb{P}$ . D'après le théorème de limite centrale, nous avons

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(X_m) = E[g(X)] \quad (4.86)$$

avec  $X_m$  une variable aléatoire de densité  $f(x)$ . Nous en déduisons que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(X_m) = \int_{\Delta} g(x) f(x) dx \quad (4.87)$$

Soit  $\{x_1, \dots, x_M\}$  un échantillon de  $M$  réalisations de la variable aléatoire  $X$ . Nous pouvons approximer l'expression (4.85) par  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(x_m)$ . La méthode de Monte Carlo pour évaluer l'expression (4.83) correspond alors à l'algorithme suivant :

1. Nous simulons une trajectoire du processus  $x(t)$  sous la mesure de probabilité neutre au risque  $\mathbb{P}'$  pour  $t \in [t_0, T]$  à l'aide d'un algorithme présenté dans l'annexe de ce chapitre. Nous notons cette trajectoire  $\{X_n, n = 0, \dots, N-1\}$ .
2. Nous calculons la trajectoire simulée de  $r(t, x(t))$ . Nous avons  $R_n = r(t_n, X_n)$ .
3. Nous évaluons l'intégrale  $I_m = \int_{t_0}^T r(t, x(t)) dt$  à partir d'un algorithme numérique d'intégration et de la trajectoire simulée de  $r(t, x(t))$ .
4. Nous recommençons les étapes 1, 2 et 3  $M$  fois.
5. La solution numérique de  $P_{t_0}^c(\tau)$  est alors donnée par l'expression suivante

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp(-I_m) \quad (4.88)$$

#### 4.5.1.2 L'estimateur du bootstrap

Nous pouvons modifier la méthode précédente pour tenir compte de la taille de simulation  $M$  (DEVROYE [1986]). A partir de l'échantillon  $\{x_1, \dots, x_M\}$ , nous construisons la fonction de densité empirique  $\hat{f}$  de  $f$  par la méthode du noyau. Soit  $\{y_1, \dots, y_P\}$  un échantillon de  $P$  réalisations de la variable aléatoire de densité  $\hat{f}$ . L'estimateur du bootstrap de (4.85) correspond à  $\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P g(y_p)$ . En pratique, cet estimateur est peu employé en finance, à l'exception de quelques applications (Pricing d'options dans certaines banques).

---

<sup>9</sup>La méthode "sample-mean Monte Carlo" permet de calculer numériquement  $\int_{\Delta} h(x) dx$ . En fait, nous supposons que la fonction  $h(x)$  permet de se décomposer en produit de fonction  $g(x) f(x)$  avec  $f(x)$  une fonction de densité (RUBINSTEIN [1981]).

### 4.5.1.3 Un exemple

Considérons de nouveau le modèle de Vasicek. Sous la mesure de probabilité neutre au risque, la différentielle stochastique du processus  $x(t)$  est

$$dx(t) = a \left( b - \lambda \frac{\sigma}{a} - x \right) dt + \sigma dW(t) \quad (4.89)$$

Nous utilisons les mêmes valeurs numériques  $a = 0.95$ ,  $b = 0.10$ ,  $\sigma = 0.2$  et  $\lambda = 0.05$  que dans la section précédente. Nous choisissons l'algorithme du  $\theta$ -schéma d'Euler pour simuler le processus  $x(t)$  (ou de façon équivalente  $r(t, x(t))$ ) :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{1 + \theta ak} \left[ (1 - (1 - \theta) ak) S_n + ak \left( b - \lambda \frac{\sigma}{a} \right) + \sigma \sqrt{h} \epsilon_n \right] \\ S_0 &= x_0 = r_0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

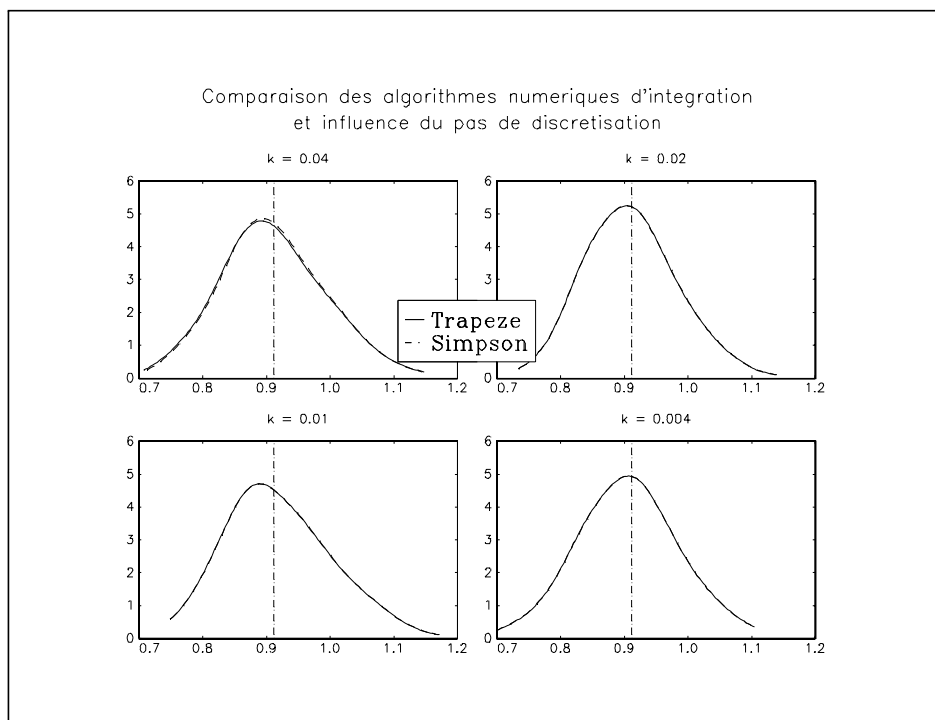
Nous estimons la solution de la valeur de l'obligation à coupon zéro  $P_{t_0}^c(\tau)$  de maturité un an pour  $x_0 = r_0 = 0.10$  et  $\theta = \frac{1}{2}$ . Sur les graphiques, nous repérons la valeur théorique correspondante par un trait vertical en pointillé. Le graphique (4.9) représente la fonction de densité<sup>10</sup> de  $\exp(-I_m)$ . Nous remarquons que l'algorithme d'intégration numérique n'a pas d'influence sur la convergence de la méthode de Monte Carlo. Nous pouvons expliquer ce résultat par le fait que les trajectoires simulées ne sont pas convexes. De même, le choix du pas de discrétisation n'est pas très important. C'est pourquoi nous utilisons l'algorithme des trapèzes pour les graphiques suivants et nous fixons  $k$  à 0.01. En fait, le paramètre qui est le plus déterminant est le nombre de simulations  $M$ . Le graphique (4.10) représente la fonction de  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp(-I_m)$  pour différentes valeurs de  $M$ . Sur le graphique (4.11), nous montrons l'erreur entre la solution théorique et la solution numérique. Le dernier graphique (4.12) représente la fonction de densité de la solution numérique lorsque nous utilisons une méthode d'accélération basée sur les variables antithétiques. Puisque  $\epsilon_n$  est une variable aléatoire issue de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et qu'il en est de même pour  $-\epsilon_n$ , nous pouvons construire une simulation antithétique  $\mathcal{S}^* = \{S_0^*, S_1^*, \dots, S_{N-1}^*\}$  avec

$$\begin{aligned} S_{n+1}^* &= \frac{1}{1 + \theta ak} \left[ (1 - (1 - \theta) ak) S_n^* + ak \left( b - \lambda \frac{\sigma}{a} \right) - \sigma \sqrt{h} \epsilon_n \right] \\ S_0^* &= x_0 = r_0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

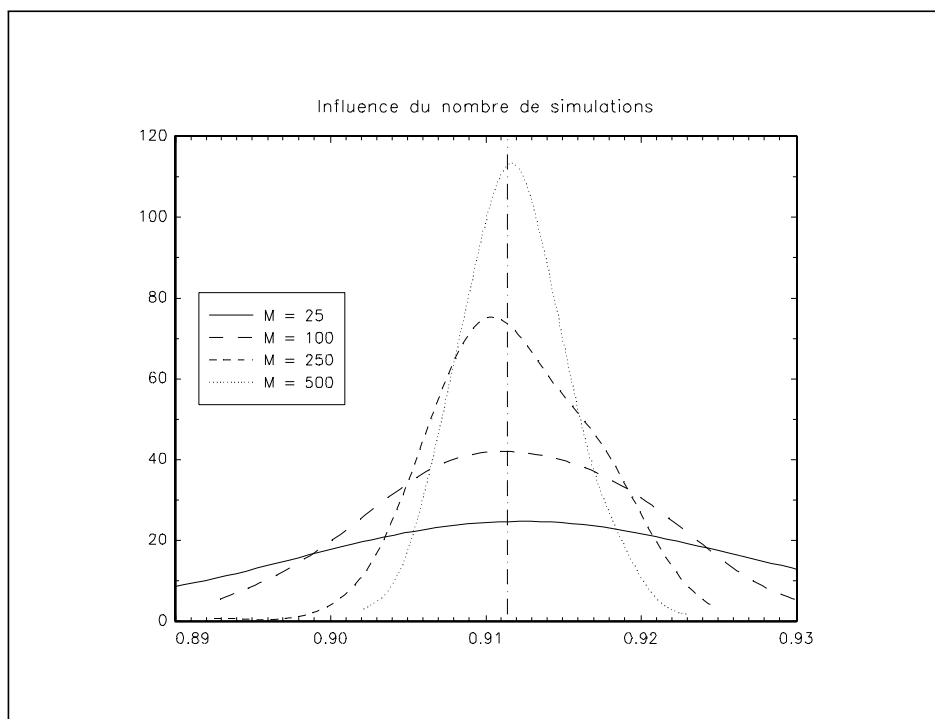
La solution numérique de  $P_{t_0}^c(\tau)$  est alors donnée par l'expression

$$\frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M [\exp(-I_m) + \exp(-I_m^*)] \quad (4.92)$$

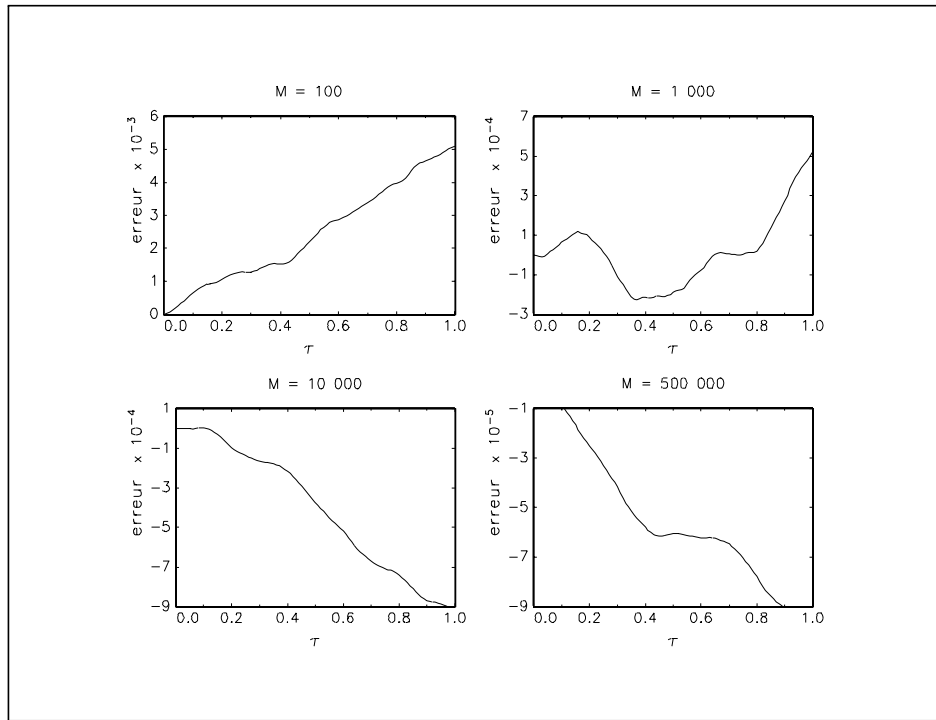
<sup>10</sup>Celle-ci est estimée par la méthode du noyau gaussien avec 250 réplifications.



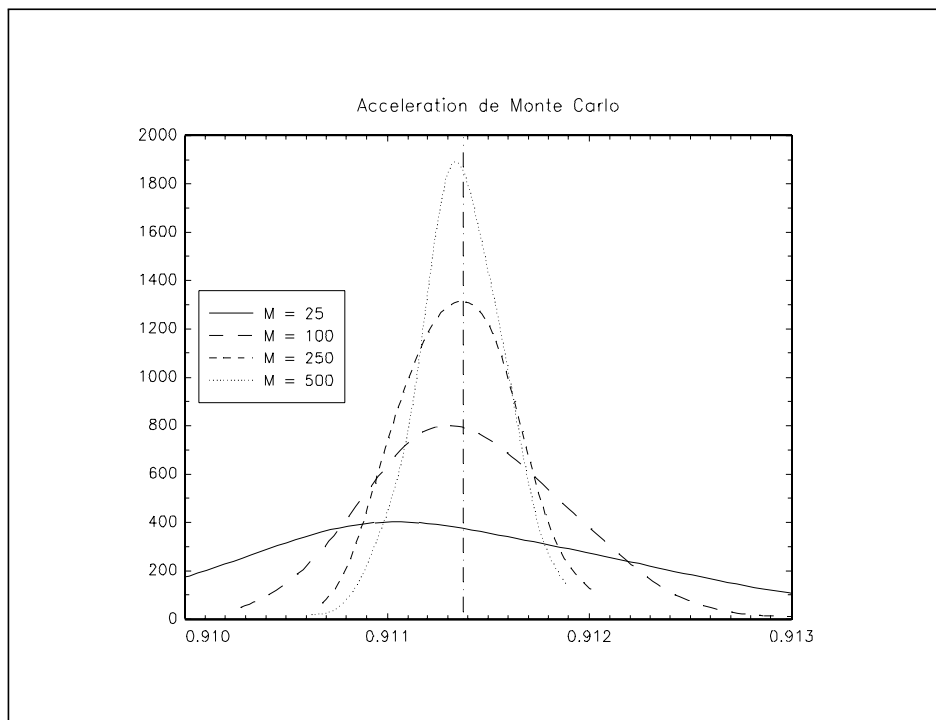
Graphique 4.9



Graphique 4.10



Graphique 4.11



Graphique 4.12

avec  $I_m^* = \int_{t_0}^T r(t, x(t)) dt$  calculée à partir de la trajectoire simulée  $\mathcal{S}^* = \{S_0^*, S_1^*, \dots, S_{N-1}^*\}$ . Si nous comparons les graphiques (4.10) et (4.12), nous remarquons que l'estimateur de Monte Carlo accéléré pour  $M = 25$  est aussi efficace que l'estimateur classique pour  $M = 500$  !

## 4.5.2 Approximation par une chaîne de Markov

Supposons que la variable d'état  $x(t)$  est le taux d'intérêt instantané  $r(t)$ . Soit le processus corrigé du risque

$$dr(t) = \mu'(t, r) dt + \sigma(t, r) dW'(t) \quad (4.93)$$

avec  $\mu'(t, r) = \mu(t, r) - \lambda(t) \sigma(t, r)$ . Nous cherchons à caractériser la fonction de distribution des probabilités de transition. La définition de celles-ci est

$$P(x, t; y, k) = \Pr(r(t+k) \leq y | r(t) = x) \quad (4.94)$$

COX et MILLER [1965] considèrent les processus de diffusion comme des cas limites des processus discrets. Dans ce paragraphe, nous cherchons à approximer le processus en temps continu (4.93) par une chaîne de Markov. Soit  $P^*(x, t; y, k)$  une approximation de  $P(x, t; y, k)$ . Il est facile de montrer que nous avons

$$P^*(x, t; y, k) = \Phi \left[ \frac{y - x - \mu'(t, x) k}{\sigma(t, x) \sqrt{k}} \right] \quad (4.95)$$

Il est difficile de calculer l'expression (4.83) en utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov puisque si nous considérons une discrétisation dans le temps de  $N$  points, nous devons calculer une intégrale  $N$ -uple ! C'est pourquoi nous considérons un nombre fini d'états de la nature ( $r(t) \in \mathcal{E}$  avec  $\text{card } \mathcal{E} < \infty$ ). Par souci de simplification, nous posons  $\mathcal{E} = \{r_s = r^- + sh, s = 0, \dots, S\}$  ( $r(t) \in [r_0 = r^-, r_S = r^+]$ ). Soit  $p_{i,j}(t, t+k)$  la probabilité de transition de  $r(t) = r_i$  vers  $r(t+k) = r_j$ . Plusieurs approximations sont possibles

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t, t+k) &= P^*(r_i, t; r_j, k) - P^*(r_i, t; r_{j-1}, k) \\ &= P^*(r_i, t; r_{j+1}, k) - P^*(r_i, t; r_j, k) \\ &= P^* \left( r_i, t; \frac{r_{j+1} + r_j}{2}, k \right) - P^* \left( r_i, t; \frac{r_j + r_{j-1}}{2}, k \right) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Si nous prenons la dernière forme d'approximation, nous obtenons

$$p_{i,j}(t, t+k) = \Phi \left[ \frac{(j + \frac{1}{2} - i) h - \mu'(t, r_i) k}{\sigma(t, r_i) \sqrt{k}} \right] - \Phi \left[ \frac{(j - \frac{1}{2} - i) h - \mu'(t, r_i) k}{\sigma(t, r_i) \sqrt{k}} \right] \quad (4.97)$$

Pour les bornes de l'intervalle, nous avons

$$p_{i,0}(t, t+k) = \Phi \left[ \frac{\left(\frac{1}{2} - i\right) h - \mu'(t, r_i) k}{\sigma(t, r_i) \sqrt{k}} \right] \quad (4.98)$$

et

$$p_{i,S}(t, t+k) = 1 - \Phi \left[ \frac{\left(S - \frac{1}{2} - i\right) h - \mu'(t, r_i) k}{\sigma(t, r_i) \sqrt{k}} \right] \quad (4.99)$$

Nous vérifions bien que  $\sum_{j=0}^S p_{i,j}(t, t+k) = 1$ . Soit  $\mathbf{P}(t, t+k)$  la matrice de Markov des probabilités de transition de l'instant  $t$  à l'instant  $t+k$ . Comme nous avons

$$\mathbf{P}(t, t+nk) = \mathbf{P}(t, t+nk-k) \mathbf{P}(t+nk-k, t+nk) \quad (4.100)$$

nous obtenons

$$\mathbf{P}(t_0, T) = \prod_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}(t_0+nk, t_0+nk+k) \quad (4.101)$$

avec  $\mathbf{P}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$  et  $k = \frac{T-t_0}{N-1}$ .

Pour calculer (4.83), nous évaluons l'espérance mathématique à partir des différentes matrices  $\mathbf{P}(t_0, t_n)$  avec  $t_n = t_0 + nk$  pour  $n = 0, \dots, N-1$  et des différentes valeurs prises par  $\int_{t_0}^T r(t, x(t)) dt$ . Si les fonctions  $\mu(t, r)$  et  $\sigma(t, r)$  sont indépendantes du temps et si nous utilisons l'algorithme des trapèzes, cette méthode est relativement facile à mettre en œuvre. Nous notons  $\mathbf{P}$  la matrice de Markov indépendante du temps et

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_0 = r^- \\ \vdots \\ r_s \\ \vdots \\ r_S = r^+ \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

La variable aléatoire  $Y_n$  représentant la loi discrète de  $\int_{t_0}^{t_n} r(t) dt$  est caractérisée par  $y_n$  le vecteur des valeurs et  $p_n$  le vecteur des probabilités. En remarquant que

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}} r(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} r(t) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} r(t) dt \quad (4.103)$$

et en appliquant l'algorithme des trapèzes, nous avons

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n \otimes \mathbf{1}_S + \frac{1}{2} [\mathbf{1}_{S^{n-1}} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{1}_S + \mathbf{1}_{S^n} \otimes \mathbf{r}] \\ p_{n+1} = [p_n \otimes \mathbf{1}_S] \odot [\mathbf{1}_{S^{n-1}} \otimes \text{vec } \mathbf{P}^\top] \end{cases} \quad (4.104)$$

La solution numérique de  $P_{t_0}^c(\tau)$  pour  $r(t_0) = r_i$  correspond à l'expression

$$p_{N-1}^\top (\exp -y_{N-1}) \quad (4.105)$$

avec  $y_1 = \frac{1}{2}(r_i + \mathbf{r})$  et  $p_1 = \mathbf{P}^\top \mathbf{e}_{i+1}$ . Cette méthode, même si elle est facile à implémenter, est généralement peu employée car elle demande beaucoup de mémoire vive ( $y_{N-1}$  et  $p_{N-1}$  sont deux vecteurs de dimension  $S^N$ ). Elle pose les mêmes problèmes que les modèles binomiaux pour les options “time-dependant” pour lesquels nous devons spécifier l’ensemble des chemins.

## 4.6 Le modèle de Vasicek [1977]

VASICEK [1977] considère que la variable d’état est le taux d’intérêt instantané. Il suppose que celui-ci suit un processus d’Ornstein-Uhlenbeck

$$\begin{cases} dr(t) &= a(b - r(t)) dt + \sigma dW(t) \\ r(t_0) &= r_0 \end{cases} \quad (4.106)$$

et que le prix du risque est constant  $\lambda(t) = \lambda$ . Dans l’annexe (4.9.5), nous montrons que  $r(t)$  est processus gaussien possédant des propriétés intéressantes. Ainsi, l’espérance mathématique conditionnelle  $E[r(t)|r_0]$  correspond au barycentre des points  $\{r_0, e^{-a(t-t_0)}\}$  et  $\{b, 1 - e^{-a(t-t_0)}\}$ . D’un point de vue économique, nous interprétons  $E[r(t)|r_0]$  comme l’anticipation rationnelle du taux d’intérêt instantané étant donné l’information<sup>11</sup> en  $t$ . Cette anticipation dépend donc de deux facteurs :

1. l’écart entre le taux présent  $r_0$  et la valeur de  $b$  ;
2. et la valeur du paramètre  $a$ .

Posons  $a > 0$ . Nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)|\mathcal{F}_{t_0}] = b \quad (4.108)$$

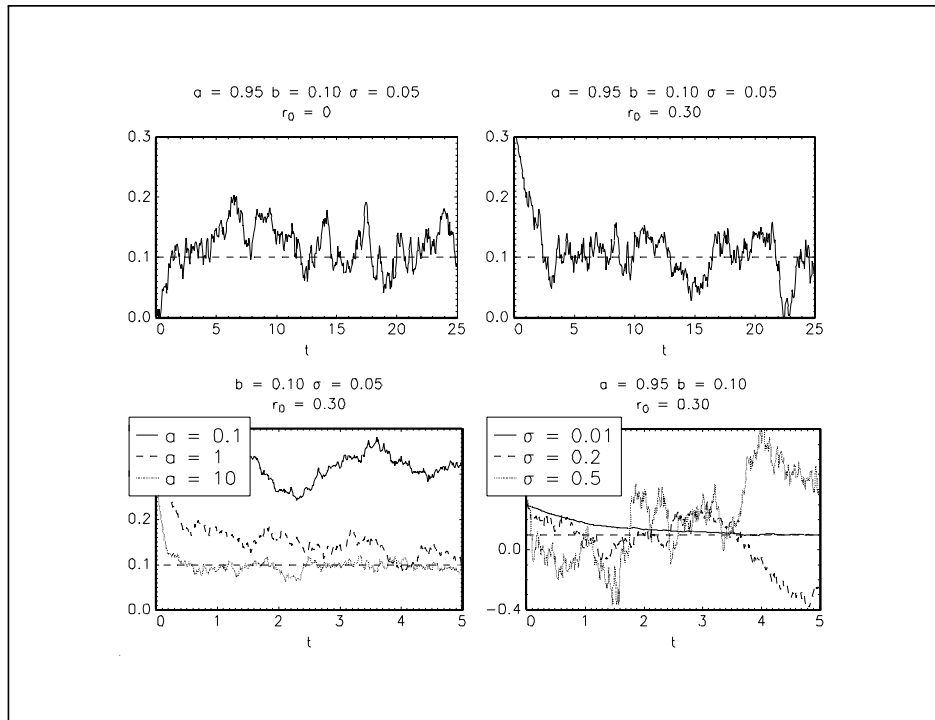
Le paramètre  $b$  représente la valeur d’équilibre du processus. Cependant, nous ne pouvons pas affirmer que  $b$  est la valeur vers laquelle tend le processus, puisque  $\text{var}[r(t)|\mathcal{F}_{t_0}]$  est une fonction monotone croissante en  $t$  et bornée par  $\frac{\sigma^2}{2a}$ . Pour interpréter correctement le paramètre  $b$ , nous devons remarquer que

$$E[r(t)|\mathcal{F}_{t_0}] = b + (r_0 - b)e^{-a(t-t_0)} \quad (4.109)$$

Si le taux courant est inférieur à  $b$ , alors nous avons  $E[r(t)|\mathcal{F}_{t_0}] \leq b$  et  $E[dr(t)|\mathcal{F}_{t_0}] > 0$ . Nous avons donc un phénomène de “retour à la moyenne”.  $b$  est en fait le point d’attraction de la trajectoire du processus. Le paramètre  $a$  est

<sup>11</sup>Comme le processus est markovien, nous avons

$$E[r(t)|r_0] = E[r(t)|\mathcal{F}_{t_0}] \quad (4.107)$$



Graphique 4.13

une mesure de la vitesse de convergence<sup>12</sup> vers ce point  $b$ . Le graphique (4.13) illustre ces propriétés. Par exemple, les trajectoires de deux réalisations du processus pour  $r_0 = 0$  et  $r_0 = 0.30$  montrent clairement que le processus a tendance à revenir vers le point  $b$  et à évoluer ensuite autour de celui-ci.

Pour valoriser une obligation à coupon zéro, nous utilisons les résultats de la deuxième section de ce chapitre. Sous la mesure de probabilité neutre au risque  $\mathbb{P}'$ , nous avons

$$dr(t) = [a(b - r(t)) - \lambda\sigma] dt + \sigma dW'(t) \quad (4.110)$$

Le processus corrigé du risque est aussi un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, puisque nous avons

$$\begin{cases} dr(t) &= a(b' - r(t)) dt + \sigma dW'(t) \\ r(t_0) &= r_0 \end{cases} \quad (4.111)$$

avec

$$b' = b - \lambda \frac{\sigma}{a} \quad (4.112)$$

Si nous appliquons le théorème (5), nous en déduisons que<sup>13</sup>

<sup>12</sup>La vitesse de convergence de  $E[r(t) | \mathcal{F}_{t_0}]$  vers  $b$  est d'autant plus forte que la valeur de  $a$  est élevée.

<sup>13</sup>La preuve est donnée dans l'annexe (4.9.6).



**Théorème 8** *Le prix du coupon zéro est donné par la formule suivante :*

$$P_{t_0}^c(\tau) = \exp \left[ - \left( b' - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \tau - \left( r_0 - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a\tau})^2 \right] \quad (4.113)$$

Nous pouvons montrer que cette solution satisfait l'équation de valorisation (4.30). Nous vérifions bien que  $P_{t_0}^c(0) = 1$ .  $P(t, x)$  est de la forme  $\exp f(t, x)$  avec  $f(t, x)$  correspondant à l'expression suivante

$$- \left( b' - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (T - t) - \left( x - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2$$

Comme l'équation de valorisation est

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{xx} + [a(b-x) - \lambda\sigma] P_x + P_t - xP = 0 \quad (4.114)$$

nous devons vérifier que

$$\frac{1}{2}\sigma^2 (f_{xx} + f_x^2) + [a(b-x) - \lambda\sigma] f_x + f_t - x = 0 \quad (4.115)$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} f_t &= \left( b' - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \left( x - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)}) e^{-a(T-t)} \\ f_x &= - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \\ f_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (4.116)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 (f_{xx} + f_x^2) + [a(b-x) - \lambda\sigma] f_x + f_t - x \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 - [a(b-x) - \lambda\sigma] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \\ & \quad + \left( b' - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \left( x - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)}) e^{-a(T-t)} - x \\ &= \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) - [a(b-x) - \lambda\sigma] + \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(T-t)} \right) \\ & \quad + \left( x - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (e^{-a(T-t)} - 1) \\ &= \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \left( \frac{\sigma^2}{2a} - [a(b-x) - \lambda\sigma] \right) \\ & \quad + \left( x - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (e^{-a(T-t)} - 1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

Nous pouvons aussi montrer que nous pouvons obtenir la solution sans changer la mesure de probabilité à partir de l'équation (4.42). Considérons la variable aléatoire  $\bar{\rho}(T)$  définie par

$$\bar{\rho}(T) = \rho(T) + \int_{t_0}^T \lambda dW(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \lambda^2 dt \quad (4.118)$$

Nous avons

$$\bar{\rho}(T) = \rho(T) + \frac{1}{2} \lambda^2 (T - t_0) + \int_{t_0}^T \lambda dW(t) \quad (4.119)$$

$\bar{\rho}(T)$  est donc une variable aléatoire gaussienne avec

$$E[\bar{\rho}(T) | \mathcal{F}_{t_0}] = E[\rho(T) | \mathcal{F}_{t_0}] + \frac{1}{2} \lambda^2 (T - t_0) \quad (4.120)$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{\rho}(T) | \mathcal{F}_{t_0}] &= E \left[ \int_{t_0}^T \left[ \sigma \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \lambda dW(t) \right]^2 \right] \\ &= \int_{t_0}^T E \left[ \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2 + \lambda^2 \right] dt \\ &= \text{var}[\rho(T) | \mathcal{F}_{t_0}] + \lambda^2 (T - t_0) + 2 \frac{\lambda \sigma}{a} \left[ (T - t_0) - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.121)$$

d'où

$$P_{t_0}^c(\tau) = \exp \left[ \begin{array}{l} - \left( b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \tau - \left( r_0 - b + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a\tau})^2 \\ - \frac{1}{2} \lambda^2 \tau + \frac{1}{2} \lambda^2 \tau + \frac{\lambda \sigma}{a} \left[ \tau - \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) \right] \end{array} \right] \quad (4.122)$$

En posant  $b' = b - \frac{\lambda \sigma}{a}$ , nous retrouvons la formule (4.113). **Nous pouvons donc obtenir indifféremment le prix de l'obligation à coupon zéro à partir des équations (4.30), (4.41) ou (4.42).**

Dans ce modèle, la structure par terme des taux zéro est définie par l'ensemble  $\{R_{t_0}(\tau), \tau \in \mathbb{R}^+\}$  avec

$$\begin{aligned} R_{t_0}(\tau) &= \left( b' - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \left( r_0 - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (1 - e^{-a\tau})^2 \\ &= R_\infty + (r_0 - R_\infty) \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (1 - e^{-a\tau})^2 \end{aligned} \quad (4.123)$$

car Vasicek remarque que

$$R_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{t_0}(\tau) = b' - \frac{\sigma^2}{2a^2} \quad (4.124)$$

Cette courbe des taux présente trois configurations possibles<sup>14</sup>. La courbe est croissante (respectivement décroissante) si  $r_0 \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^2}$  (respectivement si  $r_0 \geq R_\infty + \frac{\sigma^2}{2a^2}$ ). Si  $r_0 \in \left[ R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^2}, R_\infty + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right]$ , nous obtenons une courbe en cloche (voir graphique 4.14). Plusieurs paramètres influencent la courbe des taux zéro :

1. Le taux d'intérêt présent  $r_0$  et le taux de long terme  $R_\infty$ .

La position relative du taux d'intérêt courant par rapport au taux long détermine la forme de la courbe des taux. Ceci s'explique facilement. En effet, si  $r_0 \geq b$ , nous anticipons une baisse des taux. D'après la théorie des anticipations, la courbe des taux doit être décroissante. Nous vérifions cette observation dans le modèle de Vasicek si la prime de risque  $\lambda$  est positive. Si  $r_0 < b$ , nous devons tenir compte d'un terme égal à  $\frac{3}{4} \frac{\sigma^2}{a^2}$  pour déterminer si la courbe est croissante ou en cloche. Dans ce modèle, nous devons préciser que le phénomène de courbe en cloche est peu prononcé.

2. L'intensité du retour vers la moyenne.

Ce coefficient est déterminant pour la pente de la courbe des taux. Si  $a$  est élevé,  $R_{t_0}(\tau)$  tend très vite vers  $R_\infty$ . Dans ce cas, nous observons une pente initiale très forte et une courbure nulle pour les parties moyenne et longue.

3. La volatilité du processus  $\sigma$ .

Elle joue un rôle pour les segments moyen et long de la courbe des taux en influençant la valeur prise par  $R_\infty$ .

Nous proposons de modifier le modèle de Vasicek pour tenir compte de contraintes sur le taux d'intérêt. Supposons par exemple que le taux d'intérêt instantané moyen soit contraint par une borne inférieure et une borne supérieure<sup>15</sup>. Nous avons

$$r \leq \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T r(t) dt \leq \bar{r} \quad (4.125)$$

D'après la théorie des anticipations, le prix du coupon zéro est

$$P_{t_0}^c(\tau) = E \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (4.126)$$

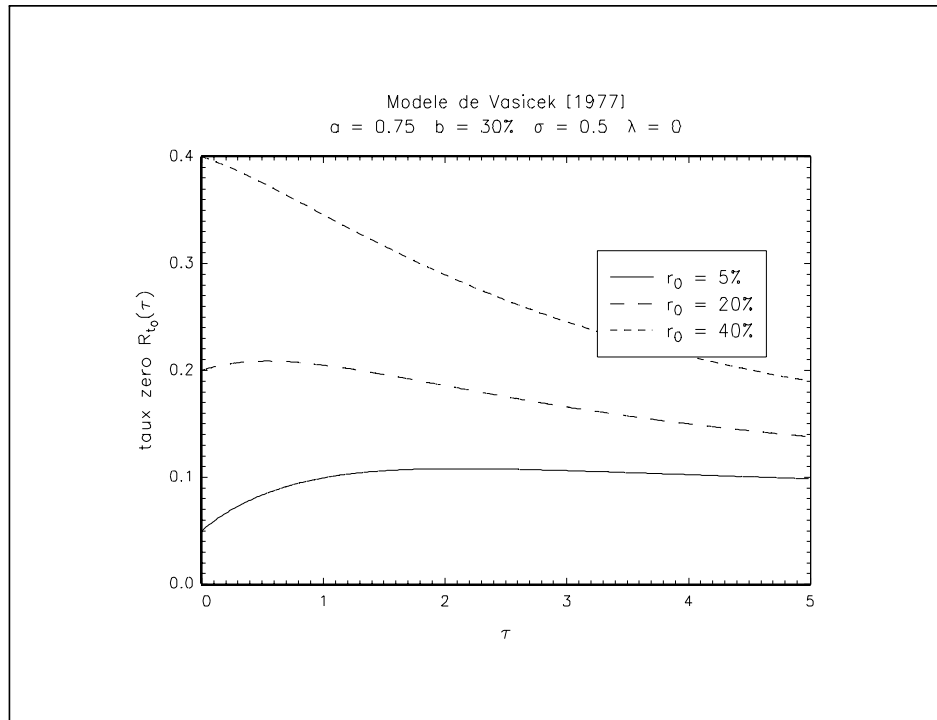
La solution<sup>16</sup> de (4.126) sous la contrainte (4.125) est

$$P_{t_0}^c(\tau) = \Phi(\beta_2) \exp(-\bar{r}\tau) \quad (4.127)$$

<sup>14</sup>VASICEK [1977], pages 186 et 187.

<sup>15</sup>Cette contrainte correspond par exemple à un objectif de politique monétaire : les taux d'intérêt ne doivent pas s'écarter de la fourchette  $[r, \bar{r}]$  en moyenne.

<sup>16</sup>La résolution du problème est donnée en annexe.



Graphique 4.14

$$\begin{aligned}
& + [\Phi(\beta_2 - \psi_2) - \Phi(\beta_1 - \psi_2)] \exp\left(\frac{1}{2}\psi_2^2 - \psi_1\right) \\
& + [1 - \Phi(\beta_1)] \exp(-\underline{r}\tau)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= b\tau + (r_0 - b) \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) & (4.128) \\
\psi_2 &= \frac{\sigma}{a} \sqrt{\tau - \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) - \frac{1}{2a} (1 - e^{-a\tau})^2} \\
\beta_1 &= \frac{\psi_1 - \underline{r}\tau}{\psi_2} \\
\beta_2 &= \frac{\psi_1 - \bar{r}\tau}{\psi_2}
\end{aligned}$$

Nous remarquons que lorsque  $\underline{r}$  et  $\bar{r}$  tendent respectivement vers  $-\infty$  et  $+\infty$ , nous retrouvons la solution du modèle de Vasicek avec  $\lambda = 0$ . Ceci est parfaitement logique puisque dans ce cas, il n'y a plus de contrainte sur l'évolution du taux d'intérêt moyen et donc sur la dynamique du taux à court terme. Si dans l'expression (4.127), nous remplaçons le coefficient  $b$  par le coefficient  $b'$ , nous pouvons espérer obtenir le prix de l'obligation à coupon zéro dans le modèle d'arbitrage à un facteur. La similitude des équations (4.41) et (4.126) nous induit cependant en

erreur. L'équation (4.41) est la solution de l'équation de valorisation après utilisation du théorème de Girsanov et de Feynman-Kac. Dans certains cas, il n'est pas possible d'appliquer un des théorèmes. Par exemple, notre problème n'est pas une représentation de Feynman-Kac. Lorsque la solution du problème **existe**, nous pouvons employer les expressions (4.41) ou (4.42) sans trop de précautions, mais s'il n'existe pas de solution ou si le problème n'est pas exactement celui décrit dans ce chapitre, leur utilisation peut conduire à des résultats faux.

## 4.7 Les autres modèles

Il existe relativement peu de modèles financiers d'arbitrage de structure par terme à un seul facteur. Dans ces modèles, la variable d'état est systématiquement le taux d'intérêt instantané.

Le modèle de MERTON [1973] est considéré comme la première modélisation de la structure par terme. Le processus suivi par  $r(t)$  est un mouvement brownien avec une tendance

$$\begin{cases} dr(t) &= \mu dt + \sigma dW(t) \\ r(t_0) &= r_0 \end{cases} \quad (4.129)$$

Si nous supposons que le prix du risque est constant  $\lambda(t) = \lambda$ , la valeur du coupon zéro est donnée par l'expression suivante (BISIÈRE [1997])

$$P_{t_0}^c(\tau) = \exp \left[ -r_0\tau - \frac{1}{2}(\mu - \lambda\sigma)\tau^2 + \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3 \right] \quad (4.130)$$

De nombreux auteurs ont souligné l'hypothèse irréaliste que l'évolution du taux court correspond à un mouvement brownien généralisé.

Les modèles de DOTHAN [1978] et COX, INGERSOLL et ROSS [1985b] ne sont pas des modèles d'arbitrage mais d'équilibre intertemporel. Dans le chapitre suivant, nous verrons qu'ils présentent des similitudes et que l'équation de valorisation d'un modèle d'équilibre peut se mettre sous la forme de celle du modèle d'arbitrage. Par exemple, l'équation de valorisation dans le modèle de Dothan est

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 P_{rr} - \lambda\sigma r P_r + P_t - rP = 0 \\ P_T^c(0) = P(T, r(T)) = 1 \end{cases} \quad (4.131)$$

avec deux conditions supplémentaires  $P(t, 0) = 1$  et  $P(t, \infty) = 0$ . La solution proposée par Dothan est très complexe puisqu'elle fait appel à la fonction modifiée fractionnaire de Bessel. Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR par la suite) est beaucoup plus intéressant et plus fréquemment utilisé. Le taux d'intérêt instantané suit un processus "racine carrée" :

$$\begin{cases} dr(t) &= \kappa(\theta - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \\ r(t_0) &= r_0 \end{cases} \quad (4.132)$$

L'équation fondamentale dans CIR est alors

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + [\kappa(\theta - r) - \lambda r] P_r + P_t - rP = 0 \\ P_T^c(0) = P(T, r(T)) = 1 \end{cases} \quad (4.133)$$

Le prix du risque  $\lambda(t)$  n'est pas constant dans ce modèle. Il est déterminé par les conditions d'équilibre et aussi par la fonction d'utilité. Dans un cadre d'arbitrage, ce modèle implique que le prix du risque dépend de la variable d'état, puisque nous avons (REBONATO [1996])

$$\lambda(t, r) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r} \quad (4.134)$$

Le prix du coupon zéro est alors égal à<sup>17</sup>

$$P_{t_0}^c(\tau) = \left[ \frac{2\gamma \exp(\frac{1}{2}\phi_1\tau)}{\phi_3} \right]^{\phi_4} \exp\left[ -2\frac{\phi_2}{\phi_3} r_0 \right] \quad (4.135)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \\ \phi_1 &= \gamma + \kappa + \lambda \\ \phi_2 &= \exp(\gamma\tau) - 1 \\ \phi_3 &= \phi_1\phi_2 + 2\gamma \\ \phi_4 &= 2\kappa\theta / \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.136)$$

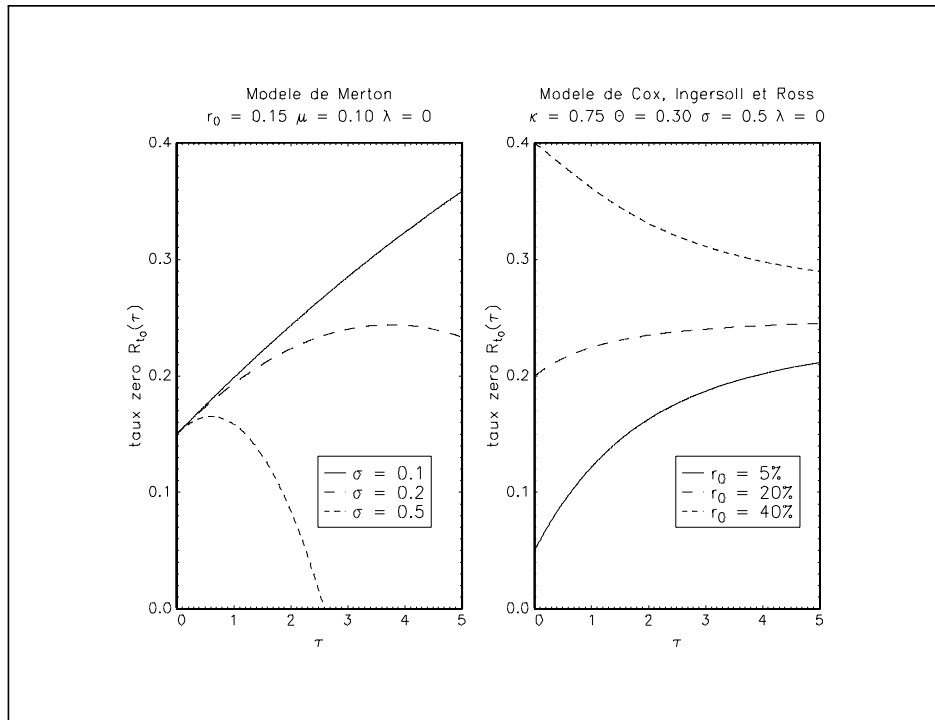
## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle d'arbitrage à un seul facteur tel qu'il est décrit dans GIBSON-ASNER [1987]. Le fait qu'il existe finalement peu de modèles peut s'expliquer par l'existence de problèmes de résolution analytiques fort complexes. Les méthodes numériques permettent de contourner cette difficulté. Outre le fait qu'ils sont courants dans les salles de marché, ils permettent aussi de vérifier l'exactitude des résultats<sup>18</sup>. Dans le chapitre suivant, nous abordons le cas de plusieurs variables d'état qui permettent une meilleure modélisation de la structure par terme.

---

<sup>17</sup>AHN et THOMPSON [1988] ont proposé une autre solution lorsque le taux d'intérêt est un processus de diffusion avec saut.

<sup>18</sup>Nous pensons notamment à la découverte par BEAGLEHOLE et TENNEY [1992] de la fausseté de la solution proposée par LONGSTAFF [1989].



Graphique 4.15

## 4.9 Annexes

### 4.9.1 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Nous utilisons les résultats de KARATZAS et SHREVE [1991] et ceux de FRIEDMAN [1975].

**Théorème 9** *Considérons la variable d'état  $x(t)$  définie par*

$$dx(t) = \mu(t, x) dt + \sigma(t, x) dW(t) \quad (4.137)$$

et  $\mathcal{A}_t v$  le générateur infinitésimal de la diffusion  $v(t, x(t))$

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 v(t, x(t))}{\partial x^2} + \mu(t, x) \frac{\partial v(t, x(t))}{\partial x} \quad (4.138)$$

*Sous les hypothèses suivantes :*

1. *Les fonctions  $\mu(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$ ,  $k(t, x)$  et  $g(t, x)$  sont lipschitziennes, bornées sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$ .*
2. *La fonction  $f(x)$  est une fonction continue et de classe  $C^2$ .*

3. Les fonctions  $g$  et  $f$  sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe  $K \geq 0$  et  $\xi \geq 0$  tels que

$$\begin{cases} |g(x)| \leq K \exp(\xi x^2) \\ |f(x)| \leq K \exp(\xi x^2) \end{cases} \quad (4.139)$$

Si  $v(t, x)$  est une fonction à croissance polynômiale, alors il existe une solution unique au problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + k(t, x)v(t, x) = \mathcal{A}_t v + g(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ v(T) = f(x(T)) \end{cases} \quad (4.140)$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} v(t, x) = & E \left[ f(x(T)) \exp \left( - \int_t^T k(s, x(s)) ds \right) \right. \\ & \left. + \int_t^T g(s, x(s)) \exp \left( - \int_t^s k(\theta, x(\theta)) d\theta \right) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (4.141)$$

### 4.9.2 Théorème de Girsanov

Le lecteur peut se référer à la deuxième section du septième chapitre de FRIEDMAN [1975] pour la preuve de ce théorème. KARATZAS et SHREVE [1991] en donnent une interprétation intuitive en montrant que celui-ci est une extension du principe d'invariance gaussienne en temps discret (voir les pages 190-191).

**Théorème 10** Soient  $W(t)$  un processus de Wiener sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ . Si le processus  $\phi(t)$  vérifie la condition suivante :

$$E \left[ \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \phi^2(s) ds \right] < +\infty \quad (4.142)$$

alors  $W'(t)$  défini par  $W'(t) = W(t) - \int_{t_0}^t \phi(s) ds$  est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ . Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = \exp \left[ \int_{t_0}^t \phi(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \phi^2(s) ds \right] \quad (4.143)$$

### 4.9.3 Algorithme tridiagonal

Soit le système suivant

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & \mathbf{0} \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ \mathbf{0} & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \quad (4.144)$$



Ce système est équivalent à

$$\begin{pmatrix} b'_1 & 0 & & & \mathbf{0} \\ a_2 & b'_2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & a_{n-1} & b'_{n-1} & 0 \\ \mathbf{0} & & 0 & a_n & b'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_{n-1} \\ d'_n \end{pmatrix} \quad (4.145)$$

avec

$$\begin{cases} b'_n = b_n \\ b'_i = b_i - \frac{c_i a_{i+1}}{b'_{i+1}} \quad \forall i = n-1, \dots, 1 \end{cases} \quad (4.146)$$

et

$$\begin{cases} d'_n = d_n \\ d'_i = d_i - \frac{c_i d'_{i+1}}{b'_{i+1}} \quad \forall i = n-1, \dots, 1 \end{cases} \quad (4.147)$$

La solution du système (4.144) est alors

$$\begin{cases} x_1 = \frac{d'_1}{b'_1} \\ x_i = \frac{d'_i - a_i x_{i-1}}{b'_i} \quad \forall i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.148)$$

#### 4.9.4 Algorithmes de simulation d'une équation différentielle stochastique

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx(t) &= \alpha(t, x(t)) dt + \beta(t, x(t)) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4.149)$$

Nous cherchons à simuler une trajectoire de cette EDS pour  $t \in [t_0, T]$ . Considérons la partition  $\Delta = \{t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = T\}$  de  $[t_0, T]$ . Si nous prenons un schéma de discrétisation équidistante

$$t_n - t_{n-1} = k = \frac{T - t_0}{N - 1} \quad (4.150)$$

nous avons

$$t_n = t_0 + nk \quad (4.151)$$

Notons  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_{N-1}\}$  une trajectoire du processus avec  $S_n$  correspondant à  $x(t_n)$ . KLOEDEN et PLATEN [1992] présentent de nombreux algorithmes de simulation, parmi lesquels nous avons

- L'algorithme d'Euler-Maruyama

C'est l'algorithme le plus couramment utilisé. Il correspond à un schéma d'approximation de Taylor de forme forte

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \alpha(t_n, S_n) k + \beta(t_n, S_n) \sqrt{k} \epsilon_n \\ S_0 &= x_0 \end{aligned} \quad (4.152)$$

- L'algorithme de Milstein

C'est une modification de celui d'Euler-Maruyama

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \alpha(t_n, S_n)k + \beta(t_n, S_n)\sqrt{k}\epsilon_n + \frac{1}{2}\beta(t_n, S_n)\beta'(t_n, S_n)k(\epsilon_n - 1) \\ S_0 &= x_0 \end{aligned} \quad (4.153)$$

- L'algorithme d'Heun

Il correspond à un schéma explicite d'approximation

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{2} \left[ \alpha(t_n, S_n) + \alpha(t_n, \tilde{S}_n) \right] k \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \beta(t_n, S_n) + \beta(t_n, \tilde{S}_n) \right] \sqrt{k}\epsilon_n \\ \tilde{S}_n &= S_n + \alpha(t_n, S_n)k + \beta(t_n, S_n)\sqrt{k}\epsilon_n \\ S_0 &= x_0 \end{aligned} \quad (4.154)$$

- L'algorithme du  $\theta$ -schéma d'Euler

Nous avons

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + [\theta\alpha(t_{n+1}, S_{n+1}) + (1 - \theta)\alpha(t_n, S_n)]k + \beta(t_n, S_n)\sqrt{k}\epsilon_n \\ S_0 &= x_0 \end{aligned} \quad (4.155)$$

$\epsilon_n$  est un nombre aléatoire issu de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Les trois premiers algorithmes sont récurrents. Pour l'algorithme du  $\theta$ -schéma d'Euler, nous obtenons  $S_{n+1}$  en résolvant l'équation non linéaire. Si  $\alpha(t, x)$  est linéaire en  $x$ , nous pouvons reformuler l'équation (4.155) en équation linéaire implicite.

### 4.9.5 Solution d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = a(b - x(t))dt + \sigma dW(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.156)$$

Le processus de diffusion solution de cette EDS est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous pouvons montrer facilement que (4.156) admet une solution unique<sup>19</sup>. Posons

$$y(t) = f(t, x) = e^{at}(b - x(t)) \quad (4.157)$$

<sup>19</sup>Il suffit d'utiliser la proposition 2.13 de KARATZAS et SHREVE [1991] (théorème de Yamada-Watanabe) avec  $K = |a|$  et  $h(u) = \sqrt{u}$  (le théorème 1.1 de FRIEDMAN [1975] page 98 est plus difficile à employer).

D'après le lemme d'Itô, nous avons

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left[ ae^{at}(b-x) - a(b-x)e^{at} + \frac{1}{2}\sigma^2 \times 0 \right] dt - \sigma e^{at} dW(t) \quad (4.158) \\ &= -\sigma e^{at} dW(t) \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la différentielle stochastique, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} y(t) - y(t_0) &= \int_{t_0}^t -\sigma e^{a\theta} dW(\theta) \quad (4.159) \\ e^{at}(b-x(t)) - e^{at_0}(b-x(t_0)) &= -\sigma \int_{t_0}^t e^{a\theta} dW(\theta) \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)} + b(1 - e^{-a(t-t_0)}) + \sigma \int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) \quad (4.160)$$

Nous remarquons que  $x(t)$  est un processus gaussien puisque c'est la somme de deux fonctions déterministes et de variables aléatoires gaussiennes indépendantes<sup>20</sup>. Pour caractériser la fonction de densité conditionnelle de  $x(t) | \mathcal{F}_{t_0}$ , il suffit de connaître les deux premiers moments de  $x(t) | x(t_0) = x_0$ . Nous avons alors

$$E[x(t) | x(t_0) = x_0] = x_0 e^{-a(t-t_0)} + b(1 - e^{-a(t-t_0)}) \quad (4.161)$$

car

$$E\left[\int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta)\right] = 0 \quad (4.162)$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}[x(t) | x(t_0) = x_0] &= E\left[\sigma \int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta)\right]^2 \quad (4.163) \\ &= \sigma^2 E\left[\int_{t_0}^t e^{2a(\theta-t)} d\theta\right] \\ &= \sigma^2 \left[\frac{e^{2a(\theta-t)}}{2a}\right]_{t_0}^t \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-t_0)}) \end{aligned}$$

#### 4.9.6 Preuve du théorème 8

Considérons la variable aléatoire  $\rho(T)$  définie par

$$\rho(T) = \int_{t_0}^T r(t) dt \quad (4.164)$$

---

<sup>20</sup>D'après la définition de l'intégrale stochastique,  $\int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta)$  est la limite de la somme des variables aléatoires  $e^{a(\theta-t)} [W(\theta + \varepsilon) - W(\theta)]$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

En utilisant le résultat (4.160), nous avons

$$\begin{aligned}
\rho(T) &= \int_{t_0}^T \left( r_0 e^{-a(t-t_0)} + b(1 - e^{-a(t-t_0)}) + \sigma \int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) \right) dt \quad (4.165) \\
&= r_0 \left[ \frac{e^{-a(t-t_0)}}{-a} \right]_{t_0}^T + b \left[ t - \frac{e^{-a(t-t_0)}}{-a} \right]_{t_0}^T + \sigma \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) dt \\
&= b(T - t_0) + (r_0 - b) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right) + \sigma \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) dt
\end{aligned}$$

Pour calculer  $I = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) dt$ , nous devons utiliser le théorème de construction de l'intégrale stochastique<sup>21</sup>. Considérons une partition  $\Delta$  de  $[t_0, T]$  définie par  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T\}$ . Alors l'intégrale  $I$  est la limite de l'expression  $I_N$  lorsque  $N \rightarrow \infty$  et  $\max(t_{n+1} - t_n) \rightarrow 0$  avec

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=0}^n e^{a(t_i - t_n)} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] \right] (t_{n+1} - t_n) \quad (4.166)$$

Nous avons aussi

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=0}^n e^{a(t_i - t_n)} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] (t_{n+1} - t_n) \right] \quad (4.167)$$

En changeant l'ordre de la somme, nous en déduisons une nouvelle expression de  $I_N$

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=n}^{N-1} e^{a(t_n - t_i)} (t_{i+1} - t_i) \right] [W(t_{n+1}) - W(t_n)] \quad (4.168)$$

et donc une nouvelle expression de  $I$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_0}^T \int_t^T e^{a(t-\theta)} d\theta dW(t) \\
&= \int_{t_0}^T \left[ \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] dW(t) \quad (4.169)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\rho(T) = b(T - t_0) + (r_0 - b) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right) + \sigma \int_{t_0}^T \left[ \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] dW(t) \quad (4.170)$$

Le variable aléatoire  $\rho(T)$  est gaussienne, puisque c'est la somme de deux fonctions déterministes et de variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Nous avons

$$E[\rho(T) | \mathcal{F}_{t_0}] = b(T - t_0) + (r_0 - b) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right) \quad (4.171)$$

<sup>21</sup>Voir par exemple le théorème 2.10 de FRIEDMAN [1975].

et

$$\begin{aligned}
\text{var} [\rho(T) | \mathcal{F}_{t_0}] &= E \left[ \sigma \int_{t_0}^T \left[ \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] dW(t) \right]^2 \\
&= \left( \frac{\sigma}{a} \right)^2 \int_{t_0}^T E \left[ \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right]^2 dt \\
&= \left( \frac{\sigma}{a} \right)^2 \int_{t_0}^T 1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} dt \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ (T - t_0) - \frac{2}{a} (1 - e^{-a(T-t_0)}) + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a(T-t_0)}) \right]
\end{aligned} \tag{4.172}$$

Nous pouvons alors montrer (ROCHER et DEMANGE [1990], page 227.) que

$$\text{var} [\rho(T) | \mathcal{F}_{t_0}] = \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ (T - t_0) - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right) - \frac{1}{2a} (1 - e^{-a(T-t_0)})^2 \right] \tag{4.173}$$

Sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ , le processus  $r(t)$  est aussi un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Comme la variable aléatoire  $\rho(T)$  est gaussienne,  $\exp(-\rho(T))$  est une variable aléatoire log-normale. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
P_{t_0}^c(\tau) &= \exp \left( -E' [\rho(T) | \mathcal{F}_{t_0}] + \frac{1}{2} \text{var} [\rho(T) | \mathcal{F}_{t_0}] \right) \\
&= \exp \left[ - \left( b' - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \tau - \left( r_0 - b' + \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \left( \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a\tau})^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.174}$$

#### 4.9.7 Preuve de la solution avec contraintes

La fonction de densité de  $\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T r(t) dt$  sous la contrainte  $\underline{r} \leq \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T r(t) dt \leq \bar{r}$  est une distribution gaussienne censurée. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
P_{t_0}^c(\tau) &= e^{-\bar{r}\tau} \int_{-\infty}^{-\bar{r}\tau} \frac{1}{\psi_2 \sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{\theta + \psi_1}{\psi_2} \right)^2 d\theta \\
&\quad + \int_{-\bar{r}\tau}^{-\underline{r}\tau} \frac{1}{\psi_2 \sqrt{2\pi}} \exp \theta \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{\theta + \psi_1}{\psi_2} \right)^2 d\theta + \\
&\quad + e^{-\underline{r}\tau} \int_{-\underline{r}\tau}^{+\infty} \frac{1}{\psi_2 \sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{\theta + \psi_1}{\psi_2} \right)^2 d\theta
\end{aligned} \tag{4.175}$$

avec

$$\psi_1 = b(T - t_0) + (r_0 - b) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right) \tag{4.176}$$

et

$$\psi_2 = \frac{\sigma}{a} \sqrt{(T - t_0) - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t_0)}}{a} \right) - \frac{1}{2a} (1 - e^{-a(T-t_0)})^2} \tag{4.177}$$

Soit  $\xi = \frac{\theta + \psi_1}{\psi_2}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 P_{t_0}^c(\tau) &= e^{-\bar{r}\tau} \int_{-\infty}^{\beta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \\
 &+ \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\psi_2\xi - \psi_1) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \\
 &+ e^{-\underline{r}\tau} \int_{\beta_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi
 \end{aligned} \tag{4.178}$$

avec

$$\beta_1 = \frac{\psi_1 - \underline{r}\tau}{\psi_2} \tag{4.179}$$

et

$$\beta_2 = \frac{\psi_1 - \bar{r}\tau}{\psi_2} \tag{4.180}$$

Soit  $\Phi(x)$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
 P_{t_0}^c(\tau) &= \Phi(\beta_2) \exp(-\bar{r}\tau) \\
 &+ \exp\left(\frac{1}{2}\psi_2^2 - \psi_1\right) \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - \psi_2)^2\right) d\xi \\
 &+ [1 - \Phi(\beta_1)] \exp(-\underline{r}\tau)
 \end{aligned} \tag{4.181}$$

En considérant le changement de variable  $\zeta = \xi - \psi_2$ , nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
 P_{t_0}^c(\tau) &= \Phi(\beta_2) \exp(-\bar{r}\tau) \\
 &+ [\Phi(\beta_2 - \psi_2) - \Phi(\beta_1 - \psi_2)] \exp\left(\frac{1}{2}\psi_2^2 - \psi_1\right) \\
 &+ [1 - \Phi(\beta_1)] \exp(-\underline{r}\tau)
 \end{aligned} \tag{4.182}$$

# Chapitre 5

## Modèle financier de structure par terme — Le cas de plusieurs variables d'état

### 5.1 Introduction

Les modèles à deux variables d'état sont très vite apparus après le travail de VASICEK [1987]. Par exemple, RICHARD [1978] utilise le taux d'inflation et le taux d'intérêt réel instantanés et BRENNAN et SCHWARTZ [1979,1982] les taux court et long. Ces deux modèles sont des modèles d'arbitrage. Dans deux articles fort célèbres, COX, INGERSOLL et ROSS [1985a,1985b] présentent une nouvelle méthodologie basée sur l'équilibre intertemporel des actifs financiers, qui permettra à LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992] de proposer un modèle à deux facteurs très intéressant.

Dans une première section, nous présentons la généralisation du modèle d'arbitrage. Celle-ci est basée sur les travaux de ROCHET et DEMANGE [1992]. La deuxième section est consacrée à la méthodologie de Cox, Ingersoll et Ross. Nous verrons en particulier que les prix des obligations à coupon zéro dans ce modèle peuvent se déduire d'un modèle factoriel d'arbitrage particulier. Les différents modèles de structure par terme sont exposés dans la troisième section.

### 5.2 Modèle d'arbitrage à $M$ variables d'état

#### 5.2.1 Présentation du modèle

Nous cherchons à valoriser une obligation à coupon zéro à l'instant  $t_0$  de nominal un Franc et d'échéance  $T$ . Quatre hypothèses définissent le modèle :

1. Le marché est viable et complet. Nous supposons en plus qu'il est parfaitement efficient et sans friction (absence de coût de transaction).

2. Le prix de l'obligation à coupon zéro  $P_t^c(\tau)$  est entièrement déterminé par le vecteur  $X(t)$  des  $M$  variables d'état. Nous avons

$$P_t^c(\tau) = P(t, X(t)) \quad (5.1)$$

3. Le vecteur des variables d'état  $X(t)$  est un processus de diffusion dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique vectorielle suivante

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \Sigma(t, X(t)) dW(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de dimension  $N$  et de matrice de covariance  $\rho t$  sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ .

4. Il existe un actif sans risque dont le rendement  $r$  dépend du vecteur des variables d'état  $X(t)$

$$r = r(t, X(t)) \quad (5.3)$$

Le modèle à une seule variable d'état correspond à  $M = N = 1$  et  $\rho = 1$ . Afin de bien comprendre la différence entre les variables d'état et les sources de risque, nous détaillons certaines notations. Nous avons

$$X(t)_{M \times 1} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

et

$$W(t)_{N \times 1} = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_n(t) \\ \vdots \\ W_N(t) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

La dynamique de la variable d'état  $x_m(t)$  est

$$\begin{cases} dx_m(t) = \mu_m(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) dt + \sum_{n=1}^N \sigma_{m,n}(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) dW_n(t) \\ x_m(t_0) = x_0^m \end{cases} \quad (5.6)$$

avec  $W_n(t)$  un processus de Wiener qui vérifie la propriété suivante

$$\begin{cases} E[W_n(t)W_i(t)] = \rho_{n,i}t & \text{si } n \neq i \\ E[W_n(t)W_n(t)] = t \end{cases} \quad (5.7)$$



L'écriture matricielle (5.2) implique les définitions suivantes des fonctions  $\mu(t, X(t))$  et  $\Sigma(t, X(t))$  et de la matrices  $\rho$  :

$$\mu_{M \times 1}(t, X(t)) = \begin{bmatrix} \mu_1(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) \\ \vdots \\ \mu_m(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) \\ \vdots \\ \mu_M(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\Sigma_{M \times N}(t, X(t)) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) & \cdots & \sigma_{1,N}(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M,1}(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) & \cdots & \sigma_{M,N}(t, x_1(t), \dots, x_M(t)) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\rho_{N \times N} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \cdots & \rho_{1,N} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \cdots & \rho_{2,N} \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \rho_{N-1,N} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

**Le nombre de facteurs n'est pas nécessairement égal au nombre de processus de Wiener, c'est-à-dire au nombre de sources de risques.** Contrairement au modèle d'arbitrage à une seule variable d'état, il n'y a plus de correspondance entre les variables d'état et les risques sauf dans le cas où  $M$  est égal à  $N$  et que la matrice  $\Sigma(t, X(t))$  est diagonale.

### 5.2.2 Dérivation de l'équation de valorisation

D'après le lemme d'Itô mutidimensionnel, nous avons

$$dP(t) = P_t(t, X(t)) dt + dX(t)^\top P_X(t, X(t)) + \frac{1}{2} dX(t)^\top P_{XX}(t, X(t)) dX(t) \quad (5.11)$$

Nous en déduisons que

$$dP(t) = P_t(t, X(t)) dt + \mu(t, X(t))^\top P_X(t, X(t)) dt + P_X(t, X(t))^\top \Sigma(t, X(t)) dW(t) + \frac{1}{2} dW(t)^\top \Sigma(t, X(t))^\top P_{XX}(t, X(t)) \Sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (5.12)$$

Comme la dernière expression est une forme quadratique<sup>1</sup>, nous en déduisons que

$$dP(t) = P_t(t, X(t)) dt + \mu(t, X(t))^\top P_X(t, X(t)) dt + P_X(t, X(t))^\top \Sigma(t, X(t)) dW(t) + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X(t))^\top P_{XX}(t, X(t)) \Sigma(t, X(t)) \rho \right] dt \quad (5.14)$$

<sup>1</sup>Soient  $A$  une matrice  $(N \times N)$  et  $\mathbf{x}$  un vecteur  $(N \times 1)$ . Nous avons alors

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \text{trace}(A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top) = \text{trace}(\mathbf{x} \mathbf{x}^\top A) \quad (5.13)$$

en utilisant la règle  $dW(t) dW(t)^\top = \rho dt$ . Le Dynkin associé à la diffusion  $P(t)$  est donc

$$\mathcal{D}P = P_t(t, X(t)) + \mu(t, X(t))^\top P_X(t, X(t)) + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X(t))^\top P_{XX}(t, X(t)) \Sigma(t, X(t)) \right] \rho \quad (5.15)$$

et nous avons

$$dP(t) = \mathcal{D}P dt + P_X(t, X(t))^\top \Sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (5.16)$$

Construisons un portefeuille d'arbitrage  $\mathcal{P}$  comprenant  $P$  obligations à coupons zéro de maturités respectives  $\tau_p$ . Soit  $\alpha_p$  la proportion de la  $p$ -ième obligation. Nous avons

$$\sum_{p=1}^P \alpha_p = 1 \quad (5.17)$$

Comme l'agent emprunte au taux sans risque  $r(t, X(t))$ , le rendement instantané net du portefeuille d'arbitrage est donné par

$$R[\mathcal{P}] = -r(t, X(t)) \mathcal{P} dt + d\mathcal{P} \quad (5.18)$$

avec

$$\mathcal{P} = \sum_{p=1}^P \alpha_p P_p(t, X(t)) \quad (5.19)$$

Ce portefeuille est localement non risqué si la condition suivante est vérifiée :

$$\text{var} [R[\mathcal{P}] | \mathcal{F}_t] = 0 \quad (5.20)$$

Dans ce cas, l'espérance de rendement doit être nulle

$$E [R[\mathcal{P}] | \mathcal{F}_t] = 0 \quad (5.21)$$

Pour caractériser le portefeuille d'arbitrage, nous devons trouver le vecteur  $\alpha^*$  solution des deux conditions précédentes. La condition (5.20) est équivalente à

$$\sum_{p=1}^P \alpha_p P_{p,X}(t, X(t))^\top \Sigma(t, X(t)) dW(t) = 0 \quad (5.22)$$

d'où

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^P \alpha_p \sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,1}(t, X(t)) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^P \alpha_p \sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,N}(t, X(t)) = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

La condition (5.21) devient

$$\sum_{p=1}^P \alpha_p \left[ P_{p,t}(t, X(t)) + \mu(t, X(t))^\top P_{p,X}(t, X(t)) + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X(t))^\top P_{p,XX}(t, X(t)) \Sigma(t, X(t)) \rho \right] - r(t, X(t)) P_p(t, X(t)) \right] = 0 \quad (5.24)$$

Nous obtenons finalement un système de  $(N + 1)$  équations à  $P$  inconnues

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \alpha_p \sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,1}(t, X(t)) &= 0 \\ \sum_{p=1}^P \alpha_p \sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,N}(t, X(t)) &= 0 \\ \sum_{p=1}^P \alpha_p \left( P_{p,t} + \mu^\top P_{p,X} + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma^\top P_{p,XX} \Sigma \rho \right] - r P_p \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

**Proposition 11**  $N + 1$  actifs sont nécessaires (et suffisants) pour constituer un portefeuille d'arbitrage dans une économie où il y a  $N$  sources de risque différentes et lorsque les marchés sont complets et viables.

**Preuve.** Nous avons un système  $(N + 1)$  équations à  $P$  variables. Soit  $f$  l'application associée à ce système. Nous avons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^P &\longrightarrow \mathbb{R}^{N+1} \\ \alpha &\longmapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

Posons  $w_0 = \mathbf{0}_{N+1}$ . La solution du problème  $\alpha^*$  est donnée par l'ensemble suivant

$$\mathcal{S} = \{ \alpha \in \mathbb{R}^P : f(\alpha) = w_0 \}$$

- 1<sup>er</sup> cas :  $P < N + 1$ .

Nous raisonnons par l'absurde et supposons que  $P = N$ . Nous savons que  $\dim \text{Im } f \leq P$ . Prenons alors la base canonique  $\{e_1, e_2, \dots, e_P\}$  de  $\mathbb{R}^P$ . Soit  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_P)\}$  la base de  $\text{Im } f$ . Alors  $w_0 \in \text{Im } f$  si et seulement si

$$\begin{aligned} &\exists (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_P) \in \mathbb{R}^P : w_0 = \delta_1 f(e_1) + \delta_2 f(e_2) + \dots + \delta_P f(e_P) \\ \iff &\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_P), w_0\} \text{ forment un système lié} \\ \iff &\text{tous les mineurs d'ordre } P + 1 \text{ sont nuls} \end{aligned}$$

Si ceci est vérifié, alors  $\mathcal{S} = \{\mathbf{0}_P\}$ . Ce n'est pas une solution acceptable puisque sous l'hypothèse de complétude et de viabilité des marchés, le portefeuille d'arbitrage existe. Nous en déduisons que

$$\dim \text{Im } f < P \quad (5.26)$$

Supposons que  $\dim \text{Im } f = P - 1$ . Cela implique que tous les mineurs d'ordre  $P$  sont nuls. En particulier, le mineur naturel est nul. Nous en déduisons qu'il existe  $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{P-1}]^\top$  tel que nous avons pour tout  $p = 1, \dots, P$

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,N}(t, X(t)) = \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n \sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,n}(t, X(t)) \quad (5.27)$$

d'où

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,N}(t, X(t)) dW_N(t) = \sum_{m=1}^M \frac{\partial P_p(t, X(t))}{\partial x_m} \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n \sigma_{m,n}(t, X(t)) dW_n(t) \quad (5.28)$$

Nous obtenons finalement

$$\sigma_{m,N}(t, X(t)) dW_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n \sigma_{m,n}(t, X(t)) dW_n(t) \quad (5.29)$$

Nous arrivons à une incohérence puisqu'une des sources de risque est une combinaison linéaire des autres sources de risque. Dans ce cas, nous n'avons pas  $N$  sources de risque mais  $N - 1$  sources de risque. Nous en déduisons que notre hypothèse de départ est fautive et donc que

$$\dim \text{Im } f \geq P \geq N \quad (5.30)$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $P = N + 1$ .

$\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_P)\}$  forment une base si et seulement si le mineur d'ordre  $P$  est non nul. Dans ce cas, nous avons  $\dim \text{Im } f = P$  et  $\dim \ker f = 0$ . Nous avons donc une solution unique  $\alpha^* = f^{-1}(w_0) = \mathbf{0}_P$ . Cependant ce n'est pas une solution acceptable. Si le mineur d'ordre  $P$  est nul, alors  $\dim \text{Im } f < P$ . Supposons qu'il existe un mineur d'ordre  $P - 1$  non nul, dans ce cas  $\dim \ker f = 1$ . Nous avons alors une infinité de solutions  $\alpha^* = \alpha_0 + t\vec{\alpha}$  avec  $\alpha_0 = \bar{f}^{-1}(w_0)$ ,  $\bar{f}$  la restriction de  $f$ ,  $\vec{\alpha}$  une base de  $\ker f$  et  $t$  un réel quelconque. Dans ce cas, cette solution est acceptable.

- 3<sup>ème</sup> cas :  $P > N + 1$ .

La condition suffisante est plus difficile à démontrer. Nous avons  $\dim \text{Im } f \leq P$  et donc  $\dim \ker f \geq N + 1 - P > 0$ . Nous avons alors une infinité de solutions. Ce troisième cas pose un problème qui est peu traité dans les essais de théorie financière, car si nous acceptons la condition  $P > N + 1$ , nous ne pouvons pas établir une équation de valorisation<sup>2</sup>. C'est pourquoi nous devons exclure la

---

<sup>2</sup>Dans le chapitre précédent, nous avons imposé que le portefeuille d'arbitrage est composé de deux actifs. Que serait devenue l'équation de valorisation avec trois ou quatre actifs ?

possibilité de former un portefeuille d'arbitrage avec  $P > N + 1$ . HARRISON et KREPS [1979] fournissent une explication. Si  $P > N + 1$ , la mesure de probabilité neutre au risque n'est pas définie de façon unique. Cela implique une incohérence avec l'hypothèse de complétude et de viabilité des marchés. ■

Une solution non nulle consiste donc à choisir les proportions  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N+1}$  telles que les mineurs d'ordre  $N + 1$  soient nuls. Prenons par exemple le mineur principal et posons  $\alpha_{N+2} = \dots = \alpha_P = 0$ . Dans ce cas, il existe un vecteur  $\lambda(t)$  défini par

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \\ \vdots \\ \lambda_N(t) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

tel que nous avons

$$\mathcal{D}P(t, X(t)) - r(t, X(t)) P(t, X(t)) = \sum_{n=1}^N \lambda_n(t) \sum_{m=1}^M \frac{\partial P(t, X(t))}{\partial x_m} \sigma_{m,N}(t, X(t)) \quad (5.32)$$

Nous en déduisons que le vecteur  $\lambda(t)$  satisfait l'équation suivante :

$$\mathcal{D}P(t, X(t)) - r(t, X(t)) P(t, X(t)) = \lambda(t)^\top \Sigma(t, X(t))^\top P_X(t, X(t)) \quad (5.33)$$

**Théorème 12** *Dans un modèle d'arbitrage à  $M$  facteurs  $X$  vérifiant les quatre hypothèses précédentes, le prix d'une obligation à coupon zéro vérifie l'équation de valorisation suivante*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X)^\top P_{XX}(t, X) \Sigma(t, X) \rho \right] \\ + \left[ \mu(t, X)^\top - \lambda(t)^\top \Sigma(t, X)^\top \right] P_X(t, X) + P_t(t, X) - r(t, X) P(t, X) = 0 \\ P_T^c(0) = P(T, X(T)) = 1 \end{cases} \quad (5.34)$$

### 5.2.3 Solution de l'équation de valorisation

Soient  $\alpha(t, X(t))$  et  $\beta(t, X(t))$  l'espérance de rendement unitaire net instantané de l'actif et la sensibilité unitaire de l'actif aux différentes sources de risque. Nous avons

$$\alpha(t, X(t)) = \frac{\mathcal{D}P(t, X(t))}{P(t, X(t))} \quad (5.35)$$

et

$$\beta(t, X(t)) = \frac{\Sigma(t, X(t))^\top P_X(t, X(t))}{P(t, X(t))} \quad (5.36)$$

Nous pouvons reformuler l'équation (5.33)

$$\alpha(t, X(t)) - r(t, X(t)) = \lambda(t)^\top \beta(t, X(t)) \quad (5.37)$$

Cette relation est analogue à celle obtenue dans le cas unidimensionnel. De nombreux auteurs font une erreur courante lorsqu'ils interprètent le vecteur  $\lambda(t)$ . Par exemple, ROCHET et DEMANGE [1992] indiquent que " $\lambda_k(t)$  s'interprète comme le prix de marché du risque  $X_k$ ". En fait, la relation (5.37) indique que  $\lambda_n(t)$  est le prix de la  $n$ -ième source de risque, c'est-à-dire le risque associé au processus de Wiener  $W_n(t)$ . Pour associer  $\lambda_n(t)$  à la  $n$ -ième variable d'état, il faut qu'il y ait autant de processus de Wiener que de facteurs et que la matrice  $\Sigma(t, X(t))$  soit diagonale.

Pour résoudre l'EDP (5.34), nous procédons de la même façon que dans le cas unidimensionnel en appliquant les théorèmes de Girsanov et de Feynman-Kac. Posons  $\phi(s) = -\lambda(s)$ . Si nous supposons que la condition  $E \left[ \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda_n^2(s) ds \right] < +\infty$  est vérifiée pour  $n = 1, \dots, N$ , alors  $W'(t) = W(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$  est un processus de Wiener multidimensionnel de matrice de covariance  $\rho t$  sous une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$  donnée par le théorème de Radon-Nikodym. Nous avons

$$\begin{cases} dX(t) &= [\mu(t, X) - \Sigma(t, X) \lambda(t)] dt + \Sigma(t, X(t)) dW'(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases} \quad (5.38)$$

La dynamique précédente définit le processus  $X(t)$  "corrigé du risque". Nous remarquons alors que

$$\mathcal{A}'_t P(t, X) = \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X)^\top P_{XX}(t, X) \Sigma(t, X) \rho \right] + \left[ \mu(t, X)^\top - \lambda(t)^\top \Sigma(t, X)^\top \right] P_X(t, X) \quad (5.39)$$

Notre problème (5.34) est un problème de Feynman-Kac et nous avons

$$\begin{cases} -P_t(t, X) + r(t, X) P(t, X) = \mathcal{A}'_t P(t, X) \\ P(T, x(T)) = 1 \end{cases} \quad (5.40)$$

Nous supposons que les conditions d'application de théorème de Feynman-Kac sont vérifiées et nous en déduisons le théorème suivant

**Théorème 13** *Dans un modèle d'arbitrage à  $M$  facteurs vérifiant les quatre hypothèses de départ, le prix d'une obligation à coupon zéro est donné par la formule suivante*

$$P_{t_0}^c(\tau) = E' \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (5.41)$$

Sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ , le prix de l'obligation à coupon zéro est égal à l'espérance de gain actualisé.  $\mathbb{P}'$  est donc la mesure de "probabilité neutre au risque". Nous pouvons aussi obtenir une autre formulation en considérant le théorème de Radon-Nikodym. Nous avons alors

$$P_{t_0}^c(\tau) = E \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt - \int_{t_0}^T \lambda(t)^\top dW(t) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \lambda(t)^\top \lambda(t) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (5.42)$$

## 5.2.4 Quelques cas particuliers

Dans la troisième section de chapitre, nous présentons différents modèles. Nous indiquons déjà certaines modélisations possibles. Par exemple, le modèle à une seule variable d'état est bien sûr un cas particulier du modèle général précédent. Nous avons  $M = N = 1$ ,  $\sigma(t, x(t)) = \Sigma(t, x(t))$  et  $\rho = 1$ .

### 5.2.4.1 Modèle à deux variables d'état

Nous considérons deux facteurs  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ . Nous pouvons supposer que ces deux facteurs dépendent de la même source de risque  $W(t)$ . Dans ce cas, nous avons

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t, X_1, X_2) \\ \mu_2(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1(t, X_1, X_2) \\ \sigma_2(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} dW(t) \quad (5.43)$$

L'équation de valorisation associée est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{X_1, X_1} + \sigma_1 \sigma_2 P_{X_1, X_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 P_{X_2, X_2} \\ & + [\mu_1 - \lambda \sigma_1] P_{X_1} + [\mu_2 - \lambda \sigma_2] P_{X_2} + P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

Supposons maintenant deux sources de risque spécifiques à chacun des facteurs. Nous avons

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t, X_1, X_2) \\ \mu_2(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1(t, X_1, X_2) & 0 \\ 0 & \sigma_2(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

L'équation de valorisation associée devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{X_1, X_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 P_{X_2, X_2} \\ & + [\mu_1 - \lambda_1 \sigma_1] P_{X_1} + [\mu_2 - \lambda_2 \sigma_2] P_{X_2} + P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nous supposons maintenant que les risques sont corrélés

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_1^2 P_{X_1, X_1} + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 P_{X_1, X_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 P_{X_2, X_2} \\ & + [\mu_1 - \lambda_1\sigma_1] P_{X_1} + [\mu_2 - \lambda_2\sigma_2] P_{X_2} + P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Nous pouvons considérer le cas général

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t, X_1, X_2) \\ \mu_2(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t, X_1, X_2) & \sigma_{1,2}(t, X_1, X_2) \\ \sigma_{2,1}(t, X_1, X_2) & \sigma_{2,2}(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

avec

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2}\sigma_{1,1}^2 + \rho_{1,2}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2} + \frac{1}{2}\sigma_{1,2}^2 \right] P_{X_1, X_1} + \left[ \frac{1}{2}\sigma_{2,1}^2 + \rho_{1,2}\sigma_{2,1}\sigma_{2,2} + \frac{1}{2}\sigma_{2,2}^2 \right] P_{X_2, X_2} \\ & + [\sigma_{1,1}\sigma_{2,1} + \rho_{1,2}\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} + \sigma_{1,2}\sigma_{2,2} + \rho_{1,2}\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}] P_{X_1, X_2} \\ & + [\mu_1 - \lambda_1\sigma_{1,1} - \lambda_2\sigma_{1,2}] P_{X_1} + [\mu_2 - \lambda_1\sigma_{2,1} - \lambda_2\sigma_{2,2}] P_{X_2} \\ & + P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

Nous voyons donc que le modèle d'arbitrage à plusieurs facteurs permet de prendre en compte des spécificités très particulières. Considérons de nouveau un modèle à deux facteurs mais avec **trois sources de risques** dont deux sources spécifiques et une source commune. Nous avons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_1(t, X_1, X_2) \\ \mu_2(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} dt \\ &+ \begin{bmatrix} \sigma_1(t, X_1, X_2) & 0 & \sigma_{1,3}(t, X_1, X_2) \\ 0 & \sigma_2(t, X_1, X_2) & \sigma_{2,3}(t, X_1, X_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.52)$$

L'équation de valorisation est alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\sigma_1^2 + \sigma_{1,3}^2] P_{X_1, X_1} + \frac{1}{2} [\sigma_2^2 + \sigma_{2,3}^2] P_{X_2, X_2} + \sigma_{1,3}\sigma_{2,3} P_{X_1, X_2} \\ & + [\mu_1 - \lambda_1\sigma_1 - \lambda_3\sigma_{1,3}] P_{X_1} + [\mu_2 - \lambda_2\sigma_2 - \lambda_3\sigma_{2,3}] P_{X_2} \\ & + P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

Nous pourrions aussi supposer que les risques sont corrélés. Nous voyons donc que les modèles à plusieurs facteurs offrent une richesse de modélisation particulièrement intéressante pour la spécification de la structure des sources de risques.



### 5.2.4.2 Modèle à trois variables d'état

Considérons le cas  $M = N = 3$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \\ dX_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_1(t, X_1, X_2, X_3) \\ \mu_2(t, X_1, X_2, X_3) \\ \mu_3(t, X_1, X_2, X_3) \end{bmatrix} dt \\ &+ \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t, X_1, X_2, X_3) & \sigma_{1,2}(t, X_1, X_2, X_3) & \sigma_{1,3}(t, X_1, X_2, X_3) \\ \sigma_{2,1}(t, X_1, X_2, X_3) & \sigma_{2,2}(t, X_1, X_2, X_3) & \sigma_{2,3}(t, X_1, X_2, X_3) \\ \sigma_{3,1}(t, X_1, X_2, X_3) & \sigma_{3,2}(t, X_1, X_2, X_3) & \sigma_{3,3}(t, X_1, X_2, X_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

L'équation de valorisation est alors

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{2}\sigma_{1,1}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{1,2}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{1,3}^2 + \rho_{1,2}\sigma_{1,1}\sigma_{1,2} + \rho_{1,3}\sigma_{1,1}\sigma_{1,3} + \rho_{2,3}\sigma_{1,2}\sigma_{1,3} \right] P_{X_1, X_1} \\ &+ \left[ \frac{1}{2}\sigma_{2,1}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{2,2}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{2,3}^2 + \rho_{1,2}\sigma_{2,1}\sigma_{2,2} + \rho_{1,3}\sigma_{2,1}\sigma_{2,3} + \rho_{2,3}\sigma_{2,2}\sigma_{2,3} \right] P_{X_2, X_2} \\ &+ \left[ \frac{1}{2}\sigma_{3,1}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{3,2}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{3,3}^2 + \rho_{1,2}\sigma_{3,1}\sigma_{3,2} + \rho_{1,3}\sigma_{3,1}\sigma_{3,3} + \rho_{2,3}\sigma_{3,2}\sigma_{3,3} \right] P_{X_3, X_3} \\ &+ [\sigma_{1,1}\sigma_{2,1} + \sigma_{1,2}\sigma_{2,2} + \sigma_{1,3}\sigma_{2,3} + \rho_{1,2}\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} + \rho_{1,2}\sigma_{1,2}\sigma_{2,1}] P_{X_1, X_2} \\ &+ [\rho_{1,3}\sigma_{1,1}\sigma_{2,3} + \rho_{1,3}\sigma_{1,3}\sigma_{2,1} + \rho_{2,3}\sigma_{1,2}\sigma_{2,3} + \rho_{2,3}\sigma_{1,3}\sigma_{2,2}] P_{X_1, X_2} \\ &+ [\sigma_{1,1}\sigma_{3,1} + \sigma_{1,2}\sigma_{3,2} + \sigma_{1,3}\sigma_{3,3} + \rho_{1,2}\sigma_{1,1}\sigma_{3,2} + \rho_{1,2}\sigma_{1,2}\sigma_{3,1}] P_{X_1, X_3} \\ &+ [\rho_{1,3}\sigma_{1,1}\sigma_{3,3} + \rho_{1,3}\sigma_{1,3}\sigma_{3,1} + \rho_{2,3}\sigma_{1,2}\sigma_{3,3} + \rho_{2,3}\sigma_{1,3}\sigma_{3,2}] P_{X_1, X_3} \\ &+ [\sigma_{2,1}\sigma_{3,1} + \sigma_{2,2}\sigma_{3,2} + \sigma_{2,3}\sigma_{3,3} + \rho_{1,2}\sigma_{2,1}\sigma_{3,2} + \rho_{1,2}\sigma_{2,2}\sigma_{3,1}] P_{X_2, X_3} \\ &+ [\rho_{1,3}\sigma_{2,1}\sigma_{3,3} + \rho_{1,3}\sigma_{2,3}\sigma_{3,1} + \rho_{2,3}\sigma_{2,2}\sigma_{3,3} + \rho_{2,3}\sigma_{2,3}\sigma_{3,2}] P_{X_2, X_3} \\ &+ [\mu_1 - \lambda_1\sigma_{1,1} - \lambda_2\sigma_{1,2} - \lambda_3\sigma_{1,3}] P_{X_1} \\ &+ [\mu_2 - \lambda_1\sigma_{2,1} - \lambda_2\sigma_{2,2} - \lambda_3\sigma_{2,3}] P_{X_2} \\ &+ [\mu_3 - \lambda_1\sigma_{3,1} - \lambda_2\sigma_{3,2} - \lambda_3\sigma_{3,3}] P_{X_3} \\ &+ P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Dans le cas particulier où  $\Sigma(t, X(t))$  est de la forme

$$\Sigma(t, X(t)) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}(t, X_1, X_2, X_3) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,2}(t, X_1, X_2, X_3) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,3}(t, X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

l'équation de valorisation devient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma_{1,1}^2 P_{X_1, X_1} + \frac{1}{2}\sigma_{2,2}^2 P_{X_2, X_2} + \frac{1}{2}\sigma_{3,3}^2 P_{X_3, X_3} \\ &+ \rho_{1,2}\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} P_{X_1, X_2} + \rho_{1,3}\sigma_{1,1}\sigma_{3,3} P_{X_1, X_3} + \rho_{2,3}\sigma_{2,2}\sigma_{3,3} P_{X_2, X_3} \\ &+ (\mu_1 - \lambda_1\sigma_{1,1}) P_{X_1} + (\mu_2 - \lambda_2\sigma_{2,2}) P_{X_2} + (\mu_3 - \lambda_3\sigma_{3,3}) P_{X_3} \\ &+ P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

### 5.2.4.3 Modèle linéaire factoriel gaussien

Nous considérons que les variables d'états  $X(t)$  du modèle sont des processus de diffusion vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t) dt + \Sigma(t) dW(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (5.58)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de covariance  $\rho t$ . Le taux d'intérêt dépend linéairement des facteurs, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $\alpha$  tel que nous avons

$$r(t, X(t)) = \alpha^\top X(t) \quad (5.59)$$

Pour résoudre ce modèle, nous reprenons les résultats obtenus précédemment. Sous la mesure de probabilité neutre au risque, nous avons

$$dX(t) = [\mu(t) - \Sigma(t) \lambda(t)] dt + \Sigma(t) dW'(t) \quad (5.60)$$

Nous avons donc

$$X(t) | \mathcal{F}_{t_0} = X_0 + \int_{t_0}^T [\mu(t) - \Sigma(t) \lambda(t)] dt + \int_{t_0}^T \Sigma(t) dW'(t) \quad (5.61)$$

La fonction de densité de la variable aléatoire  $X(t) | \mathcal{F}_{t_0}$  est gaussienne de dimension  $N$ . Nous en déduisons que  $\int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt | \mathcal{F}_{t_0}$  est une variable aléatoire normale de dimension 1 sous la mesure de probabilité neutre au risque. Soient  $M_1$  et  $M_2$  les deux premiers moments de  $\int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt | \mathcal{F}_{t_0}$ . Le prix de l'obligation à coupon zéro est alors égal à

$$P_{t_0}^c(\tau) = \exp\left(-M_1 + \frac{1}{2}M_2\right) \quad (5.62)$$

et la structure par terme des taux est définie par

$$R_{t_0}(\tau) = \frac{M_1 - \frac{1}{2}M_2}{\tau} \quad (5.63)$$

Considérons par exemple un modèle à deux facteurs  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  avec

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

et

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho^* \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Posons  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]^\top$  le vecteur des prix de risques. Sous  $\mathbb{P}'$ , nous avons

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \lambda_1 \sigma_1 \\ \mu_2 - \lambda_2 \sigma_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW'_1(t) \\ dW'_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} X_1(t) | \mathcal{F}_{t_0} &= x_0^{(1)} + (\mu_1 - \lambda_1 \sigma_1)(t - t_0) + \sigma_1 (W_1'(t) - W_1'(t_0)) \\ X_2(t) | \mathcal{F}_{t_0} &= x_0^{(2)} + (\mu_2 - \lambda_2 \sigma_2)(t - t_0) + \sigma_2 (W_2'(t) - W_2'(t_0)) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Le calcul de  $\int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt | \mathcal{F}_{t_0}$  donne

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt | \mathcal{F}_{t_0} &= (\alpha_1 x_0^{(1)} + \alpha_2 x_0^{(2)}) \tau \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha_1 (\mu_1 - \lambda_1 \sigma_1) + \alpha_2 (\mu_2 - \lambda_2 \sigma_2)) \tau^2 \\ &+ \alpha_1 \sigma_1 \int_{t_0}^T (W_1'(t) - W_1'(t_0)) dt + \alpha_2 \sigma_2 \int_{t_0}^T (W_2'(t) - W_2'(t_0)) dt \end{aligned} \quad (5.68)$$

En utilisant les propriétés des processus de Wiener, les deux premiers moments sont

$$M_1 = (\alpha_1 x_0^{(1)} + \alpha_2 x_0^{(2)}) \tau + \frac{1}{2} (\alpha_1 (\mu_1 - \lambda_1 \sigma_1) + \alpha_2 (\mu_2 - \lambda_2 \sigma_2)) \tau^2 \quad (5.69)$$

et

$$M_2 = \frac{1}{3} [\alpha_1^2 \sigma_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \rho^* \sigma_1 \sigma_2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2] \tau^3 \quad (5.70)$$

Comme  $r_0 = \alpha_1 x_0^{(1)} + \alpha_2 x_0^{(2)}$ , nous en déduisons que

$$P_{t_0}^c(\tau) = \exp \left[ \begin{array}{l} -r_0 \tau - \frac{1}{2} (\alpha_1 (\mu_1 - \lambda_1 \sigma_1) + \alpha_2 (\mu_2 - \lambda_2 \sigma_2)) \tau^2 \\ + \frac{1}{6} [\alpha_1^2 \sigma_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \rho^* \sigma_1 \sigma_2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2] \tau^3 \end{array} \right] \quad (5.71)$$

Il est facile de vérifier que cette expression est bien la solution de l'équation de valorisation suivante

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{X_1, X_1} + \rho^* \sigma_1 \sigma_2 P_{X_1, X_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 P_{X_2, X_2} \\ &+ [\mu_1 - \lambda_1 \sigma_1] P_{X_1} + [\mu_2 - \lambda_2 \sigma_2] P_{X_2} + P_t - (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) P = 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Dans le cas général d'un modèle linéaire factoriel gaussien à  $M$  variables d'état

$$\begin{cases} dX(t) = \mu dt + \Sigma dW(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (5.73)$$

avec  $r(t, X(t)) = \alpha^\top X(t)$  et  $\lambda(t) = \lambda$ , nous avons

$$P_{t_0}^c(\tau) = \exp \left[ -\alpha^\top X_0 \tau - \frac{1}{2} \alpha^\top (\mu - \Sigma \lambda) \tau^2 + \frac{1}{6} [\alpha^\top \Sigma \rho \Sigma^\top \alpha] \tau^3 \right] \quad (5.74)$$

Nous utilisons les solutions (5.71) et (5.74) dans le paragraphe suivant pour vérifier la convergence des méthodes numériques.

### 5.2.5 Méthodes numériques de résolution

Dans le cas d'un modèle à une seule variable d'état, nous pouvons utiliser les méthodes numériques des différences finies ou de Monte Carlo pour obtenir une solution. Ces deux méthodes se généralisent pour des modèles à plusieurs variables d'état. Cependant, la méthode des différences finies est extrêmement lourde (voire **impossible**) à mettre en place dans le cas général. Elle peut être utilisée pour les modèles à deux variables en employant l'algorithme de GOURLAY et MCKEE [1977]. WIGGINS [1987] a choisi cette approche pour la valorisation des options avec une volatilité stochastique.

Dans le cas général, la méthode de Monte Carlo est facile à implémenter. Nous rappelons que, sous la mesure de probabilité neutre au risque  $\mathbb{P}'$ , la valeur de l'obligation à coupon zéro est donnée par la formule suivante

$$P_{t_0}^c(\tau) = E' \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (5.75)$$

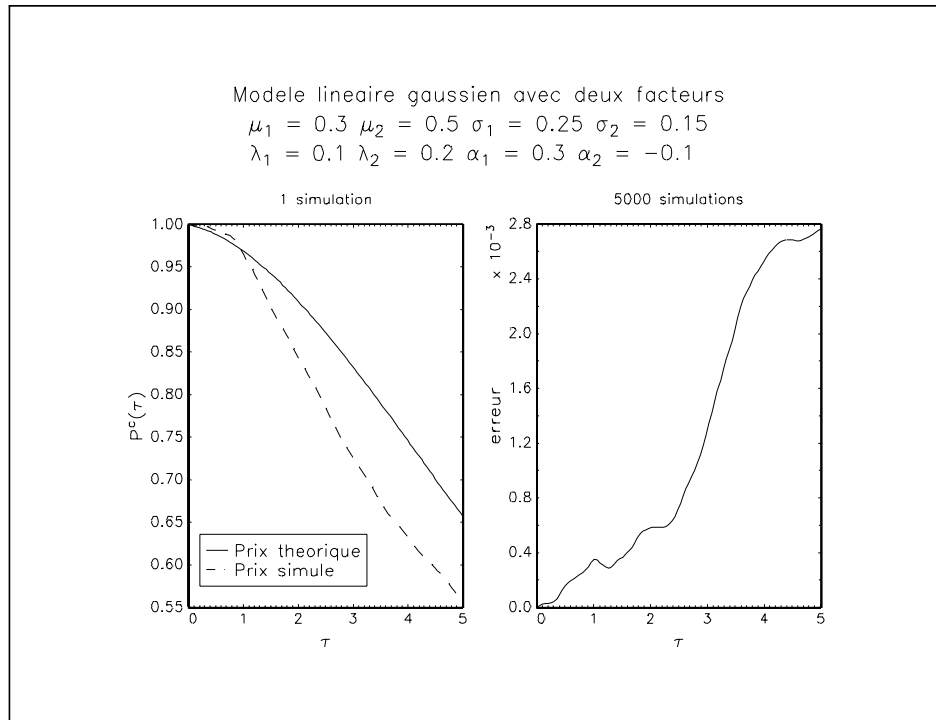
avec

$$\begin{cases} dX(t) &= [\mu(t, X) - \Sigma(t, X) \lambda(t)] dt + \Sigma(t, X(t)) dW'(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases} \quad (5.76)$$

et  $W'(t)$  un processus de Wiener de covariance  $\rho t$  sous  $\mathbb{P}'$ . L'algorithme de Monte carlo devient :

1. Nous simulons une trajectoire du processus  $X(t)$  sous la mesure de probabilité neutre au risque  $\mathbb{P}'$  pour  $t \in [t_0, T]$  à l'aide d'un algorithme de simulation d'une équation différentielle stochastique multidimensionnelle. Nous notons cette trajectoire  $\{X_n, n = 0, \dots, N - 1\}$ .
2. Nous calculons la trajectoire simulée de  $r(t, X(t))$ . Nous avons  $R_n = r(t_n, X_n)$ .
3. Nous évaluons l'intégrale  $I_s = \int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt$  à partir d'un algorithme numérique d'intégration et de la trajectoire simulée de  $r(t, X(t))$ .
4. Nous recommençons les étapes 1, 2 et 3  $S$  fois.
5. La solution numérique de  $P_{t_0}^c(\tau)$  est alors donnée par l'expression suivante

$$\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \exp(-I_s) \quad (5.77)$$



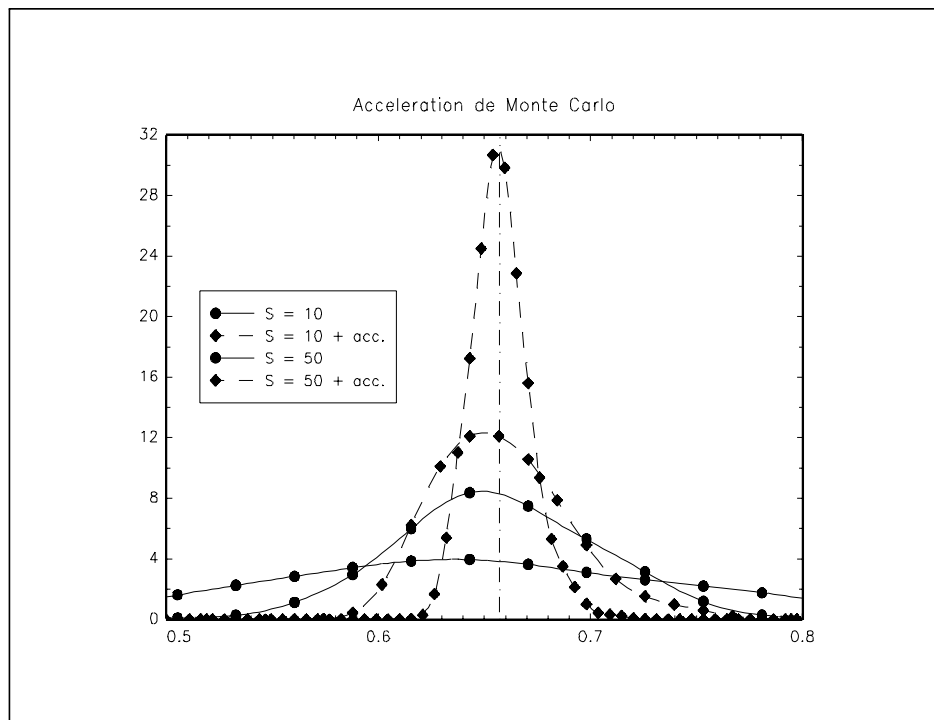
Pour simuler l'équation différentielle stochastique (5.76), nous pouvons par exemple employer le schéma de Taylor de forme forte à l'ordre 0.5 (KLOEDEN et PLATEN [1992]). Ce schéma est une simple généralisation de l'algorithme d'Euler-Maruyama. Nous avons (avec les notations du chapitre précédent) :

$$S_{i+1} = S_i + [\mu(t_i, S_i) - \Sigma(t_i, S_i) \lambda(t_i)] k + \Sigma(t_i, S_i) \sqrt{k} \mathbf{P} \epsilon_i \quad (5.78)$$

$$S_0 = x_0$$

Le vecteur  $S_i$  de dimension  $M \times 1$  correspond à la simulation numérique de  $X(t_i)$  avec  $t_i = t_0 + ik$ .  $\epsilon_i$  est un vecteur aléatoire issu de la loi normale  $\mathcal{N}_N(0, 1)$  et  $\mathbf{P}$  est la matrice de décomposition de Cholesky de  $\rho$ .

Nous considérons le modèle linéaire gaussien à deux facteurs avec  $\mu_1 = 0.3$ ,  $\mu_2 = 0.5$ ,  $\sigma_1 = 0.25$ ,  $\sigma_2 = 0.15$  et  $\rho^* = 0.5$ . Les valeurs des prix de marché des risques sont  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\lambda_2 = 0.2$ . La position initiale du système est  $x_0^{(1)} = 0.10$  et  $x_0^{(2)} = 0.15$ . Les sensibilités  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  du taux d'intérêt instantané par rapport aux facteurs valent respectivement 0.3 et  $-0.1$ . Le graphique (5.1) représente la trajectoire exacte de la structure par terme des coupons zéro et une trajectoire simulée par la méthode de Monte Carlo. Nous utilisons une discrétisation de 100 points. Sur le graphique, nous avons aussi reporté l'erreur entre la trajectoire exacte et la



Graphique 5.2

trajectoire numérique obtenue avec 5000 simulations. Nous obtenons des résultats tout à fait corrects puisque l'erreur est relativement faible. Nous pouvons améliorer l'algorithme en considérant un accélérateur de Monte Carlo basé sur la méthode des variables antithétiques<sup>3</sup>. Le graphique (5.2) représente les fonctions de densité (estimées par la méthode du noyau avec 250 réplifications) pour une maturité de cinq ans pour  $S$  égal à 10 et 50. L'utilisation de cet accélérateur améliore très fortement la précision de la méthode de Monte carlo.

### 5.3 Un modèle d'équilibre général intertemporel des prix des actifs

Dans cette section, nous proposons de généraliser le modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985a] en prenant en compte la possibilité de corrélation contemporaine entre les sources de risque dans l'économie. Cependant, l'apport le plus important concerne le choix du cadre d'analyse (et de la méthode de résolution). Cox, Ingersoll et Ross étudient le modèle dans le cadre d'une économie stationnaire. Le but du modèle est de dériver les dynamiques des prix des différents actifs contingents. Or,

<sup>3</sup>Si  $\epsilon_i$  est un vecteur aléatoire issu de la loi normale  $\mathcal{N}_N(0, 1)$ , alors  $-\epsilon_i$  est **aussi** un vecteur aléatoire issu de la loi normale  $\mathcal{N}_N(0, 1)$ .

dans cette économie stationnaire, nous n'avons pas d'échanges d'actifs financiers car nous supposons que offre et demande sont nulles. Nous pouvons soulever un problème de logique interne du modèle, puisque nous pouvons penser que dans ce cadre, le prix des actifs financiers n'existe pas. Même si la condition de "market clearing" se justifie, il est difficile d'appliquer cette condition lorsque l'économie est représentée par un seul agent. L'abandon de cette hypothèse<sup>4</sup> donne des résultats fort surprenants. En particulier, nous montrerons que la plupart des propositions de Cox, Ingersoll et Ross sont validées et que nous pouvons considérer les prix des actifs dans l'économie stationnaire comme des prix implicites.

Les paragraphes suivants concernent la dérivation du modèle. Nous ne commentons pas les différentes propositions et leurs implications. Le lecteur peut se reporter à l'article originel de COX, INGERSOLL et ROSS [1985a] ou aux travaux de PISTRE [1993] et QUITTARD-PINON [1993] pour une analyse détaillée de ces différents résultats. Le cinquième paragraphe présente l'application du modèle à la structure par terme des obligations à coupon zéro et aussi une comparaison de celui-ci avec le modèle factoriel d'arbitrage.

### 5.3.1 Présentation du modèle

COX, INGERSOLL et ROSS [1985a] font les hypothèses suivantes :

1. Il n'y a qu'un seul bien physique. Celui-ci peut être consommé ou investi dans les processus de production ou sur le marché financier. Ce bien n'est pas stockable; il n'y a donc pas d'épargne.
2. Le modèle comporte  $M$  variables d'état  $Y(t)$ . Ces variables d'état sont des processus de diffusion dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle suivante :

$$dY(t) = \mu(t, Y(t)) dt + \Sigma(t, Y(t)) dW(t) \quad (5.79)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de dimension  $M + N$  et de matrice de covariance  $\rho t$ .

3. Les  $N$  processus de production  $\eta(t)$  dépendent du vecteur  $Y(t)$  des variables d'état. Nous avons

$$d\eta(t) = I_\eta \alpha(t, Y(t)) dt + I_\eta G(t, Y(t)) dW(t) \quad (5.80)$$

---

<sup>4</sup>Nous pouvons penser que les auteurs ont employé cette condition dans un souci de simplification des résultats.

4. Nous avons  $N$  actifs contingents. Soit  $P^{(n)}(t)$  la valeur du  $n$ -ième actif. Nous avons

$$dP^{(n)}(t) = [P^{(n)}(t) \beta^{(n)}(t, Y(t)) - \delta^{(n)}(t, Y(t))] dt + P^{(n)}(t) H_n(t, Y(t)) dW(t) \quad (5.81)$$

avec  $\delta^{(n)}(t, Y(t))$  le revenu continu distribué par l'actif,  $T^{(n)}$  la date de remboursement et  $B^{(n)}(T^{(n)})$  la valeur de remboursement de cet actif. L'écriture matricielle du vecteur  $P(t)$  des prix des actifs contingents est donc :

$$dP(t) = (P(t) \odot \beta(t, Y(t)) - \delta(t, Y(t))) dt + P(t) \odot H(t, Y(t)) dW(t) \quad (5.82)$$

avec

$$P(t) = \begin{bmatrix} P^{(1)}(t) \\ \vdots \\ P^{(n)}(t) \\ \vdots \\ P^{(N)}(t) \end{bmatrix}, \quad \beta(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} \beta^{(1)}(t, Y(t)) \\ \vdots \\ \beta^{(n)}(t, Y(t)) \\ \vdots \\ \beta^{(N)}(t, Y(t)) \end{bmatrix},$$

$$\delta(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} \delta^{(1)}(t, Y(t)) \\ \vdots \\ \delta^{(n)}(t, Y(t)) \\ \vdots \\ \delta^{(N)}(t, Y(t)) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} H^{(1)}(t, Y(t)) \\ \vdots \\ H^{(n)}(t, Y(t)) \\ \vdots \\ H^{(N)}(t, Y(t)) \end{bmatrix}$$

5. Il existe un marché de prêt et d'emprunt instantané. Nous notons  $r(t)$  le taux d'intérêt de ce marché.

Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs de dimension  $N \times 1$ .  $a_n \mathcal{W}(t)$  représente le montant de la richesse de l'agent investie dans le  $n$ -ième processus de production et  $b_n \mathcal{W}(t)$  celui du  $n$ -ième actif contingent. Comme le bien n'est pas stockable, toute la richesse est investie, ce qui implique l'égalité suivante :

$$a^\top \mathcal{W}(t) + b^\top \mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t) \quad (5.83)$$

Dans cette économie, l'objectif de l'agent est de maximiser son utilité

$$\max E \int_{t_0}^T U(t, c(t), Y(t)) dt \quad (5.84)$$

sous la contrainte de la dynamique de la richesse

$$d\mathcal{W}(t) = [a^\top (\alpha(t, Y(t)) - r\mathbf{1}) \mathcal{W}(t) + b^\top (\beta(t, Y(t)) - r\mathbf{1}) \mathcal{W}(t) + r\mathcal{W}(t) - c(t)] dt + \mathcal{W}(t) [a^\top G(t, Y(t)) + b^\top H(t, Y(t))] dW(t) \quad (5.85)$$



et d'une dotation initiale  $\mathcal{W}(t_0) = \mathcal{W}_0$ .

Le tableau suivant résume les différentes notations utilisées :

Symbole	Signification	Dimension	Endog.
$Y(t)$	Vecteur des variables d'état	$M \times 1$	
$\eta(t)$	Vecteur des processus de production	$N \times 1$	
$P(t)$	Vecteur des prix des actifs contingents	$N \times 1$	oui
$r(t)$	Taux d'intérêt instantané	$1 \times 1$	oui
$c(t)$	Fonction de consommation	$1 \times 1$	oui
$U(t, c(t), Y(t))$	Fonction d'utilité	$1 \times 1$	
$\mathcal{W}(t)$	Richesse de l'agent	$1 \times 1$	
$\mu(t, Y(t))$	Vecteur de tendance du processus $Y(t)$	$M \times 1$	
$\Sigma(t, Y(t))$	Matrice de diffusion du processus $Y(t)$	$M \times (M + N)$	
$I_\eta \alpha(t, Y(t))$	Vecteur de tendance du processus $\eta(t)$	$N \times 1$	
$I_\eta G(t, Y(t))$	Matrice de diffusion du processus $\eta(t)$	$N \times (M + N)$	
$\beta(t, Y(t))$	Vecteur de tendance des rendements de $P(t)$	$N \times 1$	
$\delta(t, Y(t))$	Vecteur des revenus distribués par $P(t)$	$N \times 1$	
$H(t, Y(t))$	Matrice de diffusion des rendements de $P(t)$	$N \times (M + N)$	
$a$	Vecteur des stratégies des productions	$N \times 1$	oui
$b$	Vecteur des stratégies des actifs	$N \times 1$	oui

### 5.3.2 Solution de l'utilité indirecte

Notons  $J(t, \mathcal{W}(t), Y(t))$  la fonction d'utilité indirecte telle que

$$J(t, \mathcal{W}(t), Y(t)) = E \left[ \int_t^T U(s, c(s), Y(s)) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (5.86)$$

S'il existe une solution au problème (5.84), elle vérifie la condition suivante :

$$\max_{\{a, b, c(t)\}} U(t, c(t), Y(t)) + J_t(t, \mathcal{W}(t), Y(t)) + \mathcal{A}_t J(t, \mathcal{W}(t), Y(t)) = 0 \quad (5.87)$$

Posons  $\psi = U(t, c(t), Y(t)) + \mathcal{D}J(t, \mathcal{W}(t), Y(t))$ . Nous pouvons utiliser le résultat de l'annexe pour déterminer la fonction  $\psi$ . Notons  $Y^+(t) = [\mathcal{W}(t) \ Y(t)^\top]^\top$ .

Nous avons alors

$$dY^+(t) = \begin{bmatrix} d\mathcal{W}(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^\top (\alpha - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + b^\top (\beta - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + r\mathcal{W} - c \\ \mu \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \mathcal{W} [a^\top G + b^\top H] \\ \Sigma \end{bmatrix} dW(t) \quad (5.88)$$

Nous en déduisons que

$$\mathcal{A}_t J = \frac{1}{2} \text{trace} \left[ J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \mathcal{W} [a^\top G + b^\top H] \rho [a^\top G + b^\top H]^\top \mathcal{W} \right] \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned}
& + \text{trace} [\mathcal{W} [a^\top G + b^\top H] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}}] \\
& + \frac{1}{2} \text{trace} [J_{YY} \Sigma \rho \Sigma^\top] + \mu^\top J_Y \\
& + [a^\top (\alpha - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + b^\top (\beta - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + r\mathcal{W} - c] J_{\mathcal{W}}
\end{aligned}$$

L'expression de  $\psi$  est donc

$$\begin{aligned}
\psi(a, b, c(t), t, \mathcal{W}(t), Y(t)) & = U(t, c(t), Y(t)) + J_t + \mu^\top J_Y \\
& + [a^\top (\alpha - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + b^\top (\beta - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + r\mathcal{W} - c] J_{\mathcal{W}} \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 [a^\top G + b^\top H] \rho [a^\top G + b^\top H]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
& + \mathcal{W} [a^\top G + b^\top H] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \\
& + \frac{1}{2} \text{trace} [\Sigma \rho \Sigma^\top J_{YY}]
\end{aligned} \tag{5.90}$$

**Proposition 14** *La solution du problème (5.84) doit vérifier les conditions suivantes du premier ordre :*

$$\begin{aligned}
\psi_c & = U_c - J_{\mathcal{W}} = 0 \\
\psi_a & = \mathcal{W} (\alpha - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W}^2 [G\rho G^\top a + G\rho H^\top b] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + \mathcal{W} G\rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} = 0 \\
\psi_b & = \mathcal{W} (\beta - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W}^2 [H\rho G^\top a + H\rho H^\top b] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + \mathcal{W} H\rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} = 0
\end{aligned} \tag{5.91}$$

**Proposition 15** *La solution optimale des variables de contrôle  $a$ ,  $b$  et  $c(t)$  sont alors :*

$$c^*(t) = U_c^{-1}(J_{\mathcal{W}}) \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}
a^* & = \left[ (G\rho G^\top) - (G\rho H^\top) (H\rho H^\top)^{-1} (H\rho G^\top) \right]^{-1} \\
& \times \left[ \left\{ (G\rho H^\top) (H\rho H^\top)^{-1} (H\rho \Sigma^\top) - (G\rho \Sigma^\top) \right\} \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \right. \\
& \left. + \left\{ (G\rho H^\top) (H\rho H^\top)^{-1} (\beta - r\mathbf{1}) - (\alpha - r\mathbf{1}) \right\} \frac{J_{\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \right]
\end{aligned} \tag{5.93}$$

$$\begin{aligned}
b^* & = \left[ (H\rho H^\top) - (H\rho G^\top) (G\rho G^\top)^{-1} (G\rho H^\top) \right]^{-1} \\
& \times \left[ \left\{ (H\rho G^\top) (G\rho G^\top)^{-1} G\rho \Sigma^\top - H\rho \Sigma^\top \right\} \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \right. \\
& \left. + \left\{ (H\rho G^\top) (G\rho G^\top)^{-1} (\alpha - r\mathbf{1}) - (\beta - r\mathbf{1}) \right\} \frac{J_{\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \right]
\end{aligned} \tag{5.94}$$

**Proposition 16** *A l'équilibre, la fonction d'utilité indirecte  $J$  vérifie l'équation suivante :*

$$U(c^*) + J_t + \mu^\top J_Y + (r\mathcal{W} - c^*) J_{\mathcal{W}}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\alpha - r\mathbf{1})^\top G [(H^\top H) \rho (G^\top G)]^{-1} H^\top (\beta - r\mathbf{1}) \frac{J_{\mathcal{W}}^2}{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \\
& \quad - J_{Y\mathcal{W}}^\top \Sigma (H^\top H)^{-1} H^\top (\beta - r\mathbf{1}) \frac{J_{\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \\
& \quad - \frac{1}{2} J_{Y\mathcal{W}}^\top \Sigma \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \frac{1}{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} + \frac{1}{2} \text{trace} [\Sigma \rho \Sigma^\top J_{YY}] = 0
\end{aligned} \tag{5.95}$$

### 5.3.3 Détermination du taux d'intérêt d'équilibre

Considérons les processus de diffusion  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  définis par la différentielle stochastique suivante :

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t, X(t)) \\ \mu_2(t, X(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \Sigma_1(t, X(t)) \\ \Sigma_2(t, X(t)) \end{bmatrix} dW(t)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener multidimensionnel de matrice de covariance  $\rho t$ . Soient les notations  $\mathbb{E}[dX_1(t)]$  et  $\mathbb{V}[dX_1(t), dX_2(t)]$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[dX_1(t)] &= \frac{E[dX_1(t) | \mathcal{F}_t]}{dt} \\
&= \mu_1(t, X(t))
\end{aligned} \tag{5.96}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[dX_1(t), dX_2(t)] &= \frac{E \left[ (dX_1(t) - E[dX_1(t) | \mathcal{F}_t]) (dX_2(t) - E[dX_2(t) | \mathcal{F}_t])^\top \middle| \mathcal{F}_t \right]}{dt} \\
&= \Sigma_1(t, X(t)) \rho \Sigma_2(t, X(t))^\top
\end{aligned} \tag{5.97}$$

Nous utilisons aussi la notation  $\mathbb{V}[dX_1(t)]$  équivalente à  $\mathbb{V}[dX_1(t), dX_1(t)]$ .

**Proposition 17** *La relation entre le taux d'intérêt d'équilibre et la fonction d'utilité indirecte de l'agent est :*

$$r^* = \left[ a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta \right] - \frac{\mathbb{V}[d\mathcal{W}]}{\mathcal{W}} \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] - \frac{\mathbb{V}[d\mathcal{W}, dY]}{\mathcal{W}} \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \tag{5.98}$$

**Proposition 18** *Le taux d'intérêt d'équilibre  $r^*$  est alors égal à l'opposé de l'anticipation du taux de variation de l'utilité indirecte marginale :*

$$r^* = -\mathbb{E} \left[ \frac{dJ_{\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \tag{5.99}$$

**Proposition 19** *Le taux d'intérêt d'équilibre  $r^*$  est aussi égal au rendement anticipé du portefeuille auquel s'ajoute la covariance entre les taux de variation de la richesse et de l'utilité indirecte marginale :*

$$r^* = \left[ a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta \right] + \mathbb{V} \left[ \frac{d\mathcal{W}}{\mathcal{W}}, \frac{dJ_{\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \tag{5.100}$$

### 5.3.4 Détermination de l'équation de valorisation des actifs financiers

**Proposition 20** *A l'équilibre, la valeur de l'actif contingent  $P^{(n)}(t)$  vérifie l'équation suivante*

$$(\beta_n - r^*) P^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{W}}^{(n)} & P_Y^{(n)\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{\mathcal{W}} \\ \zeta_Y \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

avec

$$\zeta_{\mathcal{W}} = \mathbb{V}[d\mathcal{W}] \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] + \mathbb{V}[d\mathcal{W}, dY] \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \quad (5.102)$$

$$\zeta_Y = \mathbb{V}[dY, d\mathcal{W}] \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] + \mathbb{V}[dY] \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \quad (5.103)$$

**Théorème 21** *A l'équilibre, la valeur  $P^{(n)}(t)$  du  $n$ -ième actif contingent satisfait l'équation différentielle partielle suivante :*

$$\begin{cases} \mathcal{A}_t P^{(n)} - \zeta_{\mathcal{W}} P_{\mathcal{W}}^{(n)} - \zeta_Y^\top P_Y^{(n)} + P_t^{(n)} - r^* P^{(n)} + \delta_n = 0 \\ P^{(n)}(T, \mathcal{W}(T), Y(T)) = B^{(n)}(T, \mathcal{W}(T), Y(T)) \end{cases} \quad (5.104)$$

Il est tout à fait remarquable que cette équation soit la même que l'équation (31) obtenue par COX, INGERSOLL et ROSS [1985a]. En fait, tous les résultats exprimés en terme d'utilité indirecte sont conservés<sup>5</sup>. Dans le modèle original, le vecteur  $b^*$  est nul. Le portefeuille de l'agent est composé uniquement de stratégies de production. Les prix des actifs contingents obéissent à la même forme d'équation de valorisation. Nous pouvons donc considérer ces prix comme les prix implicites du modèle présenté ci-dessus lorsque ces actifs contingents ne sont pas détenus.

### 5.3.5 La structure par terme des obligations à coupon zéro

#### 5.3.5.1 Dérivation de la structure par terme

Pour dériver la structure par terme, nous considérons la représentation suivante des processus à l'équilibre

$$d\mathcal{W}^\bullet(t) = \left[ (a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta) \mathcal{W} - c^* - \zeta_{\mathcal{W}} \right] dt + \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] dW(t) \quad (5.105)$$

et

$$dY^\bullet(t) = [\mu - \zeta_Y] dt + \Sigma dW(t) \quad (5.106)$$

<sup>5</sup>Dans sa thèse, PISTRE [1993] étudie le relachement de l'hypothèse de séparabilité de la fonction d'utilité et arrive à la même conclusion.

Pour une obligation à coupon zéro, nous avons  $B(T, \mathcal{W}(T), Y(T)) = 1$  et  $\delta(t, \mathcal{W}(t), Y(t)) = 0$ . L'équation (5.104) devient alors

$$\begin{cases} \mathcal{A}_t^\bullet P + P_t - r^* P = 0 \\ P(T, \mathcal{W}(T), Y(T)) = 1 \end{cases} \quad (5.107)$$

avec  $\mathcal{A}_t^\bullet P$  le générateur infinitésimal de  $P(t)$  déduit du processus de diffusion  $Y^{+\bullet}(t) = [\mathcal{W}^\bullet(t) \ Y^\bullet(t)^\top]^\top$ .

**Théorème 22** *La solution de (5.107) est alors donnée par le théorème de Feynman-Kac. Nous avons :*

$$P_{t_0}^c(\tau) = E^\bullet \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r^*(t, \mathcal{W}(t), Y(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (5.108)$$

### 5.3.5.2 Equivalence modèle d'arbitrage – modèle d'équilibre général

Nous remarquons que la forme de la solution (5.108) est la même que celle donnée par l'équation (5.41) dans le modèle d'arbitrage. Il existe cependant une différence **fondamentale** :

- Dans le modèle d'arbitrage, la relation entre le taux d'intérêt et les variables d'état est posée a priori. Nous avons  $r = r(t, X(t))$ .
- Dans le modèle d'équilibre général, cette relation est endogène et dépend des préférences de l'agent et de la structure de l'économie. Nous avons  $r = r^*(t, Y^+(t))$ .

Dans le modèle d'arbitrage, nous obtenons le processus “corrigé du risque” en utilisant le théorème de Girsanov.

$$\begin{cases} dX(t) = [\mu(t, X) - \Sigma(t, X) \lambda(t)] dt + \Sigma(t, X(t)) dW'(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (5.109)$$

La solution est alors donnée par le théorème de Feynman-Kac. Dans le modèle d'équilibre général, l'utilisation du théorème de Girsanov n'est pas nécessaire. Si nous considérons le processus  $Y^{+\bullet}(t)$ , nous avons directement une représentation de Feynman-Kac. Nous posons

$$dY^{+\bullet}(t) = \mu_{Y^{+\bullet}}(t, Y^+(t)) dt + \Sigma_{Y^+}(t, Y^+(t)) dW(t) \quad (5.110)$$

Dans ce cas, nous rappelons que

$$\begin{aligned} \mu_{Y^{+\bullet}}(t, Y^+(t)) &= \mu_{Y^+}(t, Y^+(t)) - \zeta \\ &= \mu_{Y^+}(t, Y^+(t)) - \begin{bmatrix} \zeta_{\mathcal{W}} \\ \zeta_Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si nous schématisons l'utilisation du modèle d'équilibre général dans un cadre de valorisation, cela revient, une fois l'équilibre déterminé, à employer un modèle d'arbitrage dans lequel le "processus corrigé" serait **directement** donné par l'équation (5.110). Dans le modèle d'équilibre général, le vecteur  $\zeta$  joue le même rôle que  $\Sigma(t, X(t)) \lambda(t)$  dans le modèle d'arbitrage. C'est pourquoi nous pouvons assimiler le processus *transformé*  $Y^{+\bullet}(t)$  à un processus "corrigé du risque". Exprimer le modèle d'équilibre général en modèle factoriel d'arbitrage implique les deux égalités suivantes

$$\zeta(t, X(t)) = \Sigma(t, X(t)) \lambda(t) = \zeta \quad (5.111)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{W}(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

Dans des cas très particuliers (par exemple, dans un modèle à une variable d'état et à une source de risque), nous pourrions déterminer le vecteur  $\lambda(t)$  des prix implicites de marché des risques mais en général, cela ne sera pas possible.

## 5.4 Les différents modèles à plusieurs variables d'état

Il existe de nombreux modèles de structure par terme avec plusieurs variables d'état (surtout depuis ces dernières années). Dans cette section, nous présentons les modèles les plus importants d'un point de vue historique<sup>6</sup>.

### 5.4.1 Le modèle de RICHARD [1978]

C'est un modèle d'arbitrage avec deux facteurs : le taux d'intérêt réel instantané  $\mathbf{r}(t)$  et le taux d'inflation continu  $\pi(t)$ . Richard suppose que la dynamique de ces deux facteurs est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{r}(t) \\ d\pi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \pi) \\ \mu_{\pi}(\mathbf{r}, \pi) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \pi) & 0 \\ 0 & \sigma_{\pi}(\mathbf{r}, \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_{\mathbf{r}}(t) \\ dW_{\pi}(t) \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

avec

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\mathbf{r}, \pi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.114)$$

Ce modèle est un cas particulier de celui présenté au paragraphe 5.2.4.1. L'équation de valorisation est donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_{\mathbf{r}}^2 P_{\mathbf{r}\mathbf{r}} + \rho_{\mathbf{r}, \pi} \sigma_{\mathbf{r}} \sigma_{\pi} P_{\mathbf{r}\pi} + \frac{1}{2} \sigma_{\pi}^2 P_{\pi\pi} \\ & + [\mu_{\mathbf{r}} - \lambda_{\mathbf{r}} \sigma_{\mathbf{r}}] P_{\mathbf{r}} + [\mu_{\pi} - \lambda_{\pi} \sigma_{\pi}] P_{\pi} + P_t - r(\mathbf{r}, \pi) P = 0 \end{aligned} \quad (5.115)$$

---

<sup>6</sup>Même s'ils sont intéressants, les modèles de LANGETIEG [1980], PLATTEN [1984] et MELLIOS [1997] ont peu intéressé jusqu'à présent les praticiens.

Nous retrouvons bien l'équation (56) de RICHARD [1978]. Richard propose alors une solution dans le cas où les processus de diffusion sont de la forme "racine carrée" de COX, INGERSOLL et ROSS [1985b]. Ce modèle est intéressant car d'un point de vue historique, c'est le deuxième auteur à utiliser deux variables d'état. Cependant, il est inutilisable en pratique du fait même de la nature de ces variables d'état. En particulier, l'estimation des paramètres de l'EDS du taux d'inflation instantané est impossible.

### 5.4.2 Le modèle de BRENNAN et SCHWARTZ [1979]

Le modèle de Brennan et Schwartz est aussi un modèle d'arbitrage avec deux facteurs. Les auteurs choisissent le taux "court"  $r_t$  et le taux "long"  $R_t(\infty)$ . Ils supposent que les facteurs sont affectés par des risques spécifiques mais corrélés. L'équation de valorisation présente donc la même forme que l'expression (5.115) mais, contrairement au modèle de RICHARD [1978], celui de BRENNAN et SCHWARTZ [1979] se prête à des études empiriques et permet, une fois calibré, de valoriser les options sur taux (REBONATO [1996]). Nous pensons aussi qu'il s'agit du modèle à deux facteurs "le plus réaliste". Dans le troisième chapitre, nous avons montré que la structure par terme est affectée principalement par deux facteurs, un facteur de "niveau" et un facteur de "spread". Nous pouvons montrer que dans le modèle d'arbitrage, tout système de combinaison linéaire des variables d'état conduit à la même solution. Dans le modèle de Brennan et Schwartz, il est donc équivalent de considérer les facteurs originaux  $\{r_t, R_t(\infty)\}$  ou les combinaisons  $\{r_t, R_t(\infty) - r_t\}$ ,  $\{R_t(\infty), R_t(\infty) - r_t\}$  et  $\{\frac{1}{2}(r_t + R_t(\infty)), R_t(\infty) - r_t\}$ . Ce modèle correspond donc à un modèle à deux facteurs avec un facteur de "niveau" et un facteur de "spread"  $S_t = R_t(\infty) - r_t$ . Même si le facteur de "niveau" n'est pas un taux intermédiaire comme le suggèrent les résultats du troisième chapitre, l'approximation par le taux court ou le taux long ou la moyenne de ces deux taux est tout à fait acceptable.

### 5.4.3 Le modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985b]

La solution de ce modèle est présentée dans le chapitre précédent dans un cadre de modèle d'arbitrage. Cependant, c'est une solution particulière du modèle d'équilibre général développé par COX, INGERSOLL et ROSS [1985a]. Il y a une seule variable d'état dont la dynamique est donnée par l'EDS suivante

$$dY(t) = (\xi Y(t) + \zeta) dt + v \sqrt{Y(t)} dW(t) \quad (5.116)$$

La fonction d'utilité ne dépend que de la consommation  $c(t)$ .

$$U(t, c(t), Y(t)) = e^{-\alpha t} \left[ \frac{c(t)^\gamma - 1}{\gamma} \right] \quad (5.117)$$

Pour dériver la solution<sup>7</sup>, nous cherchons dans un premier temps la dynamique du taux d'intérêt d'équilibre  $r^*$ , puis nous reformulons l'équation de valorisation (5.104) uniquement en fonction de  $r^*$ . Le lecteur peut consulter par exemple LAMBERTON et LAPEYRE [1991] ou BISIÈRE [1997] pour l'exposé de la démonstration. Ce modèle occupe une place très importante dans la théorie financière et les modèles à deux variables d'état qui se placent dans ce cadre d'analyse lui doivent beaucoup pour la démarche de résolution.

#### 5.4.4 Le modèle de LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992]

Il s'agit d'un modèle d'équilibre général et les auteurs utilisent deux variables d'état. Une reformulation de ces variables leur permet de construire deux facteurs économiques affectant la courbe des taux : le taux d'intérêt instantané  $r(t)$  et la volatilité *locale*  $V(t)$  de ce taux. Nous avons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dr(t) \\ dV(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \alpha\gamma + \beta\eta \\ \alpha^2\gamma + \beta^2\eta \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} \beta\delta - \alpha\xi & \xi - \delta \\ \alpha\beta(\delta - \xi) & \beta\xi - \alpha\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \right) dt \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha(\beta r(t) - V(t))} & \sqrt{\beta(V(t) - \alpha r(t))} \\ \alpha\sqrt{\alpha(\beta r(t) - V(t))} & \beta\sqrt{\beta(V(t) - \alpha r(t))} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.118)$$

avec  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  deux processus de Wiener indépendants. LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992] montrent que la valeur de l'obligation à coupon zéro est

$$P_{t_0}^c(\tau) = A(\tau)^{2\gamma} B(\tau)^{2\eta} \exp[\kappa\tau + C(\tau)r_0 + D(\tau)V_0] \quad (5.119)$$

avec

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \frac{2\phi}{(\delta + \phi)\vartheta_1 + 2\phi} \\ B(\tau) &= \frac{2\psi}{(\nu + \psi)\vartheta_2 + 2\psi} \\ C(\tau) &= \frac{\alpha\phi\vartheta_2 B(\tau) - \beta\psi\vartheta_1 A(\tau)}{\vartheta_3} \\ D(\tau) &= \frac{\psi\vartheta_1 A(\tau) - \phi\vartheta_2 B(\tau)}{\vartheta_3} \end{aligned} \quad (5.120)$$

<sup>7</sup>LONGSTAFF [1992] montre que cette solution n'est pas unique et dépend très fortement des conditions aux bornes.



et

$$\begin{aligned}
\nu &= \lambda + \xi & (5.121) \\
\phi &= \sqrt{2\alpha + \delta^2} \\
\psi &= \sqrt{2\beta + \nu^2} \\
\kappa &= \gamma(\delta + \phi) + \eta(\nu + \psi) \\
\vartheta_1 &= \exp(\phi\tau) - 1 \\
\vartheta_2 &= \exp(\psi\tau) - 1 \\
\vartheta_3 &= \phi\psi(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

Le modèle dépend donc de sept paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi$  et  $\lambda$ .

### 5.4.5 Le modèle de CHEN [1995]

CHEN [1995] propose une extension du modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985b]. Il suppose que la variance instantanée  $\sigma^2$  et la valeur d'attraction  $\theta$  ne sont plus constantes. C'est donc un modèle à trois variables d'état, dont la dynamique est

$$\begin{bmatrix} dr(t) \\ d\theta(t) \\ dv(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_r(\theta(t) - r(t)) \\ \kappa_\theta(\bar{\theta} - \theta(t)) \\ \kappa_v(\bar{v} - v(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta\sqrt{\theta(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v\sqrt{v(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

avec

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & 0 \\ \rho_{1,3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

Pour dériver l'équation de valorisation, nous utilisons le résultat (5.57). Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}v(t)r(t)P_{r,r} + \frac{1}{2}\sigma_\theta^2\theta(t)P_{\theta,\theta} + \frac{1}{2}\sigma_v^2v(t)P_{v,v} \\
&+ \rho_{1,2}\sigma_\theta\sqrt{v(t)r(t)\theta(t)}P_{r,\theta} + \rho_{1,3}\sigma_vv(t)\sqrt{r(t)}P_{r,v} \\
&+ \left(\kappa_r(\theta(t) - r(t)) - \lambda_1(t)\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}\right)P_r \\
&+ \left(\kappa_\theta(\bar{\theta} - \theta(t)) - \lambda_2(t)\sigma_\theta\sqrt{\theta(t)}\right)P_\theta \\
&+ \left(\kappa_v(\bar{v} - v(t)) - \lambda_3(t)\sigma_v\sqrt{v(t)}\right)P_v \\
&+ P_t - rP = 0
\end{aligned} \quad (5.124)$$

Chen propose que l'expression des prix des risques est

$$\lambda_1(t) = \lambda_r \frac{\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}}{1} \quad (5.125)$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_\theta \frac{\sqrt{\theta(t)}}{\sigma_\theta} \quad (5.126)$$

$$\lambda_3(t) = \lambda_v \frac{\sqrt{v(t)}}{\sigma_v} \quad (5.127)$$

La forme des prix des risques est celle obtenue par CIR [1985b]. Cependant, ce n'est pas un modèle d'équilibre, mais bien un modèle factoriel. En utilisant l'expression des prix des risques, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}v(t)r(t)P_{r,r} + \frac{1}{2}\sigma_\theta^2\theta(t)P_{\theta,\theta} + \frac{1}{2}\sigma_v^2v(t)P_{v,v} \\ & + \rho_{1,2}\sigma_\theta\sqrt{v(t)r(t)\theta(t)}P_{r,\theta} + \rho_{1,3}\sigma_vv(t)\sqrt{r(t)}P_{r,v} \\ & + (\kappa_r(\theta(t) - r(t)) - \lambda_rv(t)r(t))P_r \\ & \quad + (\kappa_\theta\bar{\theta} - \kappa'_\theta\theta(t))P_\theta \\ & \quad + (\kappa_v\bar{v} - \kappa'_vv(t))P_v \\ & \quad + P_t - rP = 0 \end{aligned} \quad (5.128)$$

avec  $\kappa'_\theta = \kappa_\theta - \lambda_\theta$  et  $\kappa'_v = \kappa_v - \lambda_v$ . Nous retrouvons bien l'équation (1.7) de CHEN [1995]. Celui-ci propose une solution particulière lorsque les processus de Wiener ne sont pas corrélés et que le taux d'intérêt suit la dynamique suivante :

$$dr(t) = \kappa_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{v(t)}dW_1(t) \quad (5.129)$$

Néanmoins, cette solution est extrêmement compliquée et fait appel aux fonctions de Bessel des premier et second ordres et à la fonction de Kummer (CHEN [1996]).

BALDUZZI, DAS, FORESI et SUNDARAM [1996] considèrent un modèle très proche du précédent. Nous avons

$$\begin{bmatrix} dr(t) \\ d\theta(t) \\ dv(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_r(\theta(t) - r(t)) \\ \kappa_\theta(\bar{\theta} - \theta(t)) \\ \kappa_v(\bar{v} - v(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{v(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v\sqrt{v(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

Les processus de Wiener sont indépendants les uns des autres à l'exception de  $W_1(t)$  et  $W_3(t)$  :

$$E[W_1(t)W_3(t)] = \rho t \quad (5.131)$$

L'équation de valorisation est un cas particulier du résultat (5.57)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}v(t)P_{r,r} + \frac{1}{2}\sigma_\theta^2P_{\theta,\theta} + \frac{1}{2}\sigma_v^2v(t)P_{v,v} \\ & \quad + \rho\sigma_vv(t)P_{r,v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \kappa_r (\theta(t) - r(t)) - \lambda_1(t) \sqrt{v(t)} \right) P_r \\
& \quad + \left( \kappa_\theta (\bar{\theta} - \theta(t)) - \lambda_2(t) \sigma_\theta \right) P_\theta \\
& + \left( \kappa_v (\bar{v} - v(t)) - \lambda_3(t) \sigma_v \sqrt{v(t)} \right) P_v \\
& \quad + P_t - rP = 0
\end{aligned} \tag{5.132}$$

Les auteurs supposent que les prix des risques sont<sup>8</sup>

$$\lambda_1(t) = \lambda_r \frac{\sqrt{v(t)}}{1} \tag{5.133}$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_\theta \frac{1}{\sigma_\theta} \tag{5.134}$$

$$\lambda_3(t) = \lambda_v \frac{\sqrt{v(t)}}{\sigma_v} \tag{5.135}$$

Nous pouvons alors montrer que la solution de l'équation de valorisation est de la forme

$$P_{t_0}^c(\tau) = A(\tau) \exp[-r_0 B(\tau) - \theta_0 C(\tau) - v_0 D(\tau)] \tag{5.136}$$

avec  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$ ,  $C(\tau)$  et  $D(\tau)$  quatre fonctions qui satisfont le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{dA(\tau)}{d\tau} &= A(\tau) \left[ \frac{1}{2} \sigma_\theta^2 C(\tau)^2 - \kappa_\theta \bar{\theta} C(\tau) - \kappa_v \bar{v} D(\tau) + \lambda_\theta C(\tau) \right] \\
\frac{dB(\tau)}{d\tau} &= 1 - \kappa_r B(\tau) \\
\frac{dC(\tau)}{d\tau} &= \kappa_r B(\tau) - \kappa_\theta C(\tau) \\
\frac{dD(\tau)}{d\tau} &= -\frac{1}{2} B(\tau)^2 - \lambda_r B(\tau) - \frac{1}{2} \sigma_v^2 D(\tau)^2 - \rho \sigma_v B(\tau) D(\tau) - \kappa_v D(\tau) - \lambda_v D(\tau)
\end{aligned} \tag{5.137}$$

Les conditions aux bornes sont  $A(0) = 1$ ,  $B(\tau) = 0$ ,  $C(\tau) = 0$  et  $D(\tau) = 0$ . Ce modèle, qualifié par les auteurs de "simple", permet de reproduire de nombreuses formes de courbe de taux qu'il n'est pas possible d'obtenir avec les modèles à un seul facteur. Nous présentons dans l'annexe générale quelques exemples<sup>9</sup>.

<sup>8</sup>En fait, ils supposent que  $\lambda_2(t) = \lambda_\theta$ . Cependant, cette spécification est incompatible avec l'équation (7) de la page 45. Le dernier terme devrait être  $\lambda_\theta \sigma_\theta A(\tau) C(\tau)$  et non  $\lambda_\theta A(\tau) C(\tau)$ . Nous avons donc préféré changer la spécification de  $\lambda_2(t)$  afin de conserver la même solution que les auteurs.

<sup>9</sup>La procédure correspondante **BDFS** utilise l'algorithme de Runge Kutta d'ordre quatre à pas constant pour résoudre le système des EDO.

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre est le prolongement du chapitre précédent consacré à une seule variable d'état. La prise en compte de plusieurs variables d'état conduit à une plus grande richesse de la modélisation de la structure par terme. Deux types d'approches ont été présentés : le premier est celui de la théorie de l'arbitrage, alors que le second concerne l'équilibre général. Les modèles d'arbitrage reposent sur l'hypothèse de complétude et de viabilité des marchés. Cette hypothèse n'est pas nécessaire pour les modèles de type COX, INGERSOLL et ROSS [1985a,1985b]. Néanmoins, dans cette deuxième approche, nous devons préciser le comportement des agents en spécifiant la fonction d'utilité. En fait, le choix du praticien n'est pas un choix de cadre d'analyse, mais un choix de modèle spécifique. Cependant, pour utiliser ces modèles, nous devons estimer les paramètres (ou calibrer le modèle); cette estimation fait l'objet du chapitre suivant.

## 5.6 Annexes

### 5.6.1 Générateur infinitésimal d'un processus augmenté

Considérons le processus de diffusion  $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^\top$  dont la différentielle stochastique est

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \Sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (5.138)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de covariance  $\rho t$ . Définissons la partition relative à  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  telle que nous avons

$$dX(t) = \begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t, X(t)) \\ \mu_2(t, X(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \Sigma_1(t, X(t)) \\ \Sigma_2(t, X(t)) \end{bmatrix} dW(t) \quad (5.139)$$

Le générateur infinitésimal du processus  $Y(t) = F(t, X(t))$  est défini par l'expression suivante :

$$\mathcal{A}_t F = \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X)^\top F_{XX}(t, X) \Sigma(t, X) \rho \right] + \mu(t, X)^\top F_X(t, X) \quad (5.140)$$

Posons

$$F_X(t, X) = \begin{bmatrix} F_{X_1}(t, X) \\ F_{X_2}(t, X) \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

et

$$F_{XX}(t, X) = \begin{bmatrix} F_{X_1 X_1}(t, X) & F_{X_1 X_2}(t, X) \\ F_{X_2 X_1}(t, X) & F_{X_2 X_2}(t, X) \end{bmatrix} \quad (5.142)$$

Nous obtenons

$$\mu(t, X)^\top F_X(t, X) = \mu_1(t, X)^\top F_{X_1}(t, X) + \mu_2(t, X)^\top F_{X_2}(t, X) \quad (5.143)$$

et

$$F_{XX}(t, X) \Sigma(t, X) \rho \Sigma(t, X)^\top = \begin{bmatrix} F\Sigma\rho\Sigma_{11} & F\Sigma\rho\Sigma_{12} \\ F\Sigma\rho\Sigma_{21} & F\Sigma\rho\Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (5.144)$$

avec

$$\begin{aligned} F\Sigma\rho\Sigma_{11} &= F_{X_1X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \Sigma_1(t, X)^\top + F_{X_1X_2}(t, X) \Sigma_2(t, X) \rho \Sigma_1(t, X)^\top \\ F\Sigma\rho\Sigma_{12} &= F_{X_1X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \Sigma_2(t, X)^\top + F_{X_1X_2}(t, X) \Sigma_2(t, X) \rho \Sigma_2(t, X)^\top \\ F\Sigma\rho\Sigma_{21} &= F_{X_2X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \Sigma_1(t, X)^\top + F_{X_2X_2}(t, X) \Sigma_2(t, X) \rho \Sigma_1(t, X)^\top \\ F\Sigma\rho\Sigma_{22} &= F_{X_2X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \Sigma_2(t, X)^\top + F_{X_2X_2}(t, X) \Sigma_2(t, X) \rho \Sigma_2(t, X)^\top \end{aligned} \quad (5.145)$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur trace et le fait que  $F_{X_1X_2}(t, X)^\top = F_{X_2X_1}(t, X)$ , nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X)^\top F_{XX}(t, X) \Sigma(t, X) \rho \right] &= \text{trace} \left[ \Sigma_1(t, X)^\top F_{X_1X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \right] \\ &\quad + 2 \text{trace} \left[ \Sigma_2(t, X)^\top F_{X_2X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \right] \\ &\quad + \text{trace} \left[ \Sigma_2(t, X)^\top F_{X_2X_2}(t, X) \Sigma_2(t, X) \rho \right] \end{aligned} \quad (5.146)$$

Nous obtenons finalement l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t F &= \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma_1(t, X)^\top F_{X_1X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \right] \\ &\quad + \text{trace} \left[ \Sigma_2(t, X)^\top F_{X_2X_1}(t, X) \Sigma_1(t, X) \rho \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma_2(t, X)^\top F_{X_2X_2}(t, X) \Sigma_2(t, X) \rho \right] \\ &\quad + \mu_1(t, X)^\top F_{X_1}(t, X) + \mu_2(t, X)^\top F_{X_2}(t, X) \end{aligned} \quad (5.147)$$

## 5.6.2 Dérivation du modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985a]

### 5.6.2.1 Preuve de la proposition 14

Nous avons

$$\psi_c = \frac{\partial \psi(t)}{\partial c(t)} = \frac{\partial U(t)}{\partial c(t)} - J_W \quad (5.148)$$

En remarquant que

$$\left[ a^\top G + b^\top H \right] \rho \left[ a^\top G + b^\top H \right]^\top = \begin{cases} a^\top G \rho G^\top a + 2a^\top G \rho H^\top b + b^\top H \rho H^\top b \\ \text{ou} \\ a^\top G \rho G^\top a + 2b^\top H \rho G^\top a + b^\top H \rho H^\top b \end{cases} \quad (5.149)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi_a = & \mathcal{W}(\alpha - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W}^2 [G\rho G^\top a + G\rho H^\top b] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\ & + \mathcal{W}G\rho\Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \end{aligned} \quad (5.150)$$

et

$$\begin{aligned} \psi_b = & \mathcal{W}(\beta - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W}^2 [H\rho G^\top a + H\rho H^\top b] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\ & + \mathcal{W}H\rho\Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \end{aligned} \quad (5.151)$$

■

### 5.6.2.2 Preuve de la proposition 15

La variable de contrôle  $c(t)$  est telle que

$$U_c - J_{\mathcal{W}} = 0 \iff c^* = U_c^{-1}(J_{\mathcal{W}}) \quad (5.152)$$

La variable de contrôle  $a$  vérifie

$$(\alpha - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W} [(G\rho G^\top) a + (G\rho H^\top) b] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + (G\rho\Sigma^\top) J_{Y\mathcal{W}} = 0 \quad (5.153)$$

De même, la variable de contrôle  $b$  vérifie

$$(\beta - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W} [(H\rho G^\top) a + (H\rho H^\top) b] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + (H\rho\Sigma^\top) J_{Y\mathcal{W}} = 0 \quad (5.154)$$

Si la matrice  $H\rho H^\top$  est inversible, nous avons

$$\begin{aligned} b = & - (H\rho H^\top)^{-1} (\beta - r\mathbf{1}) \frac{J_{\mathcal{W}}}{\mathcal{W}J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \\ & - (H\rho H^\top)^{-1} (H\rho G^\top) a \\ & - (H\rho H^\top)^{-1} (H\rho\Sigma^\top) \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{\mathcal{W}J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \end{aligned} \quad (5.155)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (5.153),  $a^*$  doit vérifier l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \mathcal{W} \left[ (G\rho G^\top) - (G\rho H^\top) (H\rho H^\top)^{-1} (H\rho G^\top) \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} a^* \\ & + \left[ (\alpha - r\mathbf{1}) - (G\rho H^\top) (H\rho H^\top)^{-1} (\beta - r\mathbf{1}) \right] J_{\mathcal{W}} \\ & + \left[ (G\rho\Sigma^\top) - (G\rho H^\top) (H\rho H^\top)^{-1} (H\rho\Sigma^\top) \right] J_{Y\mathcal{W}} = 0 \end{aligned} \quad (5.156)$$

Pour trouver la solution  $b^*$ , nous utilisons la même méthode de résolution. ■

### 5.6.2.3 Preuve de la proposition 16

A l'équilibre, nous avons

$$a^{*\top} (\alpha - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W} \left[ a^{*\top} (G\rho G^\top) a^* + a^{*\top} (G\rho H^\top) b^* \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + a^{*\top} (G\rho\Sigma^\top) J_{Y\mathcal{W}} = 0 \quad (5.157)$$

et

$$b^{*\top} (\beta - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W} \left[ b^{*\top} (H\rho G^\top) a^* + b^{*\top} (H\rho H^\top) b^* \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + b^{*\top} (H\rho\Sigma^\top) J_{Y\mathcal{W}} = 0 \quad (5.158)$$

d'où

$$\begin{aligned} \left[ a^{*\top} (\alpha - r\mathbf{1}) + b^{*\top} (\beta - r\mathbf{1}) \right] J_{\mathcal{W}} &= - \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \\ &\quad - \mathcal{W} \left[ \left( a^{*\top} G + b^{*\top} H \right) \rho \left( a^{*\top} G + b^{*\top} H \right)^\top \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \end{aligned} \quad (5.159)$$

Nous en déduisons l'expression suivante de  $\psi(a^*, b^*, t, c^*(t), \mathcal{W}(t), Y(t))$

$$\begin{aligned} \psi &= U(t, c^*(t), Y(t)) + J_t + \mu^\top J_Y + (r\mathcal{W} - c^*) J_{\mathcal{W}} \\ &\quad - \mathcal{W}^2 \left[ \left( a^{*\top} G + b^{*\top} H \right) \rho \left( a^{*\top} G + b^{*\top} H \right)^\top \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\ &\quad - \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 \left[ a^\top G + b^\top H \right] \rho \left[ a^\top G + b^\top H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\ &\quad + \mathcal{W} \left[ a^\top G + b^\top H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma \rho \Sigma^\top J_{YY} \right] \end{aligned} \quad (5.160)$$

c'est-à-dire après simplification

$$\begin{aligned} \psi(a^*, b^*, t, c^*(t), \mathcal{W}(t), Y(t)) &= U(t, c^*(t), Y(t)) + J_t + \mu^\top J_Y + (r\mathcal{W} - c^*) J_{\mathcal{W}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 \left[ \left( a^{*\top} G + b^{*\top} H \right) \rho \left( a^{*\top} G + b^{*\top} H \right)^\top \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma \rho \Sigma^\top J_{YY} \right] \end{aligned} \quad (5.161)$$

A partir des relations (5.153) et (5.154), nous obtenons

$$G^\top (\alpha - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W} (G^\top G) \rho \left[ G^\top a + H^\top b \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + (G^\top G \rho \Sigma^\top) J_{Y\mathcal{W}} = 0 \quad (5.162)$$

et

$$H^\top (\beta - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} + \mathcal{W} (H^\top H) \rho \left[ G^\top a + H^\top b \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + (H^\top H \rho \Sigma^\top) J_{Y\mathcal{W}} = 0 \quad (5.163)$$

d'où nous déduisons que

$$\begin{aligned} \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] \rho \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right]^\top &= \left\{ -\rho^{-1} (G^\top G)^{-1} G^\top (\alpha - r\mathbf{1}) \frac{J_{\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} - \Sigma^\top \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \right\} \\ &\quad \rho \left\{ -\rho^{-1} (H^\top H)^{-1} H^\top (\beta - r\mathbf{1}) \frac{J_{\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} - \Sigma^\top \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{\mathcal{W} J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \right\} \end{aligned} \quad (5.164)$$

Après simplification, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2 \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] \rho \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} &= J_{Y\mathcal{W}}^\top \Sigma \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \frac{1}{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \quad (5.165) \\ &\quad + 2 J_{Y\mathcal{W}}^\top \Sigma (H^\top H)^{-1} H^\top (\beta - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}} \frac{1}{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \\ &\quad + (\alpha - r\mathbf{1})^\top G [(H^\top H) \rho (G^\top G)]^{-1} H^\top (\beta - r\mathbf{1}) J_{\mathcal{W}}^2 \frac{1}{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}} \end{aligned}$$

En utilisant cette expression dans l'expression de  $\psi$ , nous obtenons le résultat. ■

#### 5.6.2.4 Preuve de la proposition 17

A partir de la relation (5.159) et, comme toute la richesse est investie, nous obtenons

$$\begin{aligned} r^* &= \left[ a^{\star\top} \alpha + b^{\star\top} \beta \right] + \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] \rho \Sigma^\top \left( \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right) \quad (5.166) \\ &\quad + \mathcal{W} \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] \rho \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right]^\top \left( \frac{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right) \end{aligned}$$

Or, nous avons à l'équilibre

$$\mathbb{V}[d\mathcal{W}] = \mathcal{W}^2 \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] \rho \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right]^\top \quad (5.167)$$

et

$$\mathbb{V}[d\mathcal{W}, dY] = \mathcal{W} \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] \rho \Sigma^\top \quad (5.168)$$

d'où

$$r^* = \left[ a^{\star\top} \alpha + b^{\star\top} \beta \right] - \frac{\mathbb{V}[d\mathcal{W}]}{\mathcal{W}} \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] - \frac{\mathbb{V}[d\mathcal{W}, dY]}{\mathcal{W}} \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \quad (5.169)$$

■

#### 5.6.2.5 Preuve de la proposition 18

Appliquons le lemme d'Ito à  $J_{\mathcal{W}}$ . En utilisant les résultats sur le générateur infinitésimal d'un système augmenté, nous obtenons

$$dJ_{\mathcal{W}} = [J_{\mathcal{W}t} + \mathcal{A}_t J_{\mathcal{W}}] dt + \left[ \mathcal{W} \left( a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right) J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + J_{Y\mathcal{W}}^\top \Sigma \right] dW(t) \quad (5.170)$$



avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t J_{\mathcal{W}} &= J_{\mathcal{W}t} + \mu^\top J_{Y\mathcal{W}} \\
&+ \left[ a^{*\top} (\alpha - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + b^{*\top} (\beta - r\mathbf{1}) \mathcal{W} + r^* \mathcal{W} - c^* \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}\mathcal{W}} + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma \rho \Sigma^\top J_{\mathcal{W}Y Y} \right]
\end{aligned} \tag{5.171}$$

Dérivons l'expression de  $\psi(a^*, b^*, t, c^*(t), \mathcal{W}(t), Y(t))$  par rapport à la variable  $\mathcal{W}$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{W}} &= J_{\mathcal{W}t} + \left[ a^{*\top} (\alpha - r^* \mathbf{1}) \mathcal{W} + b^{*\top} (\beta - r^* \mathbf{1}) \mathcal{W} + r^* \mathcal{W} - c^* \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \left[ a^{*\top} (\alpha - r^* \mathbf{1}) + b^{*\top} (\beta - r^* \mathbf{1}) + r^* \right] J_{\mathcal{W}} \\
&+ \mu^\top J_{Y\mathcal{W}} + \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} + \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma \rho \Sigma^\top J_{\mathcal{W}Y Y} \right]
\end{aligned} \tag{5.172}$$

En utilisant la contrainte sur la richesse investie, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{W}} &= J_{\mathcal{W}t} + \left[ \left( a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta \right) \mathcal{W} - c^* \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + \left[ a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta \right] J_{\mathcal{W}} \\
&+ \mu^\top J_{Y\mathcal{W}} + \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} + \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma \rho \Sigma^\top J_{\mathcal{W}Y Y} \right]
\end{aligned} \tag{5.173}$$

Comme nous avons

$$\begin{aligned}
r^* J_{\mathcal{W}} &= \left[ a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta \right] J_{\mathcal{W}} + \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}} \\
&+ \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}
\end{aligned} \tag{5.174}$$

nous obtenons une nouvelle expression de  $\psi_{\mathcal{W}}$

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{W}} &= J_{\mathcal{W}t} + \left[ \left( a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta \right) \mathcal{W} - c^* \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + \mu^\top J_{Y\mathcal{W}} + r^* J_{\mathcal{W}} \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top J_{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{W}} \\
&+ \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top J_{Y\mathcal{W}\mathcal{W}} + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma \rho \Sigma^\top J_{\mathcal{W}Y Y} \right]
\end{aligned} \tag{5.175}$$

l'expression du taux d'intérêt à l'équilibre est alors

$$\begin{aligned}
r^* &= -\frac{J_{\mathcal{W}t}}{J_{\mathcal{W}}} - \left[ \left( a^{*\top} \alpha + b^{*\top} \beta \right) \mathcal{W} - c^* \right] \frac{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} - \mu^\top \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathcal{W}^2 \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top \frac{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \\
&\quad - \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top \frac{J_{Y\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} - \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma \rho \Sigma^\top \frac{J_{\mathcal{W}Y Y}}{J_{\mathcal{W}}} \right]
\end{aligned} \tag{5.176}$$

Nous en déduisons donc que

$$r^* = -\mathbb{E} \left[ \frac{dJ_{\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \tag{5.177}$$

■

### 5.6.2.6 Preuve de la proposition 19

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} \left[ \frac{d\mathcal{W}}{\mathcal{W}}, \frac{dJ_{\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] &= \left( \frac{1}{\mathcal{W}} \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \right) \\
&\quad \rho \left( \frac{1}{J_{\mathcal{W}}} \left[ \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] J_{\mathcal{W}\mathcal{W}} + J_{Y\mathcal{W}}^\top \Sigma \right]^\top \right) \\
&= \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \Sigma^\top \left( \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right) \\
&\quad + \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right] \rho \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top \left( \frac{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right)
\end{aligned} \tag{5.178}$$

■

### 5.6.2.7 Preuve de la proposition 20

D'après l'équation (5.154), chaque actif contingent  $P^{(n)}$  doit vérifier l'égalité suivante

$$(\beta_n - r^*) P^{(n)} = -P^{(n)} \left[ (H_n \rho G^\top) a^* + (H_n \rho H^\top) b^* \right] \mathcal{W} \frac{J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} - P^{(n)} (H_n \rho \Sigma^\top) \frac{J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \tag{5.179}$$

Or, nous avons

$$\mathbb{V} [dP^{(n)}, d\mathcal{W}] = P^{(n)} H_n \rho \mathcal{W} \left[ a^{*\top} G + b^{*\top} H \right]^\top \tag{5.180}$$

et

$$\mathbb{V} [dP^{(n)}, dY] = P^{(n)} H_n \rho \Sigma^\top \tag{5.181}$$

nous en déduisons alors

$$(\beta_n - r^*) P^{(n)} = \mathbb{V} [dP^{(n)}, d\mathcal{W}] \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] + \mathbb{V} [dP^{(n)}, dY] \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \tag{5.182}$$

La valeur de l'actif contingent dépend de la variable d'état "augmentée"  $Y^+(t)$ , c'est-à-dire que nous avons  $P^{(n)}(t) = P^{(n)}(t, \mathcal{W}(t), Y(t))$ . Nous obtenons en appliquant le lemme d'Ito

$$dP^{(n)}(t) = \left[ P_t^{(n)} + \mathcal{A}_t P^{(n)} \right] dt + \left[ P_{\mathcal{W}}^{(n)} \mathcal{W} \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] + P_Y^{(n)\top} \Sigma \right] dW(t) \quad (5.183)$$

En remarquant que

$$\mathbb{V} [dP^{(n)}, d\mathcal{W}] = P_{\mathcal{W}}^{(n)} \mathbb{V} [d\mathcal{W}] + P_Y^{(n)\top} \mathbb{V} [dY, d\mathcal{W}] \quad (5.184)$$

et

$$\mathbb{V} [dP^{(n)}, dY] = P_{\mathcal{W}}^{(n)} \mathbb{V} [d\mathcal{W}, dY] + P_Y^{(n)\top} \mathbb{V} [dY] \quad (5.185)$$

la relation (5.182) devient

$$\begin{aligned} (\beta_n - r^*) P^{(n)} &= \left( P_{\mathcal{W}}^{(n)} \mathbb{V} [d\mathcal{W}] + P_Y^{(n)\top} \mathbb{V} [dY, d\mathcal{W}] \right) \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \\ &\quad + \left( P_{\mathcal{W}}^{(n)} \mathbb{V} [d\mathcal{W}, dY] + P_Y^{(n)\top} \mathbb{V} [dY] \right) \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \\ &= P_{\mathcal{W}}^{(n)} \left( \mathbb{V} [d\mathcal{W}] \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] + \mathbb{V} [d\mathcal{W}, dY] \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \right) \\ &\quad + P_Y^{(n)\top} \left( \mathbb{V} [dY, d\mathcal{W}] \left[ \frac{-J_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] + \mathbb{V} [dY] \left[ \frac{-J_{Y\mathcal{W}}}{J_{\mathcal{W}}} \right] \right) \end{aligned} \quad (5.186)$$

■

### 5.6.2.8 Preuve du théorème 21

Nous avons

$$dP^{(n)}(t) = \left[ P_t^{(n)} + \mathcal{A}_t P^{(n)} \right] dt + \left[ P_{\mathcal{W}}^{(n)} \mathcal{W} \left[ a^{\star\top} G + b^{\star\top} H \right] + P_Y^{(n)\top} \Sigma \right] dW(t) \quad (5.187)$$

et

$$dP^{(n)}(t) = (P^{(n)} \beta_n - \delta_n) dt + P^{(n)} H_n dW(t) \quad (5.188)$$

d'où

$$P_t^{(n)} + \mathcal{A}_t P^{(n)} = P^{(n)} \beta_n - \delta_n \quad (5.189)$$

En utilisant la relation (5.101), nous obtenons

$$\mathcal{A}_t P^{(n)} - P_{\mathcal{W}}^{(n)} \zeta_{\mathcal{W}} - \zeta_Y^{\top} P_Y^{(n)} + P_t^{(n)} - r^* P^{(n)} + \delta_n = 0 \quad (5.190)$$

■

# Chapitre 6

## Estimation des modèles financiers de structure par terme

### 6.1 Introduction

Contrairement aux modèles traditionnels d'options, il est nécessaire de calibrer les modèles de taux afin de les utiliser pour la valorisation. Le prix d'une option dans le modèle de BLACK et SCHOLLES [1973] dépend de cinq paramètres : le prix du sous-jacent  $S_0$ , le prix d'exercice  $K$ , la volatilité du sous-jacent  $\sigma$ , le taux d'intérêt  $r$  et la maturité de l'option  $\tau$ . Le contrat fournit la valeur des deux paramètres  $K$  et  $\tau$ . Les valeurs de  $S_0$  et  $r$  sont données par les marchés au comptant correspondants. Dans ce modèle, nous avons donc quatre paramètres parfaitement "objectifs"<sup>1</sup> et un paramètre "subjectif"  $\sigma$ . Mais il est facile d'obtenir une valeur "numérique" de  $\sigma$  en considérant une simple mesure statistique ou la volatilité "implicite" passée. Nous retrouvons cette facilité d'utilisation de la formule de Black et Scholes dans la plupart des autres modèles d'options, comme ceux de BLACK [1976] ou GARMAN et KOHLHAGEN [1983].

Les modèles de structure par terme sont beaucoup plus difficiles à utiliser. Cela explique sûrement qu'il n'y ait pas **une** formule de valorisation qui se soit définitivement imposée. La difficulté vient du fait que la plupart des valeurs de paramètres ne sont pas disponibles. Cependant, contrairement au paramètre  $\sigma$  de la formule de Black et Scholes, l'estimation de ces paramètres nécessite de recourir à des techniques économétriques peu familières aux financiers. De plus, la nature même des variables d'état des modèles de taux complique le problème puisque nous ne disposons pas en général de bases de données publiques de ces facteurs.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : une première section est consacrée à l'estimation des paramètres de la dynamique des variables d'état; dans la seconde

---

<sup>1</sup>Le taux d'intérêt instantané  $r$  pose certaines difficultés, qui seront abordées dans le chapitre suivant.

section, les paramètres sont directement estimés à partir des formules qui décrivent les prix des obligations à coupon zéro; enfin, la troisième section présente quelques résultats statistiques.

## 6.2 Estimation des paramètres de la dynamique des variables d'état

Cette approche est celle choisie par CHAN, KAROLYI, LONGSTAFF et SANDERS [1992] et BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1993]. Il existe différentes méthodes d'estimation, comme celles de la méthode du maximum de vraisemblance ou de la méthode des moments généralisés. Le financier doit être prudent lors de l'utilisation de ces méthodes car elles posent certains problèmes à cause de la nature **continue** du processus.

### 6.2.1 La passage du temps continu au temps discret

La dynamique de la variable d'état est continue. Cependant, nous ne disposons que de mesures discrètes. La première difficulté que nous rencontrons concerne la cohérence entre le processus en temps continu et la spécification des trajectoires discrètes<sup>2</sup>. Considérons par exemple un mouvement brownien géométrique. L'équation différentielle stochastique associée est

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu x(t) dt + \sigma x(t) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

La solution de (6.1) est

$$x(t) = x_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (W(t) - W(t_0)) \right] \quad (6.2)$$

Nous cherchons à représenter le processus continu (6.2) pour  $t \in [t_0, T]$  par une trajectoire discrète  $\{(t_0, S_0), \dots, (t_n, S_n), \dots, (t_{N-1}, S_{N-1})\}$  avec  $N \in \mathbb{N}$  le nombre de points de la trajectoire. Notons  $k$  le pas de mesure entre deux observations. Nous avons

$$k = \frac{T - t_0}{N - 1} \quad (6.3)$$

et

$$t_n = t_0 + nk \quad (6.4)$$

Considérons la décomposition suivante

$$W(t_n) - W(t_0) = \sum_{j=1}^n W(t_j) - W(t_{j-1}) \quad (6.5)$$

---

<sup>2</sup>L'analyse suivante est inspirée du huitième chapitre de KLOEDEN et PLATEN [1992].

Les variables aléatoires  $u_j = W(t_j) - W(t_{j-1})$  sont indépendantes et suivent la même loi de densité  $\mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1})$ . Nous obtenons donc une trajectoire discrète du processus (6.2) à partir de l'algorithme suivant (BOULEAU [1988]) :

1. Nous initialisons  $S_0$  à la valeur  $x_0$  et  $v_0$  à zéro.
2. Nous calculons  $v_n = v_{n-1} + u_n$  avec  $u_n$  un nombre aléatoire de fonction de densité  $\mathcal{N}(0, k)$ .
3. Nous calculons  $S_n$  avec la formule suivante

$$S_n = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_n - t_0) + \sigma v_n \right] \quad (6.6)$$

4. Nous recommençons les étapes 2 et 3 pour  $n = 1, \dots, N - 1$ .

Pour obtenir une trajectoire continue, nous considérons une valeur élevée de  $N$ . Le graphique (6.1) présente une réalisation du mouvement brownien géométrique avec  $x_0 = 10$ ,  $\mu = 0.5$  et  $\sigma = 1$ . Nous avons pris  $N$  égal à  $10^5 + 1$ .

Considérons une nouvelle partition de  $[t_0, T]$  avec  $N^* \ll N$ . Pour simplifier le problème, nous supposons que  $(N - 1) \% (N^* - 1)$  est égal à zéro. Posons  $M = \frac{N-1}{N^*-1}$ . Nous pouvons utiliser l'algorithme suivant pour obtenir une trajectoire discrète  $\{(t_0, S_0^*), \dots, (t_{n^*}, S_{n^*}^*), \dots, (t_{N^*-1}, S_{N^*-1}^*)\}$  cohérente avec la solution continue précédente.

1. Nous initialisons  $S_0^*$  à la valeur  $x_0$  et  $v_0^*$  à zéro.

2. Nous calculons  $v_{n^*}^* = v_{n^*-1}^* + \sum_{n=1+(n^*-1)M}^{n^*M} u_n$ .

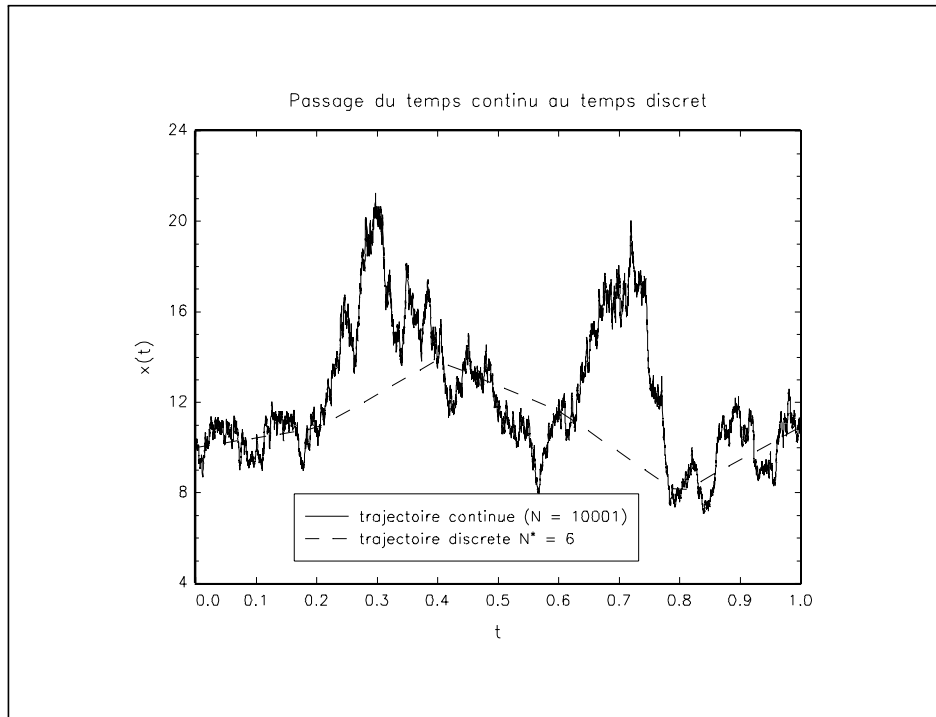
3. Nous calculons  $S_{n^*}^*$  avec la formule suivante

$$S_{n^*}^* = S_0^* \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{n^*} - t_0) + \sigma v_{n^*}^* \right] \quad (6.7)$$

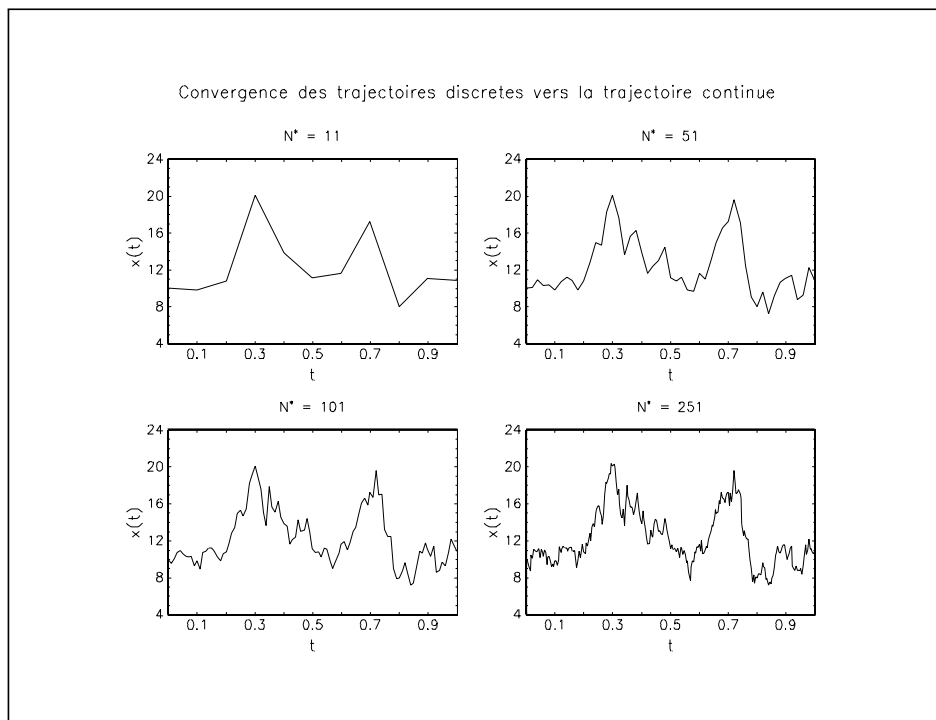
4. Nous recommençons les étapes 2 et 3 pour  $n^* = 1, \dots, N^* - 1$ .

Les nombres aléatoires  $u_n$  sont les mêmes que ceux de la trajectoire "continue". Sur le graphique (6.1), nous avons aussi représenté la trajectoire discrète pour  $N^* = 6$ . La convergence de la trajectoire discrète vers la trajectoire continue est illustrée par le graphique (6.2). Cet exemple est très intéressant car il respecte la cohérence entre la trajectoire continue et la trajectoire discrète. Nous vérifions bien que, quelle que soit la valeur de  $n^*$ ,

$$S_{n^*}^* = S_{n^*M} \quad (6.8)$$



Graphique 6.1



Graphique 6.2

Cela veut dire que les points définissant la trajectoire discrète appartiennent à la trajectoire continue. Il n'y a qu'un seul problème pour le passage du processus continu au processus discret : nous perdons de l'information. Nous pouvons montrer que pour des processus moins "simples" que le mouvement brownien géométrique<sup>3</sup>, l'égalité (6.8) n'est plus respectée (KLOEDEN et PLATEN [1992]). Dans ce cas, la perte d'information s'accompagne d'une **déformation** de cette information. L'origine de la difficulté de l'estimation des paramètres de la dynamique de la variable d'état à partir de mesures discrètes provient de ces deux problèmes : la perte et la déformation de l'information.

## 6.2.2 Estimation des paramètres d'un processus de diffusion

Dans cette sous-section, nous étudions l'estimation des paramètres d'un processus de diffusion. De nombreux auteurs confondent processus de diffusion et équation différentielle stochastique. Une diffusion est un processus de Markov, stochastiquement continu et dont les deux premiers moments existent. Nous pouvons montrer (COX et MILLER [1965]) que la solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, est une diffusion. Dans ce paragraphe, nous supposons que la solution symbolique est connue. Nous avons alors

$$x(t) = f(t, W(t)) \quad (6.9)$$

Notre étude se limite à deux types de processus : le mouvement brownien géométrique et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous pouvons la prolonger sans trop de difficultés en considérant d'autres processus.

### 6.2.2.1 L'estimateur de la méthode du maximum de vraisemblance

**Le mouvement brownien géométrique.** Considérons par exemple le mouvement brownien géométrique. Nous avons

$$x(t) = x_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (W(t) - W(t_0)) \right] \quad (6.10)$$

Nous en déduisons que

$$\ln x(t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (W(t) - W(t_0)) \quad (6.11)$$

Posons  $s < t$ . Nous avons

$$\ln x(t) - \ln x(s) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - s) + \sigma (W(t) - W(s)) \quad (6.12)$$

---

<sup>3</sup>Il suffit de prendre un processus stochastique qui ne peut être exprimé sous la forme explicite  $f(t, W(t))$ .



Supposons que nous ayons un échantillon  $\{y_t, t = 1, \dots, T\}$  de données observées régulièrement. Notons  $k$  la période d'observation. Nous définissons  $\varepsilon_t$  de la façon suivante :

$$\varepsilon_t = \ln \frac{y_t}{y_{t-1}} - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) k \quad (6.13)$$

La log-vraisemblance  $\ell_t$  pour l'observation  $t$  est

$$\ell_t = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2 k) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma^2 k} \quad (6.14)$$

Nous pouvons alors estimer le vecteur des paramètres  $\theta = [ \mu \ \sigma ]^\top$  par maximum de vraisemblance exacte.

Pour étudier la convergence de ces estimateurs, nous menons une analyse de Monte Carlo basée sur 250 réplifications<sup>4</sup>. Les valeurs des paramètres<sup>5</sup> sont  $\mu = 0.2$  et  $\sigma = 0.5$ . Nous initialisons  $x_0$  à 10. Le graphique (6.3) présente les fonctions de densité de  $\hat{\mu}_{\text{ML}}$  et  $\hat{\sigma}_{\text{ML}}$  pour deux tailles d'échantillon  $T = 100$  et  $T = 500$  et différents pas de discrétisation ( $k$  est égal à 0.1, 0.5, 1 et 5). Une observations s'impose : la taille de l'échantillon influence fortement la vitesse de convergence de ces estimateurs. GOURIÉROUX, MONFORT et RENAULT [1993] et GOURIÉROUX et MONFORT [1995b] utilisent une taille d'échantillon relativement petite (150 et 200 observations). Pour une taille d'observation de ce niveau, nous mettons aussi en évidence un faible biais d'estimation. Cela n'est pas le cas lorsque  $T$  est beaucoup plus grand. De façon générale, la valeur de  $k$  n'introduit pas de biais d'estimation mais elle est déterminante pour la vitesse de convergence de l'estimateur  $\hat{\mu}_{\text{ML}}$ . Celle-ci est bien plus rapide lorsque  $k$  est grand. Nous pouvons expliquer ce résultat par le caractère exponentiel du processus<sup>6</sup>.

**Le procesus d'Ornstein-Uhlenbeck.** Considérons l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dx(t) &= a(b - x(t)) dt + \sigma dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (6.15)$$

La solution de (6.15) est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

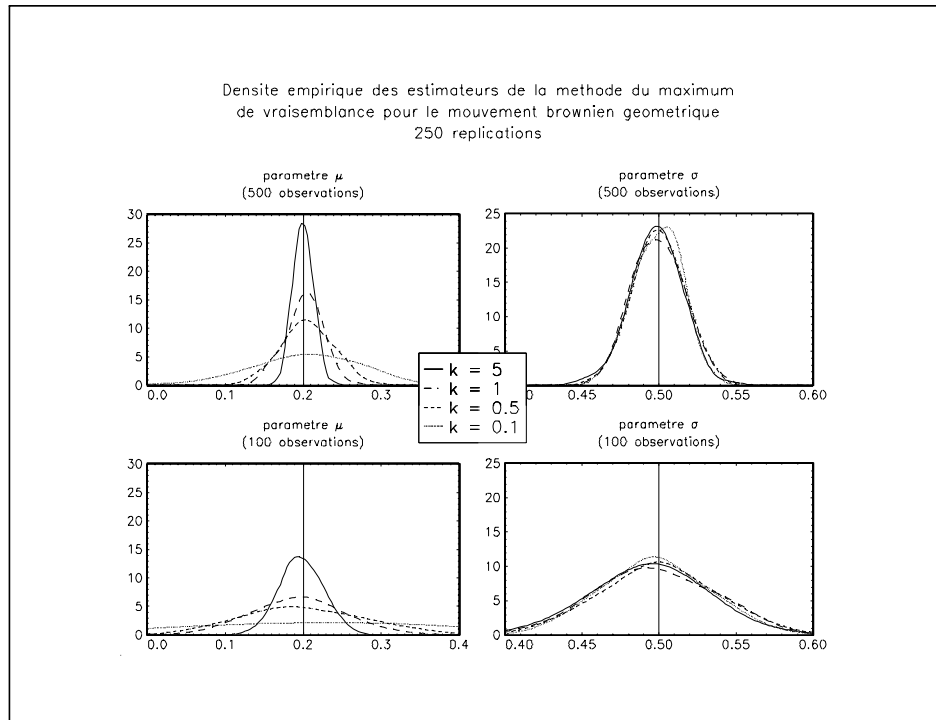
$$x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)} + b(1 - e^{-a(t-t_0)}) + \sigma \int_{t_0}^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) \quad (6.16)$$

---

<sup>4</sup>Nous simulons les trajectoires avec la procédure `simulation_MBG` et nous estimons les paramètres avec la procédure `ml_MBG`.

<sup>5</sup>Nous reprenons les valeurs utilisées par GOURIÉROUX et MONFORT [1995b].

<sup>6</sup>En effet, le caractère non-linéaire de la fonction exponentielle est moins visible lorsque le pas de discrétisation  $k$  croît.



Graphique 6.3

Posons  $s < t$ . Nous avons

$$x(t) - e^{-a(t-s)}x(s) = b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) \quad (6.17)$$

Nous rappelons que  $\int_s^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta)$  est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\left(\frac{1-e^{-2a(t-s)}}{2a}\right)$ . En reprenant les notations précédentes, la log-vraisemblance  $\ell_t$  pour l'observation  $t$  est

$$\ell_t = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln\left(\sigma^2 \left[\frac{1-e^{-2ak}}{2a}\right]\right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma^2 \left[\frac{1-e^{-2ak}}{2a}\right]} \quad (6.18)$$

avec

$$\varepsilon_t = y_t - e^{-ak}y_{t-1} - b(1 - e^{-ak}) \quad (6.19)$$

Nous pouvons alors estimer le vecteur des paramètres  $\theta = [a \ b \ \sigma]^\top$  par maximum de vraisemblance exacte.

Le graphique (6.4) présente les fonctions de densité des estimateurs du maximum de vraisemblance pour  $T = 1000^7$ . Les valeurs des paramètres sont  $a = 0.8$ ,  $b = 0.10$  et  $\sigma = 0.06$  (GOURIÉROUX et MONFORT [1995b]). Comme dans le cas

<sup>7</sup>Nous simulons les trajectoires avec la procédure `simulation_OU` et nous estimons les paramètres avec la procédure `ml_OU`.

du mouvement brownien géométrique, nous observons l'influence de la valeur de  $k$  sur la vitesse de convergence des estimateurs, surtout pour le coefficient  $b$ . Nous remarquons qu'il n'y a pas de relation monotone entre  $k$  et la vitesse de convergence. Par exemple, nous obtenons de très bons résultats pour le paramètre  $\sigma$  avec un pas égal à 0.1 alors que ceux-ci sont mauvais pour la paramètre  $a$ . Le pas d'observation  $k = 5$  offre de très curieux résultats. Nous pouvons les expliquer par l'introduction d'un biais de discrétisation dans le schéma exact de simulation. Celui-ci est basé sur la formule récursive suivante

$$S_{n+1} = e^{-ak} S_n + b (1 - e^{-ak}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2ak}}{2a}} \varepsilon_n \quad (6.20)$$

avec  $\varepsilon_n$  un nombre aléatoire issu de la fonction de densité  $\mathcal{N}(0, 1)$ . En remarquant que  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-ak} = 0$ , le schéma de simulation devient

$$S_{n+1} = b \quad (6.21)$$

Dans ce cas, seul le coefficient  $b$  est identifiable. Si nous considérons une trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour  $k = 0.5$  et qu'à partir de celle-ci, nous construisons la trajectoire correspondant à  $k = 5$  (nous la reportons sur le graphique (6.5)), nous ne percevons plus l'effet de retour à la moyenne. Tout se passe comme si les réalisations étaient distribuées autour de la moyenne  $b$  de façon aléatoire. Les portraits de phase sont d'ailleurs très différents. Nous remarquons que les pics du spectre estimé pour  $k = 0.5$  disparaissent pour  $k = 5$ . Pour des valeurs élevées du pas d'observation, les trajectoires ressemblent donc parfaitement à un bruit blanc.

Les graphiques (6.6) et (6.7) montrent les fonctions de densité lorsque le schéma de simulation n'est pas exact mais une approximation de Taylor<sup>8</sup> d'ordre 0.5 et 1.5. Les résultats que nous obtenons sont décevants. Les biais d'estimation sont importants mais diminuent avec l'ordre du schéma. Nous expliquons ces résultats par le fait que ces algorithmes de simulation ne respectent pas la cohérence entre la trajectoire continue et la trajectoire discrète. Cette remarque est fondamentale pour l'estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique. Nous y reviendrons plus tard.

---

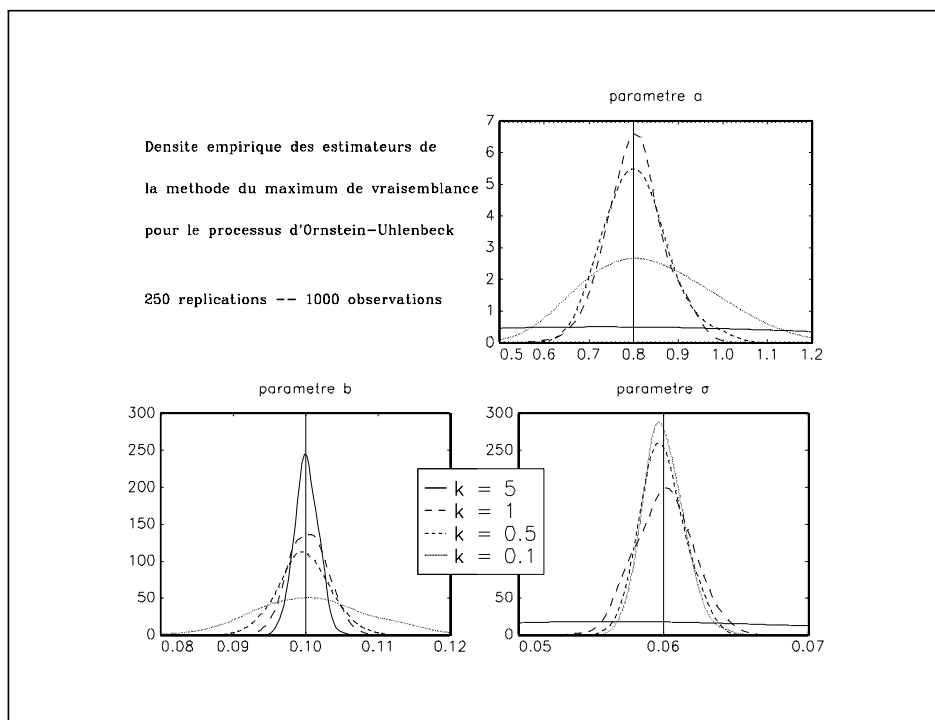
<sup>8</sup>Le schéma de simulation de Taylor à l'ordre 0.5 est

$$S_{n+1} = S_n + a (b - S_n) k + \sigma \sqrt{k} \varepsilon_n \quad (6.22)$$

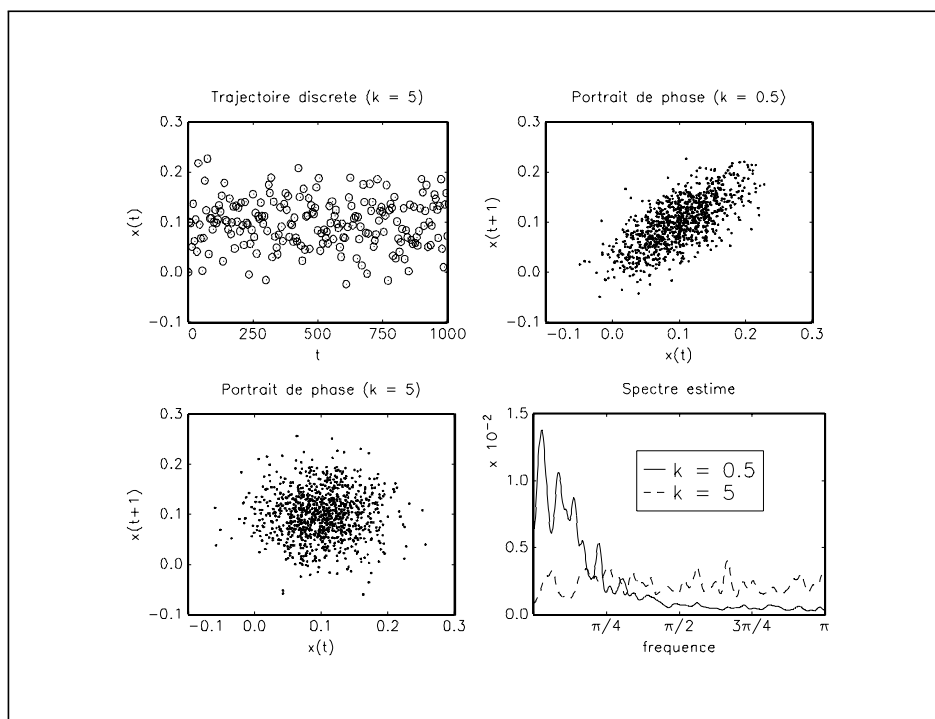
avec  $\varepsilon_n$  un nombre aléatoire de fonction de densité  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Celui à l'ordre 1.5 est défini par

$$S_{n+1} = S_n + a (b - S_n) k + \sigma \varepsilon_n^{(1)} - a \sigma \varepsilon_n^{(2)} - \frac{1}{2} a^2 (b - S_n) k^2 \quad (6.23)$$

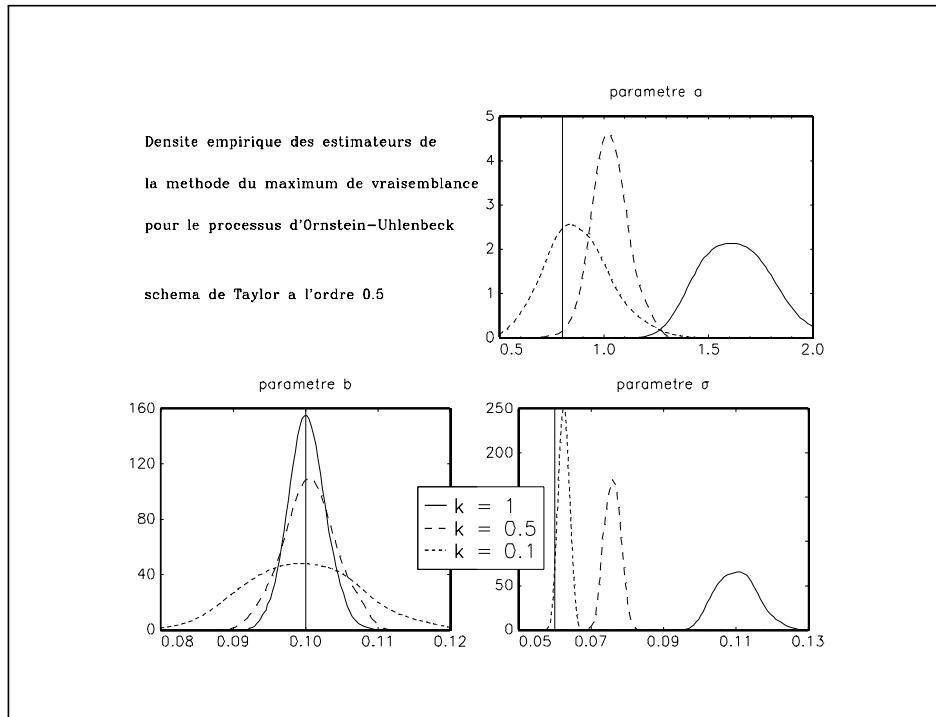
avec  $\left[ \begin{array}{cc} \varepsilon_n^{(1)} & \varepsilon_n^{(2)} \end{array} \right]^\top$  un vecteur aléatoire de fonction de densité  $\mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \left[ \begin{array}{cc} k & \frac{1}{2} k^2 \\ \frac{1}{2} k^2 & \frac{1}{3} k^3 \end{array} \right]\right)$ .



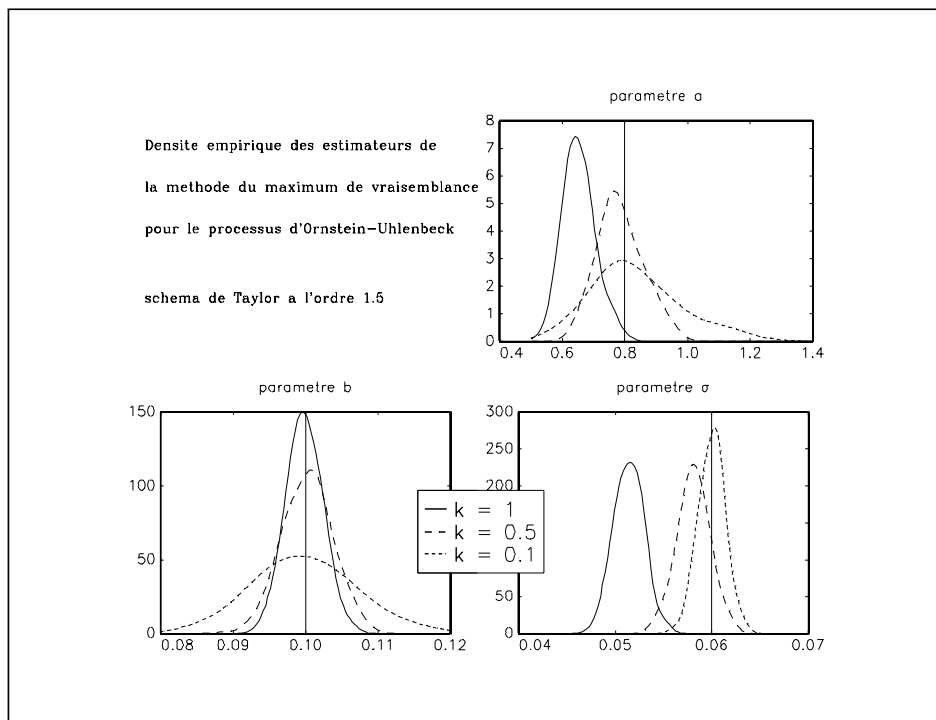
Graphique 6.4



Graphique 6.5



Graphique 6.6



Graphique 6.7

### 6.2.2.2 L'estimateur de la méthode des moments généralisés

Notons  $h_t(\theta)$  le vecteur des moments empiriques centrés pour l'observation  $t$ . Celui-ci vérifie

$$E_t[h_t(\theta)] = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

Pour le mouvement brownien géométrique, nous avons

$$h_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t^2 - \sigma^2 k \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

avec  $\varepsilon_t = \ln \frac{y_t}{y_{t-1}} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) k$ . Le vecteur des moments pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'écrit

$$h_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t^2 - \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2ak}}{2a}\right) \\ \varepsilon_t y_{t-1} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

avec  $\varepsilon_t = y_t - e^{-ak}y_{t-1} - b(1 - e^{-ak})$ . Pour ces deux processus, nous pouvons aisément employer la méthode des moments généralisés car le vecteur des moments est facile à expliciter. Dans certains cas, les propriétés de cet estimateur ne sont pas proches de celui de la méthode du maximum de vraisemblance. Dans le cas du mouvement brownien géométrique et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, les deux estimateurs donnent des résultats similaires. Le graphique (6.8) correspond à la même étude de Monte Carlo que celle reportée sur le graphique (6.4). Il semblerait que dans ce cas-là, l'estimateur GMM soit un peu plus efficace que l'estimateur ML.

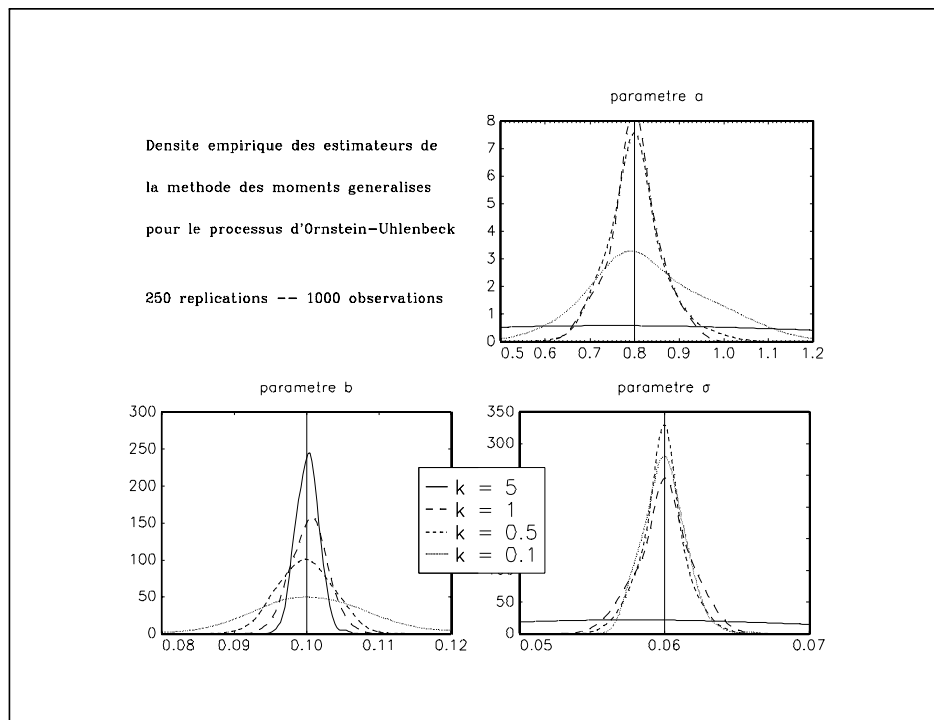
### 6.2.3 Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique

Très souvent, nous ne connaissons pas la solution symbolique de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dx(t) = \mu(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) dW(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Pourtant, sous certaines conditions, l'équation (6.27) admet une solution unique. Dans ce paragraphe, nous cherchons à estimer **directement** les paramètres de l'EDS. Pour ce faire, nous considérons la discrétisation suivante :

$$\begin{cases} y_{t+1} = y_t + \mu(t, y_t) k + \sigma(t, y_t) \sqrt{k} \varepsilon_{t+1} \\ y_1 = x_0 \\ \varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{cases} \quad (6.28)$$



Graphique 6.8

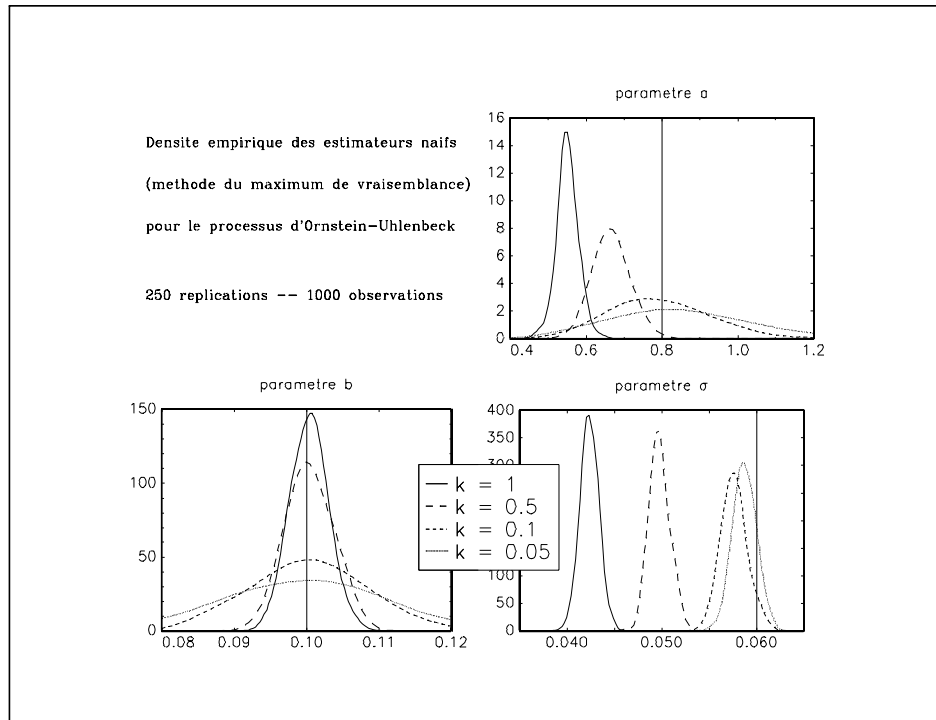
### 6.2.3.1 L'estimateur naïf de la méthode du maximum de vraisemblance

Cette approche a été introduite par BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1993] qui suggèrent d'estimer les paramètres du processus discrétisé associé à celui défini par l'équation différentielle stochastique. Comme la fonction de densité conditionnelle de  $\varepsilon_t$  est normale, la log-vraisemblance pour l'observation  $t$  est donnée par l'expression suivante :

$$\ell_t = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2(t, y_{t-1})k) - \frac{1}{2} \frac{[y_t - y_{t-1} - \mu(t, y_{t-1})k]^2}{\sigma^2(t, y_{t-1})k} \quad (6.29)$$

La procédure `ml_eds` estime les paramètres d'une équation différentielle stochastique en utilisant cette méthode.

Les fonctions de densité de cet estimateur sont représentées sur le graphique (6.9). Afin de ne pas introduire de biais de simulation, toutes les trajectoires sont générées avec  $k = 0.05$  à partir d'un schéma exact. Nous observons dans de nombreux cas la présence d'un biais d'estimation qui peut se révéler très important. Ainsi, pour  $k$  égal à 1 ou 0.5, les résultats sont très mauvais pour les paramètres  $a$  et  $\sigma$ . Nous pouvons expliquer ce biais en considérant un schéma de discrétisation de Taylor



Graphique 6.9

d'ordre plus élevé, par exemple celui d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y_{t+1} = y_t + \mu(t, y_t)k + \sigma(t, y_t)\sqrt{k}\varepsilon_{t+1} + \frac{1}{2}\sigma(t, y_t)\sigma_y(t, y_t)(\varepsilon_{t+1}^2 - k) \\ y_1 = x_0 \\ \varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{cases} \quad (6.30)$$

L'estimation fondée sur le maximum de vraisemblance est incorrecte puisque la fonction de densité conditionnelle de  $y_t$  n'est pas celle donnée par l'expression (6.29). Une étude de Monte Carlo montrerait qu'il n'existe pas de biais d'estimation pour l'EDS

$$\begin{cases} dx(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (6.31)$$

Dans ce cas, nous vérifions bien que l'ordre du schéma n'a pas d'influence sur la discrétisation.

### 6.2.3.2 L'estimateur naïf de la méthode des moments généralisés

L'étude de CHAN, KAROLYI, LONGSTAFF et SANDERS [1992] est la première à proposer un cadre général d'estimation des paramètres de la dynamique du taux d'intérêt instantané. Ces auteurs suggèrent d'utiliser la méthode des moments généralisés. Pour les deux premiers moments, nous avons

$$E_{t-1}[y_t - y_{t-1} - \mu(t, y_{t-1})k] = 0 \quad (6.32)$$



et

$$\text{var}_{t-1} [y_t - y_{t-1} - \mu(t, y_{t-1})k] = \sigma^2(t, y_{t-1})k \quad (6.33)$$

Pour estimer un vecteur de paramètres de dimension supérieure à deux, nous pouvons considérer des conditions d'orthogonalité entre les deux premiers moments centrés et les valeurs retardées de  $y_t$ . Nous avons finalement

$$h_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t^2 - \sigma^2(t, y_{t-1})k \\ \varepsilon_t y_{t-1} \\ (\varepsilon_t^2 - \sigma^2(t, y_{t-1})k) y_{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

avec

$$\varepsilon_t = y_t - y_{t-1} - \mu(t, y_{t-1})k \quad (6.35)$$

Cette méthode est implémentée dans **SPT** et correspond à la procédure `gmm_eds`.

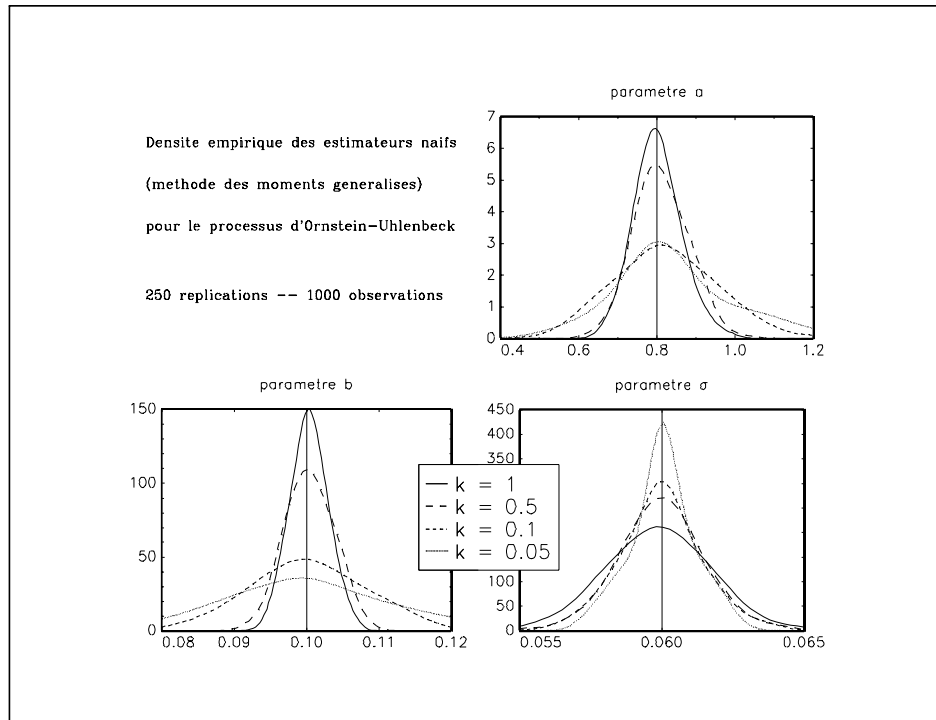
L'étude de Monte Carlo pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck donne des résultats surprenants. Nous obtenons de bien meilleurs résultats (graphique 6.10) que pour l'estimateur du maximum de vraisemblance. Nous pouvons expliquer cette différence de comportement par le fait que la définition des moments reste la même si nous prenons un schéma d'ordre plus élevé alors que la fonction de probabilité conditionnelle change.

### 6.2.3.3 L'estimateur de la méthode de l'inférence indirecte

Dans une série d'articles, Gouriéroux, Monfort et Renault suggèrent l'utilisation de l'inférence indirecte<sup>9</sup> pour estimer les paramètres d'une équation différentielle stochastique. L'idée principale est de remplacer le modèle initial  $\mathcal{M}$  par un modèle  $\mathcal{M}^*$  plus simple à estimer par maximum de vraisemblance. Cependant, cet estimateur n'est en général pas consistant. Soient  $\theta$  le vecteur des paramètres du modèle  $\mathcal{M}$  et  $\theta^*$  le vecteur des paramètres du modèle  $\mathcal{M}^*$ . Le processus issu de  $\mathcal{M}$  pour une valeur de  $\theta$  égale à  $\theta_0$  ne possède pas forcément les mêmes propriétés que celui issu de  $\mathcal{M}^*$  pour une valeur de  $\theta^*$  égale à  $\theta_0$ . Néanmoins, nous pouvons supposer qu'il existe une valeur  $\theta_1$  prise par  $\theta^*$  qui permet d'obtenir un processus équivalent. GOURIÉROUX, MONFORT et RENAULT [1993] proposent alors l'algorithme suivant pour obtenir l'estimateur indirect (EI) :

---

<sup>9</sup>Le champ d'application de cette méthode est vaste et ne se limite pas à l'estimation des processus de diffusion (voir GOURIÉROUX et MONFORT [1995b] ou GOURIÉROUX, MONFORT et RENAULT [1993]).



Graphique 6.10

- Soit  $y$  l'échantillon correspondant au modèle  $\mathcal{M}$ . Nous calculons l'estimateur du maximum de vraisemblance à partir du modèle  $\mathcal{M}^*$

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ell_t^*(y_t; \theta) \quad (6.36)$$

- Nous simulons  $S$  trajectoires du modèle  $\mathcal{M}$  que nous notons  $y^{(s)}$  avec  $s = 1, \dots, S$ .
- Pour chaque trajectoire simulée, nous calculons

$$\hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ell_t^*(y_t^{(s)}; \theta) \quad (6.37)$$

- Nous définissons l'estimateur indirect par l'expression suivante

$$\hat{\theta}_{\text{EI}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \left[ \hat{\theta}_{\text{ML}} - \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)} \right]^\top \Upsilon \left[ \hat{\theta}_{\text{ML}} - \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)} \right] \quad (6.38)$$

avec  $\Upsilon$  est une matrice symétrique définie positive.

Cette méthode correspond à la procédure `ei_eds` de la bibliothèque **SPT**. L'implémentation de cette technique appelle quelques remarques. Pour obtenir l'estimateur indirect, nous optimisons une fonction quadratique définie en fonction des

vecteurs de paramètres  $\hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)}$  qui correspondent à la solution d'un problème de maximisation. C'est pourquoi les temps de calcul paraissent parfois longs. Nous pouvons les réduire en programmant le jacobien analytique pour l'estimation de  $\hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)}$ . Cependant, nous ne pouvons pas implémenter le gradient analytique pour l'estimation de  $\hat{\theta}_{\text{EI}}$ . Nous remarquons que  $\hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)}$  dépend de la trajectoire simulée  $y^{(s)}$ . Afin d'assurer la convergence, nous devons utiliser les mêmes nombres aléatoires pour générer les trajectoires  $y^{(s)}$ .

Nous reprenons l'exemple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Le modèle  $\mathcal{M}^*$  correspond au schéma de discrétisation de Taylor d'ordre 0.5. Supposons que nous obtenons

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.06 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Nous pouvons alors chercher quelles sont les "vraies" valeurs des paramètres correspondant à cette estimation (c'est-à-dire la valeur  $\theta_0$  du modèle  $\mathcal{M}$ ). Nous menons donc une estimation par la méthode de l'inférence indirecte avec  $\Upsilon$  égale à la matrice identité. Le graphique (6.11) représente l'évolution de  $\hat{\theta}_{\text{EI}}$  en fonction du nombre de simulations  $S$  utilisées. La convergence de l'estimateur indirect est très rapide (trois simulations suffisent). Nous remarquons que les valeurs obtenues dépendent du pas d'observation  $k$ . Si  $k$  est petit, alors l'estimateur indirect est très proche de celui basé sur une discrétisation d'Euler-Maruyama. Nous avons par exemple pour  $k = 1$

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 1.579 \\ 0.100 \\ 0.110 \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{\theta}_{\text{ML}} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.06 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

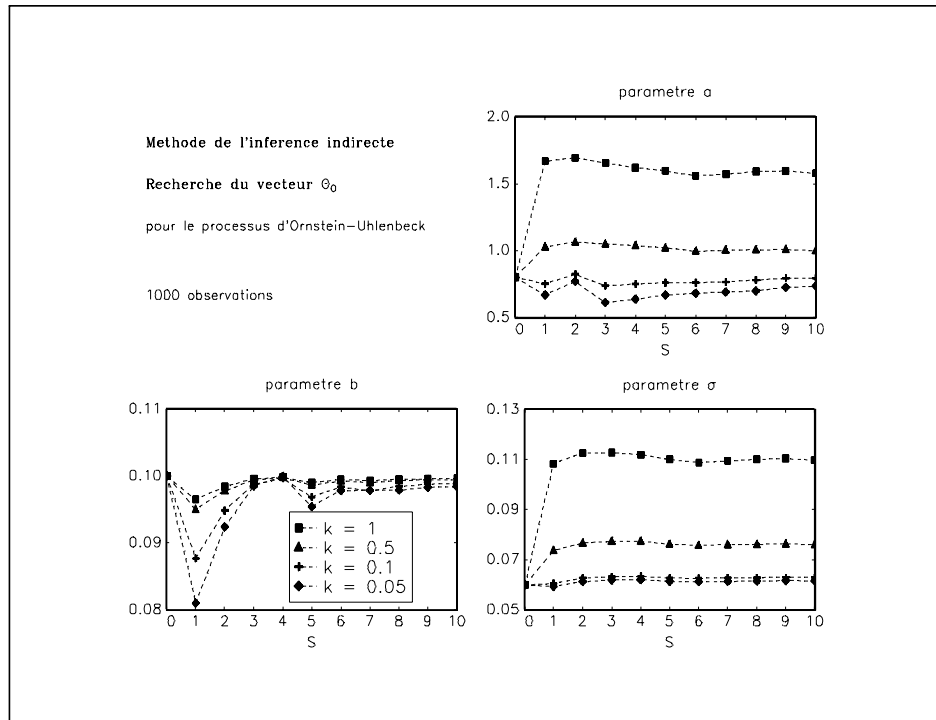
et pour  $k = 0.05$

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 0.735 \\ 0.098 \\ 0.062 \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{\theta}_{\text{ML}} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \\ 0.06 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Plusieurs auteurs ont étudié le comportement de l'estimateur indirect (GOURIÉROUX, MONFORT et RENAULT [1993], BIANCHI, CESARI et PANATTONI [1994] et GOURIÉROUX et MONFORT [1995b]). Dans tous les cas, il est beaucoup plus efficace que les estimateurs naïfs. Parfois, il se révèle même supérieur à l'estimateur exact, par exemple pour les petits échantillons.

La méthode de l'inférence indirecte, dans sa version originale, est cependant difficile à mettre en œuvre. Considérons par exemple l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = a(b - x(t)) dt + \sigma x(t)^{\frac{1}{5}} dW(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (6.42)$$



Graphique 6.11

En utilisant le théorème de Yamada et Watanabe, nous montrons qu'il existe une solution unique. Mais nous ne connaissons pas la forme symbolique du processus de diffusion  $x(t) = f(t, W(t))$ . C'est pourquoi nous devons modifier la procédure d'estimation (BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1995a]) et considérer un modèle  $\mathcal{M}^\bullet$  approximant le modèle originel  $\mathcal{M}$  :

- Soit  $y$  l'échantillon correspondant au modèle  $\mathcal{M}$ . Nous calculons l'estimateur du maximum de vraisemblance à partir du modèle  $\mathcal{M}^\bullet$

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ell_t^*(y_t; \theta) \quad (6.43)$$

- Nous simulons  $S$  trajectoires du modèle  $\mathcal{M}^\bullet$  que nous notons  $y^{(s)}$  avec  $s = 1, \dots, S$ .
- Pour chaque trajectoire simulée, nous calculons

$$\hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ell_t^*(y_t^{(s)}; \theta) \quad (6.44)$$

- Nous définissons l'estimateur indirect par l'expression suivante

$$\hat{\theta}_{\text{EI}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \left[ \hat{\theta}_{\text{ML}} - \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)} \right]^\top \Upsilon \left[ \hat{\theta}_{\text{ML}} - \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{\theta}_{\text{ML}}^{(s)} \right] \quad (6.45)$$

L'utilisation de ce second algorithme requiert de la prudence. En effet, la qualité de l'estimateur indirect est directement liée aux propriétés du modèle  $\mathcal{M}^\bullet$ . Supposons que nos données soient observées avec un pas de mesure égal à 1. Si nous utilisons pour le modèle  $\mathcal{M}^\bullet$  le schéma d'Euler-Maruyama avec un pas de discrétisation égal à 1, l'estimateur EI sera très proche de l'estimateur ML et le biais d'estimation ne sera pas corrigé. Pour obtenir un bon estimateur, les trajectoires simulées à partir de  $\mathcal{M}^\bullet$  doivent **absolument** conserver les propriétés du modèle  $\mathcal{M}$ . Par exemple, nous pouvons utiliser un schéma de Taylor d'ordre 1.5 avec un pas plus petit  $\frac{k}{M}$  que le pas d'observation. Notons  $z^{(s)}$  la trajectoire simulée. Nous générons alors  $y^{(s)}$  en considérant la séquence  $\{z_1^{(s)}, z_{M+1}^{(s)}, z_{2M+1}^{(s)}, \dots\}$ . Le pas d'observation des données simulées  $y^{(s)}$  est bien égal à  $k$  et nous pouvons penser que celles-ci conservent les propriétés du modèle  $\mathcal{M}$ .

## 6.2.4 Extension au cas multidimensionnel

Pour estimer les paramètres d'un processus de diffusion ou d'une équation différentielle dans le cas multidimensionnel, nous employons les mêmes techniques que celles utilisées pour le cas à une seule dimension. Néanmoins, ces méthodes présentent peu d'intérêt pour les modèles de structure par terme à plusieurs facteurs, car les données relatives à certains facteurs sont inobservables.

Considérons par exemple l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 X_1(t) \\ \mu_2 X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 X_1(t) & 0 \\ 0 & \sigma_2 X_2(t) \end{bmatrix} dW(t) \\ X(t_0) = \bar{X}_0 \end{cases} \quad (6.46)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de dimension 2 avec

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Supposons comme précédemment que nous disposons d'un échantillon  $\{(y_{1,t}, y_{2,t}), t = 1, \dots, T\}$  de données observées régulièrement. Nous définissons  $\varepsilon_t$  de la façon suivante :

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln \frac{y_{1,t}}{y_{1,t-1}} - \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) k \\ \ln \frac{y_{2,t}}{y_{2,t-1}} - \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) k \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Posons

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons estimer le vecteur des paramètres  $\theta = [\mu_1 \ \mu_2 \ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \rho_{1,2}]^\top$  par les méthodes du maximum de vraisemblance ou des moments généralisés. Nous

avons

$$\ell_t = -\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\sigma \rho \sigma| - \frac{1}{2} \ln k - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \varepsilon_t^\top}{k} \quad (6.49)$$

et

$$h_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{1,t}^2 - \sigma_1^2 k \\ \varepsilon_{2,t}^2 - \sigma_2^2 k \\ \varepsilon_{1,t} \varepsilon_{2,t} - \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 k \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Reprenons l'EDS générale du cinquième chapitre. Nous avons

$$\begin{cases} dX(t) &= \mu(t, X(t)) dt + \Sigma(t, X(t)) dW(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases} \quad (6.51)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de dimension  $N$  et de matrice de covariance  $\rho t$ .

Nous considérons la discrétisation suivante :

$$\begin{cases} Y_{t+1} &= Y_t + \mu(t, Y_t) k + \Sigma(t, Y_t) \sqrt{k} \varepsilon_{t+1} \\ Y_1 &= X_0 \\ \varepsilon_{t+1} &\sim \mathcal{N}_N(\mathbf{0}, \rho) \end{cases} \quad (6.52)$$

Posons

$$u_t = Y_t - Y_{t-1} - \mu(t, Y_{t-1}) k \quad (6.53)$$

et

$$V_t = \Sigma(t, Y_{t-1}) \rho \Sigma(t, Y_{t-1})^\top \quad (6.54)$$

La log-vraisemblance pour l'observation  $t$  est donnée par l'expression suivante :

$$\ell_t = -\frac{M}{2} \ln(2\pi) - \frac{M}{2} \ln |V_t| - \frac{M}{2} \ln k - \frac{1}{2} \frac{u_t V_t^{-1} u_t^\top}{k} \quad (6.55)$$

### 6.3 Estimation des paramètres des fonctions de prix des obligations à coupon zéro

Dans la section précédente, nous estimons les paramètres des modèles financiers de structure par terme à partir de la dynamique des variables d'état. Dans certains cas, il n'est pas possible de mener cette analyse à cause de l'absence des données pour les variables d'état. Par exemple, le modèle de LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992] nécessite la disponibilité de données pour le taux zéro instantané et sa volatilité locale. Dans l'article, les auteurs testent la validité de leur modèle en utilisant un processus GARCH : même s'il existe des points de passage entre les processus de diffusion et les processus GARCH (NELSON [1990]), la méthodologie employée par Longstaff et Schwartz n'est pas appropriée à la validation du modèle. Ils montrent seulement l'existence d'un effet GARCH<sup>10</sup>. Plusieurs auteurs (BROWN et DY-

<sup>10</sup>voir aussi l'étude de UHRIG [1996].

BVIG [1986], BROWN et SCHAEFER [1994] ou MAJNONI [1995]) suggèrent alors de modéliser l'écart entre les prix observés et les prix théoriques<sup>11</sup>. Considérons la classe  $\mathcal{MF}_{\text{SPT}}$  des modèles financiers en temps continu de structure par terme. Notons  $\theta$  le vecteur des paramètres du  $i$ -ième modèle  $\mathcal{P}_i$ . Si  $\mathcal{P}_i \in \mathcal{MF}_{\text{SPT}}$ , il existe une fonction continue  $P_i$  telle que le prix théorique en  $t_0$  du coupon zéro de maturité  $\tau$  soit donné par l'expression suivante :

$$P_{t_0}^c(\tau) = P_i(t_0, X_0, \tau, \theta) \quad (6.56)$$

avec  $X_0$  la valeur prise par le vecteur des variables d'état à l'instant  $t_0$ . BROWN et DYBVIG [1986] proposent d'estimer le vecteur des paramètres  $\theta$  du  $i$ -ième modèle  $\mathcal{P}_i$  par la méthode du maximum de vraisemblance, alors que MAJNONI [1995] préfère utiliser la méthode des moindres carrés non linéaires. Notons  $p_{t_0}^c(\tau)$  le prix observé en  $t_0$  d'une obligation à coupon zéro de maturité  $\tau$ . Les auteurs supposent implicitement que le mécanisme de génération des données observées est

$$p_{t_0}^c(\tau) = P_i(t_0, X_0, \tau, \theta) + u(t_0, \tau) \quad (6.57)$$

avec  $\varepsilon(t_0, \tau)$  l'erreur entre le prix observé et le prix théorique. Dans de nombreuses études,  $\varepsilon(t_0, \tau)$  correspond à un bruit blanc  $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  qui ne dépend ni de la date courante, ni de la maturité du titre<sup>12</sup>. Supposons que nous disposons de données pour différentes dates  $t_0 \in \mathcal{E}_{t_0}$  et différentes maturités  $\tau \in \mathcal{E}_\tau$ , alors l'estimateur  $\hat{\theta}(\mathcal{E}_{t_0}, \mathcal{E}_\tau)$  des moindres carrés non linéaires correspond à

$$\hat{\theta}(\mathcal{E}_{t_0}, \mathcal{E}_\tau) = \arg \min \sum_{t_0 \in \mathcal{E}_{t_0}} \sum_{\tau \in \mathcal{E}_\tau} (p_{t_0}^c(\tau) - P_i(t_0, X_0, \tau, \theta))^2 \quad (6.58)$$

Une des difficultés de cette méthode est que nous considérons des données de coupe transversale et de coupe temporelle. La multiplicité des combinaisons  $(\mathcal{E}_{t_0}, \mathcal{E}_\tau)$  implique une multitude de choix possibles qui peuvent paraître arbitraires. Par exemple, nous pouvons obtenir des estimateurs  $\hat{\theta}(t_0, \mathcal{E}_\tau)$  et  $\hat{\theta}(\mathcal{E}_{t_0}, \tau)$  pour une date donnée ou une maturité donnée. Dans ce premier cas, les coefficients du modèle ne sont plus constants. C'est un choix qui est souvent fait par les auteurs et qui a amené par exemple DAHLQUIST et SVENSSON [1996] à utiliser le modèle de Longstaff et Schwartz dans une optique de construction de la courbe des taux pour le comparer avec la méthode de Nelson et Siegel.

<sup>11</sup>PEARSON et SUN [1994] proposent une méthodologie différente basée sur la densité conditionnelle des variables d'état inobservables.

<sup>12</sup>Dans ce cas, nous obtenons les mêmes valeurs des paramètres pour les deux méthodes d'estimation.

## 6.4 Quelques résultats empiriques

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats obtenus par les auteurs sur les modèles de courbe des taux. Dans un deuxième paragraphe, nous menons une analyse empirique à partir de la structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996.

### 6.4.1 Un survol des études existantes

Il existe deux approches pour estimer les modèles de structure par terme des taux zéro. La première est fondée sur l'estimation de la dynamique des variables d'état. La seconde considère la modélisation de l'écart entre les prix théoriques et observés des obligations à coupon zéro. Les études basées sur la première approche sont beaucoup plus importantes. En général, elles traitent des modèles à une seule variable d'état : le taux zéro instantané. Considérons la dynamique générale suivante :

$$\begin{cases} dr(t) = (\alpha + \beta r(t)^\eta) dt + (\sigma r(t)^\gamma + \varsigma) dW(t) \\ r(t_0) = r_0 \end{cases} \quad (6.59)$$

De nombreux modèles utilisent un cadre d'analyse qui adopte un processus de ce type. Nous avons

$\mathcal{P}_i$	Processus	Modèle
$\mathcal{P}_1$	$dr(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$	MERTON [1973]
$\mathcal{P}_2$	$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW(t)$	VASICEK [1977]
$\mathcal{P}_3$	$dr(t) = \sigma r(t) dW(t)$	DO THAN [1978]
$\mathcal{P}_4$	$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma r(t) dW(t)$	BRENNAN et SCHWARTZ [1980]
$\mathcal{P}_5$	$dr(t) = \sigma r(t)^{\frac{3}{2}} dW(t)$	CIR [1980]
$\mathcal{P}_6$	$dr(t) = \kappa(\theta - r(t)) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t)$	CIR [1985b]
$\mathcal{P}_7$	$dr(t) = \kappa(\theta - \sqrt{r(t)}) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t)$	LONGSTAFF [1989]
$\mathcal{P}_8$	$dr(t) = (\alpha + \beta r(t)) dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t)$	CKLS [1992]
$\mathcal{P}_9$	$dr(t) = (\alpha + \beta r(t)) dt + (\sigma r(t)^\gamma + \varsigma) dW(t)$	BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1993]
$\mathcal{P}_{10}$	$dr(t) = (\alpha + \beta r(t)^\eta) dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t)$	DE WINNE [1994]
$\mathcal{P}_{11}$	$dr(t) = \mu r(t) dt + \sigma r(t) dW(t)$	Mouvement brownien géométrique
$\mathcal{P}_{12}$	$dr(t) = \mu r(t) dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t)$	Elasticité constante de la diffusion

Il manque le modèle de LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992] qui n'est pas négligeable. L'estimation des paramètres de ces différents modèles revient à estimer les paramètres de l'équation différentielle stochastique (6.59) en imposant certaines restrictions linéaires. Celles-ci sont indiquées dans le tableau suivant<sup>13</sup> :

<sup>13</sup>Le symbole  $\surd$  indique que le paramètre n'est pas contraint et qu'il n'affecte pas la dynamique de  $r(t)$ . C'est donc un paramètre "sans valeur numérique".



Modèle	$\alpha$	$\beta$	$\eta$	$\sigma$	$\gamma$	$\varsigma$
MERTON [1973]		0	✓		0	0
VASICEK [1977]			1		0	0
DO THAN [1978]	0	0	✓		1	0
BRENNAN et SCHWARTZ [1980]			1		1	0
CIR [1980]	0	0	✓		$\frac{3}{2}$	0
CIR [1985b]			1		$\frac{1}{2}$	0
LONGSTAFF [1989]			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	0
CKLS [1992]			1			0
BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1993]			1			
DE WINNE [1994]						0
Mouvement brownien géométrique	0		1		1	0
Elasticité constante de la diffusion	0		1			0

Pour les processus de type “retour à la moyenne”, nous vérifions bien que nous avons

$$a = -\beta \quad \text{ou} \quad \kappa = -\beta \quad (6.60)$$

et

$$b = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (6.61)$$

L'utilisation d'un processus de type (6.59) permet donc d'offrir un cadre d'analyse relativement général qui permet de tester les différentes contraintes, c'est-à-dire de tester la pertinence des différents modèles.

MARSH et ROSENFELD [1983] sont parmi les premiers à considérer une analyse basée sur la méthodologie que nous venons d'exposer. Ils considèrent le processus dont la dynamique est

$$dr(t) = \left( Ar(t)^{-(1-C)} + Br(t) \right) dt + \sigma r(t)^{\frac{C}{2}} dW(t) \quad (6.62)$$

pour les valeurs de  $C$  égales à 0, 1 et 2. Les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $\sigma$  sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance exact. Les auteurs utilisent des données américaines mensuelles (mars 1953 — juin 1981) et hebdomadaires (janvier 1978 — mai 1982). Ils obtiennent les meilleurs résultats pour une valeur de  $C$  égale à 2, c'est-à-dire dans le cas d'un mouvement brownien géométrique.

Les travaux de CHAN, KAROLYI, LONGSTAFF et SANDERS [1992] sont sûrement l'étude la plus connue dans ce domaine de recherche et ils ont inspiré de nombreuses autres études (BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1993], DE WINNE [1994], BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1995], DE WINNE [1995], DAHLQUIST [1996], GRAY [1996]). La principale différence entre ces études est le choix de la méthode d'estimation :

CHAN, KAROLYI, LONGSTAFF et SANDERS [1992]	Moments généralisés
BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1993]	Maximum de vraisemblance
DE WINNE [1994]	Maximum de vraisemblance
BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1995]	Inférence indirecte
DE WINNE [1995]	Inférence indirecte
DAHLQUIST [1996]	Moments généralisés

Nous devons remarquer aussi que les données utilisées sont très différentes les unes des autres. CKLS considèrent les taux zéro de maturité un mois de juin 1964 à décembre 1989. La fréquence d'observation est mensuelle. Les auteurs concluent que les modèles les plus intéressants sont ceux pour lesquels le paramètre  $\gamma$  prend une valeur supérieure à l'unité<sup>14</sup>. Ils obtiennent d'ailleurs une valeur optimale égale à 1.4999 (modèle  $\mathcal{P}_8$ ). BROZE, SCAILLET et ZAKOÏAN [1993] utilisent les taux de rendement des bons du trésor de maturité un mois de janvier 1972 à novembre 1991. Ils obtiennent aussi une valeur de  $\gamma$  très supérieure à l'unité (elle est proche de trois). Dans les travaux de De Winne, les taux étudiés sont les taux interbancaires à un mois pour la Belgique, l'Allemagne, la France, la Grande-Bretagne et les Pays-Bas. L'auteur accorde sa préférence à des processus simples (modèles  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_4$  et  $\mathcal{P}_6$ ). Cependant, nous devons considérer ces résultats avec beaucoup de prudence étant donné que le paramètre  $\gamma$  prend des valeurs très fantaisistes (de  $-0.26$  pour la Grande-Bretagne à  $6.32$  pour la France). Les travaux de DAHLQUIST [1996] confirment en partie les résultats de De Winne, puisqu'il considère que l'effet de retour à la moyenne joue un rôle important dans la dynamique des taux.

Quelques auteurs ont choisi la seconde approche pour vérifier empiriquement la pertinence des modèles théoriques de structure par terme. MARSH [1980] et BROWN et DYBVIG [1986] étudient le modèle de CIR [1985b]. MAJNONI [1995] compare ce modèle avec celui de LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992]. Enfin, DE SEVERAC [1996] considère le modèle de VASICEK [1977]. Il est très difficile de tirer des enseignements de ces études, car les auteurs utilisent des combinaisons différentes  $(\mathcal{E}_{t_0}, \mathcal{E}_\tau)$ . En général, lorsque les estimations sont menées pour chacune des dates courantes, le "meilleur" modèle s'avère celui qui possède le plus de paramètres.

#### 6.4.2 Analyse empirique à partir de la structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996

Dans ce paragraphe, nous menons une estimation de la dynamique du taux court français pour la période du 10/02/1994 au 30/08/1996 basée sur la méthode naïve

<sup>14</sup>NOWMAN [1997] trouve un résultat similaire en utilisant une méthode de maximum de vraisemblance "exacte".

du maximum de vraisemblance. Nous choisissons le modèle  $\mathcal{P}_{10}$  pour spécifier la dynamique générale. Nous avons

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t)^\eta) dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t) \quad (6.63)$$

Nous pouvons formuler deux critiques principales aux études que nous venons de citer. La première concerne le choix des données. Dans l'équation (6.63),  $r(t)$  représente le taux zéro instantané. Cependant, ces études utilisent des taux d'intérêt de maturité un mois et qui dans certains cas ne sont pas des taux zéro. La méthodologie de Nelson et Siegel permet d'obtenir ces taux zéro instantanés. Notre étude utilise ces données que nous avons construites dans le premier chapitre. La seconde critique porte sur la valeur de  $k$ , le pas d'observation. En effet, les auteurs posent généralement  $k$  égal à 1 quelle que soit la fréquence d'observation (journalière, hebdomadaire ou mensuelle). Cela implique que l'unité de temps est la journée, la semaine ou le mois. Or l'unité de temps des modèles financiers est **une année**. Il aurait donc fallu que  $k$  soit égal respectivement à  $\frac{1}{365}$ ,  $\frac{7}{365}$  ou  $\frac{1}{12}$ . Cette valeur erronée du pas d'observation a de graves conséquences si nous utilisons les valeurs estimées pour valoriser les obligations à coupon zéro. La discrétisation naïve de l'équation différentielle stochastique (6.63) est

$$\begin{cases} y_{t+1} &= y_t + (\alpha + \beta y_t^\eta) k + \sigma r(t)^\gamma \sqrt{k} \varepsilon_{t+1} \\ y_1 &= r_0 \\ \varepsilon_{t+1} &\sim \mathcal{N}(0, 1) \end{cases} \quad (6.64)$$

Notons  $k'$  la valeur erronée du pas de discrétisation. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}'_{\text{ML}} &= \hat{\alpha}_{\text{ML}} \frac{k}{k'} \\ \hat{\beta}'_{\text{ML}} &= \hat{\beta}_{\text{ML}} \frac{k}{k'} \\ \hat{\eta}'_{\text{ML}} &= \hat{\eta}_{\text{ML}} \\ \hat{\sigma}'_{\text{ML}} &= \hat{\sigma}_{\text{ML}} \sqrt{\frac{k}{k'}} \\ \hat{\gamma}'_{\text{ML}} &= \hat{\gamma}_{\text{ML}} \end{aligned} \quad (6.65)$$

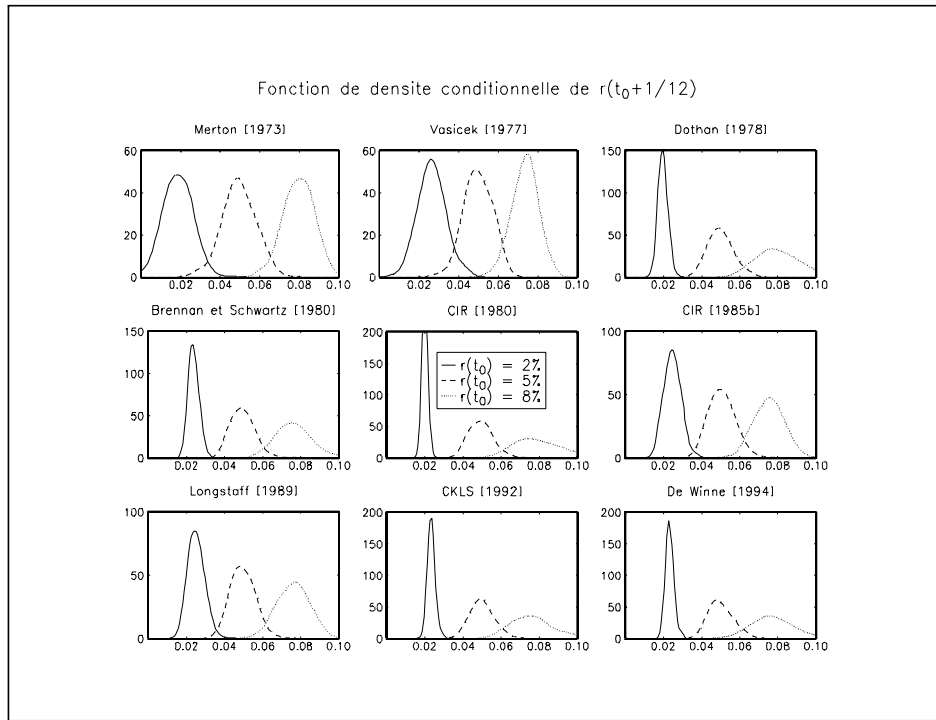
Le fait d'utiliser une valeur erronée pour  $k$  implique que nous ne pouvons pas employer les valeurs des estimations pour le *pricing*. De plus, il n'est pas possible de comparer des études basées sur des données avec des fréquences différentes d'observation. Dans notre étude, nous posons  $k$  égal à  $\frac{1}{365}$ . Afin de respecter la régularité temporelle, les données manquantes sont remplacées par les valeurs données par l'interpolation spline cubique.

Les résultats sont reportés dans le tableau suivant. Nous remarquons pour le modèle non contraint  $\mathcal{P}_{10}$ , la valeur de  $\hat{\eta}_{ML}$  est très proche de l'unité, ce qui explique que les résultats pour le modèle  $\mathcal{P}_8$  sont proches de ceux de  $\mathcal{P}_{10}$ . Il semble donc que le processus introduit par De Winne ne soit pas pertinent et que la spécification de CHAN, KAROLYI, LONGSTAFF et SANDERS [1992] soit suffisante. Lorsque le paramètre  $\gamma$  est libre, nous obtenons une valeur significative supérieure à l'unité. En ce qui concerne les paramètres de la fonction de déplacement du processus, nous obtenons des estimations qui ne sont pas significatives, à l'exception du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Cela est assez curieux, puisque les valeurs indiquent clairement une force de rappel importante, supérieure à l'unité.

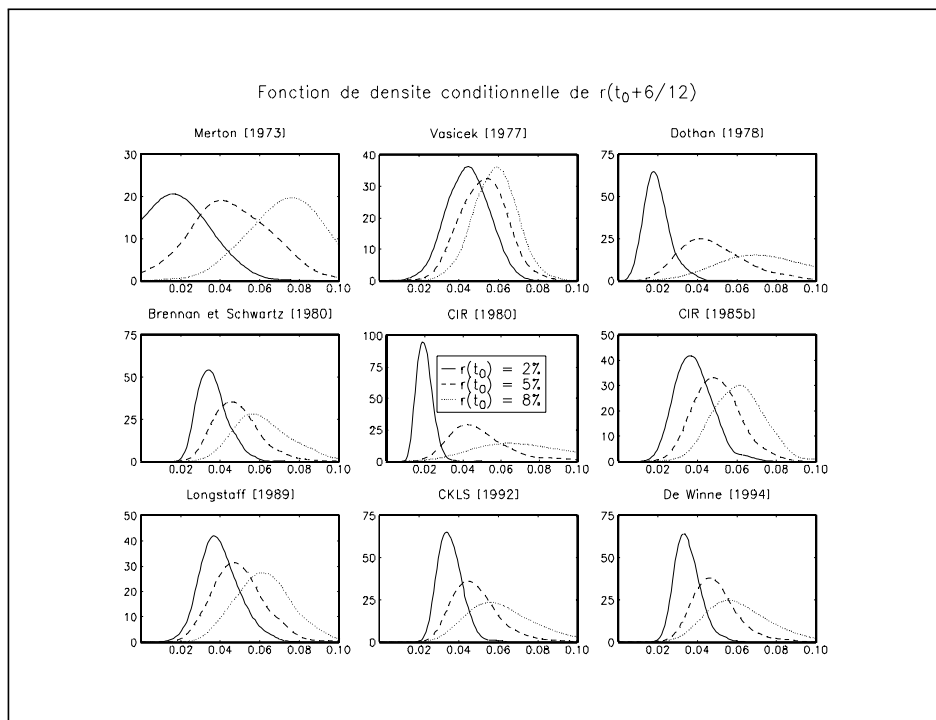
$\mathcal{P}_i$	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\eta}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\gamma}_{ML}$
$\mathcal{P}_1$	-0.01066	0	✓	0.02671 <sup>(*)</sup>	0
$\mathcal{P}_2$	0.1493	-2.902 <sup>(***)</sup>	1	0.02667 <sup>(*)</sup>	0
$\mathcal{P}_3$	0	0	✓	0.4546 <sup>(*)</sup>	1
$\mathcal{P}_4$	0.08189	-1.663	1	0.4542 <sup>(*)</sup>	1
$\mathcal{P}_5$	0	0	✓	1.947 <sup>(*)</sup>	$\frac{3}{2}$
$\mathcal{P}_6$	0.1060	-2.116	1	0.1089 <sup>(*)</sup>	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{P}_7$	0.1964	-0.8846	$\frac{1}{2}$	0.1089 <sup>(*)</sup>	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{P}_8$	0.07523	-1.532	1	1.123 <sup>(*)</sup>	1.312 <sup>(*)</sup>
$\mathcal{P}_{10}$	0.07239	-1.533	1.013 <sup>(*)</sup>	1.123	1.312 <sup>(*)</sup>
$\mathcal{P}_{11}$	0	-0.1194	1	0.4545 <sup>(*)</sup>	1
$\mathcal{P}_{12}$	0	-0.0771	1	1.121 <sup>(*)</sup>	1.312 <sup>(*)</sup>

Pour appréhender la pertinence de chacun des processus, nous menons un test paramétrique de bonne spécification. Nous utilisons les trois tests classiques que sont le rapport de vraisemblance, le multiplicateur de Lagrange<sup>15</sup> et le principe de Wald.

$\mathcal{P}_i$	Rapport de vraisemblance	Multiplicateur de Lagrange	Principe de Wald
$\mathcal{P}_1$	168.11	48.47	137.26
$\mathcal{P}_2$	165.00	58.89	135.67
$\mathcal{P}_3$	11.99	3.16 <sup>(●●●)</sup>	13.97
$\mathcal{P}_4$	10.50	2.92 <sup>(●●●)</sup>	8.02 <sup>(●)</sup>
$\mathcal{P}_5$	5.36 <sup>(●●●)</sup>	1.69 <sup>(●●●)</sup>	11.58
$\mathcal{P}_6$	67.14	21.16	52.41
$\mathcal{P}_7$	67.43	20.41	109.56
$\mathcal{P}_8$	0.00 <sup>(●●●)</sup>	0.19 <sup>(●●●)</sup>	0.00 <sup>(●●●)</sup>
$\mathcal{P}_{11}$	11.81	3.14 <sup>(●●●)</sup>	8.14 <sup>(●)</sup>
$\mathcal{P}_{12}$	1.27 <sup>(●●●)</sup>	1.13 <sup>(●●●)</sup>	2.38 <sup>(●●●)</sup>



Graphique 6.12



Graphique 6.13

L'hypothèse nulle n'est généralement pas rejetée lorsque la valeur du paramètre  $\gamma$  est supérieure à un. Ces tests opèrent donc une hiérarchisation des modèles, non pas sur la base de l'effet de retour à la moyenne, mais sur la base de l'effet de volatilité. Ainsi, le processus de CIR [1980] semble bien spécifié, alors que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ne l'est pas. Nous confirmons donc les résultats obtenus par CHAN, KAROLYI, LONGSTAFF et SANDERS [1992].

Le choix de spécification est important car celle-ci influence la valeur de l'obligation à coupon zéro. Les graphiques (6.12) et (6.13) représentent les fonctions de densité conditionnelle de  $r(t_0 + \tau) | r(t_0) = r_0$  pour trois différentes valeurs de  $r_0$  et  $\tau$ . Pour un horizon à un mois, nous observons des différences importantes liées à l'effet de volatilité surtout pour les taux faibles<sup>16</sup>. Pour l'horizon six mois, nous remarquons que l'effet de retour à la moyenne joue un rôle beaucoup plus important. Il suffit par exemple de comparer les processus  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ . Le graphique (6.14) indique les valeurs d'attraction pour les différents processus. Celles-ci sont proches les unes des autres. Les dynamiques des processus de type retour à la moyenne vont donc dépendre très fortement de la force de rappel et non de la valeur d'attraction.

Cependant, nous devons être prudents avant de tirer des conclusions définitives sur la meilleure spécification de la dynamique du taux zéro instantané. Les valeurs estimées dépendent de la période considérée. Une analyse empirique sur une autre période donnerait peut-être d'autres résultats car il n'est pas réaliste de considérer que les valeurs des coefficients ne changent pas au cours du temps. Sur le graphique (6.16), nous représentons l'évolution des coefficients  $\kappa$ ,  $\theta$  et  $\sigma$ . Ceux-ci sont estimés en considérant pour chaque date un échantillon<sup>17</sup> de taille égale à 401 observations. Nous observons que les valeurs varient fortement. Les coefficients ne sont donc pas stables au cours du temps.

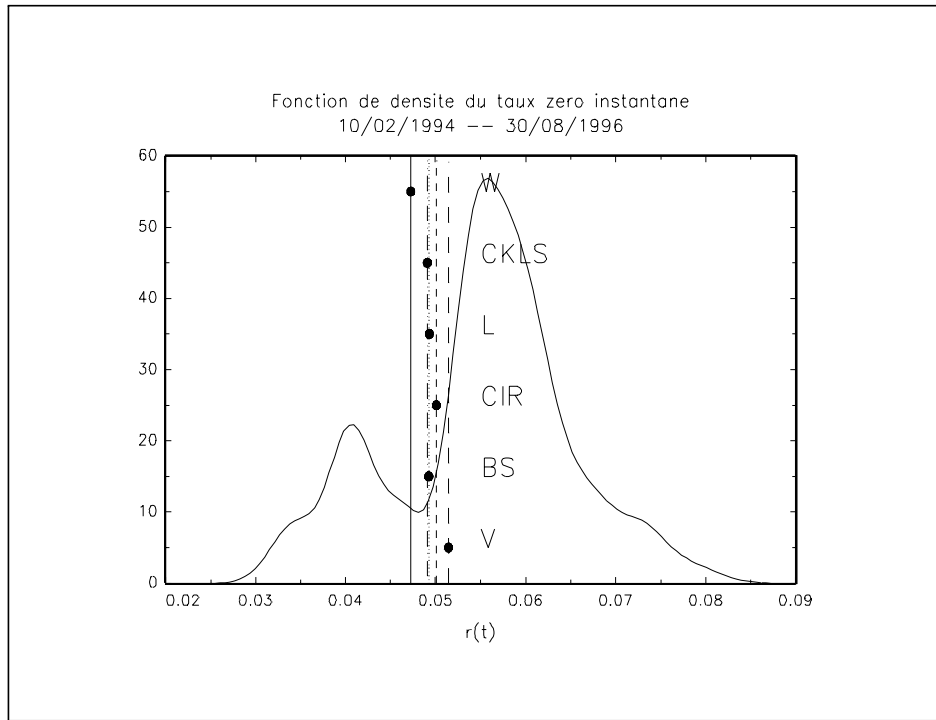
## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes d'estimation des modèles de structure par terme. Nous menons aussi une analyse empirique pour la France pour la période allant du 10/02/1994 au 30/08/1996. Cette étude n'a pas la prétention d'être exhaustive. Le domaine de recherche sur l'estimation des modèles de courbe des taux

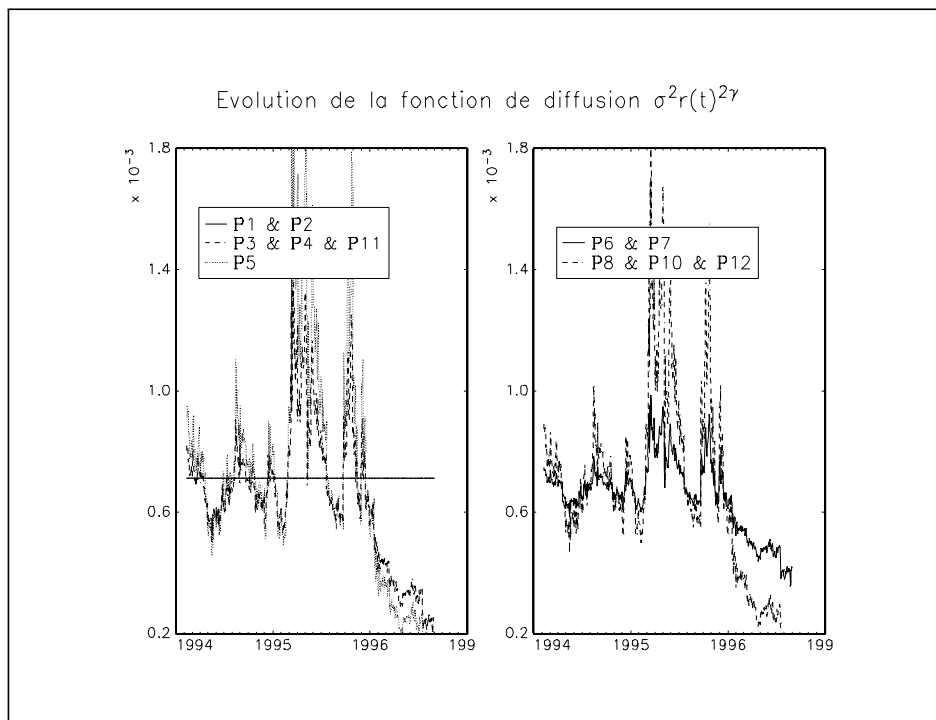
<sup>15</sup>Il existe plusieurs formes de statistiques associées au test LM. Dans cette étude, nous considérons la statistique obtenue avec une régression artificielle OPG (DAVIDSON et MACKINNON [1990]).

<sup>16</sup>Les fonctions de diffusion sont représentées sur le graphique (6.15).

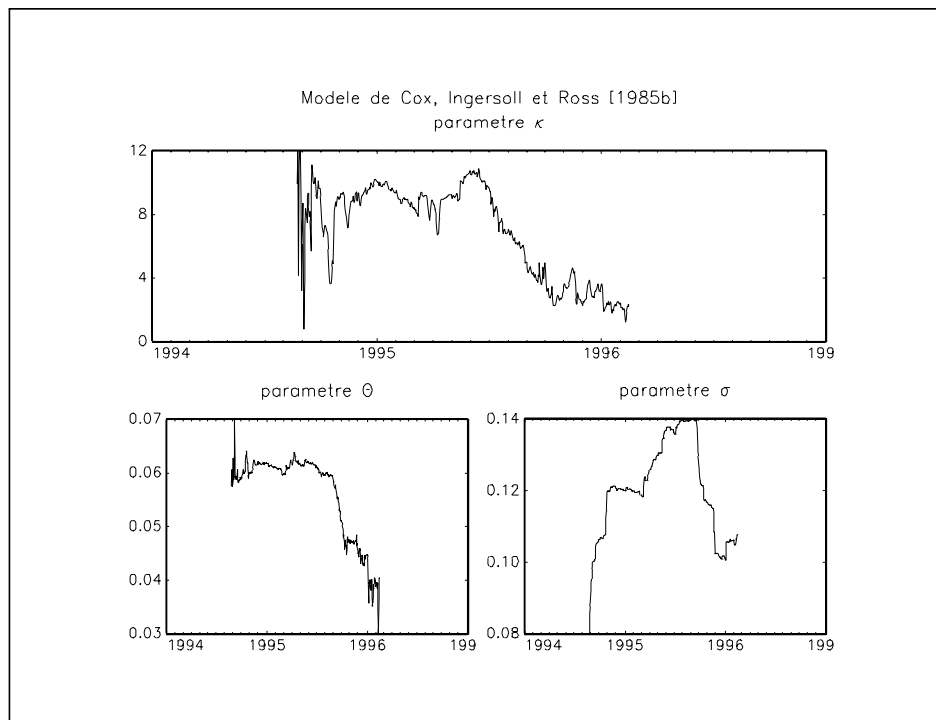
<sup>17</sup>L'échantillon est centré autour de la date. Nous prenons donc les 200 observations précédentes et les 200 observations suivantes pour estimer les paramètres.



Graphique 6.14



Graphique 6.15



Graphique 6.16

est jeune. Il faudra attendre encore de nombreuses autres études (qui devront aussi concerner les modèles à plusieurs variables d'état) pour en tirer des enseignements. Il faudra surtout que les techniques économétriques se "démocratisent" pour que les praticiens de la Finance utilisent plus fréquemment les modèles de structure par terme.



# Chapitre 7

## Structures par terme théorique et observée : Quelques exemples de valorisation et de gestion des actifs financiers

### 7.1 Introduction

Ce dernier chapitre concerne quelques utilisations possibles de la structure par terme pour la valorisation des actifs financiers. Par exemple, nous pouvons utiliser la structure par terme des obligations à coupon zéro comme une fonction d'actualisation pour la valorisation des obligations ou des options. Cependant, l'utilisation la plus importante de la structure par terme est la valorisation des actifs contingents au taux d'intérêt. Deux approches sont alors possibles. La première combine les modèles théoriques et économétriques. La seconde est celle des modèles de déformation de la courbe des taux. Dans les différents exemples que nous présentons, la dichotomie entre la structure par terme observée et la structure par terme théorique est beaucoup moins forte, puisque les modèles théoriques utilisent l'information présente dans la courbe des taux observée pour valoriser les actifs.

### 7.2 Utilisation des fonctions d'actualisation implicites pour la valorisation des actifs financiers

Dans ce paragraphe, nous interprétons la structure par terme des obligations à coupon zéro comme une simple fonction d'actualisation. On peut alors utiliser les facteurs d'actualisation calculés pour la valorisation des obligations et des options.

## 7.2.1 Les obligations

Considérons une obligation dont les caractéristiques sont  $\{(c_j, \tau_j), j = 1, \dots, J\}$ . En avenir certain avec un taux d'intérêt instantané constant  $r$ , le prix de cette obligation est donné par la formule d'actualisation classique :

$$P_{t_0} = \sum_{j=1}^J c_j \exp(-r\tau_j) \quad (7.1)$$

Le facteur d'actualisation  $\exp(-r\tau)$  peut être vu comme le prix d'une obligation à coupon zéro de maturité  $\tau$ . La formule (7.1) est donc équivalente à

$$P_{t_0} = \sum_{j=1}^J c_j P_{t_0}^c(\tau) \quad (7.2)$$

La valeur (7.1) de l'obligation correspond donc au cas où la courbe des taux est plate. Ce cas de figure n'est pas réaliste. Il est préférable d'utiliser l'information contenue dans la structure par terme observée pour valoriser l'obligation ou d'employer un modèle théorique pour calculer ces facteurs d'actualisation.

Considérons un exemple. Soit une obligation dont les caractéristiques sont

Coupon	Valeur	Maturité
1 <sup>er</sup> coupon	100 francs	1 an
2 <sup>ème</sup> coupon	100 francs	2 ans
3 <sup>ème</sup> coupon	100 francs	3 ans
4 <sup>ème</sup> coupon	500 francs	4 ans

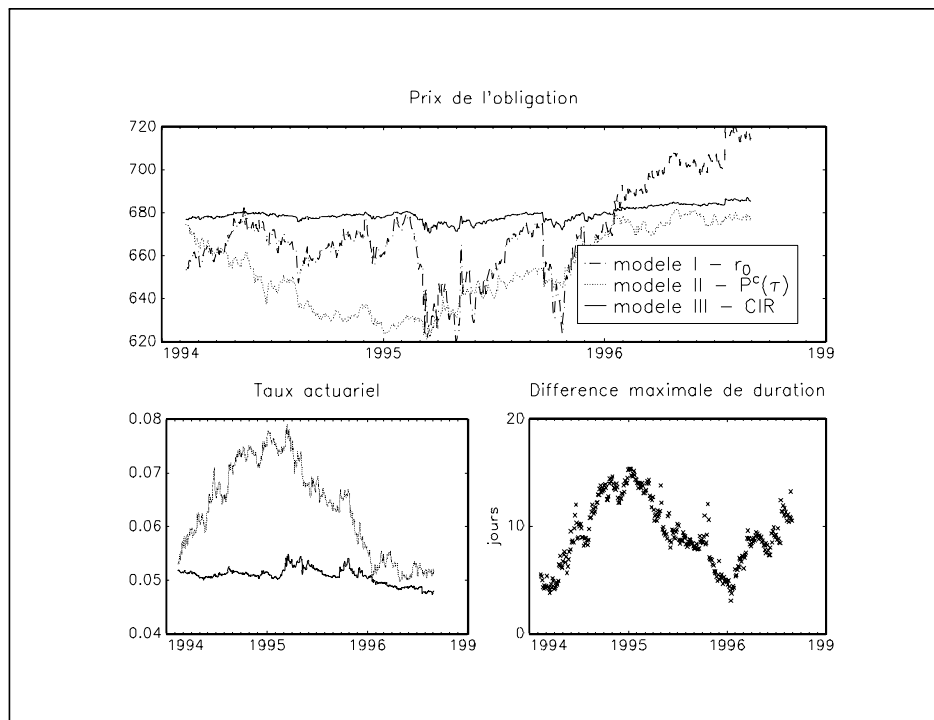
Sur le graphique (7.1), nous reportons le prix de cette obligation calculée de trois façons différentes : fonctions d'actualisation avec le taux d'intérêt constant égal au taux zéro instantané, fonctions d'actualisation déduites des courbes de taux construites dans le premier chapitre à partir du modèle de Nelson et Siegel, et fonctions d'actualisation données par le modèle de Cox, Ingersoll et Ross<sup>1</sup>. Nous voyons que le choix de la méthode a des conséquences importantes sur le prix de l'obligation. Nous obtenons aussi des taux actuariels très différents<sup>2</sup>.

L'information donnée par la structure par terme est utile non seulement pour la valorisation mais aussi pour la gestion. Sur le graphique (7.1), nous indiquons les différences maximales de duration entre les trois méthodes. Si ces écarts sont importants, ils peuvent avoir des conséquences importantes dans une optique de couverture.

---

<sup>1</sup>Les valeurs des paramètres sont celles obtenues dans le chapitre précédent et le prix du risque est égal à zéro.

<sup>2</sup>Nous n'avons pas reporté le taux actuariel de l'obligation pour la première méthode, puisqu'il est égal au taux zéro instantané.



Graphique 7.1

## 7.2.2 Les options

Considérons une option européenne de maturité  $\tau$  sur un actif ne distribuant pas de dividendes. Nous notons  $K$  le prix d'exercice et  $S_0$  la valeur actuelle du sous-jacent. Le prix de l'option d'achat est alors donné par la célèbre formule de Black et Scholes [1973] :

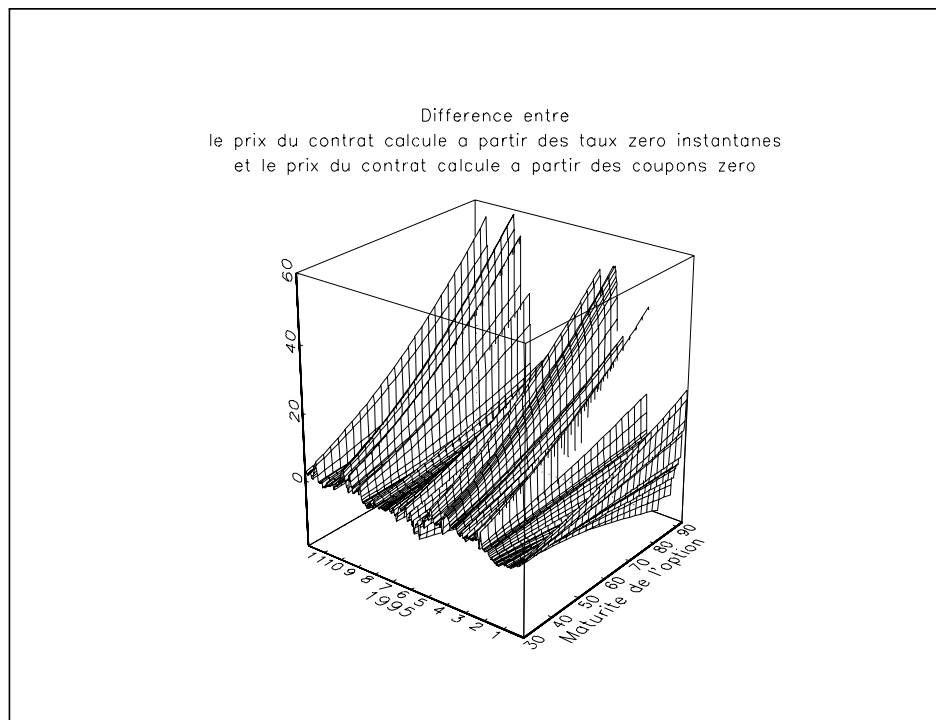
$$C(t_0) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2) \quad (7.3)$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$r$  est la valeur du taux instantané et  $\sigma$  le paramètre de volatilité du sous-jacent. Dans ce modèle, Black et Scholes émettent l'hypothèse que le taux d'intérêt instantané est constant, donc que la structure par terme est plate. En considérant une autre expression de  $d_1$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_0}{K e^{-r\tau}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \quad (7.5)$$



Graphique 7.2

nous en déduisons une nouvelle écriture du prix de l'option d'achat. Nous avons

$$C(t_0) = S_0 \Phi(d_1) - K P_{t_0}^c(\tau) \Phi(d_2) \quad (7.6)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{S_0}{K P_{t_0}^c(\tau)} \right) + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\tau} \quad (7.7)$$

Dans le cas des options sur future et des options de change, nous avons

Modèle de BLACK [1976]	Modèle de GARMAN et KOHLHAGEN [1983]
$C(t_0) = F_0 P_{t_0}^c(\tau) \Phi(d_1) - K P_{t_0}^c(\tau) \Phi(d_2)$	$C(t_0) = S_0 P_{t_0}^{c^*}(\tau) \Phi(d_1) - K P_{t_0}^c(\tau) \Phi(d_2)$
$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{F_0}{K} \right) + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\tau}$	$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{S_0 P_{t_0}^{c^*}(\tau)}{K P_{t_0}^c(\tau)} \right) + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\tau}$
$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$	$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$

$F_0$  est la valeur actuelle du future dans le modèle de Black et  $S_0$  est le cours de change dans le modèle de Garman et Kohlhagen.  $P_{t_0}^{c^*}(\tau)$  est le facteur d'actualisation pour le pays étranger.

Voyons un exemple. Considérons un contrat d'option de change DEM/FRF d'achat pour un montant égal à 60000 francs. L'option est exercée si le cours de change à la maturité de l'option est supérieur à 3,40 FRF/DEM. Nous utilisons une

volatilité historique de 9% par an. Le graphique (7.2) montre la différence entre le prix du contrat calculé à partir des taux zéro instantanés et celui calculé à partir des prix des coupons zéro pour l'année 1995 et pour différentes maturités. Nous remarquons que cette différence peut être importante pour des options de change longues<sup>3</sup>.

La prise en compte d'un modèle théorique de structure par terme pour la valorisation des options est beaucoup plus délicate que dans le cas des obligations<sup>4</sup>. Considérons le modèle de Black et Scholes. La dynamique du sous-jacent  $S(t)$  est un mouvement brownien géométrique. Nous avons

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW_1(t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Supposons que le taux instantané ne soit plus constant et satisfasse l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dr(t) = \mu(t, r(t)) dt + \sigma(t, r(t)) dW_2(t) \\ r(t_0) = r_0 \end{cases} \quad (7.9)$$

La valeur de l'option d'achat est donnée par le théorème présenté en annexe

$$C(t_0) = E' \left[ (S(T) - K)_+ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (7.10)$$

Il n'est pas possible de revenir comme pour les obligations, à un problème simple, car la valeur du payoff à la maturité n'est pas indépendante de la trajectoire du taux d'intérêt :

$$\begin{aligned} C(t_0) &\neq E' [(S(T) - K)_+ | \mathcal{F}_{t_0}] \times E' \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \\ &\neq P_{t_0}^c(\tau) E' [(S(T) - K)_+ | \mathcal{F}_{t_0}] \end{aligned} \quad (7.11)$$

En effet, l'équation de valorisation<sup>5</sup> est

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 P_{S,S} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r) P_{r,r} \\ &+ [\mu S - \lambda_1(t) \sigma S] P_S + [\mu(t, r) - \lambda_2(t) \sigma(t, r)] P_r + P_t - rP + b(t, r) = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

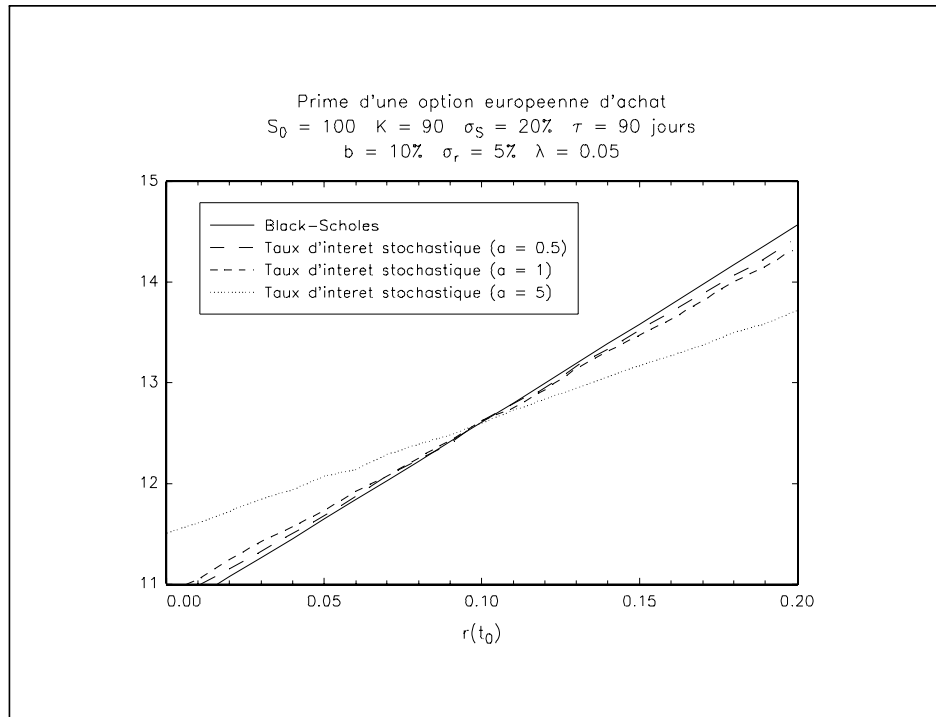
Si nous appliquons cette équation au sous-jacent lui-même, nous obtenons

$$\lambda_1(t) = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (7.13)$$

<sup>3</sup>Dans cet exemple, elle peut atteindre 10%.

<sup>4</sup>voir par exemple AMIN et JARROW [1991].

<sup>5</sup>Nous supposons que les deux sources de risque ne sont pas corrélées.



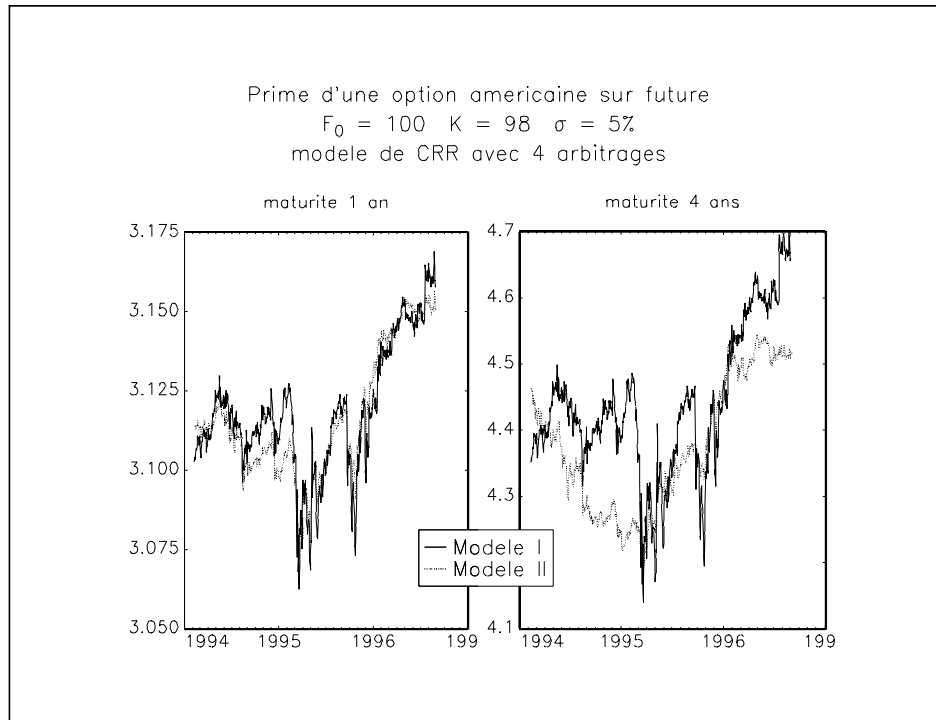
Graphique 7.3

Sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ , la dynamique des variables d'état est alors

$$\begin{bmatrix} dS(t) \\ dr(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t) S(t) \\ \mu(t, r(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma S(t) & 0 \\ 0 & \sigma(t, r(t)) \end{bmatrix} dW(t) \quad (7.14)$$

La dynamique du sous-jacent dépend donc du taux d'intérêt. C'est pourquoi, mis à part quelques travaux (voir par exemple MERTON [1973]), il est difficile de trouver une solution analytique. Dans de nombreux modèles d'option avec un taux d'intérêt stochastique, il est nécessaire de recourir aux méthodes numériques pour la valorisation. Le graphique (7.3) montre l'évolution de la prime d'une option européenne d'achat pour différentes valeurs du taux instantané  $r(t_0)$ . Nous considérons deux types de modèles. Le premier correspond à celui de Black et Scholes. Dans le second modèle, le taux d'intérêt est stochastique et sa dynamique est celle donnée par le modèle de Vasicek.

Le cas des options américaines est plus difficile à traiter. Il est impossible, par exemple, d'incorporer un taux d'intérêt stochastique dans la méthode de BARONE-ADESI et WHALEY [1987] et l'utilisation des différences finies n'est pas facile à implémenter. Seules les méthodes de type GESKE et JOHNSON [1984] permettent de valoriser assez simplement les options américaines dans un modèle continu (HO, STAPLETON et SUBRAHMANYAM [1997]). Il est aussi possible de les valoriser dans un



Graphique 7.4

cadre de modèle binomial de type COX, ROSS et RUBINSTEIN [1979] en considérant les fonctions implicites d'actualisation  $F_{t_0}(t_1, t_2)$  à l'instant  $t_0$  pour la période  $[t_1, t_2]$  déduites des obligations à coupon zéro

$$F_{t_0}(t_1, t_2) = \frac{P_{t_0}^c(t_2 - t_0)}{P_{t_0}^c(t_1 - t_0)} \quad (7.15)$$

A titre illustratif, le graphique (7.4) montre les valeurs des primes d'une option américaine d'achat sur future calculées à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein avec le taux d'intérêt égal au taux zéro instantané (modèle I) et à partir du modèle prenant en compte la structure par terme observée (modèle II).

### 7.2.3 Les options sur obligation

Notons  $C(t)$  le prix d'achat d'une option européenne de prix d'exercice  $K$  sur une obligation à coupon zéro. Soient  $T$  et  $T_C$  les dates d'échéance du coupon zéro et de l'option. Dans le cas d'un modèle d'arbitrage à un seul facteur, nous avons alors

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2(t, x) C_{xx} + [\mu(t, x) - \lambda(t) \sigma(t, x)] C_x + C_t - r(t, x) C = 0 \\ C(T_C) = (P_{T_C}^c(T - T_C) - K)_+ \end{cases} \quad (7.16)$$

Si nous appliquons le théorème 25, nous obtenons

$$C(t_0) = E' \left[ (P_{T_C}^c(T - T_C) - K)_+ \exp \left( - \int_{t_0}^{T_C} r(t, x(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (7.17)$$

Cependant, il est difficile d'obtenir une solution analytique pour l'équation (7.17). Considérons un exemple. Supposons que le taux d'intérêt est gaussien sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ . Dans ce cas, le prix du coupon zéro est log-normal. Nous devons alors calculer l'espérance mathématique d'un produit de variables aléatoires log-normales. La résolution numérique de l'équation (7.16) est complexe puisqu'elle nécessite dans un premier temps d'appliquer la méthode des différences finies à l'équation de valorisation de l'obligation à coupon zéro puis, dans un second temps, d'utiliser ces solutions numériques pour résoudre numériquement l'équation de valorisation de l'option sur coupon zéro (BALL et TORUS [1983] et BRENNAN et SCHWARTZ [1983]).

La difficulté pour la valorisation des actifs dérivés sur taux d'intérêt vient du fait que le payoff dépend de l'état de la nature du taux d'intérêt. Si nous utilisons la mesure de probabilité neutre au risque, nous aurons toujours à calculer l'espérance d'un produit car la fonction d'actualisation est stochastique. Nous pouvons dans certains cas utiliser l'approximation suivante

$$C(t_0) \simeq E' \left[ (P_{T_C}^c(T - T_C) - K)_+ \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] E' \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^{T_C} r(t, x(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (7.18)$$

mais elle n'est valable que sous des conditions très strictes. JASHMIDIAN [1990] propose une méthode de valorisation<sup>6</sup> qui permet d'éliminer la difficulté de calcul de l'espérance du payoff multiplié par la fonction d'actualisation. L'idée est de changer de mesure de probabilité. Notons  $P(t, T)$  le prix du coupon zéro à l'instant  $t$  d'échéance  $T$ . Nous supposons que la dynamique de cet actif est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dP(t, T) = \mu(t, T) P(t, T) dt + \sigma(t, T) P(t, T) dW(t) \quad (7.19)$$

Cela revient à considérer que le taux d'intérêt instantané  $r(t)$  est un processus gaussien. En utilisant l'équation (4.33), le prix du risque  $\lambda(t)$  est défini par

$$\lambda(t) = \frac{\mu(t, T) - r(t)}{\sigma(t, T)} \quad (7.20)$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= [r(t) + \lambda(t) \sigma(t, T)] P(t, T) dt + \sigma(t, T) P(t, T) dW(t) \\ &= r(t) P(t, T) dt + \sigma(t, T) P(t, T) dW'(t) \end{aligned} \quad (7.21)$$

avec  $W'(t)$  un processus de Wiener sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$  définie par le théorème de Girsanov en posant  $\phi(s) = -\lambda(s)$ . Considérons  $F(t, T, T^*)$  le prix

---

<sup>6</sup>Il existe d'autres approches de valorisation (voir par exemple SCHAEFER et SCHWARTZ [1987], SANDMANN et SONDERMANN [1993], AÏT-SAHALIA [1995a] ou encore WEI [1997]).



d'une obligation à coupon zéro  $P(t, T^*)$  exprimé en unités de numéraire  $P(t, T)$ . Nous avons alors (BISIÈRE [1997]) :

$$\frac{dF(t, T, T^*)}{F(t, T, T^*)} = -[\sigma(t, T^*) - \sigma(t, T)] \sigma(t, T) dt + [\sigma(t, T^*) - \sigma(t, T)] dW'(t) \quad (7.22)$$

Appliquons le théorème de Girsanov avec  $\phi(s) = \sigma(s, T)$  (EL KARAOUI [1996]) et notons  $W'_T$  le processus de Wiener sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'_T$  donnée par le théorème de Radon-Nikodym. Nous avons alors

$$dW'_T(t) = dW'(t) - \sigma(t, T) dt \quad (7.23)$$

Sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'_T$ , nous en déduisons que

$$\frac{dF(t, T, T^*)}{F(t, T, T^*)} = [\sigma(t, T^*) - \sigma(t, T)] dW'_T(t) \quad (7.24)$$

L'équation (7.24) est importante puisque  $F(t, T, T^*)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}'_T$ . Compte tenu de cette propriété, la probabilité  $\mathbb{P}'_T$  est souvent qualifiée de "probabilité *forward* neutre". En particulier, nous avons

$$F(t_0, T, T^*) = E'_T[F(T, T, T^*) | \mathcal{F}_{t_0}] \quad (7.25)$$

avec  $E'_T$  l'opérateur espérance mathématique sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'_T$ . En remarquant que  $P(T, T) = 1$ , nous en déduisons que

$$P(t_0, T^*) = P(t_0, T) E'_T[P(T, T^*) | \mathcal{F}_{t_0}] \quad (7.26)$$

avec

$$dP(t, T^*) = [r(t) + \sigma(t, T) \sigma(t, T^*)] P(t, T^*) dt + \sigma(t, T^*) P(t, T^*) dW'_T(t) \quad (7.27)$$

Dans le cas général d'un actif contingent d'échéance  $T$  dont la valeur du payoff est  $G(T)$ , son prix  $P$  est donné par l'expression suivante :

$$P(t_0) = P_{t_0}^c(T - t_0) E'_T[G(T) | \mathcal{F}_{t_0}] \quad (7.28)$$

Nous pouvons utiliser la relation (7.28) non seulement pour valoriser une option sur obligation mais aussi pour d'autres types d'actifs comme les caps, les floors ou les swaps. Pour le modèle de Vasicek, JAMSHIDIAN [1990] montre que le prix de l'option sur obligation à coupon zéro est donné par

$$C(t_0) = P_{t_0}^c(T - t_0) \Phi(d_1) - KP_{t_0}^c(T_C - t_0) \Phi(d_2) \quad (7.29)$$

avec

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{1}{\sigma_p} \ln \left( \frac{P_{t_0}^c (T - t_0)}{K P_{t_0}^c (T_C - t_0)} \right) + \frac{1}{2} \sigma_p \\
 d_2 &= d_1 - \sigma_p \\
 \sigma_p &= \sigma \left( \frac{1 - e^{-a(T-T_c)}}{a} \right) \sqrt{\left( \frac{1 - e^{-2a(T_c-t_0)}}{2a} \right)}
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

LONGSTAFF [1993] présente une formule analogue dans le cas du modèle de Cox, Ingersoll et Ross.

## 7.3 Modèles de déformation de la courbe des taux

### 7.3.1 La problématique

Considérons la valorisation d'actifs contingents au taux d'intérêt, par exemple les caps et les floors. Nous notons  $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_N = T\}$  l'ensemble fini de dates d'exercice et  $r^*$  le taux d'intérêt d'exercice. Un cap est assimilé à une succession d'options européennes d'achat et un floor correspond à différentes options européennes de vente. Nous montrons le théorème suivant en annexe :

**Théorème 23** *Dans le modèle de VASICEK [1977], la valeur de la prime du caplet est égale à*

$$\text{caplet} = P_{t_0}^c (t - t_0) \left\{ (m(t) - r^*) \Phi \left( \frac{m(t) - r^*}{\sigma(t)} \right) + \sigma(t) \phi \left( \frac{r^* - m(t)}{\sigma(t)} \right) \right\} \tag{7.31}$$

Pour le floor, nous avons

$$\text{floor} = P_{t_0}^c (t - t_0) \left\{ (r^* - m(t)) \Phi \left( \frac{r^* - m(t)}{\sigma(t)} \right) + \sigma(t) \phi \left( \frac{r^* - m(t)}{\sigma(t)} \right) \right\} \tag{7.32}$$

avec

$$m(t) = r_0 e^{-a(t-t_0)} + b' (1 - e^{-a(t-t_0)}) \tag{7.33}$$

et

$$\sigma(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \sqrt{1 - e^{-2a(t-t_0)}} \tag{7.34}$$

Pour valoriser les actifs contingents au taux d'intérêt, nous pouvons utiliser les modèles factoriel ou d'équilibre de structure par terme. Pour le modèle de Vasicek, nous obtenons une solution analytique. Pour les modèles non gaussiens, nous aurons recours le plus souvent aux méthodes numériques pour obtenir une solution. Nous

remarquons que la valorisation de ces actifs contingents n'utilise pas l'information contenue dans la structure par terme actuelle. Les modèles de déformation de la courbe des taux exploitent cette information pour construire des trajectoires du taux d'intérêt compatibles avec la courbe des taux observée. Les financiers préfèrent généralement employer ce type de modèle.

### 7.3.2 Le modèle de HO et LEE [1986]

Notons  $P^{(n)}(\tau)$  le prix à la  $n$ -ième période de l'obligation à coupon zéro de maturité  $\tau$  (ou d'échéance  $n+\tau$ ). En l'absence d'incertitude, nous avons la relation d'arbitrage suivante :

$$P^{(n)}(\tau + 1) = P^{(n)}(1) P^{(n+1)}(\tau) \quad (7.35)$$

A partir de cette relation, Ho et Lee introduisent un modèle d'évolution à une seule variable d'état : le taux d'intérêt d'une période. A l'instant  $n$ , ce taux d'intérêt peut baisser et nous avons

$$P^{(n)}(\tau + 1) < P^{(n)}(1) P^{(n+1)}(\tau) \quad (7.36)$$

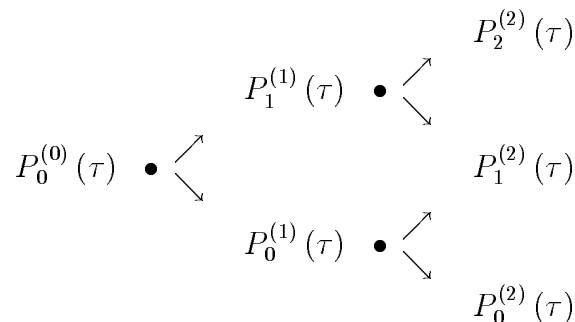
Si le taux d'intérêt augmente, nous vérifions

$$P^{(n)}(\tau + 1) > P^{(n)}(1) P^{(n+1)}(\tau) \quad (7.37)$$

Soit  $P_i^{(n)}(\tau)$  le prix du coupon zéro dans l'état de nature  $i$  (qui représente le nombre de fois où le taux d'intérêt a baissé). Les auteurs considèrent alors deux fonctions perturbatrices  $h(\tau)$  et  $h^*(\tau)$  définies par les relations

$$\begin{aligned} h(\tau) P_i^{(n)}(\tau + 1) &= P_i^{(n)}(1) P_{i+1}^{(n+1)}(\tau) \\ h^*(\tau) P_i^{(n)}(\tau + 1) &= P_i^{(n)}(1) P_i^{(n+1)}(\tau) \end{aligned} \quad (7.38)$$

avec  $h(\tau) > 1$  et  $h^*(\tau) < 1$ . Le modèle de HO et LEE [1986] adopte donc un treillis d'évolution binomiale de la fonction d'actualisation. Pour chaque maturité  $\tau$ , nous avons



### 7.3.2.1 Détermination des fonctions perturbatrices $h(\tau)$ et $h^*(\tau)$

Considérons un portefeuille d'arbitrage  $\mathcal{P}$  constitué de deux obligations à coupon zéro de maturités respectives  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Nous notons  $\alpha_j$  les valeurs de stratégie. La valeur du portefeuille vaut à l'instant  $n$  dans l'état de la nature  $i$  :

$$\mathcal{P}_i^{(n)} = \alpha_1 P_i^{(n)}(\tau_1) + \alpha_2 P_i^{(n)}(\tau_2) \quad (7.39)$$

Nous montrons dans l'annexe qu'il existe deux scalaires  $\delta$  et  $\pi$  tels que nous avons

$$h(\tau) = \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^\tau} \quad (7.40)$$

et

$$h^*(\tau) = \frac{\delta^\tau}{\pi + (1 - \pi)\delta^\tau} \quad (7.41)$$

Nous interprétons  $\delta$  comme un coefficient de certitude des taux et  $\pi$  est la probabilité binomiale neutre au risque. Le graphique (7.5) représente la différence entre  $h(\tau)$  et  $h^*(\tau)$  en fonction de  $\pi$  et  $\delta$  pour différentes valeurs de  $\tau$ . Nous vérifions bien que cette différence tend vers zéro lorsque  $\delta$  tend vers l'unité. Pour  $\delta = 1$ , l'incertitude sur les taux disparaît totalement puisque nous avons  $h(\tau)$  et  $h^*(\tau)$  égaux à un. Nous remarquons aussi l'influence asymétrique du paramètre  $\pi$  sur cette différence. Cela provient du fait que la fonction  $h(\tau)$  n'est pas bornée ( $h(\tau) \geq 1$ ), alors que la fonction  $h^*(\tau)$  l'est ( $0 < h^*(\tau) \leq 1$ )<sup>7</sup>.

Pour construire les arbres d'évolution du prix de l'obligation à coupon zéro, nous calculons les valeurs de  $P_{i+1}^{(n)}(\tau)$  et  $P_i^{(n)}(\tau)$  de façon itérative en employant les formules

$$P_{i+1}^{(n+1)}(\tau) = \frac{P_i^{(n)}(\tau + 1)}{P_i^{(n)}(1)} h(\tau) \quad (7.44)$$

et

$$P_i^{(n+1)}(\tau) = \frac{P_i^{(n)}(\tau + 1)}{P_i^{(n)}(1)} h^*(\tau) \quad (7.45)$$

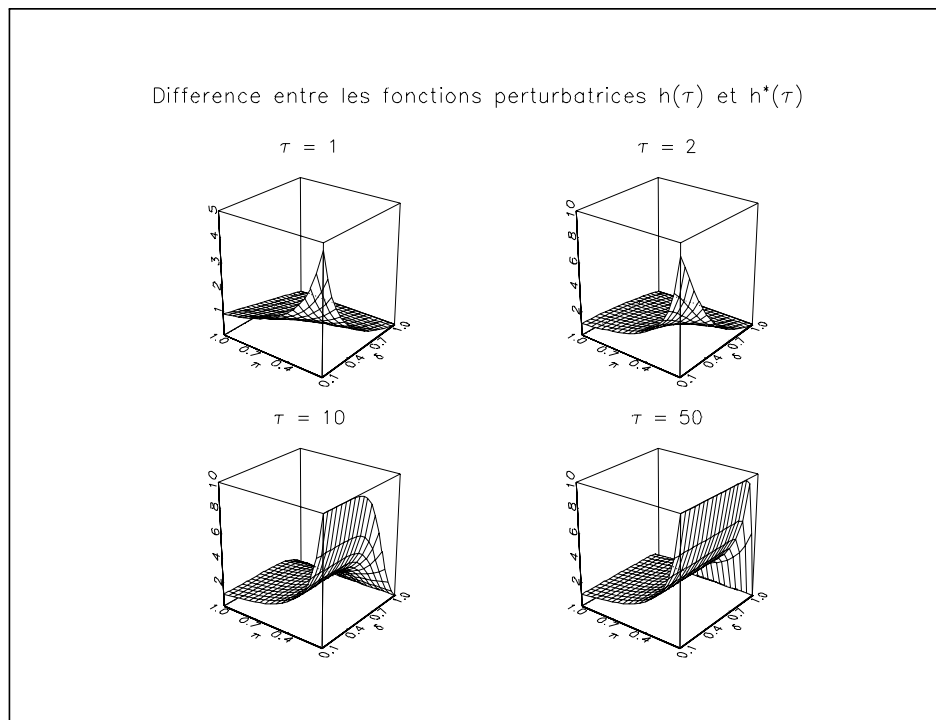
---

<sup>7</sup>Pour montrer ce résultat, il suffit de remarquer que

$$h(\tau) = \frac{1}{1 + (1 - \pi)(\delta^\tau - 1)} \quad (7.42)$$

et

$$h^*(\tau) = \frac{1}{1 + \pi\left(\frac{1}{\delta^\tau} - 1\right)} \quad (7.43)$$



Graphique 7.5

Illustrons ceci par un exemple. Supposons que  $\pi$  soit égal à 44.5% et que  $\delta$  prenne une valeur égale à 0.9. Les prix observés des coupons zéro sont

$$\begin{aligned}
 P_0^{(0)}(1) &= 0.965 \\
 P_0^{(0)}(2) &= 0.850 \\
 P_0^{(0)}(3) &= 0.725 \\
 P_0^{(0)}(4) &= 0.615
 \end{aligned}$$

Nous avons un modèle à quatre périodes. Pour déterminer le modèle, nous utilisons la procédure `ArbreHoLee` de la bibliothèque **SPT**.

```

new;
library spt;

pi_ = 0.445;
delta = 0.9;
CouponZero = 0.965|0.850|0.725|0.615;

P = ArbreHoLee(CouponZero,pi_,delta);

```

```

P4 = selectionArbreHoLee(P,4);
P3 = selectionArbreHoLee(P,3);
P2 = selectionArbreHoLee(P,2);
P1 = selectionArbreHoLee(P,1);

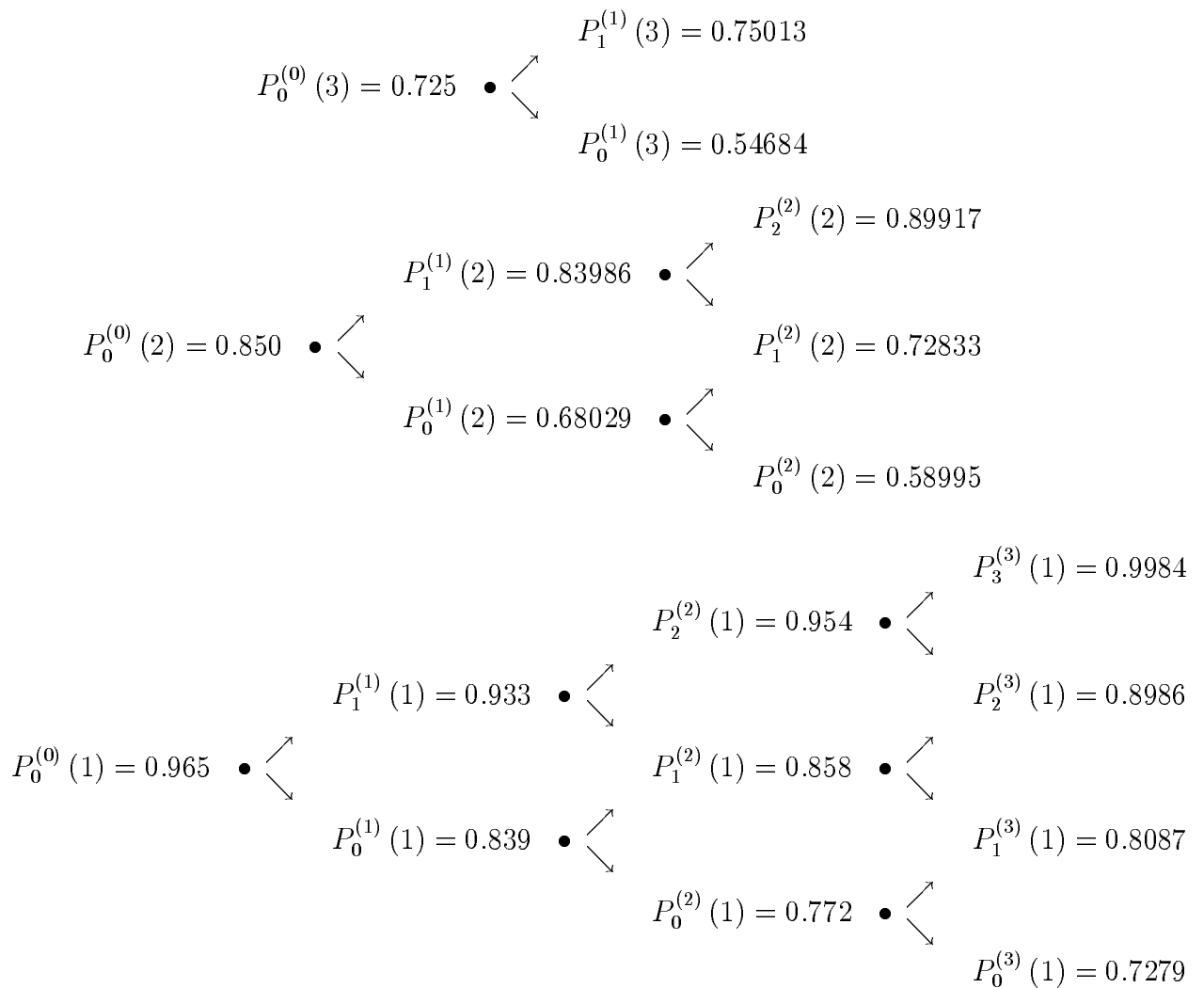
```

```

call affichageArbre(P4);
call affichageArbre(P3);
call affichageArbre(P2);
call affichageArbre(P1);

```

Nous obtenons les résultats suivants :



### 7.3.2.2 Valorisation des actifs contingents

La connaissance des treillis d'évolution des prix des obligations à coupon zéro permet de construire ceux des taux d'intérêt correspondants. Nous avons<sup>8</sup>

$$r_i^{(n)}(\tau) = \frac{1}{P_i^{(n)}(\tau)} - 1 \quad (7.47)$$

Notons  $C$  le prix d'un actif contingent au taux d'intérêt de maturité  $N$ . Dans le modèle de Ho et Lee, le prix de cet actif dépend d'une seule variable d'état, en général le taux d'intérêt de maturité une période  $r_i^{(n)}(1)$ . Nous pouvons donc valoriser cet actif en utilisant la technique dite de "remontée de l'arbre". Notons  $C_i^{(n)}$  la valeur intrinsèque de l'actif contingent à la  $n$ -ième période et dans l'état de la nature  $i$ . Nous avons

$$C_i^{(n)} = P_i^{(n)}(1) E' \left[ C^{(n+1)} \mid C^{(n)} = C_i^{(n)} \right] \quad (7.48)$$

avec

$$C_i^{(n)} \bullet \begin{cases} \swarrow C_{i+1}^{(n)} \\ \nwarrow C_i^{(n)} \end{cases} \quad (7.49)$$

Nous avons donc

$$C_i^{(n)} = P_i^{(n)}(1) \left( \pi C_{i+1}^{(n+1)} + (1 - \pi) C_i^{(n+1)} \right) \quad (7.50)$$

La prime de l'actif contingent correspond alors à  $C_0^{(0)}$ .

La technique précédente est la même que celle employée pour un arbre binomial (COX, ROSS et RUBINSTEIN [1979]) pour la valorisation d'une option européenne. La seule différence est la prise en compte d'un facteur d'actualisation  $P_i^{(n)}(1)$  qui n'est pas constant dans le temps. Notons  $G_i^{(n)}$  la fonction de payoff de l'actif contingent à la  $n$ -ième période et dans l'état de la nature  $i$ . L'algorithme est initialisé avec

$$C_i^{(N)} = G_i^{(N)} \quad (7.51)$$

Dans le cadre du modèle de Ho et Lee, nous pouvons aussi valoriser des actifs contingents de type option américaine. Dans ce cas, la formule (7.50) devient

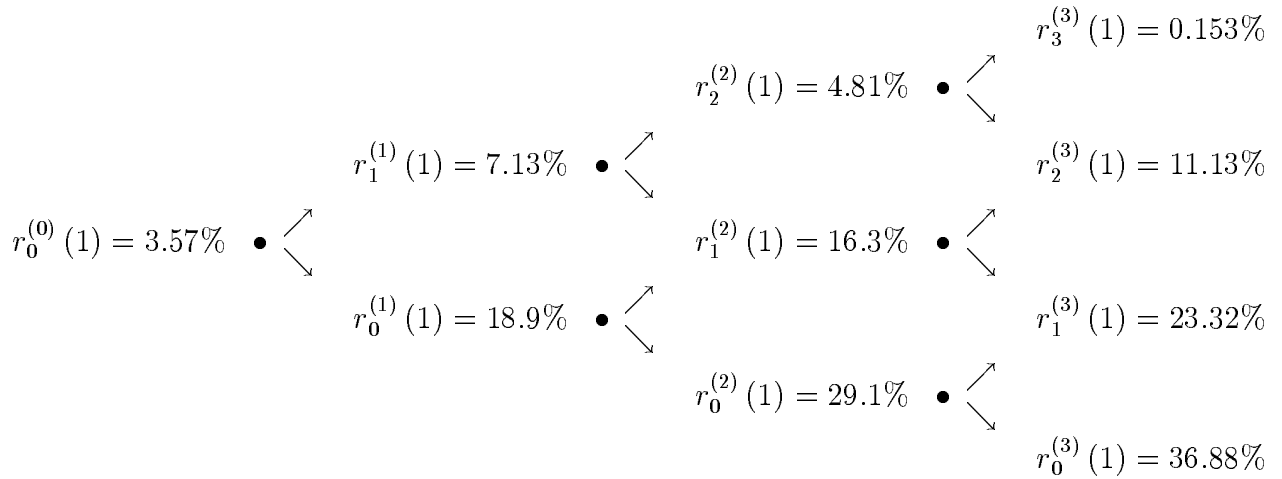
$$C_i^{(n)} = \max \left( P_i^{(n)}(1) \left( \pi C_{i+1}^{(n+1)} + (1 - \pi) C_i^{(n+1)} \right), G_i^{(n)} \right) \quad (7.52)$$

---

<sup>8</sup>Un problème de base se pose parfois. Notons  $b_r$  et  $b_c$  les bases du taux d'intérêt de référence et de l'obligation à coupon zéro (en nombre de jours). La formule se généralise et nous avons

$$r_i^{(n)}(\tau) = \frac{b_r}{b_c} \left( \frac{1}{P_i^{(n)}(\tau)} - 1 \right) \quad (7.46)$$

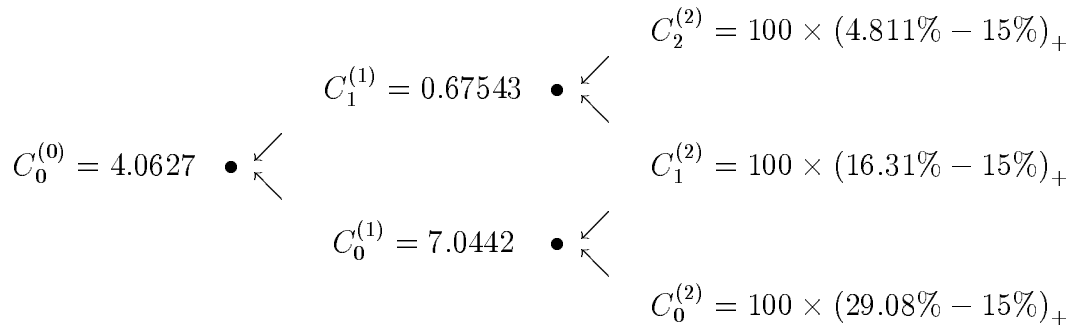
Voyons un exemple d'utilisation. Considérons un cap 3 ans contre Pibor 1 an de taux d'exercice 15% et pour un contrat de 100 francs. Nous considérons que les prix des obligations à coupon zéro de l'exemple précédent correspondent aux prix actuels des coupons zéro de maturités respectives un deux, trois et quatre ans. Nous avons  $b_r$  égal à 360 jours (base monétaire) et  $b_c$  égal à 365 jours. En utilisant la formule (7.46), nous construisons l'évolution suivante du taux de maturité un an :



Le cap correspond à quatre options européennes de payoff

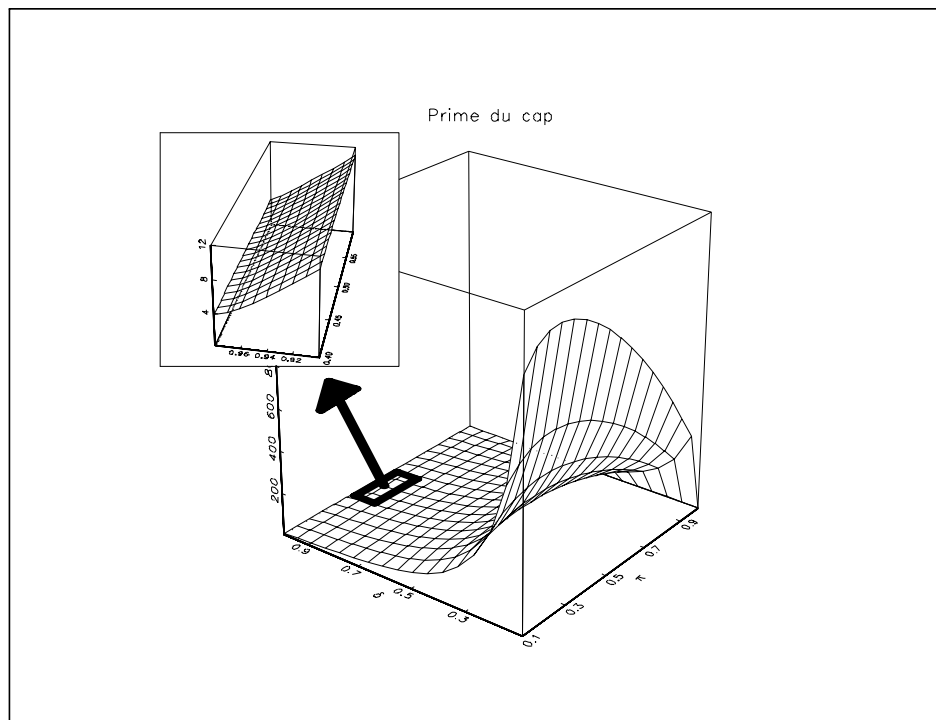
$$G_i^{(n)} = 100 \times \left( r_i^{(n)}(1) - 0.15 \right)_+ \quad (7.53)$$

Les valeurs des caplets sont 0, 2.0783, 4.0627 et 4.7275 francs. Le prime du cap s'élève donc à 10.869 francs. A titre de vérification, nous présentons l'arbre de valorisation du troisième caplet :



L'utilisation du modèle de Ho et Lee nécessite d'attribuer des valeurs aux paramètres  $\pi$  et  $\delta$ . Le choix de ces valeurs a une importance cruciale. Le graphique (7.6) représente la prime de cap précédent en fonction des deux paramètres. Pour certaines valeurs, la valeur de cette prime est aberrante puisqu'elle est supérieure au montant du contrat ! Même pour des valeurs plausibles ( $0.90 \leq \delta \leq 0.98$  et  $0.4 \leq \pi \leq 0.6$ ), la valeur du cap varie beaucoup (de trois à douze francs). Ho et Lee suggèrent d'estimer ces paramètres par les moindres carrés non linéaires en utilisant comme fonction objectif la distance entre les prix théoriques et les prix de marché.



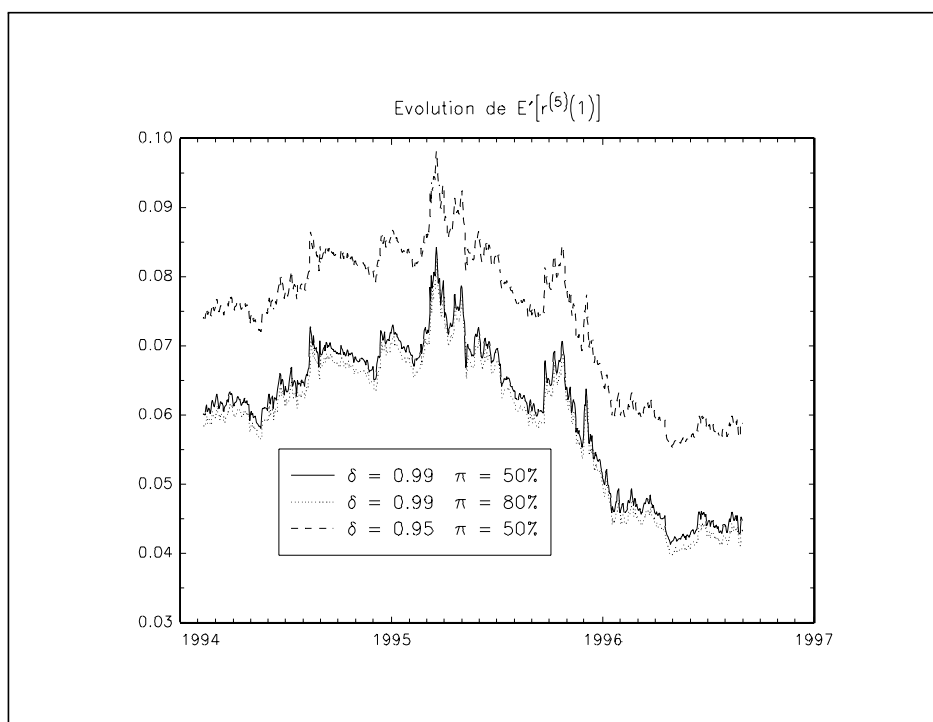


Graphique 7.6

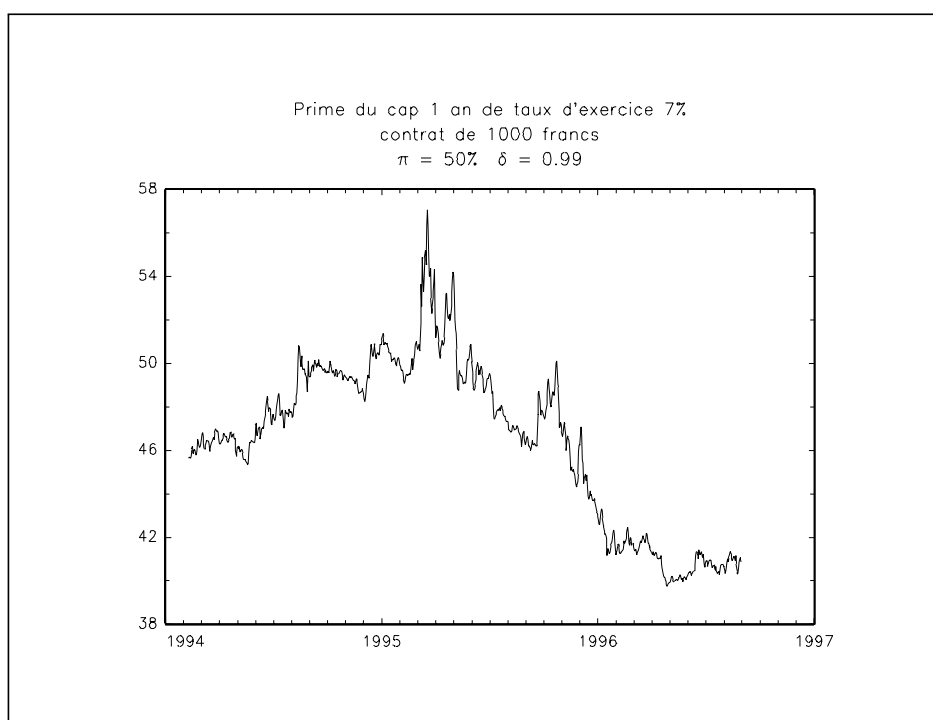
### 7.3.2.3 Application à la structure par terme française du 10/02/1994 au 30/08/1996

Dans ce paragraphe, nous appliquons le modèle de Ho et Lee à la partie courte de structure par terme française. Nous considérons les prix des obligations à coupon zéro de maturité un à douze mois. Le graphique (7.7) représente l'évolution de  $E' [r^{(5)}(1)]$ . Le taux  $r_i^{(5)}(1)$  correspond au taux zéro de maturité un mois dans le  $i$ -ième état de la nature pour un horizon  $n$  égal à cinq mois.  $E' [r^{(5)}(1)]$  est donc l'espérance du taux mensuel sous la mesure de probabilité neutre au risque pour un horizon d'anticipation égal à cinq mois. Nous remarquons que cette évolution dépend assez peu du coefficient  $\pi$ . Une des critiques majeures du modèle est qu'en pratique, l'influence de la probabilité binomiale neutre au risque est faible<sup>9</sup>. Le graphique (7.8) présente la prime du cap de taux d'exercice égal à 7% pour  $\pi$  et  $\delta$  égaux à 50% et 0.99. Connaissant les valeurs de marché du cap, nous pourrions estimer au jour le jour les valeurs optimales des paramètres  $\pi$  et  $\delta$ . Nous pouvons donc utiliser le modèle de Ho et Lee dans le cadre d'une lecture d'information.

<sup>9</sup>Cette critique pourrait sûrement être évitée en prenant en compte plusieurs régimes, comme dans le modèle de GOURIÉROUX et SCALLET [1997].



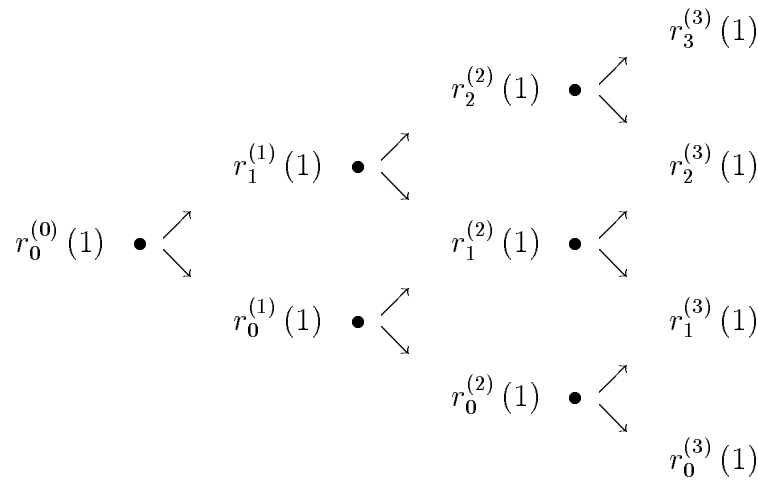
Graphique 7.7



Graphique 7.8

### 7.3.3 Le modèle de BLACK, DERMAN et TOY [1990]

Actuellement, ce modèle est l'un des plus utilisés en Finance avec celui de HULL et WHITE [1993] pour la valorisation des actifs dérivés sur taux d'intérêt. C'est un modèle d'arbre stationnaire qui s'inspire des travaux de COX, ROSS et RUBINSTEIN [1979] et HO et LEE [1986]. La variable d'état est le taux court d'une période que nous notons  $r(1)$ . Les auteurs considèrent deux états de la nature. A la période suivante, ce taux peut augmenter ( $i = 1$ ) ou baisser ( $i = 0$ ) avec la même probabilité neutre au risque  $\frac{1}{2}$ . Reprenons les notations du paragraphe précédent. Nous notons  $r_i^{(n)}(1)$  la valeur du taux  $r(1)$  dans  $n$  périodes pour l'état de la nature  $i$  hausses de taux. L'arbre se présente de la façon suivante :



Black, Derman et Toy imposent que l'arbre soit "compatible" avec la structure actuelle des taux. Si nous notons  $r(\tau)$  la valeur du taux zéro de maturité  $\tau$  périodes et  $\rho(x) = (1+x)^{-1}$  la fonction d'actualisation, le principe d'absence d'arbitrage implique les égalités suivantes

$$\rho(r(1)) \left[ \frac{1}{2} \rho(r_1^{(1)}(1)) + \frac{1}{2} \rho(r_0^{(1)}(1)) \right] = \frac{1}{[1+r(2)]^2} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} & \rho(r(1)) \left[ \frac{1}{2} \rho(r_1^{(1)}(1)) \left[ \frac{1}{2} \rho(r_2^{(2)}(1)) + \frac{1}{2} \rho(r_1^{(2)}(1)) \right] \right] \\ & + \rho(r(1)) \left[ \frac{1}{2} \rho(r_0^{(1)}(1)) \left[ \frac{1}{2} \rho(r_1^{(2)}(1)) + \frac{1}{2} \rho(r_0^{(2)}(1)) \right] \right] = \frac{1}{[1+r(3)]^3} \end{aligned} \quad (7.55)$$

Si nous disposons de  $T + 1$  taux zéro, nous avons un système de  $T$  équations indépendantes avec respectivement  $2, 3, \dots, T + 1$  variables. Les auteurs proposent alors de chercher les solutions du système en imposant la condition suivante

$$\text{var} [\ln r^{(n)}(1)] = n \times \sigma_n^2 \quad (7.56)$$

avec  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_T\}$  la structure par terme des volatilités du taux court d'une période. Pour obtenir ces solutions, Black, Derman et Toy procèdent par essais et erreurs, alors que JAMSHIDIAN [1991], KALOTAY, WILLIAMS et FABOZZI [1993] et BJERKSUND et STENSLAND [1996] préfèrent employer des algorithmes de type Newton-Raphson.

La recherche des solutions est facilitée si nous supposons que les taux d'intérêt pour la période  $n$  sont liés entre eux par la relation suivante (BENNINGA et WIENER [1997]) :

$$r_i^{(n)}(1) = r_0^{(n)}(1) \exp(2i\sigma_n) \quad (7.57)$$

Dans ce cas, pour  $n = 1$ , nous avons

$$E[\ln r^{(1)}(1)] = \frac{1}{2} \ln r_1^{(1)}(1) + \frac{1}{2} \ln r_0^{(1)}(1) = \ln r_0^{(1)}(1) + \sigma_1 \quad (7.58)$$

et nous en déduisons que

$$\text{var}[\ln r^{(1)}(1)] = \frac{1}{2} \left( \ln r_1^{(1)}(1) - \ln r_0^{(1)}(1) - \sigma_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \ln r_0^{(1)}(1) - \ln r_0^{(1)}(1) - \sigma_1 \right)^2 = \sigma_1^2 \quad (7.59)$$

Nous pouvons aussi montrer que  $\text{var}[\ln r^{(n)}(1)] = n \times \sigma_n^2$  pour n'importe quelle valeur de  $n$ . L'utilisation de la relation (7.57) permet d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que ceux donnés par un algorithme de type essais et erreurs (voir l'exemple de la procédure BDT dans l'annexe générale).

L'implémentation du modèle de Black, Derman et Toy est plus difficile que celle de CRR ou HL. Comme pour la valorisation des actifs exotiques, elle nécessite la construction de tous les chemins possibles et pas seulement celle des nœuds. Reprenons l'arbre précédent. Les différents nœuds sont les suivants

$$\begin{aligned} &\{(0, 0)\} \\ &\{(1, 1)\}, \{(1, 0)\} \\ &\{(2, 2)\}, \{(2, 1)\}, \{(2, 0)\} \\ &\{(3, 3)\}, \{(3, 2)\}, \{(3, 1)\}, \{(3, 0)\} \end{aligned}$$

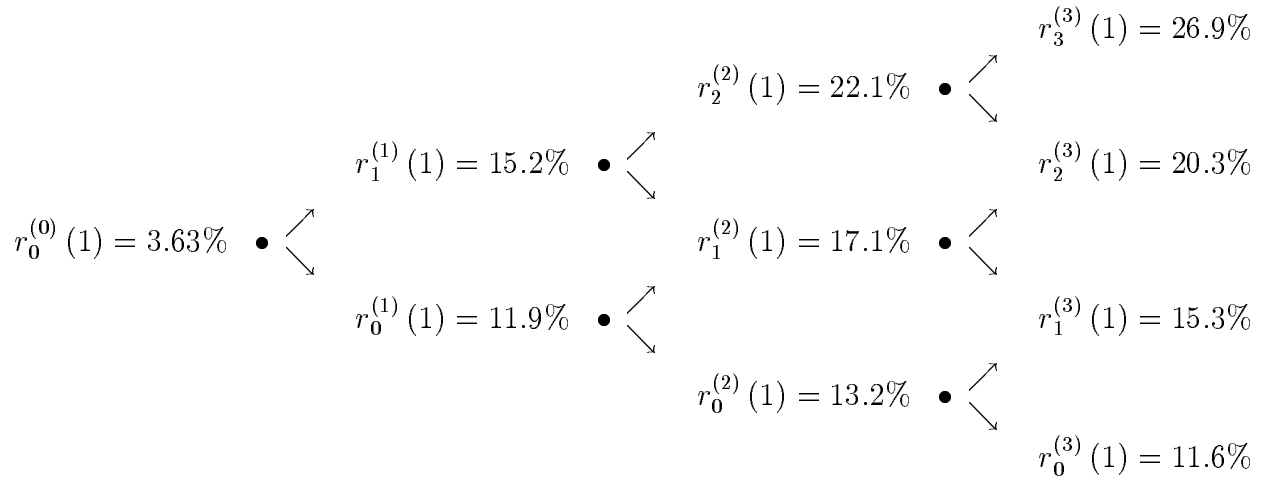
Le nombre de chemins est beaucoup plus important puisque nous avons

$$\begin{aligned} &\{(0, 0)\} \\ &\{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\} \\ &\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}, \{(0, 0), (1, 1), (2, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (2, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\} \\ &\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 2)\}, \{(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2)\} \\ &\{(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}, \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 1)\} \\ &\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\} \end{aligned}$$

Une autre difficulté concerne la résolution numérique des équations non linéaires. L'algorithme de Newton-Raphson ne converge pas systématiquement. C'est

pourquoi la procédure BDT de la bibliothèque **SPT** utilise l'algorithme de la bissection. La valorisation des actifs contingents au taux d'intérêt se fait avec la même technique de "remontée de l'arbre" que nous avons présentée pour le modèle de Ho et Lee (les procédures correspondantes sont BDTcap, BDTfloor et BDTvalorisation).

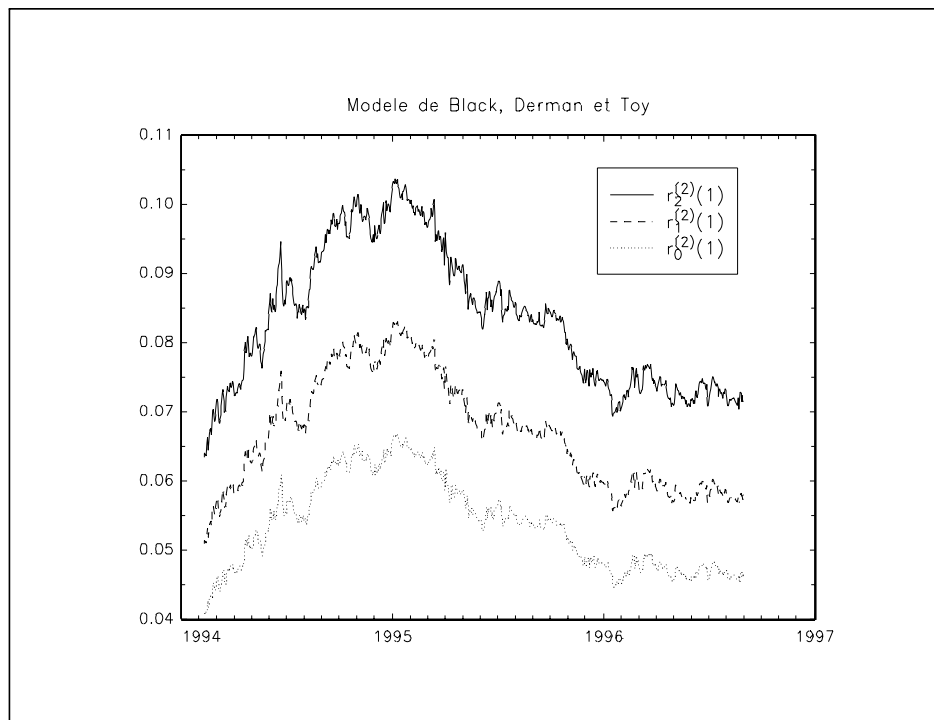
A titre de comparaison, nous reprenons l'exemple illustrant le modèle de Ho et Lee. En utilisant la structure par terme suivante de volatilité  $\{\sigma_1 = 12\%, \sigma_2 = 13\%, \sigma_3 = 14\%\}$ , nous obtenons



Les valeurs des caplets sont 0, 0.0825, 2.3744 et 2.5330. La prime du cap est donc très différente de celle que nous obtenons pour le modèle de Ho et Lee, puisqu'elle s'élève à 4.99 francs. Nous expliquons cette différence par le fait que le modèle HL est un modèle "symétrique". A chaque période, nous obtenons alors des taux qui varient dans un intervalle de plus en plus grand. Et la longueur de l'intervalle peut augmenter de façon linéaire. Dans le modèle de BLACK, DERMAN et TOY [1990], cette propriété n'est vérifiée que si la structure par terme des taux **et** la structure par terme des volatilités sont **fortement** croissantes.

### 7.3.4 Le modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1992]

L'approche de HULL et WHITE [1990] nécessite d'*inverser* la structure des taux à terme et donc de résoudre une équation non linéaire. Pour de nombreux modèles, il est difficile de trouver la solution symbolique et nous aurons recours à une solution numérique (UHRIG et WALTER [1996]). En 1992, HEATH, JARROW et MORTON (HJM) présente une nouvelle méthodologie qui évite ce problème. Ils choisissent de modéliser les taux à terme et non les taux zéro. Il s'avère, dans la pratique, que cette démarche permet de valoriser de nombreux instruments dérivés complexes, ce qui explique la très grande influence de la méthodologie HJM en théorie de la



Graphique 7.9

valorisation<sup>10</sup>.

### 7.3.4.1 Présentation du modèle

Dans le modèle de Ho et Lee, la variable d'état est le taux zéro. Le modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1992] est considéré comme une généralisation du modèle de Ho et Lee en temps continu. Cependant, il existe une différence très importante : il s'agit d'un modèle à plusieurs variables d'état, qui sont les taux à terme. Comme le font remarquer DUMAZ et ALLAZ [1995], modéliser le processus des taux à terme équivaut à modéliser le processus des prix des obligations à coupon zéro ou celui des taux zéro. Nous rappelons que nous avons

$$r_t = f_t(0) \quad (7.60)$$

HJM supposent que l'évolution des taux à terme  $F_t(\tau, 0)$  est décrite par l'équation stochastique suivante :

$$f_t(T-t) - f_{t_0}(T-t_0) = \int_{t_0}^t \mu(\theta, T) d\theta + \int_{t_0}^t \sigma(\theta, T) dW(\theta) \quad (7.61)$$

<sup>10</sup>voir par exemple JEFFREY [1995], CAVERHILL et PANG [1995] ou encore MILTERSEN, SANDMANN et SONDERMANN [1995,1997].

avec  $T$  la maturité du contrat à terme. HJM considèrent  $N$  sources de risque. Nous avons donc

$$\sigma(\theta, T) = \begin{bmatrix} \sigma_1(\theta, T) & \cdots & \sigma_n(\theta, T) & \cdots & \sigma_N(\theta, T) \end{bmatrix}_{1 \times N} \quad (7.62)$$

et

$$W(\theta) = \begin{bmatrix} W_1(\theta) \\ \vdots \\ W_n(\theta) \\ \vdots \\ W_N(\theta) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (7.63)$$

Dans l'article original, les processus de Wiener sont indépendants, ce qui implique que la matrice de covariance  $\rho$  est une matrice identité. Nous pouvons alors déterminer la dynamique suivie par le taux zéro. Nous avons<sup>11</sup>

$$r(t) = f_{t_0}(t - t_0) + \int_{t_0}^t \mu(\theta, t) d\theta + \int_{t_0}^t \sigma(\theta, t) dW(\theta) \quad (7.64)$$

Les auteurs montrent que la dynamique corrigée du risque de  $r(t)$  est

$$r_t = f_{t_0}(t - t_0) + \sum_{n=1}^N \int_{t_0}^t \sigma_n(u, t) \left[ \int_u^t \sigma_n(u, v) dv \right] du + \int_{t_0}^t \sigma(u, t) dW'(u) \quad (7.65)$$

avec  $W'(u)$  un processus de Wiener de dimension  $N$  et de matrice de covariance  $I_N u$ . L'approche HJM ne nécessite donc pas la détermination des prix de risques, ce qui implique que la valorisation des actifs contingents aux taux d'intérêt est largement simplifiée, comme le font remarquer les auteurs :

*The market price for risk drop out and they are replaced with an expression involving the volatilities across different maturities of the forward rates, i.e., a "term structure of volatilities". Thus, contingent claim values can be calculated independently of the market prices for risk.*

HJM présentent des exemples relativement simples. Ils considèrent dans un premier temps un modèle avec  $N$  égal à 1 et  $\sigma(\theta, T) = \sigma$ . Il est alors facile de montrer que

$$r_t = f_{t_0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0)^2 + \sigma (W'(t) - W'(t_0)) \quad (7.66)$$

Pour le second exemple, ils supposent un modèle avec deux sources de risques et

$$\sigma(\theta, T) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \exp -\frac{c}{2} (T - \theta) \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

<sup>11</sup>Il suffit de poser  $T = t$  dans l'équation (7.61) et d'utiliser l'égalité (7.60).

Nous avons

$$\int_{t_0}^t \sigma_2(u, t) \left[ \int_u^t \sigma_2(u, v) dv \right] du = \frac{2\sigma_2^2}{c^2} (\exp(-c(t-t_0)) - 1) + \frac{4\sigma_2^2}{c^2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{c}{2}(t-t_0)\right) \right) \quad (7.68)$$

La dynamique corrigée du risque du taux zéro est donc

$$\begin{aligned} r_t = & f_{t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(t-t_0)^2 + \sigma_1(W'_1(t) - W'_1(t_0)) \\ & + \frac{2\sigma_2^2}{c^2} (\exp(-c(t-t_0)) - 1) + \frac{4\sigma_2^2}{c^2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{c}{2}(t-t_0)\right) \right) \\ & + \sigma_2 \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{c}{2}(t-u)\right) dW'_2(u) \end{aligned} \quad (7.69)$$

Pour ces deux exemples, HJM dérivent les primes des options européennes d'une obligation à coupon zéro. Reprenant le premier exemple, MELLIOS et PONCET [1995] étendent l'analyse en valorisant les options sur contrats forward et future d'un coupon zéro. Les exemples choisis par Heath, Jarrow et Morton ne posent pas de problèmes; il est facile de calculer le terme  $\int_{t_0}^t \sigma_n(u, t) \left[ \int_u^t \sigma_n(u, v) dv \right] du$  car les fonctions sont affine et exponentielle. Cependant, si nous considérons des fonctions légèrement plus complexes, nous ne sommes pas sûr de trouver la forme symbolique. Par exemple, nous n'avons pas trouvé la solution pour  $\sigma(\theta, T) = \sigma\sqrt{T-\theta}$ . En dehors de spécifications simples<sup>12</sup>, l'utilisation de la méthodologie HJM nécessite le recours à l'analyse numérique.

### 7.3.4.2 Implémentation numérique

La dynamique du taux court donné (7.65) peut s'écrire

$$r(t) = f_{t_0}(t-t_0) + \sum_{n=1}^N x_n(t) + y(t) \quad (7.70)$$

avec

$$x_n(t) = \int_{t_0}^t \sigma_n(u, t) \left[ \int_u^t \sigma_n(u, v) dv \right] du \quad (7.71)$$

et

$$y(t) = \int_{t_0}^t \sigma(u, t) dW'(u) \quad (7.72)$$

La première difficulté est le calcul de  $x_n(t)$ . Ce n'est pas un calcul classique d'intégration. En effet, nous devons intégrer une fonction, qui dépend aussi d'une intégration. De plus,  $x_n(t)$  présente une forme beaucoup plus complexe que

$$\int_{t_0}^t g(u) \left[ \int_{t_0}^t h(v) dv \right] du \quad (7.73)$$

<sup>12</sup>voir aussi les fonctions de AMIN et MORTON [1994] et BLISS et RITCHKEN [1996].



En effet, les bornes **et** la fonction de la deuxième intégrale dépendent de l'argument d'intégration  $u$  de la première intégrale. Nous ne pouvons donc pas considérer l'intégrale  $\left[ \int_u^t \sigma_n(u, v) dv \right]$  comme une valeur numérique. C'est pourquoi nous avons développé un algorithme spécifique basé sur celui de Simpson. Notons  $M$  le nombre de points de discrétisation. Cet algorithme nécessite  $M^2 + M$  appels à la fonction  $\sigma_n(\theta, T)$  avec un quadrillage d'ordre  $M^2$ . La procédure correspondante est `intsimpHJM`.

Reprenons le deuxième exemple d'Heath, Jarrow et Morton avec  $\sigma_1 = 0.02$ ,  $\sigma_2 = 0.05$  et  $c = 0.125$   $t_0 = 1$  et  $t = 5$ . Voici le programme qui permet d'obtenir la solution numérique pour  $M$  égal à 20 :

```
new;
library spt,pgraph,tsm,optmum;
TSMset;

sigma1 = 0.02;
sigma2 = 0.05;
c = 0.125;

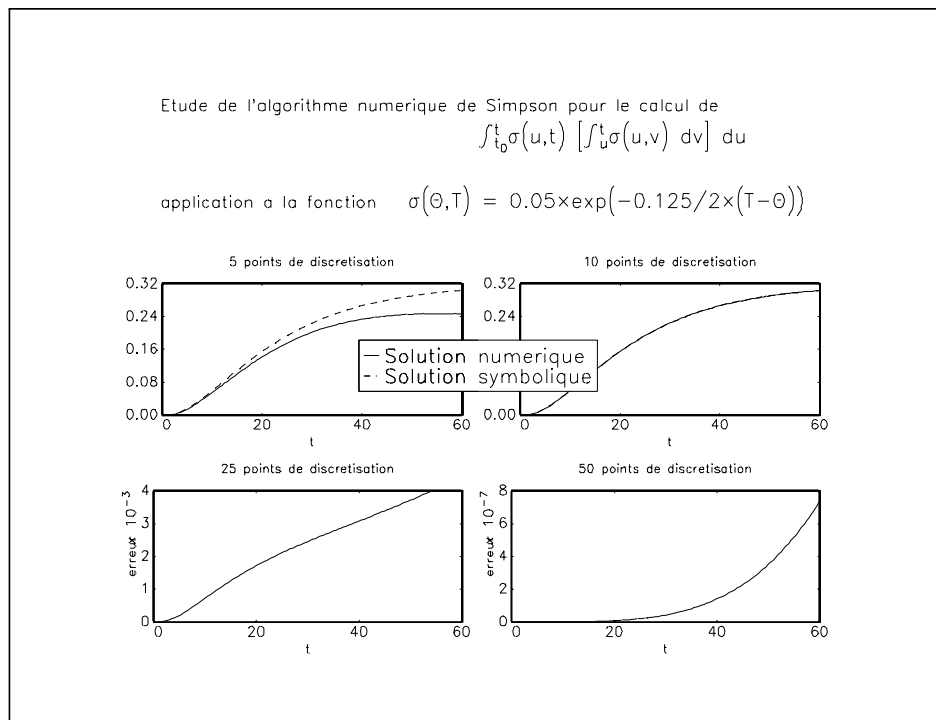
proc procSigma(theta,T);
  local Nobs;
  Nobs = maxc(rows(theta)|rows(T));
  retp( sigma1*ones(Nobs,1) ~ sigma2.*exp(-c/2.*(T-theta)) );
endp;

I = intsimpHJM(&procSigma,1,5,20);

print "La solution est : ";
print I;
```

```
La solution est :
      0.0032000000      0.015657310
```

Le graphique (7.10) représente la solution numérique et la solution exacte de l'intégrale  $x_2(t)$  pour des valeurs de  $M$  égales à 5 et 10. Pour  $M$  égal à 10, les deux courbes sont visuellement confondues. Les deux graphiques du bas montrent la différence entre la solution exacte et la solution numérique. Pour  $M$  égal à 25 et 50, l'erreur est de l'ordre  $10^{-3}$  et  $10^{-7}$ . On constate que l'erreur est très faible pour des maturités très grandes pouvant atteindre 60 années. L'algorithme de Simpson



Graphique 7.10

est donc très intéressant, puisqu'il n'est pas nécessaire de prendre des valeurs très élevées de  $M^{13}$ .

Pour simuler le taux zéro, nous devons aussi simuler le processus  $y(t)$ . Notons  $k = (t - t_0)/M$  et  $t_m = t_0 + mk$ . Nous pouvons remplacer l'intégrale stochastique par

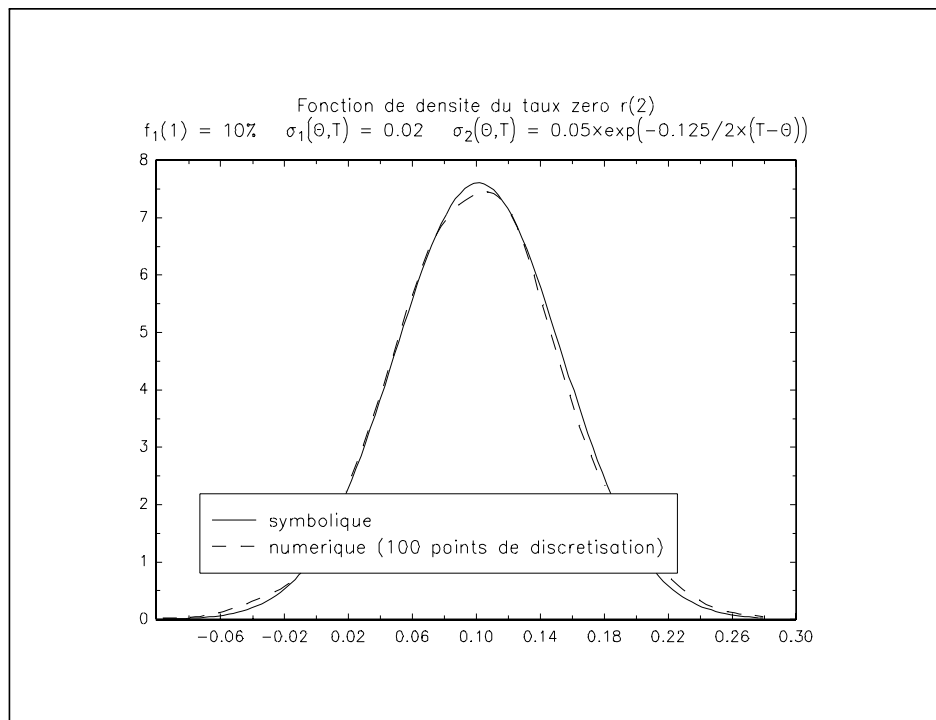
$$y(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sigma_n(t_m, t_M) (W'_n(t_{m+1}) - W'_n(t_m)) \quad (7.74)$$

La procédure HeathJarrowMorton utilise cette approximation pour simuler les taux zéro  $r(t)$  sous la mesure de probabilité neutre au risque.

Reprenons l'exemple précédent avec  $f_1(1) = 10\%$ . Sur le graphique (7.11), nous comparons les fonctions de densité exacte et numérique de  $r(2)$  pour 2000

<sup>13</sup>A titre indicatif, le nombre d'appels de la fonction  $\sigma_n(\theta, T)$  est

$M$	$M^2 + M$
5	30
10	110
25	650
50	2550
100	10100
1000	1001000



Graphique 7.11

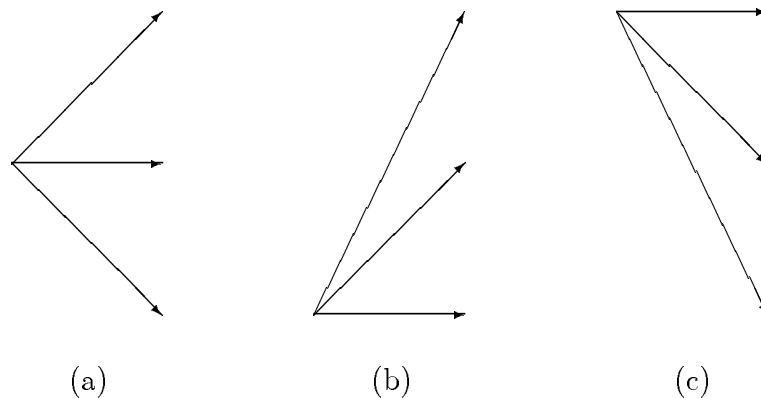
simulations. Elles sont très proches l'une de l'autre. Le graphique (7.12) illustre la convergence de Monte Carlo pour la valorisation du caplet correspondant avec un taux d'exercice égal à 15% et un contrat d'un montant de 1000 francs.

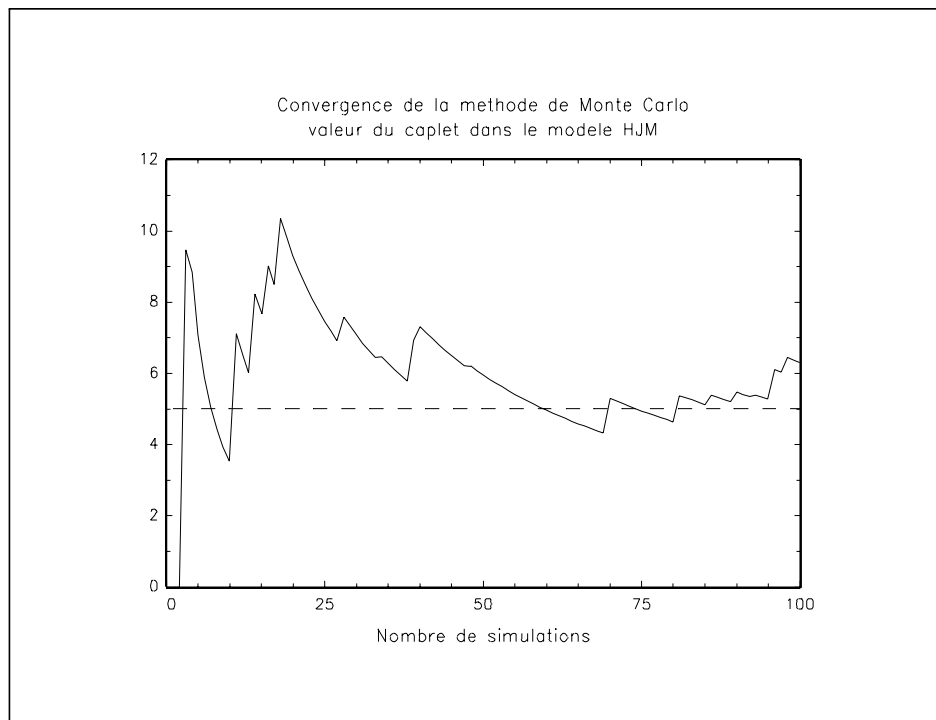
### 7.3.5 Le modèle de HULL et WHITE [1993]

C'est un modèle d'arbre trinomial construit à partir du modèle généralisé de Vasicek (HULL et WHITE [1990]) :

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t)) dt + \sigma dW(t) \tag{7.75}$$

Pour prendre en compte l'effet de retour à la moyenne, Hull et White considère trois types de branchement :





Graphique 7.12

(a) est le branchement classique d'un arbre trinomial. La variable d'état peut augmenter ( $j = 1$ ), diminuer ( $j = -1$ ) ou rester stable ( $j = 0$ ). Ce type de branchement n'est pas approprié lorsque les taux sont trop bas ou trop élevés du fait de l'effet de retour à la moyenne. Le branchement (b) convient beaucoup mieux par exemple si les taux sont bas. Dans ce cas, la variable d'état peut fortement augmenter ( $j = 2$ ). Le branchement (c) concerne les taux élevés et la variable d'état peut fortement diminuer ( $j = -2$ ).

HULL et WHITE [1994a] propose l'algorithme suivant<sup>14</sup> pour construire l'arbre trinomial. Nous considérons une seconde variable d'état  $r^*$  qui satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

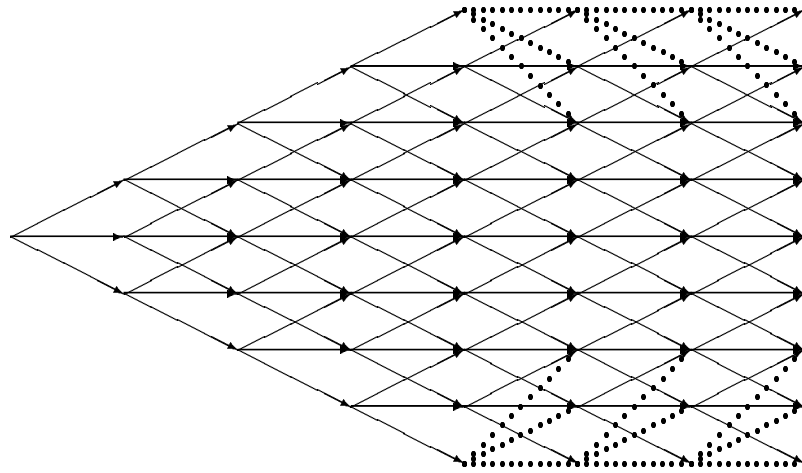
$$dr^*(t) = -ar^*(t) dt + \sigma dW(t) \quad (7.76)$$

La discrétisation de ce processus implique que

$$r^*(t + \Delta t) - r^*(t) \sim \mathcal{N}(-ar^*(t) \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (7.77)$$

Soit  $(i, j)$  le nœud défini par  $i$  la période et  $j$  l'état de la nature. Par exemple, si nous considérons l'arbre suivant :

<sup>14</sup>Nous utilisons la présentation faite par HULL [1997].



nous avons

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & (4, 4) & (5, 4) & (6, 4) & (7, 4) \\
 & & & & (3, 3) & (4, 3) & (5, 3) & (6, 3) & (7, 3) \\
 & & (2, 2) & (3, 2) & (4, 2) & (5, 2) & (6, 2) & (7, 2) \\
 (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) & (4, 1) & (5, 1) & (6, 1) & (7, 1) \\
 (0, 0) & (1, 0) & (2, 0) & (3, 0) & (4, 0) & (5, 0) & (6, 0) & (7, 0) \\
 & (1, -1) & (2, -1) & (3, -1) & (4, -1) & (5, -1) & (6, -1) & (7, -1) \\
 & & (2, -2) & (3, -2) & (4, -2) & (5, -2) & (6, -2) & (7, -2) \\
 & & & (3, -3) & (4, -3) & (5, -3) & (6, -3) & (7, -3) \\
 & & & & (4, -4) & (5, -4) & (6, -4) & (7, -4)
 \end{array}$$

Dans une première étape, nous construisons l'arbre trinomial des probabilités  $p(i, j, i', j')$  de transition, du nœud  $(i, j)$  au nœud  $(i', j')$ . Hull et White montrent que celles-ci dépendent de l'état de la nature et du type de branchement. Nous avons

(a)	(b)	(c)
$p(i, j, i + 1, j + 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t - aj \Delta t)$	$p(i, j, i + 1, j + 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t + aj \Delta t)$	$p(i, j, i + 1, j) = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t - 3aj \Delta t)$
$p(i, j, i + 1, j) = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \Delta t$	$p(i, j, i + 1, j + 1) = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t - 2aj \Delta t$	$p(i, j, i + 1, j - 1) = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t + 2aj \Delta t$
$p(i, j, i + 1, j - 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t + aj \Delta t)$	$p(i, j, i + 1, j) = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t + 3aj \Delta t)$	$p(i, j, i + 1, j - 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t - aj \Delta t)$

Les branchements (b) et (c) interviennent lorsque  $j \geq j_{\min}$  et  $j \leq j_{\max}$ . Ils montrent que ces probabilités sont toujours positives si

$$j_{\max} = -j_{\min} = \left\lfloor \frac{0.184}{a\Delta t} \right\rfloor \quad (7.78)$$

Pour chaque nœud  $(i, j)$ , nous associons la valeur  $r^*(i, j)$  prise par la variable  $r^*$ . Celle-ci est égale à

$$r^*(i, j) = j\Delta r^* \quad (7.79)$$

Hull et White préconisent de prendre  $\Delta r^*$  égal à  $\sigma\sqrt{3\Delta t}$ . La seconde étape consiste à construire l'arbre de  $r$  à partir de l'arbre de  $r^*$ . Soit  $P(i)$  la valeur du coupon zéro de maturité  $i\Delta t$ . Les auteurs montrent alors que

$$r(i, j) = \alpha(i) + r^*(i, j) \quad (7.80)$$

avec

$$\alpha(i) = \frac{\ln \sum_j Q(i, j) e^{-j\Delta r^*\Delta t} - \ln P(i+1)}{\Delta t} \quad (7.81)$$

et<sup>15</sup>

$$Q(i+1, j) = \sum_k Q(i, k) p(i, k, i+1, j) \exp[-(\alpha(i) + k\Delta r^*)\Delta t] \quad (7.82)$$

Nous avons implémenté le modèle de Hull et White dans la bibliothèque **SPT**. Il correspond à la procédure `HullWhite` dont la syntaxe est

```
arbreHW = HullWhite(CouponZero, a, sigma, deltaT);
```

La matrice `arbreHW` comporte 6 colonnes. Elle se présente de la façon suivante :

$$i \quad \vdots \quad k \quad \vdots \quad i+1 \quad \vdots \quad j \quad \vdots \quad p(i, k, i+1, j) \quad \vdots \quad r(i, j)$$

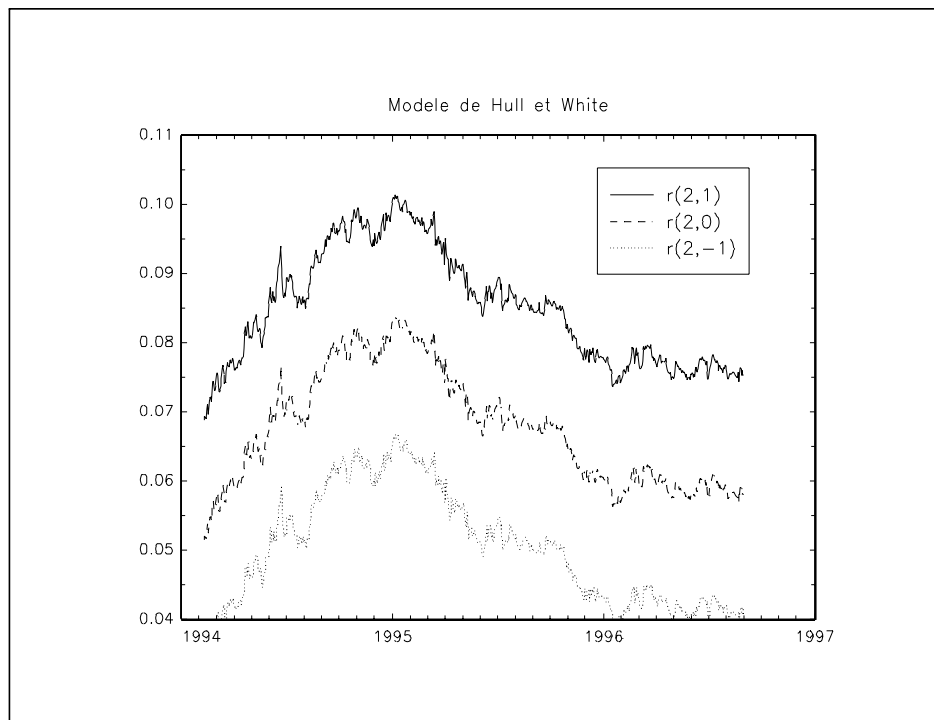
Elle indique donc le nœud  $(i, k)$  de départ, le nœud  $(i, j)$  d'arrivée, la probabilité de transition  $p(i, k, i+1, j)$  et la valeur  $r(i, j)$  de taux d'intérêt pour le nœud d'arrivée.

Nous reprenons l'exemple qui illustre le modèle de Ho et Lee. Nous posons  $\sigma = 0.04$  et  $\Delta t = 1$ . Pour  $a = 0.1$ , nous avons

		$r_{2,2} = 30.1\%$	$r_{3,2} = 30.9\%$
	$r_{1,1} = 19.7\%$	$r_{2,1} = 23.1\%$	$r_{3,1} = 24.0\%$
$r_{0,0} = 3.56\%$	$r_{1,0} = 12.8\%$	$r_{2,0} = 16.2\%$	$r_{3,0} = 17.0\%$
	$r_{1,-1} = 5.84\%$	$r_{2,-1} = 9.27\%$	$r_{3,-1} = 10.1\%$
		$r_{2,-2} = 2.34\%$	$r_{3,-2} = 3.19\%$

---

<sup>15</sup> $Q(0, 0)$  est initialisé à 1.



Graphique 7.13

Les valeurs des caplets sont 0, 0.7555, 2.2394 et 2.5155. La prime du cap est donc égale à 5.51 francs. Si nous prenons un coefficient de retour à la moyenne plus important, par exemple  $a = 0.9$ , nous avons

$$\begin{array}{llll}
 r_{1,1} = 19.7\% & r_{2,1} = 22.9\% & r_{3,1} = 23.5\% & \\
 r_{0,0} = 3.56\% & r_{1,0} = 12.8\% & r_{2,0} = 16.0\% & r_{3,0} = 16.6\% \\
 r_{1,-1} = 5.84\% & r_{2,-1} = 9.08\% & r_{3,-1} = 9.63\% & 
 \end{array}$$

Dans ce cas, les valeurs des caplets sont 0, 0.7555, 1.6928 et 1.7744 et la prime du cap est égale à 4.22 francs.

Dans la pratique, le modèle de BLACK, DERMAN et TOY [1990] peut être “approximé” par celui de HULL et WHITE [1993] lorsque le nombre de périodes est faible. Les graphiques (7.9) et (7.13) présentent l'évolution des taux un an pour les modèles BDT et HW et pour la période allant du 2 février 1994 au 30 août 1996. Nous avons pris  $\sigma_1 = 0.10$  et  $\sigma_2 = 0.11$  pour BDT et  $a = 0.8$  et  $\sigma = 0.01$  pour HW.

Il existe d'autres modèles d'arbre qui prennent en compte l'effet de retour à la moyenne. Par exemple, BLACK et KARASINSKI [1991] considèrent que le taux d'intérêt est un processus log-normal

$$d \ln r(t) = \phi(t) [\ln \mu(t) - \ln r(t)] dt + \sigma(t) dW(t) \quad (7.83)$$

Pour construire l'arbre binomial, nous considérons la discrétisation suivante

$$\ln r(t_{n+1}) \bullet \begin{cases} \nearrow \ln r(t_n) + \phi(t_n) [\ln \mu(t_n) - \ln r(t_n)] (t_{n+1} - t_n) + \sigma(t_n) \sqrt{t_{n+1} - t_n} \\ \searrow \ln r(t_n) + \phi(t_n) [\ln \mu(t_n) - \ln r(t_n)] (t_{n+1} - t_n) - \sigma(t_n) \sqrt{t_{n+1} - t_n} \end{cases} \quad (7.84)$$

Nous obtenons alors un arbre dont la forme est la suivante

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & H \\ & & & & & & \nearrow \\ & & & & D & \bullet & \searrow \\ & & & & & & I \\ & & & & & & J \\ & & & & & & \nearrow \\ & & & & E & \bullet & \searrow \\ & & & & F & \bullet & \searrow \\ & & & & & & K \\ & & & & & & L \\ & & & & & & \nearrow \\ & & & & G & \bullet & \searrow \\ & & & & & & M \end{array} \quad (7.85)$$

Pour vérifier les contraintes  $E = F$ ,  $I = J$  et  $K = L$  ("recombining tree"), Black et Karasinski montrent que  $(t_{n+1} - t_n)$  doit satisfaire la condition suivante<sup>16</sup>

$$t_{n+1} - t_n = \frac{4(t_n - t_{n-1}) \left( \frac{\sigma(t_{n-1})}{\sigma(t_n)} \right)^2}{\left( 1 + \sqrt{1 + 4(t_n - t_{n-1}) \left( \frac{\sigma(t_{n-1})}{\sigma(t_n)} \right)^2} \phi(t_n) \right)^2} \quad (7.86)$$

Ce modèle permet un ajustement des structures par terme des taux d'intérêt, des volatilités et des primes de cap. Pour calibrer le modèle, nous pouvons chercher les fonctions  $\phi(t)$ ,  $\mu(t)$  et  $\sigma(t)$  qui permettent cet ajustement. C'est un modèle qui est donc intéressant. Cependant, l'arbre est difficile à interpréter. Considérons un exemple. Posons  $\phi(t) = 0.7$ ,  $\mu(t) = 0.10$  et  $\sigma(t) = 0.2$ . Nous supposons que la position initiale du taux d'intérêt est 5%. Pour  $t \in [0, 3]$ , nous avons alors

$$\begin{array}{ccc} & & 16.11\% \\ & & 16.10\% \\ & 17.65\% & 12.70\% \\ 5\% & 11.72\% & \\ & 10.00\% & 10.00\% \\ & 8.53\% & \\ & & 7.88\% \end{array}$$

Les taux 16.11%, 12.70%, 10.00% et 7.88% sont les taux d'intérêt annualisés pour  $t$  égal à trois ans. En revanche, les taux 17.65% et 10.00% ne sont pas les taux

<sup>16</sup>La probabilité binomiale neutre au risque est égale à 0.5.



annualisés pour  $t$  égal à deux ans, mais pour  $t$  égal à 2.015 années. Les dates des différents nœuds sont en fait les suivantes

$$0 \quad ; \quad 2.015 \quad ; \quad 2.645 \quad ; \quad 3$$

Rien ne nous empêche de choisir d'autres dates qui vérifient la condition (7.86). Par exemple, pour le système de dates suivant

$$0 \quad ; \quad 2.334 \quad ; \quad 3$$

nous obtenons l'arbre suivant

		17.52%
	21.07%	
5%		12.65%
	11.43%	
		9.12%

Pour chaque système de dates, nous avons donc un arbre différent. Le nombre de périodes de l'arbre peut donc prendre toutes les valeurs entre 2 et  $\infty$  ! Si nous prenons quatre périodes, nous avons

			15.0%
		14.5%	
	14.0%		12.4%
5%	13.6%	11.5%	
	10.4%		10.2%
	8.26%	9.15%	
		7.67%	8.43%
		7.27%	
			6.95%

avec le système de dates suivant

$$0 \quad ; \quad 1.810 \quad ; \quad 2.414 \quad ; \quad 2.760 \quad ; \quad 3$$

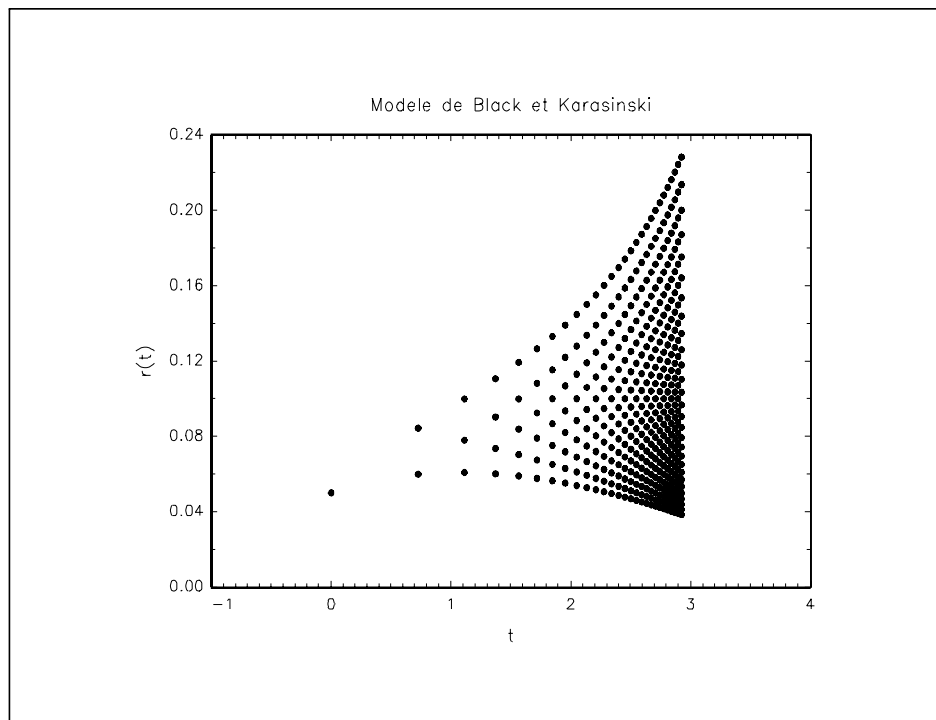
Combien de périodes faudrait-il prendre en compte pour que la deuxième date de l'arbre<sup>17</sup> soit égale à un ? La réponse est **trente** périodes ! Le caractère non-linéaire du temps dans le modèle de Black et Karasinski est un aspect difficile à comprendre et explique en partie que ce modèle intéresse beaucoup plus les théoriciens que les praticiens de la finance.

## 7.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous présentons quelques exemples d'utilisation de la courbe des taux pour la valorisation des actifs financiers. Ce domaine de recherche

---

<sup>17</sup>Cet arbre est représenté sur le graphique (7.14)



Graphique 7.14

est relativement jeune par rapport à celui de la valorisation des options classiques. Cependant, les avancées sont rapides et les praticiens de la finance utilisent de plus en plus la mesure de probabilité forward neutre, la méthodologie HJM ou les modèles de déformation de la courbe des taux. Dans ce chapitre, la frontière entre **modélisation** et **implémentation numérique** est beaucoup moins marquée et ces exemples, je l'espère, montrent que ces deux aspects sont indissociables l'un de l'autre.

## 7.5 Annexes

### 7.5.1 Equation fondamentale de la finance

Nous pouvons prolonger facilement les résultats du chapitre 5 sur la valorisation d'une obligation à coupon zéro à la valorisation d'un actif contingent quelconque.

Six hypothèses définissent le modèle :

1. Le marché est viable et complet. Nous supposons de plus, qu'il est parfaitement efficient et sans friction (absence de coût de transaction).
2. Le prix de l'actif  $P(t)$  est entièrement déterminé par le vecteur  $X(t)$  des  $M$

variables d'état. Nous avons

$$P(t) = P(t, X(t)) \quad (7.87)$$

3. Le vecteur des variables d'état  $X(t)$  est un processus de diffusion dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique vectorielle suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \Sigma(t, X(t)) dW(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (7.88)$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de dimension  $N$  et de matrice de covariance  $\rho t$  sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ .

4. Il existe un actif sans risque dont le rendement  $r$  dépend du vecteur des variables d'état  $X(t)$

$$r = r(t, X(t)) \quad (7.89)$$

5. La date de remboursement de l'actif est  $T$  et la valeur de remboursement  $B$  dépend de la position des variables d'état à l'instant  $T$ . Nous avons

$$B = P(T) = B(T, X(T)) \quad (7.90)$$

6. L'actif distribue un revenu continu  $b$  qui est déterminé par les variables d'état. Nous avons

$$b = b(t, X(t)) \quad (7.91)$$

**Théorème 24** *Dans un modèle d'arbitrage à  $M$  facteurs  $X$  vérifiant les six hypothèses précédentes, le prix de l'actif financier vérifie l'équation de valorisation suivante*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \Sigma(t, X)^\top P_{XX}(t, X) \Sigma(t, X) \rho \right] \\ + \left[ \mu(t, X)^\top - \lambda(t)^\top \Sigma(t, X)^\top \right] P_X(t, X) + P_t(t, X) - r(t, X) P(t, X) + b(t, X) \\ P(T) = B(T, X(T)) \end{cases} = 0 \quad (7.92)$$

**Théorème 25** *Dans un modèle d'arbitrage à  $M$  facteurs vérifiant ces six hypothèses, le prix de l'actif financier est donné par la formule suivante*

$$\begin{aligned} P(t_0) = & E' \left[ B(t, X(T)) \exp \left( - \int_{t_0}^T r(t, X(t)) dt \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \\ & + E' \left[ \int_{t_0}^T b(t, X(t)) \exp \left( - \int_{t_0}^t r(s, X(s)) ds \right) dt \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \end{aligned} \quad (7.93)$$

avec sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$

$$\begin{cases} dX(t) &= [\mu(t, X) - \Sigma(t, X) \lambda(t)] dt + \Sigma(t, X) dW'(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases} \quad (7.94)$$

## 7.5.2 Primes des caps et floors dans le modèle de Vasicek [1977]

Nous rappelons que nous avons

$$\begin{cases} dr(t) &= a(b - r(t)) dt + \sigma dW(t) \\ r(t_0) &= r_0 \end{cases} \quad (7.95)$$

avec  $W(t)$  est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ . Dans le quatrième chapitre, nous avons montré que  $r(t)|\mathcal{F}_{t_0}$  a une fonction de densité gaussienne

$$f(r(t) = x | \mathcal{F}_{t_0}) = \frac{1}{\sigma(t) \sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{x - m(t)}{\sigma(t)} \right)^2 \quad (7.96)$$

avec

$$m(t) = r_0 e^{-a(t-t_0)} + b' (1 - e^{-a(t-t_0)}) \quad (7.97)$$

et

$$\sigma(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \sqrt{1 - e^{-2a(t-t_0)}} \quad (7.98)$$

La valeur du caplet est égale à

$$\text{caplet} = E' \left[ \max(0, r(t) - r^*) \exp \left( - \int_{t_0}^t r(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (7.99)$$

En négligeant le terme de covariance, nous avons

$$\text{caplet} = P_{t_0}^c(t - t_0) E' [\max(0, r(t) - r^*) | \mathcal{F}_{t_0}] \quad (7.100)$$

Nous en déduisons que

$$\text{caplet} = P_{t_0}^c(t - t_0) \int_{r^*}^{\infty} (x - r^*) \frac{1}{\sigma(t) \sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} \left( \frac{x - m(t)}{\sigma(t)} \right)^2 dx \quad (7.101)$$

Posons  $y = \frac{x - m(t)}{\sigma(t)}$ , nous obtenons

$$\text{caplet} = P_{t_0}^c(t - t_0) \int_{\frac{r^* - m(t)}{\sigma(t)}}^{\infty} (m(t) - r^* + \sigma(t)y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} y^2 dy \quad (7.102)$$

d'où

$$\text{caplet} = P_{t_0}^c(t - t_0) \left[ (m(t) - r^*) \left( 1 - \Phi \left( \frac{r^* - m(t)}{\sigma(t)} \right) \right) + \frac{\sigma(t)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{r^* - m(t)}{\sigma(t)} \right)^2 \right) \right] \quad (7.103)$$

Pour le floor, nous avons

$$\text{floor} = P_{t_0}^c(t - t_0) E' [\max(0, r^* - r(t)) | \mathcal{F}_{t_0}] \quad (7.104)$$

En appliquant la même démarche de résolution que pour le cap, nous obtenons l'expression (7.32).

### 7.5.3 Le modèle de HO et LEE [1986]

#### 7.5.3.1 Détermination des fonctions perturbatrices $h(\tau)$ et $h^*(\tau)$

Nous avons

$$\mathcal{P}_i^{(n)} = \alpha_1 P_i^{(n)}(\tau_1) + \alpha_2 P_i^{(n)}(\tau_2) \quad (7.105)$$

A la  $n + 1$ -ième période, la valeur du portefeuille peut prendre deux valeurs selon l'état de la nature

$$\mathcal{P}_i^{(n)} \bullet \begin{cases} \mathcal{P}_{i+1}^{(n+1)} = \alpha_1 P_{i+1}^{(n+1)}(\tau_1 - 1) + \alpha_2 P_{i+1}^{(n+1)}(\tau_2 - 1) \\ \mathcal{P}_i^{(n+1)} = \alpha_1 P_i^{(n+1)}(\tau_1 - 1) + \alpha_2 P_i^{(n+1)}(\tau_2 - 1) \end{cases} \quad (7.106)$$

Soit  $R[\mathcal{P}^{(n+1)} | \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_i^{(n)}]$  le rendement du portefeuille à l'instant  $n + 1$  sachant que celui-ci est égal à  $\mathcal{P}_i^{(n)}$  à l'instant  $n$ . Nous avons

$$R[\mathcal{P}^{(n+1)} | \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_i^{(n)}] = -\frac{\mathcal{P}_i^{(n)}}{P_i^{(n)}(1)} + \mathcal{P}^{(n+1)} \quad (7.107)$$

avec  $\mathcal{P}^{(n+1)}$  une variable aléatoire de Bernoulli.  $\mathcal{P}$  est un portefeuille d'arbitrage si nous vérifions

$$\begin{cases} E[R[\mathcal{P}^{(n+1)} | \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_i^{(n)}]] = 0 \\ \text{var}[R[\mathcal{P}^{(n+1)} | \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_i^{(n)}]] = 0 \end{cases} \quad (7.108)$$

La seconde égalité implique que

$$\mathcal{P}_{i+1}^{(n+1)} = \mathcal{P}_i^{(n+1)} \quad (7.109)$$

d'où

$$\alpha_1 [P_{i+1}^{(n+1)}(\tau_1 - 1) - P_i^{(n+1)}(\tau_1 - 1)] + \alpha_2 [P_{i+1}^{(n+1)}(\tau_2 - 1) - P_i^{(n+1)}(\tau_2 - 1)] = 0 \quad (7.110)$$

La première égalité est alors vérifiée si

$$-\frac{\alpha_1 P_i^{(n)}(\tau_1) + \alpha_2 P_i^{(n)}(\tau_2)}{P_i^{(n)}(1)} + \alpha_1 P_i^{(n+1)}(\tau_1 - 1) + \alpha_2 P_i^{(n+1)}(\tau_2 - 1) = 0 \quad (7.111)$$

d'où

$$\alpha_1 \left[ P_i^{(n+1)}(\tau_1 - 1) - \frac{P_i^{(n)}(\tau_1)}{P_i^{(n)}(1)} \right] + \alpha_2 \left[ P_i^{(n+1)}(\tau_2 - 1) - \frac{P_i^{(n)}(\tau_2)}{P_i^{(n)}(1)} \right] = 0 \quad (7.112)$$

Pour déterminer les valeurs optimales de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , nous devons résoudre le système constitué des équations (7.110) et (7.112). En utilisant les relations

$$P_{i+1}^{(n+1)}(\tau - 1) = \frac{P_i^{(n)}(\tau)}{P_i^{(n)}(1)} h(\tau - 1) \quad (7.113)$$

et

$$P_i^{(n+1)}(\tau - 1) = \frac{P_i^{(n)}(\tau)}{P_i^{(n)}(1)} h^*(\tau - 1) \quad (7.114)$$

nous obtenons finalement le système suivant

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{P_i^{(n)}(\tau_1)}{P_i^{(n)}(1)} (h(\tau_1 - 1) - h^*(\tau_1 - 1)) + \alpha_2 \frac{P_i^{(n)}(\tau_2)}{P_i^{(n)}(1)} (h(\tau_2 - 1) - h^*(\tau_2 - 1)) &= 0 \\ \alpha_1 \frac{P_i^{(n)}(\tau_1)}{P_i^{(n)}(1)} (h^*(\tau_1 - 1) - 1) + \alpha_2 \frac{P_i^{(n)}(\tau_2)}{P_i^{(n)}(1)} (h^*(\tau_2 - 1) - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (7.115)$$

Si le marché financier est complet et viable, il existe un portefeuille d'arbitrage caractérisé par un couple de stratégies non nulles. Le mineur naturel d'ordre deux du système est nul, et il existe un scalaire  $\lambda$  qui vérifie

$$h(\tau) - h^*(\tau) = \lambda(h^*(\tau) - 1) \quad (7.116)$$

Comme  $h(\tau) > 1$  et  $h^*(\tau) < 1$ , nous en déduisons que

$$\lambda = \frac{h(\tau) - h^*(\tau)}{h^*(\tau) - 1} < 0 \quad (7.117)$$

Posons  $\pi = -\lambda^{-1}$ . Nous avons

$$\pi = \frac{1 - h^*(\tau)}{h(\tau) - h^*(\tau)} > 0 \quad (7.118)$$

Considérons une baisse du taux d'intérêt, suivie d'une hausse. Nous avons

$$\begin{aligned} P_{i+1}^{(n+1)}(\tau) &= \frac{P_{i+1}^{(n+1)}(\tau + 1)}{P_{i+1}^{(n+1)}(1)} h^*(\tau) \\ &= \frac{\frac{P_i^{(n)}(\tau+2)}{P_i^{(n)}(1)} h(\tau + 1)}{\frac{P_i^{(n)}(2)}{P_i^{(n)}(1)} h(1)} h^*(\tau) \\ &= \frac{P_i^{(n)}(\tau + 2) h(\tau + 1) h^*(\tau)}{P_i^{(n)}(2) h(1)} \end{aligned} \quad (7.119)$$

Dans le cas d'une hausse du taux d'intérêt, suivie d'une baisse, nous obtenons

$$\begin{aligned}
P_{i+1}^{(n+1)}(\tau) &= \frac{P_i^{(n+1)}(\tau+1)}{P_i^{(n+1)}(1)} h(\tau) \\
&= \frac{\frac{P_i^{(n)}(\tau+2)}{P_i^{(n)}(1)} h^*(\tau+1)}{\frac{P_i^{(n)}(2)}{P_i^{(n)}(1)} h^*(1)} h(\tau) \\
&= \frac{P_i^{(n)}(\tau+2)}{P_i^{(n)}(2)} \frac{h^*(\tau+1) h(\tau)}{h^*(1)}
\end{aligned} \tag{7.120}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{h(\tau+1) h^*(\tau)}{h(1)} = \frac{h^*(\tau+1) h(\tau)}{h^*(1)} \tag{7.121}$$

ou encore

$$\frac{h^*(\tau+1)}{h(\tau+1)} = \frac{h^*(\tau) h^*(1)}{h(\tau) h(1)} \tag{7.122}$$

Posons

$$\delta = \frac{h^*(1)}{h(1)} \tag{7.123}$$

Les fonctions perturbatrices sont alors liées par la relation suivante

$$h^*(\tau) = \delta^\tau h(\tau) \tag{7.124}$$

En remplaçant  $h^*(\tau)$  par cette expression dans l'équation (7.118), nous avons

$$\pi h(\tau) + (1 - \pi) \delta^\tau h(\tau) = 1 \tag{7.125}$$

Nous en déduisons que

$$h(\tau) = \frac{1}{\pi + (1 - \pi) \delta^\tau} \tag{7.126}$$

et

$$h^*(\tau) = \delta^\tau h(\tau) = \frac{\delta^\tau}{\pi + (1 - \pi) \delta^\tau} \tag{7.127}$$

### 7.5.3.2 Interprétation des coefficients $\delta$ et $\pi$

Nous rappelons que

$$\delta = \frac{h^*(1)}{h(1)} = \frac{\text{facteur multiplicatif de baisse}}{\text{facteur multiplicatif de hausse}}$$

Dans le cas où le taux d'intérêt est constant, nous avons  $\delta = 1$ . Si le taux d'intérêt varie fortement,  $h(1)$  prend une valeur positive élevée et  $h^*(1)$  est légèrement supérieur à zéro. Nous avons donc les inégalités

$$0 < \delta \leq 1 \tag{7.128}$$

$\delta$  est un coefficient d'incertitude sur les taux, qui représente le degré de volatilité de ces taux d'intérêt. Dans le cas où  $\delta = 1$ , les treillis d'évolution sont les mêmes que ceux que nous obtenons avec les fonctions d'actualisation implicites calculées à partir de la relation (7.15).

En utilisant la relation

$$\pi h(\tau) + (1 - \pi) h^*(\tau) = 1 \quad (7.129)$$

nous vérifions que

$$P_i^{(n)}(\tau + 1) = P_i^{(n)}(1) \left[ \pi P_{i+1}^{(n+1)}(\tau) + (1 - \pi) P_i^{(n+1)}(\tau) \right] \quad (7.130)$$

Comme les marchés sont complets et viables, nous savons que

$$P_i^{(n)}(\tau + 1) = P_i^{(n)}(1) E' \left[ P^{(n+1)}(\tau) \mid P^{(n)}(\tau) = P_i^{(n)}(\tau + 1) \right] \quad (7.131)$$

L'évolution binomiale du prix de l'obligation à coupon zéro entre les périodes  $n$  et  $n + 1$  est

$$\begin{array}{ccc} P_{i+1}^{(n+1)}(\tau) & & \\ & \searrow & \\ & & \bullet \quad P_i^{(n)}(\tau + 1) \\ & \nearrow & \\ P_i^{(n+1)}(\tau) & & \end{array} \quad (7.132)$$

Nous en déduisons que  $\pi$  est la probabilité binomiale neutre au risque.



# Conclusion générale

La structure par terme des taux d'intérêt constitue actuellement l'un des outils les plus intéressants pour l'analyse et la conduite de la politique monétaire. C'est aussi l'un des pôles de la recherche en finance. Cependant, la conception traditionnelle de la structure par terme en économie est relativement éloignée de celle en finance. Depuis une période relativement récente, l'intérêt de certains économistes pour les modèles financiers de valorisation des actifs a permis le rapprochement des deux conceptions. L'utilisation de ces modèles financiers en économie conduit à reconsidérer la forme même de l'analyse. Toutefois, le caractère relativement complexe de ces modèles soulève plusieurs problèmes. La thèse aborde les deux problèmes qui nous semblent les plus importants. Le premier problème concerne la modélisation de la structure par terme, car la littérature financière sur ce domaine est relativement importante et il est souvent difficile de s'y retrouver. Le second problème est celui de l'implémentation numérique des modèles : son caractère relativement technique est un obstacle à l'élaboration d'études économiques basées sur de tels modèles.

Nous avons consacré la première partie de la thèse aux aspects économiques de la structure par terme. Cette partie était aussi une approche de la structure par terme **observée**. Comme il n'est pas possible d'observer directement la structure par terme, nous devons recourir à des outils de construction. Selon le paradigme de la théorie des anticipations rationnelles, l'analyse de la structure par terme permet alors de dégager un certain nombre d'informations ayant un contenu économique. Notre étude empirique, comme beaucoup d'autres, montre que cette théorie n'est pas vérifiée. Cependant, le critère de l'erreur quadratique moyenne n'est pas nécessairement un concept compatible avec celui des anticipations rationnelles. Les analyses du contenu informationnel de la structure par terme s'accommodent d'ailleurs assez bien du rejet de l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Celles-ci sont basées sur la détermination des taux à terme implicites, censés révéler les anticipations des agents financiers de taux d'intérêt, d'inflation ou de change. Ils peuvent aussi apparaître comme des indicateurs de la perception de la politique monétaire par les agents financiers. Néanmoins, pour extraire l'information pertinente, il est nécessaire de comprendre comment se déforme la courbe des taux. L'analyse facto-

rielle classique montre l'existence de deux facteurs principaux, un facteur de niveau et un facteur de spread, mais la prise en compte de l'environnement international peut conduire à reconsidérer cette analyse.

La seconde partie a été consacrée aux aspects financiers de la structure par terme. La notion de facteur est abondamment utilisée en théorie financière et la plupart des modèles financiers de structure par terme sont des modèles à un seul facteur. Cependant, ils expliquent difficilement les prix des actifs (CANABARRO [1995]). La prise en compte de plusieurs facteurs conduit à une modélisation plus pertinente de la structure par terme **théorique**. Il existe aussi une autre famille de modèles dont le cadre d'analyse est l'équilibre intertemporel (COX, INGERSOLL et ROSS [1985a]). Même si les fondements de ces modèles sont différents, la théorie financière de la structure par terme est relativement unifiée par rapport à la théorie économique. Nous avons montré ainsi que nous pouvons interpréter les modèles d'équilibre comme des modèles factoriels. Le contraire est aussi possible (BERARDI et ESPOSITO [1995]) :

*In this paper we aim to show that, in spite of their variety, most of the multifactor specifications of the term structure might be traced back to a common general equilibrium model, based on an economy of the Cox, Ingersoll et Ross type.*

Le choix d'un modèle doit reposer uniquement sur son réalisme. Hélas, pour de nombreux modèles, nous ne disposons pas de bases de données sur les variables d'état, qui sont généralement inobservables. Notre étude économétrique porte donc sur les modèles financiers dont la seule variable d'état est le taux d'intérêt instantané. Il ressort de cette étude que des processus non stationnaires semblent plus appropriés que les processus stationnaires. Une des explications semble être la mauvaise spécification de ces modèles, c'est-à-dire la prise en compte d'un seul facteur. La principale motivation du développement de ces modèles est la valorisation des obligations. Or, la structure par terme est non seulement liée au marché obligataire, mais aussi à tous les marchés d'actifs contingents au taux d'intérêt. Avec la valorisation de ces actifs dérivés apparaît une troisième famille de modèles de structure par terme, qui sont les modèles de déformation de la courbe des taux. A la différence des modèles précédents, les modèles de déformation utilisent la courbe des taux observée pour en déduire des trajectoires futures du taux d'intérêt. La popularité de ces modèles doit beaucoup à leur utilisation quotidienne par les spécialistes de la gestion de portefeuille et ceux de la valorisation des actifs dérivés. Par exemple, avant même la publication de l'article HJM en 1992 dans *Econometrica*, le modèle

de Heath, Jarrow et Morton est utilisé depuis 1990 par BARRA *portfolio* (KAHN [1990a,1990b]) et c'est l'implémentation des modèles de Hull et White et de Black, Derman et Toy qui a permis à Lacima Consultants de se développer. Les modèles financiers de structure par terme ne sont donc pas uniquement théoriques : ce sont avant tout des modèles utiles en finance.

L'intérêt des économistes pour ces modèles se justifie parfaitement. Leur utilisation peut compléter celle traditionnelle de l'information contenue dans les taux à terme pour construire des indicateurs pour la politique monétaire. L'idée sous-jacente est que les prix des actifs reflètent les anticipations des agents financiers. Il est vrai qu'en général, les prix demandés ou offerts sont un subtil mélange de mathématiques et d'intuition personnelle. En particulier, les prix observés sur les marchés de taux dépendent **fortement** des anticipations de taux d'intérêt. Par exemple, dans une présentation sur les swaps TEC, TME et CMS, GUILLERM et JEANNE [1996] expliquent que :

*L'investisseur en obligations TME qui refinance sa position au jour le jour perçoit donc chaque année un coupon égal à une moyenne de taux long terme pendant l'année écoulée... La situation lui est donc d'autant plus favorable que la courbe des taux est fortement ascendante, se détériore au fur et à mesure qu'elle s'aplatit et devient mauvaise lorsque les taux longs sont inférieurs aux taux courts.*

*En réalité, le prix de ces obligations s'ajuste non seulement en fonction de la structure actuelle de la courbe des taux, mais également au regard des anticipations futures.*

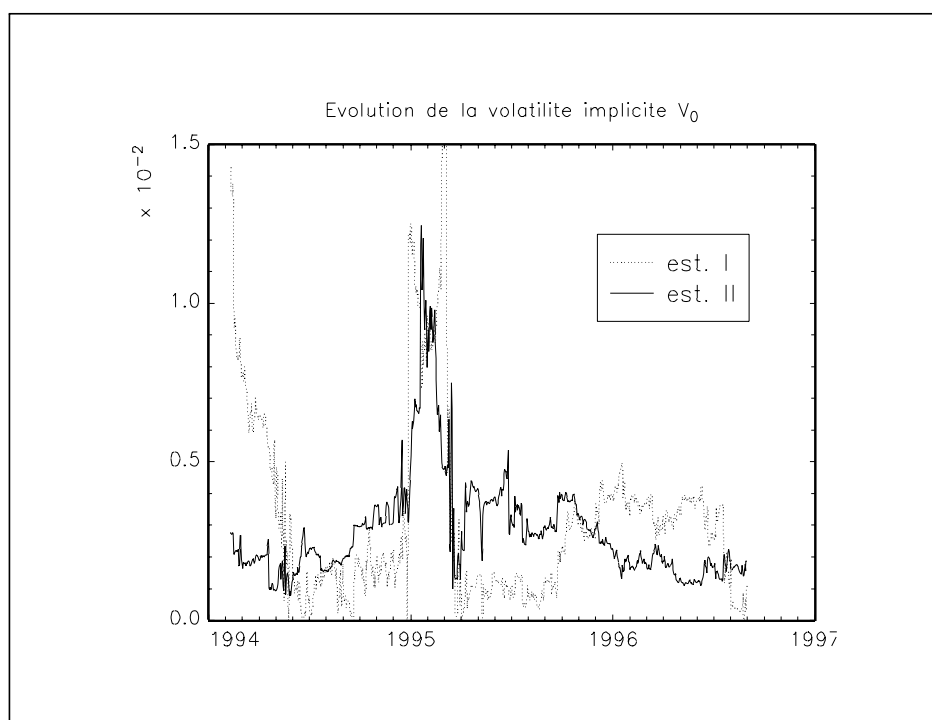
Ces anticipations de taux sont dans de nombreux cas liées à la politique monétaire. Un peu plus loin, les auteurs ajoutent :

*Le prix et donc la marge par rapport au TME de ces titres dépend donc autant des anticipations futures, quant à la structure de la courbe, que de l'écart actuel entre un taux long terme et un taux de refinancement : c'est ainsi qu'à la fin de la période d'inversion de la courbe des taux mi-1993, les marges des obligations TME se traitaient quand même en négatif, le marché anticipant la fin d'une politique monétaire très restrictive et donc un retour rapide des taux courts à un niveau inférieur aux rendements long terme.*

L'utilisation de l'information contenue dans les actifs dérivés n'est pas une idée nouvelle. Elle a été brillamment exploitée par BATES [1991] en ce qui concerne la

crise de 1987. L'extraction d'information à partir des marchés de taux est beaucoup plus récente. Généralement, ces procédures d'extraction sont malheureusement construites sans utiliser la structure par terme actuelle des taux, puisque la plupart sont basées sur le modèle de BLACK [1976] qui fait l'hypothèse d'une structure par terme plate. Pourtant, il existe au moins deux façons d'utiliser les modèles théoriques de structure par terme pour extraire des informations pour la politique monétaire.

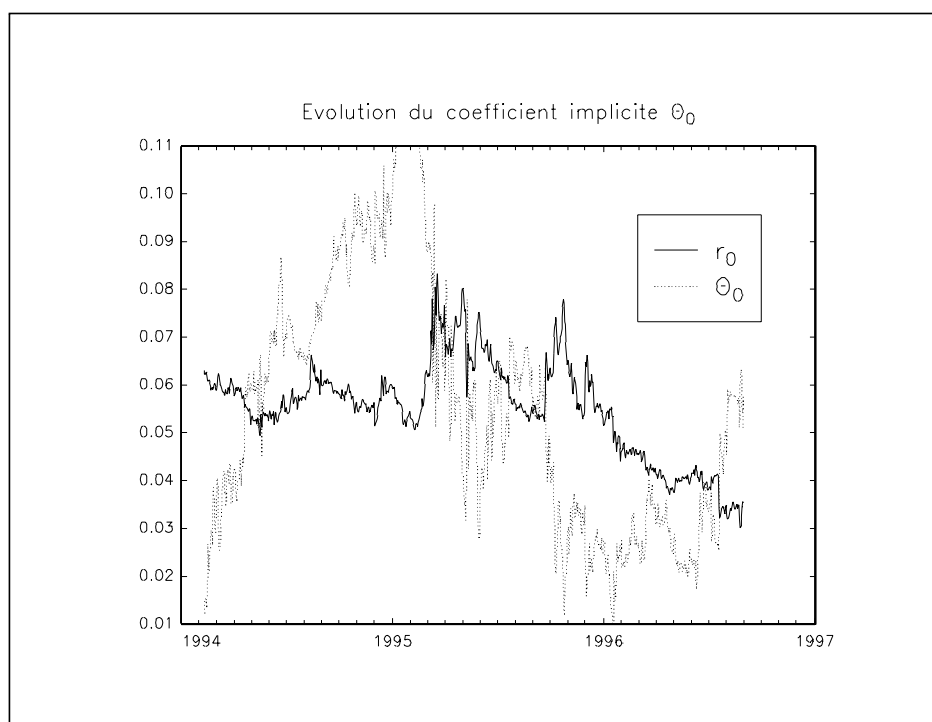
Une première façon est d'employer la méthode des coefficients implicites directement à partir de la structure par terme des taux. Dans quelques cas, nous pouvons interpréter assez facilement ces coefficients (par exemple, le coefficient de retour à la moyenne du modèle de Vasicek). Dans d'autres cas, ces coefficients implicites permettent de construire d'autres coefficients plus *lisibles* (par exemple, la moyenne et la variance des distributions de long-terme du taux instantané  $r(t)$  et de la variance locale  $V(t)$  dans le modèle de Longstaff et Schwartz). Dans tous les cas, nous pouvons utiliser ces coefficients pour construire les trajectoires futures du taux court. Voyons deux exemples à titre illustratif. A partir des structures par terme observées, nous avons estimé les coefficients implicites du modèle de Longstaff et Schwartz. La première estimation correspond à la méthode de DAHLQUIST et SVENSSON [1996]. La seconde estimation tient compte des contraintes d'inégalités que doit satisfaire le modèle (LONGSTAFF et SCHWARTZ [1993]). Nous présentons l'évolution du coefficient implicite  $V_0$ . Il est intéressant de noter que la hausse de  $V_0$  d'octobre 1994 à février 1995 précède celle du taux court et correspond à une instabilité sur les marchés des taux longs.



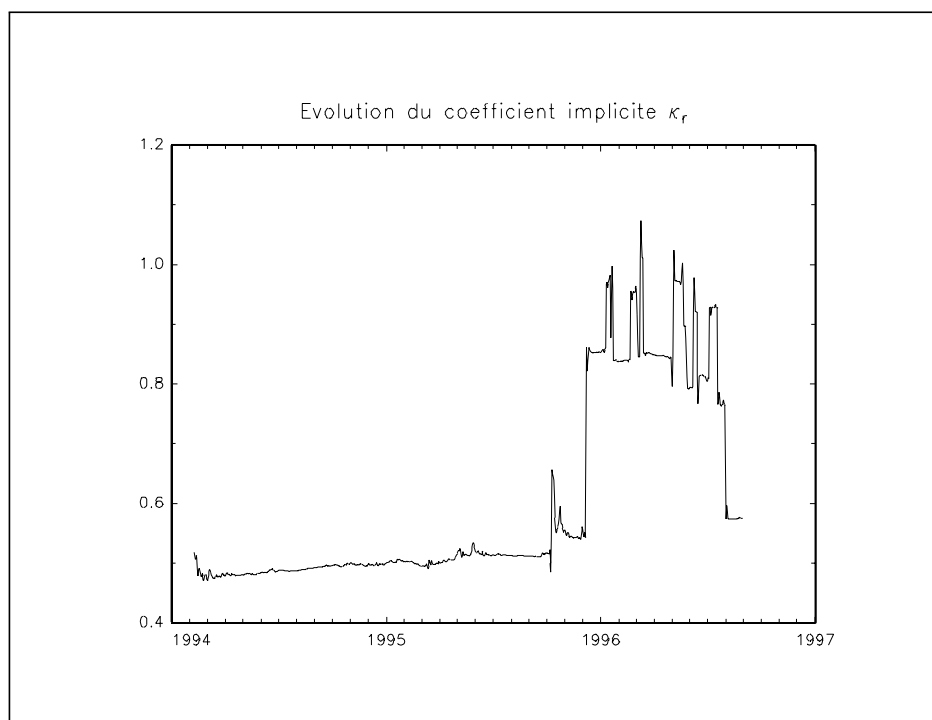
Le deuxième exemple utilise une version simplifiée du modèle de Balduzzi, Das, Foresi et Sundaram. Nous avons

$$\begin{bmatrix} dr(t) \\ d\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_r (\theta(t) - r(t)) \\ \bar{\theta} - \theta(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{v_0} & 0 \\ 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix}$$

La lecture du graphique de l'évolution du coefficient implicite  $\theta_0$  et de celui de la pente observée semble indiquer que la détermination de la pente est liée à un phénomène de retour à la moyenne. Nous notons aussi que l'évolution du coefficient implicite  $\kappa_r$  se modifie profondément à la fin de l'année 1995 et que ce paramètre d'ajustement entre le taux court  $r_0$  et le taux d'attraction  $\theta_0$  (qui est beaucoup plus faible que  $r_0$ ) est plus élevé. Ceci peut expliquer la forte baisse du taux court pendant le premier semestre 1996.



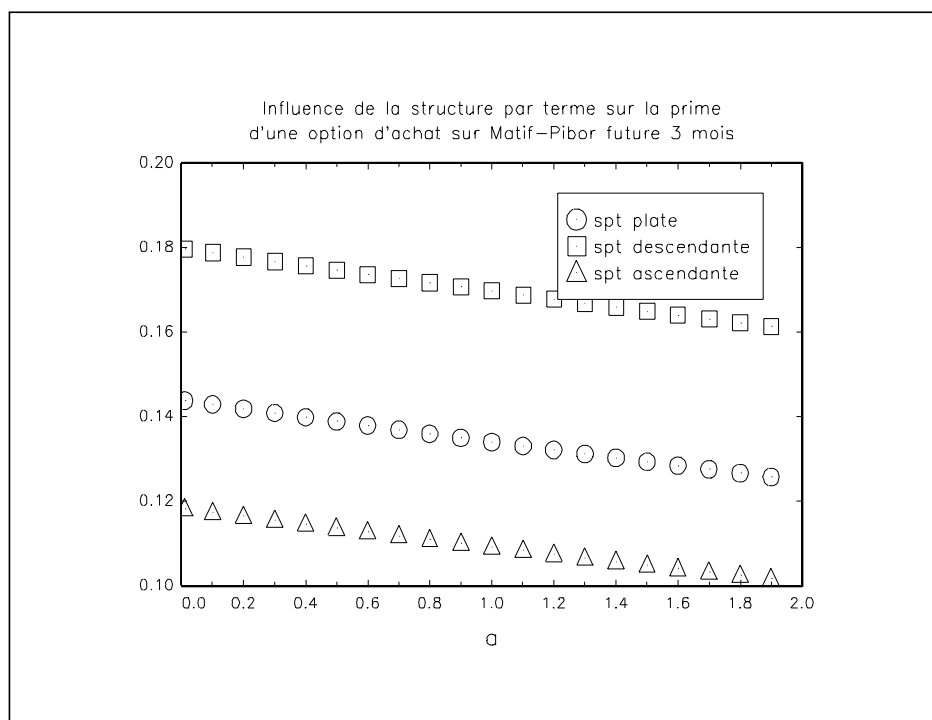
Une deuxième façon beaucoup plus intéressante d'utiliser les modèles financiers concerne les actifs dérivés sur taux. L'idée sous-jacente est de dériver des prix des actifs contingents les coefficients implicites des modèles théoriques de *pricing* ou des caractéristiques intéressantes. Par exemple, nous pouvons utiliser le modèle de Black, Derman et Toy pour extraire la structure par terme implicite des volatilités. Nous pouvons aussi utiliser le modèle de Jamshidian pour construire la courbe "volatility smile". Voici une liste non exhaustive d'actifs contingents au taux d'intérêt qui se prêtent à ce type d'analyse :



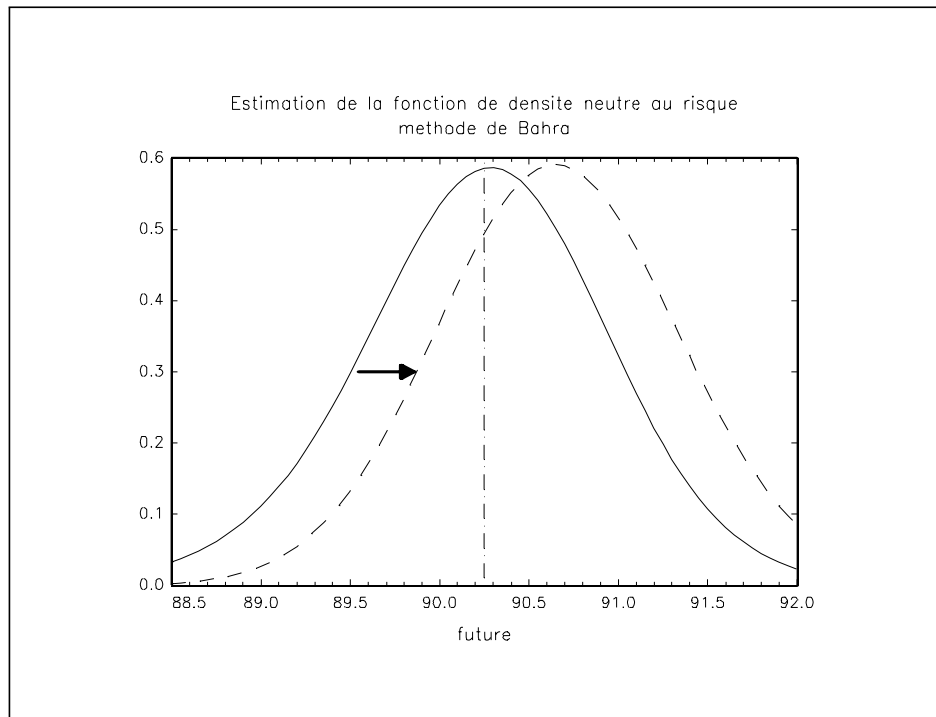
Option sur différence de taux	Forward rate agreement
Option multiple à taux plafond	Cap
Option multiple à taux plancher	Floor
Option sur swap d'intérêts	Swaption
Option sur cap	Caption
Option sur floor	Floortion
Option sur obligation	Bond option
Option sur notionnel	

Nous pouvons aussi employer ces modèles à la place de celui de Black. Même si celui-ci est souvent employé pour les actifs dérivés sur taux, il ne prend en compte ni la structure par terme actuelle des taux, ni le caractère de retour à la moyenne des taux d'intérêt. Une lecture d'information basée sur ce modèle peut donc conduire à de mauvaises interprétations. Prenons un exemple pour illustrer notre propos. Le 2 janvier 1992, la prime de l'option sur Matif-Pibor *future* 3 mois valait 0.15 pour un prix d'exercice égal à 90.3 (et pour une maturité proche de 0.2). La valeur du sous-jacent était de 90.25, ce qui donne une volatilité implicite de 0.01093. Voyons l'influence de la structure par terme sur la valorisation de cette option. Nous considérons les trois structures par terme suivantes :

Maturité	0.004	0.008	0.012	0.016	0.020
spt. plate	9.75%	9.75%	9.75%	9.75%	9.75%
spt. décroissante	9.75%	9.74%	9.73%	9.72%	9.71%
spt. croissante	9.75%	9.76%	9.77%	9.78%	9.79%



Sur le graphique ci-dessus, la prime d'option est calculée avec le modèle de Hull et White en considérant une valeur de  $\sigma$  égale à la volatilité implicite. Si la structure par terme est décroissante, nous anticipons une baisse du Pibor, donc une hausse du *future*. Il est donc normal d'obtenir une prime supérieure à celle calculée à partir d'une structure par terme plate. Pour cette option d'achat, une structure par terme décroissante entraîne donc une augmentation de la volatilité implicite dans le modèle de Black. Dans le cadre d'une lecture d'information traditionnelle, cette augmentation de la volatilité implicite est associée à une plus grande incertitude sur les marchés ou une augmentation future de la volatilité. Considérons une deuxième lecture d'information erronée. Nous utilisons le modèle de Hull et White avec les paramètres  $a$  et  $\sigma$  égaux à 0.01 et 0.1093 et une maturité égale à six mois. La valeur actuelle du future est 90.25. Nous considérons différents prix d'exercice  $\{89.5 : 0.125 : 91.875\}$ . Nous calculons les vingt primes d'option d'achat pour une structure par terme plate  $\{0.975, 0.975, 0.975, 0.975, 0.975\}$  et pour une structure par terme décroissante  $\{0.975, 0.097, 0.965, 0.96, 0.0955\}$ . Le graphique de la page suivante présente les fonctions de densité neutre au risque du future estimées à partir de la méthode présentée dans BAHRA [1996]. Nous observons un déplacement de cette fonction de densité vers la droite lorsque la courbe des taux est décroissante. Dans le cadre d'une lecture d'information, nous associons ce déplacement à une anticipation de hausse du future, et donc à une anticipation de baisse du taux. Ce n'est pas une nouvelle information, puisque ce phénomène ne fait que traduire l'incorporation de l'information contenue dans la structure par terme dans le mécanisme de *pricing*.



Au terme de cette thèse, nous avons conscience d'avoir posé plus de questions que nous avons donné de réponses. Cependant, nous espérons que le lecteur a perçu l'intérêt d'utiliser les modèles financiers de structure par terme à des fins économiques.



# Bibliographie

- ABKEN, P.A. [1995], Using eurodollar futures options: Gauging the market's view of interest rate movements, *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Atlanta, **80**, 10-30, mars-avril
- ADLER, M. et B. DUMAS [1983], International portfolio choice and corporation finance: A synthesis, *The Journal of Finance*, **38**, 925-984
- AHN, C.M. et H.E. THOMPSON [1988], Jump-diffusion processes and the term structure of interest rates, *The Journal of Finance*, **43**, 155-174
- AÏT-SAHALIA, Y. [1995a], Nonparametric pricing of interest rate derivative securities, *NBER Working Paper*, n° **5345**, novembre
- AÏT-SAHALIA, Y. [1995b], Testing continuous-time models of the spot interest rate, *NBER Working Paper*, n° **5346**, novembre
- AMEMIYA, T. [1985], *Advanced Econometrics*, Basil Blackwell, Oxford
- AMIN, K.I. et R. JARROW [1991], Pricing foreign currency options under stochastic interest rates, *Journal of International Money and Finance*, **10**, 310-329
- AMIN, K.I. et A.J. MORTON [1994], Implied volatility functions in arbitrage-free term structure models, *Journal of Financial Economics*, **35**, 141-180
- ANDERSON, N., F. BREEDON, M. DEACON, A. DERRY et G. MURPHY [1996], *Estimating and Interpreting the Yield Curve*, John Wiley & Sons, Chichester
- AOKI, M. [1987], *State Space Modelling of Time Series*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg
- ARTUS, P. [1987], Structure par terme des taux d'intérêt : théorie et estimations dans le cas français, *Cahiers Économiques et Monétaires*, **27**, 5-48
- ARTUS, P. [1990], Déterminants macroéconomiques de la structure des taux d'intérêt, *Finance*, **11**, 9-32

- ARTUS, P. [1997], La réaction des taux d'intérêt et de la structure des taux d'intérêt aux chocs inflationnistes et à la crédibilité, *Document de Travail*, Caisse des Dépôts et Consignations, n° **1997-02/FI**, mars
- ARTUS, P. et M. KAABI [1993a], L'information prévisionnelle contenue dans la structure par terme des taux d'intérêt en France, *Finance*, **14**, 7-39
- ARTUS, P. et M. KAABI [1993b], Structure par terme des taux d'intérêt et reprise économique, *Document de Travail*, Caisse des Dépôts et Consignations, n° **1993-22/T**, décembre
- ARTUS, P. et M. KAABI [1994], Mimétisme : un modèle théorique simple et une application au cas de la structure des taux d'intérêt aux États-Unis, en Allemagne et en France, *Revue Économique*, **45**, 613-624
- ARTUS, P. et M. KAABI [1995], Les primes de risque jouent-elles un rôle significatif dans la détermination de la pente de la structure des taux, *Document de Travail*, Caisse des Dépôts et Consignations, n° **1995-01/F**, février
- AUGROS, J-C. [1989], Les Options sur Taux d'Intérêt, Economica, Paris
- BAHRA, B. [1996], Probability distributions of future asset prices implied by option prices, *Bank of England Quarterly Bulletin*, 299-311, août
- BAIRD, D. [1995], Procedures for fitting cubic smoothing splines, MAF Technology, juillet
- BALDUZZI, P., S.J. DAS, S. FORESI et R. SUNDARAM [1996], A simple approach to three-factor affine term structure models, *The Journal of Fixed Income*, **6**, 43-53, décembre
- BALL, C. et W. TOROUS [1983], Bond price dynamics and options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **18**, 517-531, décembre
- Banque CGM et CGM Intermédiation [1992a], Le démembrement des valeurs du trésor — Première partie, *La revue Banque*, **525**, 3-7, mars
- Banque CGM et CGM Intermédiation [1992b], Le démembrement des valeurs du trésor — Deuxième partie, *Banque & marchés*, **1**, 11-15, mai-juin
- BANK OF ENGLAND [1990], A new yield curve model, *Bank of England Quarterly Bulletin*, février

- BANQUE DES RÈGLEMENTS INTERNATIONAUX [1994], Macroeconomic and monetary policy issues raised by the growth of derivatives markets, Basle, novembre
- BARONE-ADESI, G. et R.E. WHALEY [1987], Efficient analytic approximation of american option values, *The Journal of Finance*, **42**, 301-320
- BATES, D.S. [1991], The crash of '87: Was it expected? — The evidence from options markets, *The Journal of Finance*, **46**, 1009-1044
- BEAGLEHOLE, D. et M. TENNEY [1992], Corrections and additions to 'A nonlinear equilibrium model of the term structure of interest rates', *Journal of Financial Economics*, **32**, 345-353
- BELLANDO, R., S. PFISTER et J-P. POLLIN [1997a], La crédibilité de l'union monétaire Mark-Franc : évolution et détermination, *Document de Travail*, XIV<sup>e</sup> Journées Internationales d'Économie Monétaire et Bancaire, Université d'Orléans, juin
- BELLANDO, R., S. PFISTER et J-P. POLLIN [1997b], Évolution et déterminants de la crédibilité de l'union monétaire européenne : une étude comparative France, Italie et Grande-Bretagne, *Document de Travail*, Congrès Annuel de l'Association Française de Sciences Économiques, septembre
- BENAIM, S. et V. OHEIX [1997], Crédibilité des politiques monétaires en Europe et détermination des taux d'intérêt à long terme, *Document de Travail*, XIV<sup>e</sup> Journées Internationales d'Économie Monétaire et Bancaire, Université d'Orléans, juin
- BENNINGA, S. et A. PROTOPAPADAKIS [1983], Real and nominal interest rates under uncertainty: The Fisher theorem and the term structure, *Journal of Political Economy*, **91**, 856-867
- BENNINGA, S. et Z. WIENER [1997], Binomial term structure models, notes de lecture qui seront prochainement publiées dans *Financial Engineering with Mathematica*
- BERARDI, A. et M. ESPOSITO [1995], A base model for multifactor specifications of the term structure, *Working Paper*, Journées Internationales de Finance, Université Montesquieu-Bordeaux IV, juin
- BERNARD, H. et S. GERLACH [1996], Does the term structure predict recessions? The international evidence, *Working Paper*, Bank for International settlements, n° **37**, septembre

- BESANCENOT, D., R. VRANCEANU et T. WARIN [1997], Crédibilité de la politique de change et UEM, *Document de Travail*, Congrès Annuel de l'Association Française de Sciences Économiques, septembre
- BIANCHI, C., R. CESARI et L. PANATTONI [1994], Alternative estimators of the Cox, Ingersoll and Ross model of the term structure of interest rates: A monte carlo comparison, *Temì di discussione del Servizio Studi*, Banca d'Italia, n° **236**, novembre
- BISIÈRE, C. [1997], La Structure par Terme des Taux d'Intérêt, Presses Universitaires de France, Paris
- BISIGNANO, J. [1983], Monetary policy regimes and international term structures of interest rates, *Economic Review*, Federal Reserve Bank of San Francisco, **4**, 7-26
- BJERKSUND, P. et G. STENSLAND [1996], Implementation of the Black-Derman-Toy interest rate model, *The Journal of Fixed Income*, **6**, 67-75
- BLACK, F. [1976], The pricing of commodity contracts, *Journal of Financial Economics*, **3**, 167-179
- BLACK, F., E. DERMAN et W. TOY [1990], A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond option, *Financial Analysts Journal*, **46**, 33-39, janvier-février
- BLACK, F. et P. KARASINSKI [1991], Bond and option pricing when short rates are log-normal, *Financial Analysts Journal*, **47**, 52-59, juillet-août
- BLACK, F. et M. SCHOLES [1973], The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659
- BLANCHARD, O.J. [1981], Output, the stock market, and interest rates, *The American Economic Review*, **71**, 132-143
- BLISS, R.R. [1996], Testing term structure estimation methods, *Working Paper*, Federal Reserve Bank of Atlanta, **82**, n° **96-12**, octobre
- BLISS, R.R. [1997], Movements in the term structure of interest rates, *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Atlanta, **82**, 16-33, quatrième trimestre
- BLISS, R. et P. RITCHKEN [1996], Empirical tests of two state-variable Heath-Jarrow-Morton models, *Journal of Money, Credit, and Banking*, **28**, 452-476

- BOULEAU, N. [1988], *Processus Stochastiques et Applications*, Hermann, Paris
- BRENNAN, M.J. et E.S. SCHWARTZ [1977], Savings bonds, retractable bonds and callable bonds, *Journal of Financial Economics*, **5**, 67-88
- BRENNAN, M.J. et E.S. SCHWARTZ [1979], A continuous time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, **3**, 133-155
- BRENNAN, M.J. et E.S. SCHWARTZ [1980], Conditional predictions of bond prices and returns, *The Journal of Finance*, **35**, 405-417
- BRENNAN, M.J. et E.S. SCHWARTZ [1982], An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **17**, 301-329
- BRENNAN, M.J. et E.S. SCHWARTZ [1983], Alternative methods for valuing debt options, *Finance*, **4**, 119-138
- BROWN, R.H. et S.M. SCHAEFER [1994], The term structure of real interest rates and the Cox, Ingersoll, and Ross model, *Journal of Financial Economics*, **35**, 3-42
- BROWN, S.J. et P.H. DYBVIG [1986], The empirical implications of the Cox, Ingersoll, Ross theory of the term structure of the interest rates, *The Journal of Finance*, **41**, 617-630
- BROZE, L., O. SCAILLET et J-M. ZAKOÏAN [1993], Testing for continuous-time models of the short-term interest rate, *CORE Discussion Paper*, Université Catholique de Louvain, n° **9331**, juillet
- BROZE, L., O. SCAILLET et J-M. ZAKOÏAN [1995a], Quasi indirect inference for diffusion processes, *CORE Discussion Paper*, Université Catholique de Louvain, n° **9505**
- BROZE, L., O. SCAILLET et J-M. ZAKOÏAN [1995b], Estimation de modèles de la structure par terme des taux d'intérêt, *Working Paper*, Congrès Annuel de l'Association Française de Sciences Économiques, septembre
- BÜHLER, A. et H. ZIMMERMANN [1996], A statistical analysis of the term structure of interest rates in Switzerland and Germany, *The Journal of Fixed Income*, **6**, 55-67, décembre
- BUSE, A. [1967], Interest rates, the Meiselman model and random numbers, *Journal of Political Economy*, **75**, 49-62

- CAMPBELL, B. et J.W. GALBRAITH [1993], Inference in expectations models of the term structure: A non-parametric approach, *Empirical Economics*, **18**, 623-638
- CAMPBELL, J.Y. [1986a], Bond and stock returns in a simple exchange model, *The Quarterly Journal of Economics*, **101**, 785-803
- CAMPBELL, J.Y. [1986b], A defense of traditional hypotheses about the term structure of interest rates, *The Journal of Finance*, **41**, 183-193
- CAMPBELL, J.Y. [1987], Stock returns and the term structure, *Journal of Financial Economics*, **18**, 373-399
- CAMPBELL, J.Y. [1995], Some lessons from the yield curve, *Journal of Economic Perspectives*, **9**, 129-152
- CAMPBELL, J.Y. et J. AMMER [1991], What moves the stock and bond markets? — A variance decomposition for long-term asset returns, *NBER Working Paper*, n° **3790**, juin
- CAMPBELL, J.Y., A.W. LO et A.C. MACKINLAY [1994], Models of the term structure of interest rates, *Working Paper*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, n° **94-10**, mai
- CAMPBELL, J.Y. et R.J. SHILLER [1984], A simple account of the behaviour of long-term interest rates, *American Economic Review — Papers and Proceedings*, **74**, 44-48
- CAMPBELL, J.Y. et R.J. SHILLER [1987], Cointegration and tests of present value models, *Journal of Political Economy*, **95**, 1092-1088
- CAMPBELL, J.Y. et R.J. SHILLER [1991], Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view, *Review of Economic Studies*, **58**, 495-514
- CAMPBELL, J.Y., R.J. SHILLER et K.L. SCHOENHOLTZ [1983], Forward rates and future policy: Interpreting the term structure of interest rates, *Brooking Papers on Economic Activity*, **1:1983**, 173-217
- CANABARRO, E. [1995], Where do one-factor interest rate models fail?, *The Journal of Fixed Income*, **5**, 31-52, septembre
- CAVERHILL, A. [1995], A note on the models of Hull and White for pricing options on the term structure, *The Journal of Fixed Income*, **5**, 89-96, septembre

- CAVERHILL, A. et K. PANG [1995], Efficient and flexible bond option valuation in the Heath, Jarrow, and Morton framework, *The Journal of Fixed Income*, **5**, 70-77, septembre
- CHAN, K.C., G.A. KAROLYI, F.A. LONGSTAFF et A.B. SANDERS [1992], An empirical comparaison of alternative models of the short-term interest rate, *The Journal of Finance*, **47**, 1209-1227
- CHEN, L. [1995], A three-factor model of the term structure and the pricing of interest rate derivatives, *Working Paper*, Journées Internationales de Finance, Université Montesquieu-Bordeaux IV, juin
- CHEN, L. [1996], A bond pricing formula under a non-trivial three factor model of interest rates, *Economics Letters*, **51**, 95-99
- CHERIF, M. [1994], Un indicateur avancé de la conjoncture : la structure des taux d'intérêt, *Analyse Financière*, **101**, 26-30, décembre
- CLARIDA, R.H. et B.M. FRIEDMAN [1984], The behavior of U.S. short-term interest rates since october 1979, *The Journal of Finance*, **49**, 671-682
- CLÉMENT, E., C. GOURIÉROUX et A. MONFORT [1993a], Modèles linéaires à facteurs et structure à terme des taux d'intérêt, *Document de Travail*, CEPREMAP, n° **9306**, janvier
- CLÉMENT, E., C. GOURIÉROUX et A. MONFORT [1993b], Prediction of contingent price measures , *Working Paper*, INSEE, n° **9329**, juin
- CLERMONT-TONNERRE, A. (de) et M-A. LÉVY [1992], Les Obligations à Coupon Zéro — Le Démembrement des OAT, Economica, Paris
- COLLETAZ, G. et J-P. GOURLAOUEN [1990], Coïntégration et structure par terme des taux d'intérêt, *Revue Économique*, **4**, 687-712
- COOK, T. et T. HAHN [1989], The effect of changes in the federal funds rate target on markets interest rates in the 1970s, *Journal of Monetary Economics*, **24**, 331-351
- COOK, T. et T. HAHN [1990], Interest rate expectations and the slope of the money market yield curve, *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Richmond, **76**, 3-26, septembre-octobre
- COX, D.R. et H.D. MILLER [1965], *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, London

- COX, J.C., S.A. ROSS et M. RUBINSTEIN [1979], Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-263
- COX, J.C., J.E. INGERSOLL et S.A. ROSS [1980], An analysis of variable rate loan contracts, *The Journal of Finance*, **35**, 389-403
- COX, J.C., J.E. INGERSOLL et S.A. ROSS [1981], A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates, *The Journal of Finance*, **36**, 769-799
- COX, J.C., J.E. INGERSOLL et S.A. ROSS [1985a], An intertemporal general equilibrium model of asset prices, *Econometrica*, **53**, 363-384
- COX, J.C., J.E. INGERSOLL et S.A. ROSS [1985b], A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385-407
- CRAVEN, P. et G. WAHBA [1979], Smoothing noisy data with spline functions, *Numerische Mathematik*, **31**, 377-403
- CULBETSON, J.M. [1957], The term structure of interest rates, *The Quarterly Journal of Economics*, **71**, 485-517
- CUTHBERTSON, K. [1996], The expectations hypothesis of the term structure: The UK interbank market, *The Economic Journal*, **106**, 578-592
- DAHLQUIST, M. [1996], On alternative interest rate processes, *Journal of Banking and Finance*, **20**, 1093-1119
- DAHLQUIST, M. et G. JONSSON [1995], The information in swedish short-maturity forward rates, *European Economic Review*, **39**, 1115-1131
- DAHLQUIST, M. et L.E.O. SVENSSON [1996], Estimating the term structure of interest rates for monetary policy analysis, *Scandinavian Journal of Economics*, **98**, 163-183
- DANA, R-A. et M. JEANBLEANC-PICQUÉ [1994], *Marchés Financiers en Temps Continu — Valorisation et Équilibre*, Economica, Paris
- DAVIDSON, R. et J.G. MACKINNON [1990], Specification tests based on artificial regressions, *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 220-227
- DEAVES, R. [1996], Forecasting canadian short-term interest rates, *Canadian Journal of Economics*, **29**, 615-634
- DE BOISSIEU, C. [1976], *La structure des taux d'intérêt*, Economica, Paris



- DE BOISSIEU, C. et J-L GUGLIELMI [1982] (eds), Formation et rôle des taux d'intérêt, Economica, Paris
- DE BANDT, O. et J-P. LESNE [1991], Une analyse factorielle de la courbe des taux en France, *Document de travail*, Banque de France, juin
- DE GRAUWE, S. [1996], Forward interest rates as predictors of EMU, *CEPR Discussion Paper*, n° **1395**, mai
- DEMAROLLE, A. et A. QUINET [1996], Économie des taux d'intérêt, Presses Universitaires de France, Paris
- DE SEVERAC, B. [1996], Etude empirique du modèle de Vasicek sur le marché des obligations françaises, *Document de travail*, CREFIB Paris I Panthéon Sorbonne, n° **96-02**, juin
- DEVROYE, L. [1986], Non-Uniform Random Variate Generation, Springer-Verlag, New York
- DE WINNE, R. [1994], Processus de diffusion de taux d'intérêt et correction du biais de discrétisation, *Working Paper*, Université Catholique de Louvain, novembre
- DE WINNE, R. [1995], Processes of the short-term interest rate and correction of the discretization bias, *Working Paper*, Université Catholique de Louvain, avril
- DOBSON [1978], Estimating term structure equations with individual bond data, *The Journal of Finance*, **33**, 75-92
- DOTHAN, L.U. [1978], On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, **6**, 59-69
- DOTSEY, M. et C. OTROK [1995], The rational expectations hypothesis of the term structure, monetary policy, and the time-varying term premia, *Economic Quarterly*, Federal Reserve Bank of Richmond, **81**, 65-81
- DUBOIS, E. et D. JANCI [1994], Prédiction du PIB par la courbe des taux : une constatation empirique en quête de théorie, *Économie et Prévision*, **112**, 69-85
- DUEKER, M. et R. STARTZ [1994], Maximum-likelihood estimation of fractional cointegration with an application to the short end of the yield curve, *Working Paper*, Federal Reserve Bank of St. Louis, n° **94-027B**, mai

- DUFFIE, D. [1994], Modèles Dynamiques d'Évaluation, Presses Universitaires de France, Paris
- DUMAS, B. et B. ALLAZ [1995], Les Titres Financiers — Équilibre du Marché et Méthodes d'Évaluation, Presses Universitaires de France, Paris
- EL KARAOUI, N. [1996], Modèles stochastiques en finance, cours de DEA 1996-1997, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI
- ELTON, E.J., M.J. GRUBER et J. MEI [1996], Return generating process and the determinants of term premiums, *Journal of Banking and Finance*, **20**, 1251-1269
- ENGLE, R.F. et V.K. NG [1993], Time-varying volatility and the dynamic behavior of the term structure, *Journal of Money, Credit and Banking*, **25**, 336-349
- ESTRELLA, A. et G.A. HARDOUVELIS [1991], The term structure as a predictor of real economic activity, *The Journal of Finance*, **46**, 555-576
- ESTRELLA, A. et F.S. MISHKIN [1995], The term structure of interest rates and its role in monetary policy for the European central bank, *NBER Working Papers*, n° **5279**, septembre
- FAMA, E.F. [1975], Short-term interest rates as predictors of inflation, *The American Economic Review*, **65**, 269-282
- FAMA, E.F. [1984a], The information in the term structure, *Journal of Financial Economics*, **13**, 509-528
- FAMA, E.F. [1984b], Term premiums in bond returns, *Journal of Financial Economics*, **13**, 529-546
- FAMA, E.F. [1990], Term-structure forecasts of interest rates, inflation, and real returns, *Journal of Monetary Economics*, **25**, 59-76
- FAMA, E.F. et R.R. BLISS [1987], The information in long-maturity forward rates, *American Economic Review*, **77**, 680-692
- FISHER, M., D. NYCHKA et D. ZERVOS [1995], Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines, *Finance and Economics Discussion Series Paper*, Federal Reserve Board, n° **95-01**, janvier
- FISHER, M. et C. GILLES [1996], Around and around: The expectations hypothesis, *Finance and Economics Discussion Series Paper*, Federal Reserve Board, n° **96-17**, avril

- FISHER, M. et D. ZERVOS [1996], Yield curve, chapitre 12 in Varian, H.R. (eds), Computational Economics and Finance, Springer-Verlag Telos, New York
- FLESAKER, B. [1993a], Arbitrage free pricing of interest rate futures and forward contracts, *The Journal of Futures Markets*, **13**, 77-91
- FLESAKER, B. [1993b], Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee model of interest rate contingent claims pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **28**, 483-495
- FRACHOT, A. et J-P. LESNE [1995], Modèles factoriels de la structure par terme des taux d'intérêt : théorie et application économétrique, *Annales d'Économie et de Statistique*, **40**, 11-36
- FRANKEL, J.A. et C.S. LOWN [1994], An indicator of future inflation extracted from the steepness of the interest rate yield curve along its entire length, *The Quarterly Journal of Economics*, **109**, 517-530
- FRIEDMAN, A. [1975], Stochastic Differential Equations and Applications, volume I, Academic Press, New York
- FUHRER, J. et G. MOORE [1992], Monetary policy rules and the indicator properties of asset prices, *Journal of Monetary Economics*, **29**, 303-336
- GARMAN, M.B. et S.W. KOHLHAGEN [1983], Foreign currency option values, *Journal of International Money and Finance*, **2**, 231-237
- GERLACH, S. [1995], The information content of the term structure: Evidence for Germany, *CEPR Discussion Paper*, n° **1264**, novembre
- GESKE, R. et H. JOHNSON [1984], The american put option valued analytically, *The Journal of Finance*, **39**, 1511-1524
- GIBSON-ASNER, R. [1987], Des modèles d'équilibre de la structure des taux d'intérêt : un essai de synthèse, *Finance*, **8**, 133-171
- GILLES, C. et S. LEROY [1986], A note on the local expectation hypothesis: A discrete-time exposition, *The Journal of Finance*, **41**, 975-979
- GILLES, C. et S. LEROY [1987], A note on the local expectation hypothesis: A discrete-time exposition — erratum, *The Journal of Finance*, **42**, 473
- GOLUB, G.H. et C.F. VAN LOAN [1989], Matrix Computations, John Hopkins University Press, London

- GONG, F.F. et E.M. REMOLONA [1996], Two factors along the yield curve, *Working Paper*, Federal Reserve Bank of New York, août
- GOODHART, C. [1993], La politique monétaire dans les années quatre-vingt-dix — objectifs et moyen d'action, *Cahiers Économiques et Monétaires*, **41**, 5-19
- GOURIÉROUX, C. [1989], *Économétrie des Variables Qualitatives*, deuxième édition, Economica, Paris
- GOURIÉROUX, C. et A. MONFORT [1995a], *Séries Temporelles et Modèles Dynamiques*, deuxième édition, Economica, Paris
- GOURIÉROUX, C. et A. MONFORT [1995b], *Simulation Based Econometric Methods*, miméo non publié, CREST et INSEE
- GOURIÉROUX, C., A. MONFORT et E. RENAULT [1993], Indirect inference, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, S85-S118
- GOURIÉROUX, C. et O. SCAILLET [1994], Estimation of the term structure from bond data, *Document de Travail*, CEPREMAP, n° **9415**, mai
- GOURIÉROUX, C. et O. SCAILLET [1997], Multiregime term structure models, *Document de Travail*, CEPREMAP, mars
- GOURLAOUEN, J-P. [1997], *La Structure par Terme des Taux d'Intérêt*, Economica, Paris
- GOURLAY, A.R. et S. MCKEE [1977], The construction of hopscotch methods for parabolic and elliptic equation in two space dimensions with a mixed derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **3**, 201-206
- GRAY, S.F. [1996], Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process, *Journal of Financial Economics*, **42**, 27-62
- GRESSE, C. [1994], Les facteurs déterminants les déformations de la structure à terme des taux, chapitre 11 in Hamon, J. et B. Jacquillet (eds), *Recherches en Finance du CEREG*, Economica, Paris
- GUILLERM, V. et P. JEANNE [1996], Swaps TEC, TME et CMS, instruments de gestion de la courbe des taux, *Banque & Marchés*, **25**, 32-37, novembre-décembre
- HAFER, R.W. et S.E. HEIN [1990], Forecasting inflation using interest-rate and time-series models: Some international evidence, *Journal of Business*, **63**, 1-17

- HAMILTON, J.D [1988], Rational expectations econometric analysis of changes in regime: An investigation of the term structure of interest rates, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 385-423
- HANSEN, L.P. [1982], Large sample properties of generalized method of moments estimators, *Econometrica*, **50**, 1029-1054
- HANSEN, L.P. et T.J. SARGENT [1996], Recursive Linear Models of Dynamic Economies, miméo, University of Chicago, juillet
- HARDOUVELIS, G.A. [1988], The predictive power of the term structure during recent monetary regimes, *The Journal of Finance*, **43**, 339-356
- HARDOUVELIS, G.A. [1994], The term structure spread and future changes in long and short rates in the G7 countries — Is there a puzzle?, *Journal of Monetary Economics*, **33**, 255-283
- HARRISON, J.M. et D.M. KREPS [1979], Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408
- HARRISON, P.J. et C.F. STEVENS [1976], Bayesian Forecasting, *Journal of the Royal Statistical Society, série B*, **38**, 205-247
- HARVEY, A.C. [1989], Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter, Cambridge University Press, Cambridge
- HARVEY, C.R. [1988], The real term structure and consumption growth, *Journal of Financial Economics*, **22**, 305-333
- HEATH, D., R. JARROW et A. MORTON [1990], Bond pricing and the term structure of interest rates: A discrete time approximation, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25**, 419-439, décembre
- HEATH, D., R. JARROW et A. MORTON [1992], Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, **60**, 77-105
- HESTON, S. [1995], Discrete-time versions of continuous-time interest rate models, *The Journal of Fixed Income*, **5**, 86-88, septembre
- HO, T.S.Y [1995], Evolution of interest rate models: A comparison, *Journal of Derivatives*, 9-19, été

- HO, T.S.Y. et S-B. LEE [1986], Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, *The Journal of Finance*, **41**, 1011-1029
- HO, T.S., R.C. STAPLETON et M.G. SUBRAHMANYAM [1997], The valuation of american options with stochastic interest rates: A generalization of the Geske-Johnson technique, *The Journal of Finance*, **52**, 827-840
- HOLLAND, T.E. [1965], A note on the traditional theory of the term structure of interest rates on three-and-six month treasury bills, *International Economic Review*, **6**, 330-336
- HU, Z. [1993], The yield curve and real activity, *Staff Papers*, International Monetary Fund, **40**, 781-806
- HUIZINGA, J. et F.S. MISHKIN [1984], Inflation and real interest rates on assets with different risk characteristics, *The Journal of Finance*, **39**, 699-712
- HULL, J. [1997], Options, Futures, and Other Derivatives Securities, troisième édition, Prentice-Hall, London
- HULL, J. et A. WHITE [1990], Pricing interest rate derivative securities, *The Review of Financial Studies*, **3**, 573-592
- HULL, J. et A. WHITE [1993], One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **28**, 235-254, juin
- HULL, J. et A. WHITE [1994a], Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-factor models, *Journal of Derivatives*, 7-16, automne
- HULL, J. et A. WHITE [1994b], Numerical procedures for implementing term structure models I: two factor models, *Journal of Derivatives*, 37-48, hiver
- HULL, J. et A. WHITE [1995], A note on the models of Hull and White for pricing options on the term structure: Response, *The Journal of Fixed Income*, **5**, 97-102, septembre
- JAMSHIDIAN, F. [1990], An exact bond option formula, *The Journal of Finance*, **44**, 205-209
- JAMSHIDIAN, F. [1991], Forward induction and construction of yield curve diffusion models, *The Journal of Fixed Income*, **1**, 62-74

- JAZWINSKY, A.H. [1970], *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York
- JEFFREY, A. [1995], Single factor Heath-Jarrow-Morton term structure models based on markov spot interest rate dynamics, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **30**, 619-642, décembre
- JEGADEESH, N. et G.G. PENNACHI [1996], The behavior of interest rates implied by the term structure of eurodollar futures, *Working Paper*, University of Illinois
- JOHNSON, D.R. [1993], International interest rate linkages in the term structure, *Journal of Money, Credit, and Banking*, **25**, 755-770
- JONDEAU, E. [1997], Représentation VAR et test de la théorie des anticipations de la structure par terme, *Notes d'Études et de Recherche*, Banque de France, n° **46**, septembre
- JONDEAU, E. et R. RICART [1996], Le contenu en information de la courbe des taux d'intérêt : application au cas des titres publics français, *Document de Travail*, Colloque Dynamique des Marchés Financiers, Université d'Évry, octobre
- JONES, R.H. [1980], Maximum likelihood fitting of arima models to time series with missing observations, *Technometrics*, **22**, 389-395
- JORION, P. et F. MISHKIN [1991], A multicountry comparaison of term-structure forecasts at long horizons, *Journal of Financial Economics*, **29**, 59-80
- KAHN, R. [1990a], Using HJM to build and hedge a bond portfolio with options: Part 1, *Barra Newsletter*, avril
- KAHN, R. [1990b], Using HJM to build and hedge a bond portfolio with options: Part 2, *Barra Newsletter*, mai
- KALABA, R. et L. TEFATSION [1989], Time-varying linear regression via flexible least squares, *Computers & Mathematics with Applications*, **17**, 1215-1245
- KALABA, R. et L. TEFATSION [1990], Flexible least squares for approximately linear systems, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **20**, 978-989
- KALABA, R. et L. TEFATSION [1996], A multicriteria approach to model specification and estimation, *Computational Statistics & Data Analysis*, **21**, 193-214

- KALOTAY, A.J., G.O. WILLIAMS et F.J. FABOZZI [1993], A model of valuing bonds and embedded options, *Financial Analysts Journal*, **49**, 33-39, mai-juin
- KARATZAS, I. et S.E. SHREVE [1991], Brownian Motion and Stochastic Calculus, deuxième édition, Springer-Verlag, New York
- KESSEL, R. [1965], The Cyclical Behaviour of the Term Structure of Interest Rates, NBER, New York
- KLOEDEN, P.E. et E. PLATEN [1992], Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, New York
- KROL, R. [1986], The interdependence of the term structure of eurocurrency interest rates, *Journal of International Money and Finance*, **5**, 245-253
- KUGLER, P. [1990], The term structure of Euro interest rates and rational expectations, *Journal of International Money and Finance*, **9**, 234-244
- KWIATKOWSKI, D., P.C.B. PHILLIPS, P. SCHMIDT et Y. SHIN [1992], Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of unit root, *Journal of Econometrics*, **54**, 159-178
- LAMBETON, D. et B. LAPEYRE [1991], Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Ellipses, Paris
- LANGETIEG, T.C. [1980], A multivariate model of the term structure, *The Journal of Finance*, **35**, 71-97
- LANGETIEG, T.C. et J.S. SMOOT [1989], Estimation of the term structure of interest rates, *Research in Financial Services*, **1**, 181-222
- LITTERMAN, R. et J. SCHEINKMAN [1991], Common factors affecting bond returns, *Journal of Fixed Income*, **1**, 54-61, juin
- LOGUE, D.E. et R. J. SWEENEY [1984], Term premia on euro rates, *The Journal of Finance*, **39**, 747-755
- LONG, J.B. [1974], Stock, prices, inflation and the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, **1**, 131-170
- LONGSTAFF, F.A. [1989], A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, **23**, 195-224
- LONGSTAFF, F.A. [1990], Time varying term premia and traditional hypotheses about the term structure, *The Journal of Finance*, **45**, 1307-1314



- LONGSTAFF, F.A. [1992], Multiple equilibria and term structure models, *Journal of Financial Economics*, **32**, 333-344
- LONGSTAFF, F.A. [1993], The valuation of options on coupon bonds, *Journal of Banking and Finance*, **17**, 27-42
- LONGSTAFF, F.A. et E.S. SCHWARTZ [1992], Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model, *The Journal of Finance*, **47**, 1259-1282
- LONGSTAFF, F.A. et E.S. SCHWARTZ [1993], Implementation of the Longstaff-Schwartz interest rate model, *The Journal of Fixed Income*, **3**, 16-23; décembre
- LUBOCHINSKY, C. [1990], Les taux d'intérêt, deuxième édition, Dalloz, Paris
- LÜTKEPOHL, H. [1991], Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg
- LUTZ, F.A. [1940], The structure of interest rates, *The Quarterly Journal of Economics*, **55**, 36-63
- MACDONALD, R. et M.P. TAYLOR [1990], The term structure of forward foreign exchange premia: the inter-war experience, *The Manchester School*, **58**, 54-65
- MAJNONI, G. [1995], An empirical evaluation of one versus two factor models of the term structure of interest rates: The Longstaff and Schwartz and the CIR models, *Working Paper*, Banca d'Italia
- MALZ, A.M. [1996], Using option prices to estimate realignment probabilities in the European Monetary System: The case of sterling-mark, *Journal of International Money and Finance*, **15**, 717-748
- MANKIW, N.G. et J.A. MIRON [1986], The changing behavior of the term structure of interest rates, *The Quarterly Journal of Economics*, **101**, 211-228
- MANKIW, N.G. et L.H. SUMMERS [1984], Do long-term interest rates overreact to short-term interest rates, *Brooking Papers on Economic Activity*, **1:1984**, 223-242
- MARSH, T.A. [1980], Equilibrium term structure models: Test methodology, *The Journal of Finance*, **35**, 421-435
- MARSH, T.A. et E.R. ROSENFELD [1983], Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices, *The Journal of Finance*, **38**, 635-645

- MASERA, R.S. [1972], *The Term Structure of Interest Rates — An Expectations Model Tested on Post-War Italian Data*, Oxford University Press, London
- MCCAFFERTY, S. [1986], Aggregate demand and interest rates: A macroeconomic approach to the term structure, *Economic Inquiry*, **24**, 521-533
- MCCULLOCH, J.H. [1971], Measuring the term structure of interest rates, *The Journal of Business*, **44**, 19-31
- MCCULLOCH, J.H. [1975a], The tax-adjusted yield curve, *The Journal of Finance*, **30**, 811-830
- MCCULLOCH, J.H. [1975b], An estimate of the liquidity premium, *Journal of Political Economy*, **83**, 95-119
- MCCULLOCH, J.H. [1987], The monotonicity of the term premium — A closer look, *Journal of Financial Economics*, **18**, 185-192
- MEISELMAN, D. [1962], *The Term Structure of Interest Rates*, Prentice Hall, Englewood Cliffs
- MELLIOS, C. [1997], Un modèle d'équilibre général de la structure par terme des taux d'intérêt avec deux variables d'état, *Banque & Marchés*, **26**, 5-10, janvier-février
- MELLIOS, C. et P. PONCET [1995], Évaluation des options sur obligations et sur contrats à terme d'obligations, *Banque & Marchés*, **17**, 3-10, janvier-février
- MERTON, R.C. [1973], Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183
- MILTERSEN, K.R., K. SANDMANN et D. SONDERMANN [1995], Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates, *Working Paper*, Journées Internationales de Finance, Université Montesquieu-Bordeaux IV, juin
- MILTERSEN, K.R., K. SANDMANN et D. SONDERMANN [1997], Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates, *The Journal of Finance*, **52**, 409-430
- MISHKIN, F.S. [1990], What does the term structure tell us about future inflation?, *Journal of Monetary Economics*, **25**, 77-95

- MISHKIN, F.S. [1992], Is the Fisher effect for real? — A reexamination of the relationship between inflation and interest rates, *Journal of Monetary Economics*, **30**, 195-215
- MISHKIN, F.S. [1996], The channels of monetary transmissions: Lessons for monetary policy, *NBER Working Paper*, n° **5464**, février
- MODIGLIANI, F. et R.J. SHILLER [1973], Inflation, rational expectations and the term structure of interest rates, *Economica*, **40**, 12-43
- MODIGLIANI, F. et R. SUTCH [1966], Innovations in interest rate policy, *The American Economic Review*, **56**, 178-197
- MODIGLIANI, F. et R. SUTCH [1967], Debt Management and the term structure of interest rates: An empirical analysis of recent experience, *Journal of Political Economy*, **75**, 569-589
- NELSON, C.R. et A.F. SIEGEL [1987], Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of Business*, **60**, 473-489
- NELSON, D.B. [1990], Arch models as diffusion approximations, *Journal of Econometrics*, **45**, 7-38
- NELSON, D.B. et K. RAMASWANY [1990], Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models, *The Review of Financial Studies*, **3**, 393-430
- NERLOVE, M., D. GREETHER et J. CARVALHO [1979], *Analysis of Economic Time Series*, Academic Press, New York
- NOWMAN, K.B. [1997], Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates, *The Journal of Finance*, **52**, 1695-1706
- PALADINO, G. et G. SALSECCI [1996], The risk modified spread in modelling the dynamics of the long term interest rate: An implementation to the US, German and Italian cases, *Working Paper*, Colloque Dynamique des Marchés Financiers, Université d'Évry, octobre
- PEARSON, N.D. et T-S. SUN [1994], Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the Cox, Ingersoll, and Ross model, *The Journal of Finance*, **49**, 1279-1304

- PENG, W. [1995], The Fisher hypothesis and inflation persistence — Evidence from five major industrial countries, *Working Paper*, International Monetary Fund, n° **WP/95/118**, novembre
- PHILLIPS, P.C.B. et B.E. HANSEN [1990], Statistical inference in instrumental variables regression with I(1) processes, *Review of Economic Studies*, **57**, 99-125
- PISTRE, N. [1993], Diffusions, prix des actifs financiers, taux d'intérêt et consommation : le cas des préférences intertemporellement dépendantes, Thèse de l'École des Hautes Études Commerciales, Jouy-en-Josas, février
- PLATTEN, I. [1994], Non linear general equilibrium models of the term structure: comments and two-factor generalization, *Finance*, **15**, 63-78
- PONCET, P. [1997], Le point sur... La gamme des taux, *Banque & Marchés*, **26**, 49-54, janvier-février
- PORTER, M.G. [1971], A theoretical and empirical framework for analyzing the term structure of exchange rate expectations, *Staff Papers*, International Monetary Fund, **18**, 613-642
- PRATS ALBENTOSA, A.M. et A. BEYAERT [1996], Testing the expectations theory in a market of short-term financial assets, *Working Paper*, Colloque Dynamique des Marchés Financiers, Université d'Évry, octobre
- PRESS, W.H., S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING et B.P. FLANNERY [1992], *Numerical Recipes in Fortran*, deuxième édition, Cambridge University Press, Cambridge
- PRIESTLEY, M.B. [1994], *Spectral Analysis and Time Series*, huitième édition, Academic Press, London
- QUITTARD-PINON, F. [1993], *Marché des Capitaux et Théorie Financière*, Economica, Paris
- REBONATO, R. [1996], *Interest-Rate Option Models — Understanding, Analysing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options*, John Wiley & Sons, Chichester
- RICARD, R et P. SICSIC [1995a], Estimation d'une structure par terme des taux d'intérêt sur données françaises, *Bulletin de la Banque de France*, **22**, 117-128

- RICARD, R et P. SICSIC [1995b], Des taux à terme pour quoi faire ? — Trois illustrations simples, *Bulletin de la Banque de France*, supplément «études», 4<sup>e</sup> trimestre, 59-65
- RICHARD, S.F. [1978], An arbitrage model of the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, **6**, 33-57
- RICHARDSON, M., P. RICHARDSON et T. SMITH [1992], The monotonicity of the term premium — Another look, *Journal of Financial Economics*, **31**, 97-105
- ROBERDS, W., D. RUNKLE et C.H. WHITEMAN [1996], A daily view of yield spreads and short-term interest rates movements, *Journal of Money, Credit, and Banking*, **28**, 34-53
- ROCHET, J-C. et G. DEMANGE [1992], Méthodes Mathématiques de la Finance, Economica, Paris
- ROLEY, V.V. [1982], The effect of federal debt-management policy on corporate bond and equity yields, *The Quarterly Journal of Economics*, **97**, 645-668
- ROLL, R. [1970] The Behaviour of Interest Rates — An application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills, Basic Books, New York
- ROSS, S.A. [1976], The arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, **13**, 341-360
- RUBINSTEIN, R.Y. [1981], Simulation and the Monte Carlo Method, John Wiley & Sons, New York
- RUDEBUSH, G.D. [1995], Federal Reserve interest rate targeting, rational expectations, and the term structure, *Journal of Monetary Economics*, **35**, 245-274
- SANDMANN, K. et D. SONDERMANN [1993], A term structure model and the pricing of interest rate derivatives, *Review of Future Markets*, **12/2**, 391-423
- SAPORTA, G. [1990], Probabilités, Analyse des Données et Statistique, Technip, Paris
- SARGENT, T.J. [1979], A note on maximum likelihood estimation of the rational expectations model of the term structure, *Journal of Monetary Economics*, **5**, 133-143
- SCHAEFER, S.M. et E.S. SCHWARTZ [1987], Time dependent variance and the pricing of bonds, *The Journal of Finance*, **42**, 1113-1128

- SCHLÖGL, E. et D. SOMMER [1995], On short rate processes and their implications for term structure movements, *Working Paper*, Journées Internationales de Finance, Université Montesquieu-Bordeaux IV, juin
- SHEA, G.S. [1985], Interest rate term structure estimation with exponential splines: A note, *The Journal of Finance*, **40**, 319-325
- SHEA, G.S. [1992], Benchmarking the expectations hypothesis of the interest-rate term structure: An analysis of cointegration vectors, *Journal of Business and Economic Statistics*, **10**, 347-366, juillet
- SHILLER, R.J. [1973], Rational expectations and the term structure of interest rates: Comment, *Journal of Money, Credit, and Banking*, **5**, 856-860
- SHILLER, R.J. [1979], The volatility of long-term interest rates and expectations models of the term structure, *Journal of Political Economy*, **87**, 1190-1219
- SHILLER, R.J. [1990], The term structure of interest rates, chapitre 13 in Friedman, B.H. et F.H. Hahn (eds), *Handbook of Monetary Economics*, Volume I, North-Holland, Amsterdam
- SHILLER, R.J. et A.E. BELTRATTI [1992], Stock prices and bond yields — Can their comovements be explained in terms of present value models?, *Journal of Monetary Economics*, **30**, 25-46
- SMETS, F. [1997], Financial asset prices and monetary policy: Theory and evidence, *Working Paper*, Bank for International settlements, n° **47**, septembre
- SMETS, F. and K. TSATSARONIS [1997], Why does the yield curve predict economy activity? Dissecting the evidence for Germany and the United States, *Working Paper*, Bank for International settlements, n° **49**, septembre
- SÖDERLIND, P. et L.E.O. SVENSSON [1997], New techniques to extract market expectations from financial instruments, *NBER Working Paper*, n° **5877**, janvier
- SOLA, M et J. DRIFILL [1994], Testing the term structure of interest rates using a stationary vector autoregression with regime switching, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**, 601-628
- STAMBAUGH, R.F. [1988], The information in forward rates — Implications for models of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **21**, 41-70
- STAPLETON, R.C. et M.G. SUBRAHMANYAM [1997], The analysis and valuation of interest rate options, *Journal of Banking & Finance*, **17**, 1076-1095

- STEELEY, J.M. [1996], A two-factor model of the UK yield curve, *Working Paper*, Bank of England, septembre
- STOCK, J.H. et M.W. WATSON [1991], A probability model of the coincident economic indicators, chapitre 4 in Lahiri, K. et G.H. Moore (eds), *Leading Economic Indicators — New Approaches and Forecasting Records*, Cambridge University Press, Cambridge
- STOCK, J.H. et M.W. WATSON [1992], A procedure for predicting recessions with leading indicators: Econometric issues and recent experience, *NBER Working Paper*, n° 4014, mars
- STOER, J. et R. BURLISCH [1980], *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York
- SVENSSON, L.E.O. [1994a], Monetary policy with flexibles exchange rates and forward interest rates as indicators, *Cahiers économiques et monétaires*, Banque de France, **43**, 305-332
- SVENSSON, L.E.O. [1994b], Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–4, *CEPR Discussion Paper*, n° 1051, octobre
- TANGGAARD, C. [1995], Nonparametric smoothing of yield curves, *Working Paper*, The Aarhus School of Business, n° D95-1, mai
- TAYLOR, M.P. [1992], Modelling the yield curve, *The Economic Journal*, **102**, 524-537
- TELSER, L.G. [1967], A critique of some recent empirical research on the explanation of the term structure of interest rates, *Journal of Political Economy*, **75**, 546-561
- TSM [1996], GAUSS library for Time Series and Wavelets for Finance, Global Design, Paris
- UHRIG, M. [1996], An empirical examination of the Longstaff-Schwartz bond option valuation model, *The Journal of Derivatives*, 41-54, printemps
- UHRIG, M. et U. WALTER [1996], A new numerical approach for fitting the initial yield curve, *The Journal of Fixed Income*, **6**, 82-90, mars
- VAN HORN, J. [1965], Interest rate risk and the term structure of interest rates, *Journal of Political Economy*, **73**, 344-351

- VARIAN, H.R. [1988], Le principe d'arbitrage en économie financière, *Annales d'Économie et de Statistique*, **10**, 1-22
- VASICEK, O.A. [1977], An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188
- VASICEK, O.A. et H.G. FONG [1982], Term structure modeling using exponential splines, *The Journal of finance*, **37**, 339-348
- WAGGONER, D.F. [1997], Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices, *Working Paper*, Federal Reserve Bank of Atlanta, **82**, n° **97-10**, novembre
- WEI, J.Z. [1997], A simple approach to bond pricing, *The Journal of Futures Markets*, **17**, 131-160
- WIGGINS, J.B. [1987], Option values under stochastic volatility — Theory and empirical estimates, *Journal of Financial Economics*, **19**, 351-372
- WOLAK, F.A. [1989], Testing inequality constraints in linear econometric models, *Journal of Econometrics*, **41**, 205-235
- WOOD, J.H. [1963], Expectations, errors and the term structure of interest rates, *Journal of Political Economy*, **71**, 160-171
- WOODWARD, G.T. [1990], The real thing: A dynamic profile of the term structure of real interest rates and inflation expectations in the united kingdom, 1982-89, *Journal of Business*, **63**, 373-398



# Notations

$T$	Date de remboursement d'un actif ou date d'échéance d'un contrat
$\tau$	Maturité d'un actif ou d'un contrat
$t_0$	Date courante
$P_t^c(\tau)$	Prix à l'instant $t$ d'une obligation à coupon zéro de maturité $\tau$
$R_t(\tau)$	Taux d'intérêt à l'instant $t$ de maturité $\tau$ (ou taux de rendement d'une obligation à coupon zéro $P_t^c(\tau)$ )
$r_t$ ou $r(t)$	Taux d'intérêt instantané $R_t(0)$ (ou taux court)
$R_t(\infty)$	Taux d'intérêt de long terme (ou taux long)
$F_t(\tau, m)$	Taux à terme à l'instant $t$ d'un placement entre $t + \tau$ et $t + \tau + m$
$f_t(\tau)$	Taux à terme instantané $F_t(\tau, 0)$
$S_t$	<i>Spread</i> de taux $R_t(\infty) - r_t$
$S_t(\tau)$	<i>Spread</i> de taux $R_t(\tau) - r_t$
$S_t(\tau_1, \tau_2)$	<i>Spread</i> de taux $R_t(\tau_1) - R_t(\tau_2)$
$\mathfrak{P} = \{P_t^c(\tau), \tau \in \mathbb{R}_+\}$	Structure par terme des coupons zéro
$\mathfrak{R} = \{R_t(\tau), \tau \in \mathbb{R}_+\}$	Structure par terme des taux d'intérêt
$\otimes$	Produit de Kronecker
$\odot$	Produit d'Hadamard
$\text{vec}(A)$	Opérateur vec d'une matrice
$A^\top$	Transposée de la matrice réelle $A$
$A^*$	Transposée complexe conjuguée de la matrice $A$
$A^{-1}$	Inverse de la matrice $A$
$A^+$	Pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice $A$
$\mathbf{1}_N$	Vecteur unitaire de dimension $N$
$\mathbf{0}_N$	Vecteur nul de dimension $N$
$\mathbf{e}_i$	Vecteur canonique d'ordre $i$
$f_x$	Vecteur gradient de la fonction $f(x)$
$f_{xx}$	Matrice Hessienne de la fonction $f(x)$
$\{x_{\min} : h : x_{\max}\}$	Ensemble des valeurs $x_i$ telles que $x_i = x_{\min} + ih, i \in \mathbb{N}, x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}$

$\mathcal{F}_t$	Filtration associée au processus stochastique
$E[X]$	Espérance mathématique de la variable aléatoire $X$
$E_t[X]$ ou $E[X \mathcal{F}_t]$	Espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ conditionnelle à la filtration en $t$
$\text{var}[X]$	Variance de la variable aléatoire $X$
$\text{var}[X \mathcal{F}_t]$	Variance de la variable aléatoire $X$ conditionnelle à la filtration en $t$
$W(t)$	Processus de Wiener
$\mathcal{A}_t f$	Générateur infinitésimal de la diffusion $f(t, X(t))$
$\mathcal{D}f$	Dynkin de la diffusion $f(t, X(t))$

### Test d'hypothèse nulle

- (•) Nous ne refusons pas l'hypothèse nulle au seuil de confiance de 99%
- (••) Nous ne refusons pas l'hypothèse nulle au seuil de confiance de 95%
- (•••) Nous ne refusons pas l'hypothèse nulle au seuil de confiance de 90%

### Test de significativité des coefficients

- (\*) Nous refusons l'hypothèse de non-significativité du coefficient au seuil de rejet de 1%
- (\*\*) Nous refusons l'hypothèse de non-significativité du coefficient au seuil de rejet de 5%
- (\*\*\*) Nous refusons l'hypothèse de non-significativité du coefficient au seuil de rejet de 10%

# Annexe générale : la bibliothèque SPT

**SPT** est une bibliothèque **GAUSS** pour la modélisation de la **Structure Par Terme**. Elle contient toutes les procédures développées pour la thèse ainsi que l'ensemble des programmes. Les utilisateurs de **GAUSS** peuvent télécharger cette bibliothèque à partir de l'url suivante :

<http://www.montesquieu.u-bordeaux.fr/u/roncalli/spt.html>

## Installation

*sptLIB.zip* est le fichier qui contient le code source de la bibliothèque. Téléchargez ce fichier sous le répertoire courant de **GAUSS** (par exemple, **c:\gauss**). Décompressez le fichier en mode archive. Ce mode est automatiquement reconnu par **Winzip**. Si vous utilisez **PKzip** ou **Unzip**, activez l'option **d**. Par exemple, nous avons :

```
pkzip -d c:\gauss\sptlib.zip
```

Vous obtenez alors la structure suivante<sup>18</sup> :

<b>gaussdir</b>	fichier readme.spt
<b>gaussdir\lib</b>	librairie <i>spt.lcg</i>
<b>gaussdir\spt</b>	
<b>gaussdir\spt\chap1</b>	programmes du chapitre 1
<b>gaussdir\spt\chap2</b>	programmes du chapitre 2
<b>gaussdir\spt\chap3</b>	programmes du chapitre 3
<b>gaussdir\spt\chap4</b>	programmes du chapitre 4
<b>gaussdir\spt\chap5</b>	programmes du chapitre 5
<b>gaussdir\spt\chap6</b>	programmes du chapitre 6
<b>gaussdir\spt\chap7</b>	programmes du chapitre 7
<b>gaussdir\spt\conclusn</b>	programmes de la conclusion
<b>gaussdir\spt\data</b>	données
<b>gaussdir\spt\exemples</b>	exemples
<b>gaussdir\srcspt</b>	code source de <b>SPT</b>

---

<sup>18</sup>**gaussdir** est le répertoire courant de **GAUSS**.

Si votre répertoire courant de **GAUSS** est **c:\gauss**, la bibliothèque **SPT** est déjà configurée. Si **c:\gauss** n'est pas le répertoire courant (vous avez peut-être installé **GAUSS** sous **c:\wingauss**), vous devez reconfigurer **SPT**. Pour cela, lancez une session **GAUSS**, puis déplacez vous dans le répertoire **srcspt** avec la commande **chdir**. Par exemple :

```
chdir c:\wingauss\srcspt
```

Vérifiez que vous êtes dans le bon répertoire avec la commande **cdir(0)**. Ensuite, exécutez la ligne de commande

```
lib spt /n
```

puis

```
lib spt /a
```

La bibliothèque **SPT** est maintenant configurée. Cependant, pour exécuter les programmes de la thèse, vous devez éditer le fichier **spt.dec** et modifier la ligne de commande suivante pour prendre en compte votre répertoire courant :

```
declare string spt_data_path = 'c:\\gauss\\spt\\data\\';
```

Par exemple :

```
declare string spt_data_path = 'c:\\wingauss\\spt\\data\\';
```

## Liste des procédures

- **affichageArbre** : Procédure d'affichage d'un arbre binomial.
- **ArbreHoLee** : Calcul des valeurs des coupons zéro  $P_i^{(n)}(\tau)$  dans le modèle de HO et LEE [1985].
- **BDFS** : Modèle de BALDUZZI, DAS, FORESI et SUNDARAM [1996].
- **BDT** : Modèle de BLACK, DERMAN et TOY [1990].
- **BlackKarasinski** : Modèle de BLACK et KARASINSKI [1991].
- **calendrier\_31jpm** : Construction d'une série temporelle multidimensionnelle en tenant compte de 31 jours par mois.

- **callBlackScholes** : Calcul de la prime d'achat d'une option européenne dans le modèle de BLACK et SCHOLES [1973] lorsque le taux d'intérêt  $r(t)$  est stochastique.
- **CIR** : Modèle de COX, INGERSOLL et ROSS [1985b].
- **CouponZero\_to\_Obligation** : Création d'une base de données d'obligations (format **SPT**) à partir d'obligations à coupon zéro.
- **DebandtLesne** : Estimation des coefficients du modèle de DEBANDT et LESNE [1991].
- **DebandtLesne\_CouponZero** : Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle de DEBANDT et LESNE [1991]).
- **DebandtLesne\_TauxATerme** : Calcul des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle de DEBANDT et LESNE [1991]).
- **DebandtLesne\_TauxZero** : Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle de DEBANDT et LESNE [1991]).
- **DebandtLesne2** : Estimation des coefficients du modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991].
- **DebandtLesne2\_CouponZero** : Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991]).
- **DebandtLesne2\_TauxATerme** : Calcul des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991]).
- **DebandtLesne2\_TauxZero** : Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991]).
- **Decodage\_Obligation** : Extraction des informations (prix, valeur et maturité des coupons) de la  $n$ -ième obligation d'une base de données d'obligations (format **SPT**).
- **ei\_EDS** : Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique par la méthode de l'Inférence Indirecte.
- **gmm\_EDS** : Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique (méthode des moments généralisés).
- **gmm\_MBG** : Estimation des paramètres d'un mouvement brownien géométrique (méthode des moments généralisés).

- **gmm\_OU** : Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (méthode des moments généralisés).
- **gVasicek** : Calcul de la fonction  $b_t(\tau)$  du modèle généralisé de Vasicek (HULL et WHITE [1990]).
- **HeathJarrowMorton** : Simulation du taux d'intérêt  $r(t)$  dans le modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1992] sous la mesure de probabilité neutre au risque.
- **HoLeeCAP** : Calcul des valeurs du payoff d'un cap dans le modèle de HO et LEE [1985]
- **HoLeeFLOOR** : Calcul des valeurs du payoff d'un floor dans le modèle de HO et LEE [1985]
- **HoLeeTaux** : Calcul des taux d'intérêt  $r_i^{(n)}(\tau)$  dans le modèle de HO et LEE [1985].
- **HoLeeValorisation** : Valorisation d'un actif contingent dans le modèle de HO et LEE [1985] par la technique de remontée de l'arbre.
- **HullWhite** : Modèle de HULL et WHITE [1993].
- **Interpolation-Donnees** : Interpolation spline cubique d'une série temporelle multidimensionnelle.
- **intsimpHJM** : Calcul de l'intégrale  $\int_{t_0}^t \sigma_n(u, t) \left[ \int_u^t \sigma_n(u, v) dv \right] du$  par l'algorithme de Simpson (modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1992]).
- **Lire\_EDP** : Procédure de lecture de la base de données contenant la solution de l'équation de valorisation du prix du coupon zéro.
- **LongstaffSchwartz** : Modèle de LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992].
- **\_maturite\_entre\_2dates** : Calcul de la maturité (en années) entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$ .
- **mc\_SPT** : Résolution numérique d'un modèle de structure par terme à une variable d'état par la méthode de Monte Carlo (algorithme de Euler-Maruyama).
- **mc\_SPTm** : Résolution numérique d'un modèle de structure par terme à plusieurs variables d'état par la méthode de Monte Carlo (schéma de Taylor de forme forte à l'ordre 0.5).

- **Merton** : Modèle de MERTON [1973].
- **mLEDS** : Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique (méthode du maximum de vraisemblance).
- **mLMBG** : Estimation des paramètres d'un mouvement brownien géométrique (méthode du maximum de vraisemblance).
- **mLOU** : Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (méthode du maximum de vraisemblance).
- **NelsonSiegel** : Estimation des coefficients du modèle de NELSON et SIEGEL [1987].
- **NelsonSiegel\_** : Procédure **NelsonSiegel** qui ne nécessite pas la bibliothèque **TSM**.
- **NelsonSiegel\_CouponZero** : Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).
- **NelsonSiegel\_Inversion** : Calcul de  $\tau^\#(m)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).
- **NelsonSiegel\_Pente** : Calcul de la pente  $p_t(\tau)$  de la courbe des taux (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).
- **NelsonSiegel\_SPN** : Calcul du spread  $S_t$ , de la pente  $p_t$  et du niveau  $\bar{R}_t(\tau_1, \tau_2)$  de la courbe des taux (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).
- **NelsonSiegel\_TauxATerme** : Calcul des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).
- **NelsonSiegel\_TauxZero** : Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).
- **optionCouponZero** : Prime d'une option européenne sur une obligation à coupon zéro (modèle de JAMSHIDIAN [1990]).
- **selectionArbre** : Sélection du vecteur des valeurs du  $j$ -ième arbitrage d'un arbre binomial.
- **selectionArbreHoLee** : Sélection de l'arbre binomial de maturité  $\tau$  dans le modèle de HO et LEE [1985].

- **simulation\_EDS** : Simulation d'une équation différentielle stochastique (algorithme de Euler-Maruyama).
- **simulation\_EDSm** : Simulation d'une équation différentielle stochastique multidimensionnelle (schéma de Taylor de forme forte à l'ordre 0.5).
- **simulation\_MBG** : Simulation d'un mouvement brownien géométrique (méthode exacte).
- **simulation\_OU** : Simulation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (méthode exacte).
- **solution\_EDP** : Résolution numérique d'un modèle de structure par terme à une variable d'état par les méthodes des différences finies et des  $\theta$ -schémas.
- **SPT** : Initialisation d'un modèle de structure par terme à une variable d'état.
- **SPTm** : Initialisation d'un modèle de structure par terme à plusieurs variables d'état.
- **SPTset** : Initialisation des variables globales à leurs valeurs par défaut.
- **Svensson** : Estimation des coefficients du modèle de SVENSSON [1994].
- **Svensson\_** : Procédure **Svensson** qui ne nécessite pas la bibliothèque **TSM**.
- **Svensson\_CouponZero** : Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle de SVENSSON [1994]).
- **Svensson\_TauxATerme** : Calcul des prix des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle de SVENSSON [1994]).
- **Svensson\_TauxZero** : Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle de SVENSSON [1994]).
- **Vasicek** : Modèle de VASICEK [1977].

## Les mots réservés

Les variables globales et les procédures suivantes sont définies dans **SPT**. Ce sont donc les “mots réservés” de la bibliothèque **SPT**.

acp, \_acp, \_acp\_print, affichegearbre, afficheghw, affichegbk, amfuturecrr, arbrehlee, bdfs, \_bdfs-coefficients, \_bdfs-ode, \_bdfs-lambda\_r, \_bdfs-lambda\_theta, \_bdfs-lambda\_delta,



\_bdfs\_kappara, \_bdfs\_kappatheta, \_bdfs\_kappav, \_bdfs\_rho, \_bdfs\_rk4, \_bdfs\_sigmatheta,  
 \_bdfs\_sigmax, \_bdfs\_thetabar, \_bdfs\_vbar, bdt, \_bdt0, \_bdt1, \_bdt2, bdtcap, \_bdt\_delta,  
 bdtfloor, \_bdt\_periode, \_bdt\_r, \_bdt\_rmax, \_bdt\_rmin, bdtvalorisation, \_bdt\_volatilite, \_bdt-  
 \_tauxzero, \_bisection, bkcap, bkdelta0, \_bkdelta0, bkfloor, \_bkinf, \_bkprocmu, \_bkprophi,  
 \_bkprocsigma, \_bksecante, bkvalorisation, blackkarasinski, calendrier\_31jpm, callblacksc-  
 holes, callgarmankohlhagen, \_cbs\_intrapeze, \_cbs\_lambda, \_cbs\_mu, \_cbs\_muprime,  
 \_cbs\_sigma, \_cbs\_simulation, \_centerscale, cir, couponzero\_to\_obligation, creationoblig-  
 ation, \_creationobligation, creation\_matrice\_tridiagonale, csv2spt, \_csv2spt, \_csv2spt1,  
 \_csv2spt2, \_csv2spt3, \_date2string, \_debandtlesne\_coefficients, debandtlesne\_couponzero,  
 \_debandtlesne\_critere, \_debandtlesne\_ln\_couponzero, \_debandtlesne\_obligations, \_debandt-  
 lesne\_poids, \_debandtlesne\_tauxstar, debandtlesne\_tauxaterme, debandtlesne\_tauxzero,  
 \_debandtlesne2\_coefficients, debandtlesne2\_couponzero, \_debandtlesne2\_critere, \_debandt-  
 lesne2\_ln\_couponzero, \_debandtlesne2\_obligations, \_debandtlesne2\_poids, \_debandtlesne2-  
 \_tauxstar, debandtlesne2\_tauxaterme, debandtlesne2\_tauxzero, decodage\_obligation, \_de-  
 riv\_ns\_tauxaterme, duration\_obligation, \_edp\_affichage, \_edp\_print, \_eds\_e, \_eds\_e, \_eds-  
 \_gmm, \_eds\_grad\_gmm, \_eds\_grad\_ml, \_eds\_grad\_e, \_eds\_grad\_e, \_eds\_gradp, \_eds\_grad-  
 \_v, \_eds\_grad\_v, \_eds\_k, \_eds\_m, \_eds\_ml, \_eds\_mu, \_eds\_sigma, \_eds\_t, \_eds\_v, \_eds\_v,  
 \_eds\_x, ei\_eds, \_ei\_eds, \_ei\_k, \_ei\_mu, \_ei\_r, \_ei\_rr, \_ei\_seed, \_ei\_sigma, \_ei\_simul, \_ei\_sv,  
 \_ei\_t0, \_ei\_theta, \_ei\_upsilon, ei2\_eds, \_extensionmatrice, extraction\_matrice\_tridiagona-  
 le, fonctionactualisation, gmm\_eds, gmm\_mbg, gmm\_ou, gvasicek, heathjarrowmorton,  
 \_hjm\_a1, \_hjm\_a2, \_hjm\_integrale1, \_hjm\_integrale2, \_hjm\_integrale3, \_hjm\_integrale4,  
 \_hjm\_n, \_hjm\_sigma, holeecap, holeefloor, holeetaux, holeevalorisation, hullwhite, \_hw\_ar-  
 bre, hwcap, \_hw\_firststage, hwfloor, \_hw\_noeudsuisant, \_hw\_probabilite, \_hw\_secondstage,  
 hwvalorisation, \_hwvalorisation, interpolation\_donnees, intsimp\_hjm, inversion\_matrice\_tri-  
 diagonale, kpss, \_lectureobligation, lire\_edp, longstaffschwartz, \_maturite\_entre\_2dates,  
 \_mbg\_e, \_mbg\_grad\_e, \_mbg\_grad\_v, \_mbg\_v, \_mc\_acceleration, \_mc\_acc\_simulation1,  
 \_mc\_acc\_simulation2, \_mc\_intrapeze, \_mc\_simulation1, \_mc\_simulation2,  
 mc\_spt, \_mc\_sptm, \_mc\_sptm\_mu1, \_mc\_sptm\_mu2, \_mc\_spt\_mu1, \_mc\_spt\_mu2, \_meanc2,  
 \_median2, merton, ml\_eds, ml\_mbg, ml\_ou, nelsonsiegel, \_nelsonsiegel\_coefficients,  
 \_nelsonsiegel\_composante1, \_nelsonsiegel\_composante2, \_nelsonsiegel\_composante3, nelson-  
 siegel\_couponzero, \_nelsonsiegel\_critere, nelsonsiegel\_inversion, \_nelsonsiegel\_m, \_nelson-  
 siegel\_obligation, nelsonsiegel\_pente, nelsonsiegel\_pentetauxaterme, \_nelsonsiegel\_poids,  
 \_nelsonsiegel\_secante, nelsonsiegel\_spn, \_nelsonsiegel\_spn\_nbpoints, nelsonsiegel\_tauxa-  
 terme, nelsonsiegel\_tauxzero, nelsonsiegel\_testar, nelsonsiegel\_testptmc, \_nelsonsiegel\_test-  
 ptmc\_1, \_nelsonsiegel\_testptmc\_logl, \_nw\_sigma2, \_ols\_name, optioncouponzero, \_ou\_e,  
 \_ou\_grad\_e, \_ou\_grad\_v, \_ou\_v, \_phansen, \_ph\_lags, \_ph\_name, \_print, prixobligation,  
 reg\_fm, reg\_ols, selectionarbre, selectionarbreholee, selectionhw, simulation\_eds, simu-  
 lation\_edsm, simulation\_mbg, simulation\_ou, solution\_edp, solution\_systeme\_tridiagonal,

\_spline, spt, \_spt\_algorithme, \_spt\_cn, spt\_data\_path, \_spt\_lambda, sptm, \_sptm\_cn,  
 \_sptm\_lambda, \_sptm\_mu, \_sptm\_mu\_sigma\_lambda, \_sptm\_r, \_sptm\_rho, \_sptm\_sigma,  
 \_sptm\_t, \_sptm\_t0, \_spt\_mu, \_spt\_mu\_sigma\_lambda, \_spt\_r, sptset, \_spt\_sigma, \_spt\_t,  
 \_spt\_t0, svensson, \_svensson\_coefficients, \_svensson\_composante1, \_svensson\_composante2,  
 \_svensson\_composante3, \_svensson\_composante4, svensson\_couponzero, \_svensson\_critere,  
 \_svensson\_ln\_couponzero, \_svensson\_obligations, \_svensson\_poids, svensson\_tauxaterme,  
 svensson\_tauxzero, \_stdc2, taux\_actuariel, \_taux\_actuariel, \_tauxactuarielInf, test\_normet,  
 \_test\_normet\_maket, \_test\_normet\_rndn2, testsargent, \_testsargent, \_testsargent\_n,  
 \_testsargent\_p, \_testsargent\_tau\_star, \_tridiag\_solve, vasicek, \_vcx2, wald\_fm

Les valeurs par défaut des variables globales de contrôle sont :

_bdt_delta	0.2
_bdt_Rmax	0
_bdt_Rmin	0
_eds_gradp	0
_mc_acceleration	0
_NelsonSiegel_NBpoints	100
_ph_lags	5
_ph_name	0
_spt_algorithme	1

La procédure SPTset permet d'initialiser ces variables à leurs valeurs par défaut.

## Description des procédures

---

# affichageArbre

## ■ Objectif

Procédure d’affichage d’un arbre binomial.

## ■ Format

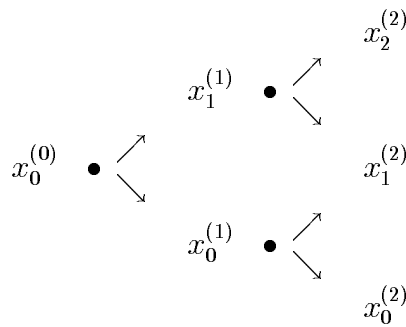
call `affichageArbre(x)`;

## ■ Entrées

`x` vecteur  $N \times 1$ , valeurs de l’arbre binomial.

## ■ Remarque

$N$  admet la factorisation  $\frac{M(M+1)}{2}$  avec  $M \in \mathbb{N}$ .  $M$  est le nombre de périodes de l’arbre, c’est-à-dire que l’arbre comporte  $(M - 1)$  arbitrages. Considérons par exemple l’arbre à 3 périodes suivant



Nous codons les valeurs de l’arbre de la façon suivante :

$$x = \begin{bmatrix} x_0^{(0)} \\ x_1^{(1)} \\ x_0^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(2)} \\ x_0^{(2)} \end{bmatrix}$$

## ■ Source

`holee.src`

►Le programme suivant illustre l’utilisation de la procédure `affichageArbre`. Remarquez la ligne de commande `msym ' ' ' ' ;` qui permet de modifier l’affichage de la valeur manquante.

```
@<----- arbrel.prg ----->@
```

```
new;  
library spt;  
SPTset;  
  
M = 7;  
x = seqa(1,1,M*(M+1)/2);  
  
output file = arbrel.out reset;  
  
msym " "  
format 6,2;  
  
call affichageArbre(x);  
  
output off;
```

```
                22.  
                16.  
                11. 23.  
                7.0 17.  
                4.0 12. 24.  
                2.0 8.0 18.  
1.0            5.0 13. 25.  
                3.0 9.0 19.  
                6.0 14. 26.  
                10. 20.  
                15. 27.  
                21. 28.
```

---

# ArbreHoLee

## ■ Objectif

Calcul des valeurs des coupons zéro  $P_i^{(n)}(\tau)$  dans le modèle de HO et LEE [1985].

## ■ Format

$P = \text{ArbreHoLee}(\text{CouponZero}, \text{pi}, \text{delta});$

## ■ Entrées

CouponZero      vecteur  $N \times 1$ , prix actuels des coupons zéro.  
pi-                    scalaire, valeur du paramètre  $\pi$ .  
delta                 scalaire, valeur du paramètre  $\delta$ .

## ■ Sorties

P                     vecteur  $M \times 1$ , vecteur des prix des coupons zéro  $P_i^{(n)}(\tau)$ .

## ■ Remarque

Le vecteur  $P$  est défini de la façon suivante :

$$P = \begin{bmatrix} P_0^{(0)}(1) \\ P_1^{(1)}(1) \\ P_0^{(1)}(1) \\ P_2^{(2)}(1) \\ P_1^{(2)}(1) \\ P_0^{(2)}(1) \\ \vdots \\ P_0^{(N-1)}(1) \\ P_0^{(0)}(2) \\ P_1^{(1)}(2) \\ P_0^{(1)}(2) \\ \vdots \\ P_0^{(N-2)}(2) \\ \vdots \\ P_0^{(0)}(N) \end{bmatrix}$$

La dimension du vecteur  $P$  est donc  $M = \sum_{k=1}^N \frac{k(k+1)}{2}$ .

## ■ Source

*holee.src*

► Considérons quatre coupons zéro dont la maturité est 1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans et dont les prix actuels sont

$$\begin{aligned}
 P_0^{(0)}(1) &= 0.9045 \\
 P_0^{(0)}(2) &= 0.8208 \\
 P_0^{(0)}(3) &= 0.7472 \\
 P_0^{(0)}(4) &= 0.6814
 \end{aligned}$$

Le programme suivant permet de calculer l'ensemble des valeurs de  $P_i^{(n)}(\tau)$ . Pour afficher ces valeurs sous la forme d'arbres binomiaux, nous devons utiliser les procédures `selectionArbreHoLee` et `affichageArbre`.

```

@<----- hoLee0.prg ----->@

new;
library spt;
SPTset;

tau = 1 | 2 | 3 | 4 ; /* Maturites 1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans */

{CouponZero,TauxZero} = Vasicek(0.10,0.8,0.11,0.15,0.01,tau);

pi_ = 0.445;
delta = 0.9;
P = arbreHoLee(CouponZero,pi_,delta);

output file = hoLee0.out reset;

print P;

output off;

0.9045
0.9608
0.8647
1.018
0.9159
0.8243
1.073
0.9661
0.8695
0.7825
0.8208
0.9234
0.7480
1.032
0.8357
0.6769
0.7472
0.8867
0.6464
0.6814

```

---

# BDFS

## ■ Objectif

Modèle de BALDUZZI, DAS, FORESI et SUNDARAM [1996].

## ■ Format

$\{\text{tau}, \text{CouponZero}, \text{TauxZero}\} = \text{BDFS}(\text{r0}, \text{theta0}, \text{v0}, \text{kappaR}, \text{kappaTheta},$   
 $\text{kappaV}, \text{thetaBar}, \text{vBar}, \text{sigmaTheta}, \text{sigmaV}, \text{rho},$   
 $\text{lambdaR}, \text{lambdaTheta}, \text{lambdaV}, \text{tauMax}, \text{N});$

## ■ Entrées

r0	vecteur $1 \times E$ , valeurs du paramètre $r_0$ .
theta0	vecteur $1 \times E$ , valeurs du paramètre $\theta_0$ .
v0	vecteur $1 \times E$ , valeurs du paramètre $v_0$ .
kappaR	scalaire, valeur du paramètre $\kappa_r$ .
kappaTheta	scalaire, valeur du paramètre $\kappa_\theta$ .
kappaV	scalaire, valeur du paramètre $\kappa_v$ .
thetaBar	scalaire, valeur du paramètre $\bar{\theta}$ .
vBar	scalaire, valeur du paramètre $\bar{v}$ .
sigmaTheta	scalaire, valeur du paramètre $\sigma_\theta$ .
sigmaV	scalaire, valeur du paramètre $\sigma_v$ .
rho	scalaire, valeur du paramètre $\rho$ .
lambdaR	scalaire, valeur du paramètre $\lambda_r$ .
lambdaTheta	scalaire, valeur du paramètre $\lambda_\theta$ .
lambdaV	scalaire, valeur du paramètre $\lambda_v$ .
tauMax	scalaire, valeur de $\tau_{\max}$ .
N	scalaire, nombre de points de discrétisation pour l'algorithme de Runge Kutta.

## ■ Sorties

tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.
CouponZero	matrice $N \times E$ , prix des coupons zéro $P_{t_0}^c(\tau)$ .
TauxZero	matrice $N \times E$ , taux zéro $R_{t_0}(\tau)$ .

## ■ Remarque

La procédure BDFS résout numériquement le modèle pour  $\tau \in [0, \tau_{\max}]$  en employant l'algorithme de Runge Kutta à l'ordre quatre avec un pas constant.

La  $i$ -ième valeur du vecteur tau correspond à  $(i - 1) \frac{\tau_{\max}}{N - 1}$ .

## ■ Source

*modeles.src*

► Dans le programme suivant, nous reproduisons les graphiques de l'article de BALDUZZI, DAS, FORESI et SUNDARAM [1996].

```

@<----- bdfs.prg ----->@

new;
library spt,pgraph;
SPTset;

kappaR = 0.25;
kappaTheta = 0.76;      thetaBar = 0.12;      sigmaTheta = 0.02;
kappaV = 0.29;          vBar = 0.00007;      sigmaV = 0.003;
rho = -0.12;
lambdaR = -0.1;         lambdaTheta = 0;      lambdaV = 0;

r0 = 0.06; theta0 = 0.08; V0 = 0.0008;

tauMax = 30;
N = 300;

x = seqa(0.10,-0.02,5)';

{tau,CouponZero,TauxZero1} = BDFS(x,theta0,v0,
                                kappaR,kappaTheta,kappaV,thetaBar,vBar,sigmaTheta,sigmaV,rho,
                                lambdaR,lambdaTheta,lambdaV,tauMax,N);

x = seqa(0.10,-0.02,5)';

{tau,CouponZero,TauxZero2} = BDFS(r0,x,v0,
                                kappaR,kappaTheta,kappaV,thetaBar,vBar,sigmaTheta,sigmaV,rho,
                                lambdaR,lambdaTheta,lambdaV,tauMax,N);

x = seqa(0.0042,0.0042,5)';

{tau,CouponZero,TauxZero3} = BDFS(r0,theta0,x,
                                kappaR,kappaTheta,kappaV,thetaBar,vBar,sigmaTheta,sigmaV,rho,
                                lambdaR,lambdaTheta,lambdaV,tauMax,N);

graphset;
begwind;
window(2,2,2);

setwind(1);

_pdate = ""; _pnum = 0; _paxes = 0;
fonts("simplex singrma complex microb");
_pmsgstr = "\203Modele de Balduzzi, Das,\000"
           "Foresi et Sundaram @[1996@]\000"
           "Reproduction des figures\000"
           "des pages 46 et 47";

_pmsgctl =
           0.05~0.75~0.3~0~1~7~0 |
           0.05~0.6~0.3~0~1~7~0 |
           0.05~0.35~0.3~0~1~7~0 |
           0.05~0.2~0.3~0~1~7~0 ;

draw;

graphset;

fonts("simplex singrma");
_pnum = 2; _pnumht = 0.25; _ptitlht = 0.25; _paxht = 0.25; _pltype = 6|1|3|4|5;
xlabel("\202t\201"); ylabel("R(\202t\201)");
xtics(0,30,5,0);

setwind(2);
title("EXHIBIT 1\LYield curves for decreasing r (top-down)");
xy(tau,TauxZero1);

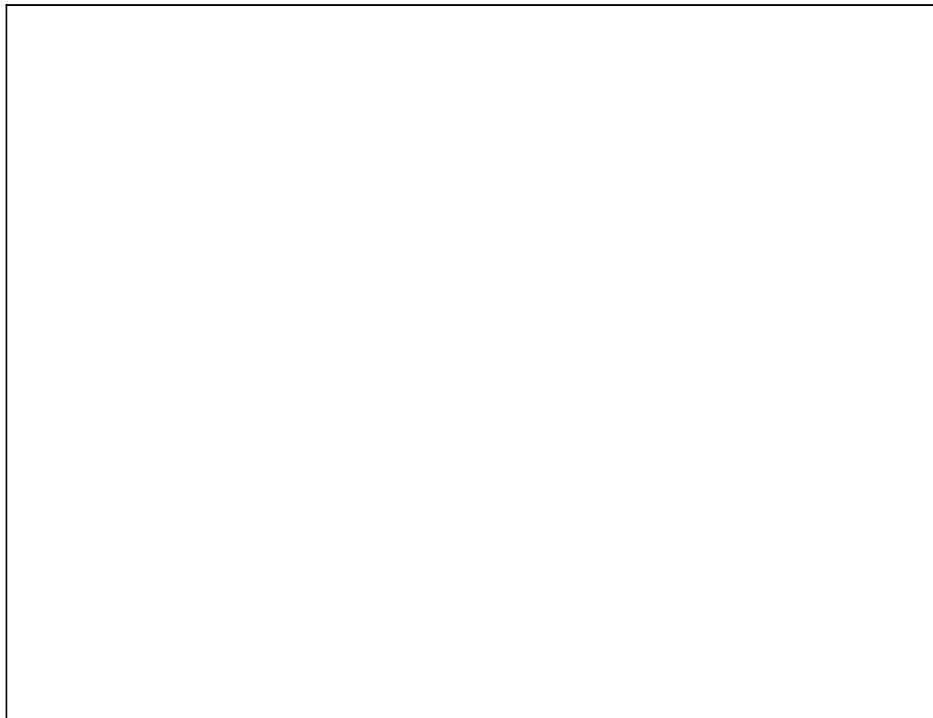
setwind(3);
title("EXHIBIT 2\LYield curves for decreasing \202Q\201 (top-down)");
xy(tau,TauxZero2);

```



```
setwind(4);
  title("EXHIBIT 3\LYield curves for increasing V (top-down)");
  xy(tau,TauxZero3);

  graphprt("-c=1 -cf=_bdfs.eps");
endwind;
```



---

# BDT

## ■ Objectif

Modèle de BLACK, DERMAN et TOY [1990].

## ■ Format

$R = \text{BDT}(\text{TauxZero}, \text{Volatilite});$

## ■ Entrées

TauxZero

vecteur  $N \times 1$ , taux zéro annualisés.

Volatilite

vecteur  $(N - 1) \times 1$ , structure par terme des volatilités.

## ■ Sorties

R

vecteur  $M \times 1$ , vecteur des taux d'intérêt de l'arbre binomial.

## ■ Remarque

La dimension du vecteur  $R$  est  $M = \frac{N(N+1)}{2}$ . Trois autres procédures sont disponibles : BDTcap, BDTfloor et BDTvalorisation. Leur syntaxe est

```
payoff = BDTcap(R,rStar);
```

```
payoff = BDTfloor(R,rStar);
```

```
{C,arbreC} = BDTvalorisation(payoff,R,deltaT);
```

Elles s'utilisent comme les procédures du modèle de Ho et Lee (la variable  $\text{deltaT}$  correspond à la période en années entre deux nœuds).

## ■ Source

*bdt.src*

► L'exemple suivant est celui considéré par BLACK, DERMAN et TOY [1990]. Nous remarquons que les solutions obtenues par les auteurs en employant la méthode des essais et erreurs ne satisfont pas parfaitement les conditions sur la structure par terme des volatilités.

```
@<----- bdt1.prg ----->@
```

```
new;  
library spt;  
SPTset;
```

```
/* Exemple de Black-Derman-Toy [1990] */
```

```
let TauxZero = 0.10 0.11 0.12 0.125 0.13;  
let Volatilite = 0.19 0.18 0.17 0.16;
```

```
/* Resultats obtenus par Black-Derman-Toy [1990] */
```

```

let R2 = 0.10
    0.1432 0.0979
    0.1942 0.1377 0.0976
    0.2179 0.1606 0.1183 0.0872
    0.2553 0.1948 0.1486 0.1134 0.0865;

_print = 0;
R = BDT(TauxZero,Volatilite);

sigma2R = EstimationSigma2(R);
sigma2R2 = EstimationSigma2(R2);

output file = bdt1.out reset;

outwidth 256;
Msym " "; format 11,6;
call affichageArbre(R);
print "-----";
call affichageArbre(R2);
print "-----";
print (seqa(1,1,4).*volatilite^2 ~ sigma2R ~ sigma2R2);

output off;

proc (1) = EstimationSigma2(R);
    local sigma2,n,Rn,lnRn,Ni,i,m,prob,s2;

    sigma2 = {};

    n = 1;
    do until n > rows(TauxZero) - 1;
        Rn = selectionArbre(R,n);
        lnRn = ln(Rn);
        Ni = rows(Rn) - 1;
        i = seqa(Ni,-1,Ni+1);
        prob = (0.5^i).*(0.5^(Ni-i)).*(Ni!)./((Ni-i)!)./(i!);
        m = prob*lnRn;
        s2 = sumc( prob.*((lnRn - m)^2) );
        sigma2 = sigma2 | s2;
        n = n + 1;
    endo;

    retp(sigma2);
endp;

```

				0.280077
			0.228404	
		0.196941		0.203377
	0.143180		0.162571	
0.100000		0.137401		0.147682
	0.0979156		0.115713	
		0.0958616		0.107239
			0.0823614	
				0.0778717
-----				
				0.255300
			0.217900	
		0.194200		0.194800
	0.143200		0.160600	
0.100000		0.137700		0.148600
	0.0979000		0.118300	
		0.0976000		0.113400
			0.0872000	
				0.0865000
-----				
0.0361000	0.0361000	0.0361562		
0.0648000	0.0648000	0.0591699		
0.0867000	0.0867000	0.0699433		
0.102400	0.102400	0.0731972		

► Nous reprenons l'exemple précédent et nous valorisons un cap dont le taux d'exercice est 12.5% (la période de référence est l'année).

```
@<----- bdt2.prg ----->@
new;
library spt;
SPTset;

let TauxZero = 0.10 0.11 0.12 0.125 0.13;
let Volatilite = 0.19 0.18 0.17 0.16;

_print = 0;
R = BDT(TauxZero,Volatilite);

cap = 100*BDTcap(R,0.125);
{V,ArbreV} = BDTvalorisation(cap,R,1);

V5 = selectionArbreHoLee(ArbreV,5);
V4 = selectionArbreHoLee(ArbreV,4);
V3 = selectionArbreHoLee(ArbreV,3);
V2 = selectionArbreHoLee(ArbreV,2);
V1 = selectionArbreHoLee(ArbreV,1);

output file = bdt2.out reset;

Msym " ";
call affichageArbre(V1);
print "-----";
call affichageArbre(V2);
print "-----";
call affichageArbre(V3);
print "-----";
call affichageArbre(V4);
print "-----";
call affichageArbre(V5);

output off;
```

			15.5077
		5.78504	9.50233
	3.56136		7.83773
2.20282		2.35751	4.34638
	1.28484		2.26823
		0.463786	1.01649
			0.000000
			0.000000
-----			
			10.3404
		5.88899	
	3.29809		3.75714
1.84103		1.65163	
	0.752167		0.000000
		0.000000	0.000000
-----			
		7.19412	
	3.68894		
1.93350		1.24012	
	0.564763		
		0.000000	
-----			
	1.81805		
0.826385			
	0.000000		
-----			

0.000000

►La procédure BDT cherche la solution en utilisant l'algorithme de la bisection. Trois variables globales contrôlent la recherche de la solution : `_bdt_delta`, `bdt_Rmax`, `_bdt_Rmin`. Si les variables `bdt_Rmax` et `_bdt_Rmin` sont initialisées à 0, la procédure cherche la solution  $r_0^{(n)}(1)$  dans l'intervalle  $[r_0^{(n-1)}(1) - \Delta, r_0^{(n-1)}(1) + \Delta]$  avec  $\Delta$  la valeur prise par `_bdt_delta`. Si `bdt_Rmax` et `_bdt_Rmin` sont des scalaires non nuls, l'intervalle est alors  $[r_{\min}, r_{\max}]$ . `bdt_Rmax` et `_bdt_Rmin` peuvent aussi être des vecteurs. Si `_print` est égal à 1, la procédure BDT indique l'intervalle qu'elle utilise pour chercher la solution de  $r_0^{(n)}(1)$ . N'hésitez pas à employer cette information s'il n'y a pas convergence. Dans ce cas, la procédure renvoie les premières valeurs de  $r_0^{(n)}(1)$  qu'elle a trouvées. L'exemple suivant illustre l'emploi de ces variables globales.

```
@<----- bdt3.prg ----->@

new;
library spt;
SPTset;

let TauxZero = 0.10 0.11 0.12 0.125 0.13 0.12;
let Volatilite = 0.19 0.18 0.17 0.16 0.15;

outwidth 256;

_print = 1;

output file = bdt3.out reset;

_bdt_delta = 0.005;
R = BDT(TauxZero,Volatilite);
print;
print R';
print;

_bdt_Rmin = 0.04;
_bdt_Rmax = 0.10;

R = BDT(TauxZero,Volatilite);
print;
print R';
print;

_bdt_Rmin = 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.0003;
_bdt_Rmax = 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25;

R = BDT(TauxZero,Volatilite);

output off;

Recherche de la solution de r^(1)_0(1) dans l'intervalle [0.09500000,0.10500000]
Recherche de la solution de r^(2)_0(1) dans l'intervalle [0.09291560,0.10291560]
Recherche de la solution de r^(3)_0(1) dans l'intervalle [0.09086159,0.10086159]
Changez les valeurs de _BDT_Rmin et _BDT_Rmax pour que l'algorithme converge.

0.100000 0.0979156 0.0958616

Recherche de la solution de r^(1)_0(1) dans l'intervalle [0.04000000,0.10000000]
Recherche de la solution de r^(2)_0(1) dans l'intervalle [0.04000000,0.10000000]
Recherche de la solution de r^(3)_0(1) dans l'intervalle [0.04000000,0.10000000]
Recherche de la solution de r^(4)_0(1) dans l'intervalle [0.04000000,0.10000000]
```

Recherche de la solution de  $r^{(5)}_0(1)$  dans l'intervalle [0.04000000,0.10000000]  
Changez les valeurs de `_BDT_Rmin` et `_BDT_Rmax` pour que l'algorithme converge.

0.100000 0.0979156 0.0958616 0.0823614 0.0778717

Recherche de la solution de  $r^{(1)}_0(1)$  dans l'intervalle [0.05000000,0.25000000]  
Recherche de la solution de  $r^{(2)}_0(1)$  dans l'intervalle [0.05000000,0.25000000]  
Recherche de la solution de  $r^{(3)}_0(1)$  dans l'intervalle [0.05000000,0.25000000]  
Recherche de la solution de  $r^{(4)}_0(1)$  dans l'intervalle [0.05000000,0.25000000]  
Recherche de la solution de  $r^{(5)}_0(1)$  dans l'intervalle [0.00030000,0.25000000]

---

# BlackKarasinski

## ■ Objectif

Modèle de BLACK et KARASINSKI [1991].

## ■ Format

$\{t,R\} = \text{BlackKarasinski}(r0,\&\text{procPhi},\&\text{procMu},\&\text{procSigma},t0,\text{delta0},N);$

## ■ Entrées

$r0$	scalaire, valeur initiale du taux d'intérêt $r_0$ .
$\&\text{procPhi}$	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\phi(t)$ .
$\&\text{procMu}$	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t)$ .
$\&\text{procSigma}$	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(t)$ .
$t0$	scalaire, valeur de $t_0$ .
$\text{delta0}$	scalaire, valeur initiale de l'intervalle $t_1 - t_0$ .
$N$	scalaire, nombre de périodes de l'arbre binomial.

## ■ Sorties

$t$	vecteur $(N + 1) \times 1$ , valeurs de $t_n$ .
$R$	vecteur $M \times 1$ , vecteur des taux d'intérêt de l'arbre binomial.

## ■ Remarque

La dimension du vecteur  $P$  est  $M = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ . Quatre autres procédures sont disponibles : `affichageBK`, `BKcap`, `BKfloor` et `BKvalorisation`. Leur syntaxe est

```
call affichageBK(t,R);
```

```
payoff = BKcap(R,rStar);
```

```
payoff = BKfloor(R,rStar);
```

```
{C,arbreC} = BKvalorisation(payoff,R,t);
```

Elles s'utilisent comme les procédures du modèle de Ho et Lee. Une cinquième procédure `BKdelta0` permet d'obtenir la valeur de  $(t_1 - t_0)$  qui assure un découpage de  $[T - t_0]$  en exactement  $N$  sous-périodes qui satisfont la condition (7.86) de la page 310. Sa syntaxe est

```
delta0 = BKdelta0(r0,&procPhi,&procMu,&procSigma,t0,T,N,dMin,dMax);
```

$dMin$  et  $dMax$  sont deux scalaires qui définissent l'intervalle de recherche de la solution. Cette solution existe toujours et l'intervalle de recherche peut être  $[\varepsilon, T]$  avec  $\varepsilon$  une quantité très faible positive.

## ■ Source

*bk.src*

► Dans l'exemple suivant, les fonctions  $\phi(t)$ ,  $\mu(t)$ , et  $\sigma(t)$  sont déterministes.

```
@<----- bk1.prg ----->@

new;
library spt;
SPTset;

proc procMu(t);
  retp(0.15);
endp;

proc procPhi(t);
  retp(0.2);
endp;

proc procSigma(t);
  retp(0.20);
endp;

output file = bk1.out reset;

delta0 = 0.5;
N = 4;
{t,R} = BlackKarasinski(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,delta0,N);
call affichageBK(t,R);
print;

TT = 2;
N = 4;
delta0 = BKdelta0(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,TT,N,0.01,2);
{t,R} = BlackKarasinski(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,delta0,N);
call affichageBK(t,R);

output off;
```

```
@<--- Temps --->@

0.000000 0.500000 0.919601 1.28077 1.59762
```

```
@<--- Taux d'interet --->@

0.175995
0.157760
0.139135 0.140513
0.119958 0.124050
0.100000 0.107376 0.112184
0.0904046 0.0975430
0.0828668 0.0895669
0.0767001 0.0715094
```

```
@<--- Temps --->@

0.000000 0.658770 1.18595 1.62467 2.00000
```

```
@<--- Taux d'interet --->@

0.187733
0.167463
0.146370 0.146931
0.124079 0.128485
0.100000 0.109476 0.114997
0.0896813 0.0985802 0.0900038
0.0818822 0.0756355
```



► Dans l'exemple suivant, les fonctions  $\phi(t)$  et  $\mu(t)$  dépendent du temps.

```
@<----- bk2.prg ----->@
new;
library spt;
SPTset;

cls;

t0 = 0; TT = 2;

proc procMu(t);
  retp(0.25 - t/(TT-t0)*0.20);
endp;

proc procPhi(t);
  retp(0.2*sqrt(t));
endp;

proc procSigma(t);
  retp(0.20);
endp;

output file = bk2.out reset;

N = 6;
delta0 = BKdelta0(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,TT,N,0.01,2);
{t,R} = BlackKarasinski(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,delta0,N);
call affichageBK(t,R);

output off;

@<--- Temps --->@
      0.000000   0.445733   0.845186   1.19492   1.49961   1.76586   2.00000

@<--- Taux d'interet --->@
                                     0.188307
                                     0.180798
                                     0.155169
                                     0.168724
                                     0.147081
                                     0.127864
      0.100000   0.114285   0.133804   0.152676   0.135297   0.119652
      0.0875004   0.103915   0.120514   0.108492   0.105363
      0.0807017   0.0951270   0.0973378   0.0869975   0.0868218
      0.0750880   0.0869975   0.0791852   0.0791852   0.0715434
      0.0697617   0.0697617   0.0644180   0.0644180
      0.0644180   0.0644180   0.0589536
```

► Nous pouvons valoriser les caps et les floors avec le modèle de Black et Karasinski. Nous reprenons le premier exemple et nous considérons un cap 6 mois de taux d'exercice 10%. Attention, les six caplets que nous obtenons ne correspondent pas aux caplets 1 mois à six mois, car le temps n'est pas linéaire dans le modèle de Black et Karasinski. Seule la valeur du dernier caplet a une signification !. Dans notre exemple, c'est le caplet 6 mois.

```
@<----- bk3.prg ----->@
```

```

new;
library spt;
SPTset;

proc procMu(t);
  retp(0.15);
endp;

proc procPhi(t);
  retp(0.2);
endp;

proc procSigma(t);
  retp(0.20);
endp;

TT = 0.5;
N = 5;
delta0 = BKdelta0(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,TT,N,0.01,2);
{t,R} = BlackKarasinski(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,delta0,N);
payoff = 100*BKcap(R,0.10);
{V,arbreV} = BKvalorisation(payoff,R,t);
V = selectionArbreHoLee(ArbreV,1);

output file = bk3.out reset;

Msym " ";
call affichageArbre(V);

output off;

```

				3.24646	4.09050
			2.46805		2.47738
		1.77519		1.74525	
	1.21602		1.12129		1.04894
0.800447		0.682812		0.519730	
	0.401476		0.257585		0.000000
		0.127698		0.000000	
			0.000000		0.000000
				0.000000	
					0.000000

► Pour obtenir la valeur du cap 6 mois, il est nécessaire d'employer une boucle. Dans le programme suivant, le nombre de périodes est le même quelle que soit la maturité du caplet.

```

@<----- bk4.prg ----->@

new;
library spt;
SPTset;

proc procMu(t);
  retp(0.15);
endp;

proc procPhi(t);
  retp(0.2);
endp;

proc procSigma(t);
  retp(0.20);
endp;

N = 5;

output file = bk4.out reset;

```

```

TT = 1/12;
do until TT > 0.5;

    delta0 = BKdelta0(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,TT,N,0.01,2);
    {t,R} = BlackKarasinski(0.10,&procPhi,&procMu,&procSigma,0,delta0,N);
    payoff = 100*BKcap(R,0.10);
    {V,arbreV} = BKvalorisation(payoff,R,t);
    print V[N+1];

    TT = TT + 1/12;
endo;

output off;

0.281962
0.419605
0.531857
0.630136
0.718898
0.800447

```

---

## calendrier\_31jpm

### ■ Objectif

Construction d'une série temporelle multidimensionnelle en tenant compte de 31 jours par mois.

### ■ Format

$y = \text{calendrier\_31jpm}(x, \text{DateDebut}, \text{DateFin});$

### ■ Entreées

$x$	matrice $N \times (K + 1)$ , matrice des dates et des données.
DateDebut	scalaire, date du début de la période.
DateFin	scalaire, date de la fin de la période.

### ■ Sorties

$y$	matrice $M \times (K + 1)$ , matrice des dates et des données régulières.
-----	---

### ■ Remarque

La première colonne de la matrice  $x$  correspond aux dates observées. **SPT** utilise un format particulier pour les dates. Une date "Jour/Mois/Année" correspond à un nombre à 8 chiffres

*yyyymmdd*

Ainsi, la date 10/03/98 est codée 19980310. Ce format permet donc de prendre en compte le changement de millénaire de l'an 2000.

### ■ Source

*date.src*

► Voici un premier exemple d'utilisation de la procédure `calendrier_31jpm`. Lorsque  $x$  est égal à 0, la procédure renvoie le vecteur des dates.

```
@<----- cal1.prg ----->@
new;
library spt;
SPTset;

dates = calendrier_31jpm(0,19960315,19960402); /* Creation d'un vecteur de dates */

output file = cal1.out reset;

print dates';

output off;

19960315.    19960316.    19960317.    19960318.
19960319.    19960320.    19960321.    19960322.
19960323.    19960324.    19960325.    19960326.
19960327.    19960328.    19960329.    19960330.
19960331.    19960401.    19960402.
```

► Dans ce deuxième exemple, nous posons DateDebut et DateFin égaux à 0. La procédure utilise alors la plus petite date et la plus grande pour construire les données régulières.

```
@<----- cal2.prg ----->@
```

```
new;
library spt;
SPTset;

let x[6,2] =
    19970101 10
    19970102 5
    19970103 7
    19970107 8
    19970110 9
    19970112 -5;

y1 = calendrier_31jpm(x,0,0);
y2 = calendrier_31jpm(x,19961228,0);

output file = cal2.out reset;

print y1;
print y2;

output off;
```

```
19970101.      10.000000
19970102.       5.000000
19970103.       7.000000
19970104.       .
19970105.       .
19970106.       .
19970107.       8.000000
19970108.       .
19970109.       .
19970110.       9.000000
19970111.       .
19970112.      -5.000000

19961228.       .
19961229.       .
19961230.       .
19961231.       .
19970101.      10.000000
19970102.       5.000000
19970103.       7.000000
19970104.       .
19970105.       .
19970106.       .
19970107.       8.000000
19970108.       .
19970109.       .
19970110.       9.000000
19970111.       .
19970112.      -5.000000
```

► Cette procédure permet de traiter des bases de données journalières et irrégulières. Nous pouvons donc construire une série temporelle multidimensionnelle à partir de séries temporelles unidimensionnelles en respectant les dates d'observation, comme dans l'exemple suivant.

```
@<----- cal3.prg ----->@
```

```

new;
library spt;
SPTset;

let x1[6,2] =
  19970101 10
  19970102 5
  19970103 7
  19970107 8
  19970110 9
  19970115 -5;

let x2[10,2] =
  19970103 1
  19970104 2
  19970105 3
  19970106 4
  19970107 5
  19970108 6
  19970109 7
  19970110 8
  19970113 9
  19970114 10;

debut = 19970101; fin = 19970115;
y1 = calendrier_31jpm(x1,debut,fin);
y2 = calendrier_31jpm(x2,debut,fin);

output file = cal3.out reset;

print y1~y2[.,2];

output off;

```

19970101.	10.000000	.
19970102.	5.0000000	.
19970103.	7.0000000	1.0000000
19970104.	.	2.0000000
19970105.	.	3.0000000
19970106.	.	4.0000000
19970107.	8.0000000	5.0000000
19970108.	.	6.0000000
19970109.	.	7.0000000
19970110.	9.0000000	8.0000000
19970111.	.	.
19970112.	.	.
19970113.	.	9.0000000
19970114.	.	10.000000
19970115.	-5.0000000	.

---

## callBlackScholes

### ■ Objectif

Calcul de la prime d'achat d'une option européenne dans le modèle de BLACK et SCHOLLES [1973] lorsque le taux d'intérêt  $r(t)$  est stochastique.

### ■ Format

```
{C,Cs} = callBlackScholes(S0,K,sigmaS,t0,T,r0,  
&procMu,&procSigma,&procLambda,N,Ns);
```

### ■ Entrées

S0	scalaire, prix actuel $S_0$ du sous-jacent.
K	scalaire, prix d'exercice $K$ .
sigmaS	scalaire, valeur du paramètre $\sigma_S$ .
t0	scalaire, valeur de $t_0$ .
T	scalaire, date d'échéance du contrat.
r0	scalaire, valeur de $r_0$ .
&procMu	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, r)$ .
&procSigma	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(t, r)$ .
&procLambda	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\lambda(t, r)$ .
N	scalaire, nombre de points de discrétisation de $[t_0, T]$ .
Ns	scalaire, nombre de simulations.

### ■ Sorties

C	scalaire, valeur de la prime lorsque le taux d'intérêt est constant.
Cs	scalaire, valeur de la prime lorsque le taux d'intérêt est stochastique.

### ■ Remarque

La procédure considère le processus sous la mesure de probabilité neutre au risque suivant :

$$\begin{bmatrix} dS(t) \\ dr(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t)S(t) \\ \mu'(t, r(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_S S(t) & 0 \\ 0 & \sigma(t, r(t)) \end{bmatrix} dW'(t)$$

avec

$$\mu'(t, r(t)) = \mu(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))$$

### ■ Source

*actifs.src*

► Dans cet exemple, nous comparons la valeur traditionnelle de la prime d'une option européenne avec celle où le taux d'intérêt est stochastique (modèle de CIR [1985b]).

```

@<----- bs.prg ----->@

new;
library spt;
SPTset;

S0 = 110;
K = 95;
sigmaS = 0.10;
tau = 60/365;
r0 = 0.05;

proc muCIR(t,r);
  retp( 0.8*(0.10-r) );
endp;

proc sigmaCIR(t,r);
  retp( 0.05*sqrt(r) );
endp;

proc lambdaCIR(t,r);
  retp(0.02*sqrt(r)/0.05);
endp;

{C,Cs} = callBlackScholes(S0,K,sigmaS,0,tau,r0,
                        &muCIR,&sigmaCIR,&lambdaCIR,60,1000|5);

output file = bs.out reset;

print ftos(C,"Prime BS de l'option d'achat : %lf francs",10,5);
print ftos(Cs,"Prime de l'option d'achat (taux d'int. stoch.) : %lf francs",10,5);

output off;

Prime BS de l'option d'achat : 15.77769 francs
Prime de l'option d'achat (taux d'int. stoch.) : 15.82152 francs

```





---

# CouponZero\_to\_Obligation

## ■ Objectif

Création d'une base de données d'obligations (format **SPT**) à partir d'obligations à coupon zéro.

## ■ Format

Obligations = CouponZero\_to\_Obligation(CouponZero,tau);

## ■ Entrées

CouponZero      vecteur  $N \times 1$ , prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$ .  
tau                vecteur  $N \times 1$ , maturité  $\tau$  des coupons zéro.

## ■ Sorties

Obligations      matrice  $4 \times N$ , base de données au format **SPT**.

## ■ Remarque

Chaque coupon zéro est codé de la façon suivante (voir le chapitre 1 pour plus de détails) :

$$v^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 \\ P_t^c(\tau) \\ \tau \\ 1 \end{bmatrix}$$

## ■ Source

*titre.src*

► Voici un exemple d'utilisation de la procédure CouponZero\_to\_Obligation.

```
@<----- coupon1.prg ----->@
```

```
new;
library spt;
SPTset;

tau = 1/12|6/12|1|5;
{CouponZero,TauxZero} = Vasicek(0.10,0.9,0.08,0.05,0.02,tau);

obligation = CouponZero_to_Obligation(CouponZero,tau);

output file = coupon1.out reset;

print"          C1          C2          C3          C4";
print;
call printfmt(obligation,1);

output off;
```

```
          C1          C2          C3          C4
          1          1          1          1
0.99176534  0.95322257  0.91157162  0.66202058
0.083333333  0.5          1          5
          1          1          1          1
```

---

# DeBandtLesne

## ■ Objectif

Estimation des coefficients du modèle de DEBANDT et LESNE [1991].

## ■ Format

`coefficients = DeBandtLesne(Obligations,tauStar,Poids);`

## ■ Entrées

Obligations           matrice  $L \times N$ , base de données des obligations au format **SPT**.  
tauStar                scalaire, valeur de  $\tau^*$ .  
Poids                   vecteur  $N \times 1$ , vecteur des poids  $w_n$ .

## ■ Sorties

coefficients           vecteur  $8 \times 1$ , vecteur  $\hat{\theta}$  des valeurs estimées des coefficients.

## ■ Remarque

Cette procédure nécessite la bibliothèque **TSM**.

## ■ Source

*spttsm.src*

► Dans l'exemple suivant, nous contruisons une courbe des taux théorique à partir du modèle de Longstaff et Schwartz, que nous estimons ensuite par le modèle de Debandt et Lesne. Le graphique obtenu se trouve à la page 387.

```
@<----- db1.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optnum, pgraph;
SPTset;
TSMset;

r0 = 0.061448386; V0 = 0.040419483; alpha = 0.052139366;
beta = 0.92955634; gamma_ = 0.29047384; delta = 0.17101326;
eta = 0.012475784; xi = 0.65761552; lambda = 1.06184e-005;

tau = seqa(1/10, 1/10, 100);
{CouponZeroLS, TauxZeroLS} =
  LongstaffSchwartz(r0, V0, alpha, beta, gamma_, delta, eta, xi, lambda, tau);

obligation = CouponZero_to_Obligation(CouponZeroLS, tau);

tauStar = 2.5~5~7.5;

c1 = DeBandtLesne(obligation, 2.5, 1);
c2 = DeBandtLesne(obligation, 5, 1);
c3 = DeBandtLesne(obligation, 7.5, 1);

c = c1~c2~c3;

CouponZero = DeBandtLesne_CouponZero(c, tauStar, tau);
TauxZero = DeBandtLesne_TauxZero(c, tauStar, tau);
```

```

TauxAterme1 = DeBandtLesne_TauxATerme(c1,tauStar[1],tau,0);
TauxAterme2 = DeBandtLesne_TauxATerme(c2,tauStar[2],tau,0);
TauxAterme3 = DeBandtLesne_TauxATerme(c3,tauStar[3],tau,0);
TauxAterme4 = DeBandtLesne_TauxATerme(c,tauStar,5,tau);

graphset;
  begwind;
  window(2,2,0);

  _pdate = ""; _pnum = 2; _paxht = 0.30; _pnumht = 0.30; _ptitlht = 0.30;
  _pltype = 6|1|3|4;
  fonts("simplex singrma");
  xtics(0,10,1,12); xlabel("\202t\201");

setwind(1);

  title("Coupon zero P[c]]t[(\202t\201)");
  ytics(0.5,1,0.1,0);
  _plegstr = "LS\000\202t\201[*] = 2.5\000\202t\201[*] = 5\000\202t\201[*] = 7.5";
  _plegctl = {2 5 7 2};
  xy(tau,CouponZeroLS~CouponZero);

setwind(2);

  title("Taux zero R]t[(\202t\201)");
  ytics(0.052,0.06,0.003,0);
  _plegctl = {2 5 -2 2};
  xy(tau,TauxZeroLS~TauxZero);

setwind(3);

  title("Taux a terme instantane F]t[(\202t\201,0)");
  ytics(0.05,0.07,0.005,0);
  _plegstr = "\202t\201[*] = 2.5\000\202t\201[*] = 5\000\202t\201[*] = 7.5";
  _plegctl = {2 5 7 2};
  xy(tau,TauxAterme1~TauxAterme2~TauxAterme3);

setwind(4);

  title("Taux a terme (a 5 ans) F]t[(5,\202t\201)");
  ytics(0.04,0.07,0.01,0);
  _plegctl = {2 5 -2 2};
  xy(tau,TauxAterme4);

  graphprt("-c=1 -cf=_db1.eps");

endwind;

```

---

## DeBandtLesne\_CouponZero

### ■ Objectif

Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle de DEBANDT et LESNE [1991]).

### ■ Format

CouponZero = DeBandtLesne\_CouponZero(coefficients,tauStar,tau);

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $8 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tauStar	scalaire, valeur de $\tau^*$ .
tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.

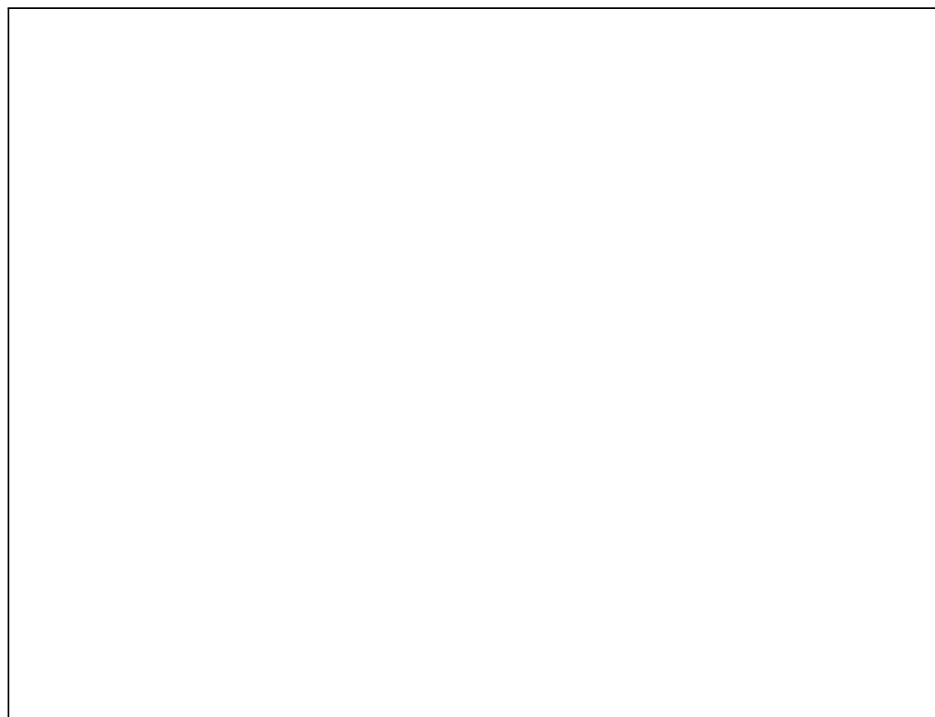
### ■ Sorties

CouponZero	vecteur $N \times 1$ , prix des coupons zéro $P_t^c(\tau)$ .
------------	--

### ■ Source

*debandt.src*

► Voir l'exemple de la page 385.



---

## DeBandtLesne\_TauxATerme

### ■ Objectif

Calcul des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle de DEBANDT et LESNE [1991]).

### ■ Format

$F = \text{DeBandtLesne\_TauxATerme}(\text{coefficients}, \text{tauStar}, \text{tau}, m);$

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $8 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tauStar	scalaire, valeur de $\tau^*$ .
tau	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteur des valeurs de $\tau$ .
m	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteur des valeurs de $m$ .

### ■ Sorties

F	vecteur $N \times 1$ , taux à terme $F_t(\tau, m)$ .
---	--

### ■ Remarque

Pour obtenir les taux à terme instantanés  $f_t(\tau)$ , nous posons  $m$  égal à 0.

### ■ Source

*debandt.src*

► Voir l'exemple de la page 385.

---

## DeBandtLesne\_TauxZero

### ■ Objectif

Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle de DEBANDT et LESNE [1991]).

### ■ Format

TauxZero = DeBandtLesne\_TauxZero(coefficients,tauStar,tau);

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $8 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tau_star	scalaire, valeur de $\tau^*$ .
tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.

### ■ Sorties

TauxZero	vecteur $N \times 1$ , taux zéro $R_t(\tau)$ .
----------	--

### ■ Source

*debandt.src*

► Voir l'exemple de la page 385.

---

## DeBandtLesne2

### ■ Objectif

Estimation des coefficients du modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991].

### ■ Format

`coefficients = DeBandtLesne2(Obligations,tauStar,Poids);`

### ■ Entrées

Obligations           matrice  $L \times N$ , base de données des obligations au format **SPT**.

tauStar                vecteur  $M \times 1$ , valeurs de  $\tau^*$ .

Poids                   vecteur  $N \times 1$ , vecteur des poids  $w_n$ .

### ■ Sorties

coefficients           vecteur  $4(M+1) \times 1$ , vecteur  $\hat{\theta}$  des valeurs estimées des coefficients.

### ■ Remarque

Cette procédure nécessite la bibliothèque **TSM**.

### ■ Source

*spttsm.src*

► Nous reprenons l'exemple de la page 385 en considérant trois nœuds pour la spline polynomiale :

$$\tau^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
@<----- db2.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optmum, pgraph;
SPTset;
TSMset;

r0 = 0.061448386; V0 = 0.040419483; alpha = 0.052139366;
beta = 0.92955634; gamma_ = 0.29047384; delta = 0.17101326;
eta = 0.012475784; xi = 0.65761552; lambda = 1.06184e-005;

tau = seqa(1/10, 1/10, 100);
{CouponZeroLS, TauxZeroLS} =
    LongstaffSchwartz(r0, V0, alpha, beta, gamma_, delta, eta, xi, lambda, tau);

obligation = CouponZero_to_Obligation(CouponZeroLS, tau);

tauStar = 1|3|6;

c = DeBandtLesne2(obligation, tauStar, 1);

CouponZero = DeBandtLesne2_CouponZero(c, tauStar, tau);
```



```

TauxZero = DeBandtLesne2_TauxZero(c,tauStar,tau);
TauxATerme1 = DeBandtLesne2_TauxATerme(c,tauStar,tau,0);
TauxATerme2 = DeBandtLesne2_TauxATerme(c,tauStar,5,tau);

graphset;
  begwind;
  window(2,2,0);

  _pdate = ""; _pnum = 2; _paxht = 0.30; _pnumht = 0.30; _ptitlht = 0.30;
  _pltype = 6|1|3|4;
  fonts("simplex simgrma");
  xtics(0,10,1,12); xlabel("\202t\201");

setwind(1);

  title("Coupon zero P[c]]t[(\202t\201)");
  ytics(0.5,1,0.1,0);
  xy(tau,CouponZero);

setwind(2);

  title("Taux zero R]t[(\202t\201)");
  ytics(0.052,0.06,0.003,0);
  xy(tau,TauxZero);

setwind(3);

  title("Taux a terme instantane F]t[(\202t\201,0)");
  ytics(0.05,0.07,0.005,0);
  xy(tau,TauxATerme1);

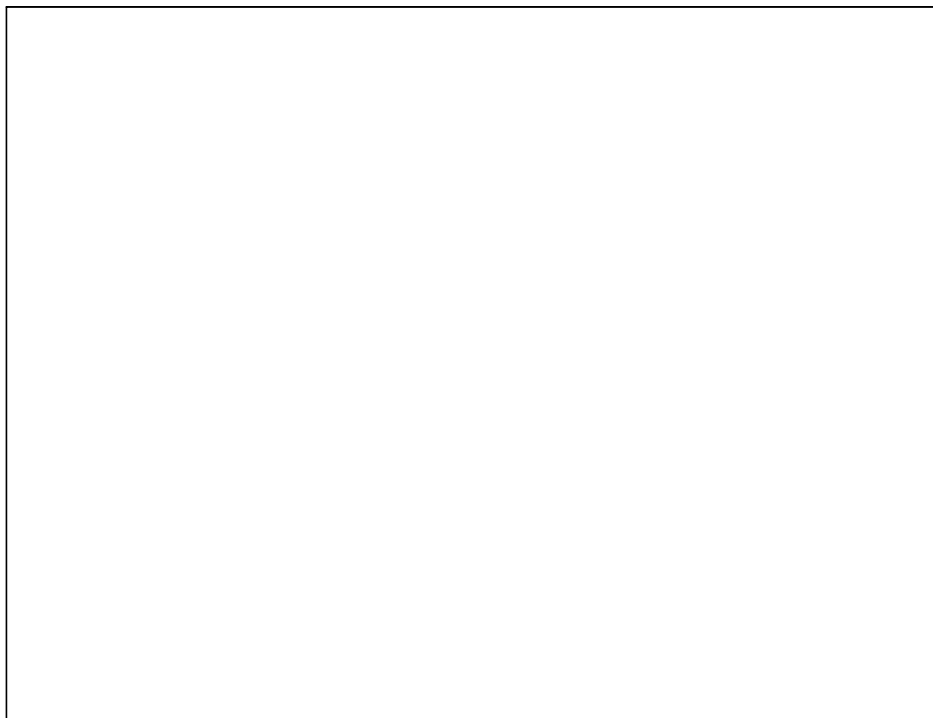
setwind(4);

  title("Taux a terme (a 5 ans) F]t[(5,\202t\201)");
  ytics(0.06,0.065,0.001,0);
  xy(tau,TauxATerme2);

  graphprt("-c=1 -cf=_db2.eps");

endwind;

```



---

## DeBandtLesne2\_CouponZero

### ■ Objectif

Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991]).

### ■ Format

CouponZero = DeBandtLesne2\_CouponZero(coefficients,tauStar,tau);

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $4(M + 1) \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tauStar	vecteur $M \times 1$ , valeurs de $\tau^*$ .
tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.

### ■ Sorties

CouponZero	vecteur $N \times 1$ , prix des coupons zéro $P_t^c(\tau)$ .
------------	--

### ■ Source

*debandt2.src*

► Voir l'exemple de la page 390.

---

## DeBandtLesne2\_TauxATerme

### ■ Objectif

Calcul des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991]).

### ■ Format

$F = \text{DeBandtLesne2\_TauxATerme}(\text{coefficients}, \text{tauStar}, \text{tau}, m);$

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $4(M + 1) \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tauStar	vecteur $M \times 1$ , valeurs de $\tau^*$ .
tau	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteur des valeurs de $\tau$ .
m	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteur des valeurs de $m$ .

### ■ Sorties

$F$  vecteur  $N \times 1$ , taux à terme  $F_t(\tau, m)$ .

### ■ Remarque

Pour obtenir les taux à terme instantanés  $f_t(\tau)$ , nous posons  $m$  égal à 0.

### ■ Source

*debandt2.src*

► Voir l'exemple de la page 390.

---

## DeBandtLesne2\_TauxZero

### ■ Objectif

Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle généralisé de DEBANDT et LESNE [1991]).

### ■ Format

TauxZero = DeBandtLesne2\_TauxZero(coefficients,tauStar,tau);

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $4(M + 1) \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tauStar	vecteur $M \times 1$ , valeurs de $\tau^*$ .
tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.

### ■ Sorties

TauxZero	vecteur $N \times 1$ , taux zéro $R_t(\tau)$ .
----------	--

### ■ Source

*debandt2.src*

► Voir l'exemple de la page 390.

---

# Decodage\_Obligation

## ■ Objectif

Extraction des informations (prix, valeur et maturité des coupons) de la  $n$ -ième obligation d'une base de données d'obligations (format **SPT**).

## ■ Format

{Prix,tau,valCoupon} = Decodage\_Obligation(Obligations[.,n]);

## ■ Entrées

Obligations            matrice  $L \times N$ , base de données des obligations au format **SPT**.

## ■ Sorties

Prix                    scalaire, prix de l'obligation.  
tau                     vecteur  $J \times 1$ , maturité des coupons.  
valCoupon              vecteur  $J \times 1$ , valeur des coupons.

## ■ Remarque

Le premier chapitre de la thèse indique comment sont codées les informations dans la base de données Obligations.

## ■ Source

*titre.src*

► Nous reprenons l'exemple du premier chapitre de la thèse.

```
@<----- oblig1.prg ----->@  
  
new;  
library spt;  
SPTset;  
  
v1 = 5                    |    /* Nombre de coupons    */  
    119.95                |    /* Prix de l'obligation */  
    25/360    | 8.55 |    /* Mat. et valeur du premier coupon */  
    25/360 + 1 | 8.55 |  
    25/360 + 2 | 8.55 |  
    25/360 + 3 | 8.55 |  
    25/360 + 4 | 100 + 8.55;  
  
v2 = 1 | 94.50 | 1 + 50/360 | 100;  
v3 = 3 | 115.70 | 75/360 | 10.15 |  
      75/360 + 1 | 7.45 | 75/360 + 2 | 109.35;  
  
Obligations = zeros(12,3);  
Obligations[.,1] = v1;  
Obligations[1:rows(v2),2] = v2;  
Obligations[1:rows(v3),3] = v3;  
  
output file = oblig1.out reset;  
  
print obligations;
```

```

i = 1;
do until i > 3;

  {Prix,Tau,C} = decodage_obligation(Obligations[.,i]);
  Nc = rows(C);
  print; print;
  print ftos(i,"Prix de l'obligation %lf",0,0)$+ftos(Prix," :% lf francs",10,3);
  print "      coupon      maturite      valeur ";
  print seqa(1,1,Nc)~tau~C;

  i = i + 1;
endo;

output off;

```

5.0000000	1.0000000	3.0000000
119.95000	94.500000	115.70000
0.069444444	1.1388889	0.20833333
8.5500000	100.00000	10.150000
1.0694444	0.0000000	1.2083333
8.5500000	0.0000000	7.4500000
2.0694444	0.0000000	2.2083333
8.5500000	0.0000000	109.35000
3.0694444	0.0000000	0.0000000
8.5500000	0.0000000	0.0000000
4.0694444	0.0000000	0.0000000
108.55000	0.0000000	0.0000000

```

Prix de l'obligation 1 : 119.950 francs
      coupon      maturite      valeur
1.0000000  0.069444444  8.5500000
2.0000000  1.0694444  8.5500000
3.0000000  2.0694444  8.5500000
4.0000000  3.0694444  8.5500000
5.0000000  4.0694444  108.55000

```

```

Prix de l'obligation 2 : 94.500 francs
      coupon      maturite      valeur
1.0000000  1.1388889  100.00000

```

```

Prix de l'obligation 3 : 115.700 francs
      coupon      maturite      valeur
1.0000000  0.20833333  10.150000
2.0000000  1.2083333  7.4500000
3.0000000  2.2083333  109.35000

```

---

## ei\_EDS

### ■ Objectif

Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique par la méthode de l'Inférence Indirecte.

### ■ Format

```
{theta_ml,theta_ei} =  
ei_EDS(x,&procMu,&procSigma,t0,k,sv,RR,r,&procSimul,seed,Upsilon);
```

### ■ Entrées

x	vecteur $Nobs \times 1$ , vecteur des données.
&procMu	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, x, \theta)$ .
&procSigma	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(t, x, \theta)$ .
t0	scalaire, valeur de $t_0$ .
k	scalaire, valeur du pas d'observation $k$ .
sv	vecteur $g \times 1$ , valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation.
RR	matrice $np \times g$ , matrice $R$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
r	vecteur $np \times 1$ , vecteur $r$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
&procSimul	pointeur d'une fonction qui simule les trajectoires $y^{(s)}$ .
seed	scalaire, compteur initial pour la génération des nombres aléatoires.
Upsilon	matrice $np \times np$ , matrice des poids $\Upsilon$ .

### ■ Sorties

theta_ml	vecteur $np \times 1$ , vecteur des coefficients estimés $\hat{\theta}_{ML}$ .
theta_ei	vecteur $np \times 1$ , vecteur des coefficients estimés $\hat{\theta}_{EI}$ .

### ■ Variables globales

_eds_gradp	vecteur $2 \times 1$ de pointeurs qui calculent les jacobiens $\mu_\theta(t, x(t), \theta)$ et $\sigma_\theta(t, x(t), \theta)$ — ou — 0 pour les jacobiens numériques.
------------	---

### ■ Remarque

La procédure `ei_eds` considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu(t, x(t), \theta) dt + \sigma(t, x(t), \theta) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

### ■ Source

`estim.src`

► Voici un exemple de correction de biais d'estimation.

```

@<----- ei.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optnum;
SPTset;
TSMset;

rndseed 123;

{t,x} = simulation_OU(0.1,0.8,0.1,0.06,0,1000,10000,1);
sv = 0.8|0.1|0.06;

indx = seqa(1,10,1000);
x = x[indx];
k = 1;

proc procMu(t,x,theta);
  retp(theta[1]*(theta[2]-x));
endp;

proc gradMu(t,x,theta);
  local Nobs;
  Nobs = rows(x);
  retp( (theta[2]-x) ~ ((theta[1]^0).*ones(Nobs,1)) );
endp;

proc procSigma(t,x,theta);
  retp(theta[3]);
endp;

proc gradSigma(t,x,theta);
  retp((0^0^1));
endp;

proc (1) = procSimul(theta);
  local a,b,sigma,t,x;

  a = theta[1];
  b = theta[2];
  sigma = theta[3];

  {t,x} = simulation_OU(0.1,a,b,sigma,0,1000,10000,3); /* 3 simulations */

  x = x[seqa(1,10,1000),.];

  retp(x);
endp;

_print = 1;
_edst_gradp = &gradMu | &gradSigma;

{theta_ml,theta_ei} = ei_EDS(x,&procMu,&procSigma,0,k,sv,0,0,&procSimul,456,eye(3));

output file = ei.out reset;

_tsm_parmm = "a"|"b"|"sigma";

print; print;
print "          Vraies valeurs      Est. Naive   Inference Indirecte";
print;
call printfmt(_tsm_parmm~sv~theta_ML~theta_EI,0~1~1~1);

output off;

```

	Vraies valeurs	Est. Naive	Inference Indirecte
a	0.8	0.54195505	0.73812928
b	0.1	0.10011579	0.099831214
sigma	0.06	0.04109327	0.057512699



---

## gmm\_eds

### ■ Objectif

Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique (méthode des moments généralisés).

### ■ Format

```
{theta,stderr,Mcov,Qmin} =  
gmm_eds(x,&procMu,&procSigma,t0,k,sv,RR,r);
```

### ■ Entrées

x	vecteur $Nobs \times 1$ , vecteur des données.
&procMu	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, x, \theta)$ .
&procSigma	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(t, x, \theta)$ .
t0	scalaire, valeur de $t_0$ .
k	scalaire, valeur du pas d'observation $k$ .
sv	vecteur $g \times 1$ , valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation.
RR	matrice $np \times g$ , matrice $R$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
r	vecteur $np \times 1$ , vecteur $r$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .

### ■ Sorties

theta	vecteur $np \times 1$ , vecteur des coefficients estimés.
stderr	vecteur $np \times 1$ , vecteur des écart-types associés.
Mcov	matrice $np \times np$ , matrice de covariance des coefficients estimés.
Qmin	scalaire, valeur de la fonction $Q(\hat{\theta}_{GMM})$ .

### ■ Variables globales

_eds_gradp	vecteur $2 \times 1$ de pointeurs qui calculent les jacobiens $\mu_\theta(t, x(t), \theta)$ et $\sigma_\theta(t, x(t), \theta)$ — ou — 0 pour les jacobiens numériques.
------------	---

### ■ Remarque

La procédure `gmm_eds` considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu(t, x(t), \theta) dt + \sigma(t, x(t), \theta) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Pour obtenir une estimation non contrainte, nous posons `RR` égal à 0.

### ■ Source

`estim.src`

► Considérons l'estimation non contrainte des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck par la méthode naïve des moments généralisés.

```
@<----- gmm3.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optmum;
SPTset;
TSMset;

rndseed 123;
a = 0.9; b = 8; sigma = 0.75;
{t,x} = simulation_OU(9,a,b,sigma,0,10,1000,1);

proc procMu(t,x,theta);
    retp(theta[1]*(theta[2]-x));
endp;

proc procSigma(t,x,theta);
    retp(theta[3]);
endp;

k = 10/1000;
sv = rndu(3,1);

output file = gmm3.out reset;

{theta, stderr, Mcov, Qmin} = gmm_eds(x, &procMu, &procSigma, 0, k, sv, 0, 0);

output off;
```

```
Total observations:          999
Usable observations:        999
Number of parameters to be estimated:  3
Degrees of freedom:         996
Number of moment conditions:  4
Value of the criterion function:  0.00225
```

```
Hansen's test of overidentifying restrictions:  2.24975
p-value: 0.13364
```

Parameters	estimates	std.err.	t-statistic	p-value
P01	1.068612	0.453446	2.356645	0.018634
P02	8.389674	0.242215	34.637259	0.000000
P03	0.773442	0.017375	44.514343	0.000000

---

## gmm\_MBG

### ■ Objectif

Estimation des paramètres d'un mouvement brownien géométrique (méthode des moments généralisés).

### ■ Format

`{theta,stderr,Mcov,Qmin} = gmm_MBG(x,k,sv,RR,r);`

### ■ Entrées

<code>x</code>	vecteur $Nobs \times 1$ , vecteur des données.
<code>k</code>	scalaire, valeur du pas d'observation $k$ .
<code>sv</code>	vecteur $g \times 1$ , valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation.
<code>RR</code>	matrice $2 \times g$ , matrice $R$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
<code>r</code>	vecteur $2 \times 1$ , vecteur $r$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .

### ■ Sorties

<code>theta</code>	vecteur $2 \times 1$ , vecteur des coefficients estimés.
<code>stderr</code>	vecteur $2 \times 1$ , vecteur des écart-types associés.
<code>Mcov</code>	matrice $2 \times 2$ , matrice de covariance des coefficients estimés.
<code>Qmin</code>	scalaire, valeur de la fonction critère $Q(\hat{\theta}_{\text{GMM}})$ .

### ■ Variables globales

Toutes les variables globales définies dans **TSM** sont accessibles (en particulier `_print`, `_gmm_lags` et `_gmm_tol` et `_gmm_iter`).

### ■ Remarque

La procédure `gmm_MBG` nécessite la bibliothèque **TSM**. Elle considère le mouvement brownien géométrique suivant

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu x(t) dt + \sigma x(t) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Le vecteur  $\theta$  de paramètres est

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \end{bmatrix}$$

La méthode du jacobien analytique est implémentée dans la procédure `gmm_MBG`. Pour une estimation non contrainte, nous initialisons `RR` à 0.

### ■ Source

`estim.src`

► Dans l'exemple suivant, nous utilisons 5 retards (`_gmm_lags = 5`) pour l'estimation de la matrice de Newey-West.

```
@<----- gmm1.prg ----->@
```

```
new;
library spt, tsm, optnum;
SPTset;
TSMset;

rndseed 456;

mu = 0.2; sigma = 0.5;
{t,x} = simulation_MBG(10, mu, sigma, 0, 10, 1000, 1);

sv = rndu(2, 1);
k = 10/1000;

output file = gmm1.out reset;

_gmm_lags = 5;
{theta, stderr, Mcov, Qmin} = gmm_MBG(x, k, sv, 0, 0);

output off;
```

```
Total observations:          999
Usable observations:        999
Number of parameters to be estimated:  2
Degrees of freedom:         997
Number of moment conditions:  2
Value of the criterion function:  0.00000
```

Parameters	estimates	std.err.	t-statistic	p-value
mu	0.192904	0.162635	1.186113	0.235860
sigma	0.494891	0.010800	45.821897	0.000000

---

## gmm\_OU

### ■ Objectif

Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (méthode des moments généralisés).

### ■ Format

$\{\text{theta}, \text{stderr}, \text{Mcov}, \text{Qmin}\} = \text{gmm\_OU}(\text{x}, \text{k}, \text{sv}, \text{RR}, \text{r});$

### ■ Entrées

x	vecteur $Nobs \times 1$ , vecteur des données.
k	scalaire, valeur du pas d'observation $k$ .
sv	vecteur $g \times 1$ , valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation.
RR	matrice $3 \times g$ , matrice $R$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
r	vecteur $3 \times 1$ , vecteur $r$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .

### ■ Sorties

theta	vecteur $3 \times 1$ , vecteur des coefficients estimés.
stderr	vecteur $3 \times 1$ , vecteur des écart-types associés.
Mcov	matrice $3 \times 3$ , matrice de covariance des coefficients estimés.
Qmin	scalaire, valeur de la fonction critère $Q(\hat{\theta}_{\text{GMM}})$ .

### ■ Variables globales

Toutes les variables globales définies dans **TSM** sont accessibles (en particulier `_print`, `_gmm_lags` et `_gmm_tol` et `_gmm_iter`).

### ■ Remarque

La procédure `gmm_OU` nécessite la bibliothèque **TSM**. Elle considère le processus d'Ornstein-Uhlenbeck suivant

$$\begin{cases} dx(t) &= a(b - x(t)) dt + \sigma dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Le vecteur  $\theta$  de paramètres est

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \sigma \end{bmatrix}$$

La méthode du jacobien analytique est implémentée dans la procédure `gmm_OU`. Pour une estimation non contrainte, nous initialisons `RR` à 0.

### ■ Source

`estim.src`

► Dans l'exemple suivant, nous estimons les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck en imposant la restriction  $b = 8$ .

```
@<----- gmm2.prg ----->@
```

```
new;
library spt, tsm, optmum;
SPTset;
TSMset;

rndseed 123;

a = 0.9;
b = 8;
sigma = 0.75;

{t,x} = simulation_OU(9,a,b,sigma,0,10,1000,1);

sv = a|b|sigma;
k = 10/1000;

/* contrainte : b = 8 */

CC = 0~1~0;
c = 8;
{RR,r} = Explicit_to_Implicit(CC,c);
sv = invpd(RR'RR)*RR'(sv-r);

output file = gmm2.out reset;

{theta,stderr,Mcov,Qmin} = gmm_OU(x,k,sv,RR,r);

output off;
```

```
Total observations:          999
Usable observations:        999
Number of parameters to be estimated:  3
Degrees of freedom:        997
Number of moment conditions:  3
Value of the criterion function:  0.00130
```

```
Hansen's test of overidentifying restrictions:  1.29722
p-value: 0.25472
```

Parameters	estimates	std.err.	t-statistic	p-value
a	0.612345	0.308199	1.986847	0.047213
b	8.000000	0.000000	.	.
sigma	0.770181	0.017242	44.668410	0.000000

---

# gVasicek

## ■ Objectif

Calcul de la fonction  $b_t(\tau)$  du modèle généralisé de Vasicek (HULL et WHITE [1990]).

## ■ Format

$b = \text{gVasicek}(\text{NSdata}, a, \text{sigma}, \text{tau});$

## ■ Entrées

NSdata	matrice $T \times 5$ , base de données des coefficients du modèle de Nelson et Siegel.
a	scalaire, valeur du paramètre $a$ .
sigma	scalaire, valeur du paramètre $\sigma$ .
tau	vecteur $1 \times E$ , valeurs des maturités.

## ■ Sorties

b matrice  $T \times E$ , valeurs de la fonction  $b_t(\tau)$ .

## ■ Remarque

La matrice NSdata est décrite page 448.

## ■ Source

*nelson2.src*

► Voici un exemple d'utilisation de la procédure gVasicek.

```
@<----- gvasicek.prg ----->@
new;
library spt;
SPTset;

Dates = miss(0,0);
theta = 0.067 | -0.005 | -0.045 | 1.800 ;
NSdata = Dates~theta'; /* Base de donnees Nelson-Siegel */

tau = seqa(0,1,5)'^30;

F = NelsonSiegel_TauxATerme(theta,tau,0);
b = gVasicek(NSdata,0.8,0.02,tau);

output file = gvasicek.out reset;

print "Maturite : "; print tau;
print "Taux a terme : "; print F;
print "b(tau) : "; print b;

output off;

Maturite :
    0.00000000      1.0000000      2.0000000      3.0000000      4.0000000      30.000000
Taux a terme :
    0.061999937    0.049787393    0.048894387    0.051889955    0.055621361    0.066999956
b(tau) :
    0.034222159    0.044060202    0.051480212    0.056790610    0.060448676    0.067312485
```

---

# HeathJarrowMorton

## ■ Objectif

Simulation du taux d'intérêt  $r(t)$  dans le modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1992] sous la mesure de probabilité neutre au risque.

## ■ Format

```
r = HeathJarrowMorton(f0,&procSigma,t0,t,Nd,Ns);
```

## ■ Entrées

f0	scalaire, valeur du taux à terme $f_{t_0}(t - t_0)$ .
&procSigma	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(\theta, T)$ .
t0	scalaire, valeur de $t_0$ .
t	scalaire, valeur de $t$ .
Nd	scalaire, nombre de points de discrétisation.
Ns	scalaire, nombre de simulations.

## ■ Sorties

r	vecteur $N_s \times 1$ , valeurs simulées de $r(t)$ .
---	---

## ■ Source

*hjm.src*

► Nous reprenons l'exemple du septième chapitre de la thèse.

```
@<----->@
hjm2.prg

new;
library spt;
SPTset;

F0 = 0.10;
t0 = 1;
t = 2;
sigma1 = 0.02;
sigma2 = 0.05;
c = 0.125;

proc procSigma(theta,T);
  local Nobs;
  Nobs = maxc(rows(theta)|rows(T));
  retp( sigma1*ones(Nobs,1) ~ sigma2.*exp(-c/2.*(T-theta)) );
endp;

TauxZero = HeathJarrowMorton(F0,&procSigma,t0,t,100,5);

output file = hjm2.out reset;

print TauxZero;

output off;

0.092284562
0.097484113
0.10518173
0.073944216
0.24279266
```



---

# HoLeeCap

## ■ Objectif

Calcul des valeurs du payoff d'un cap dans le modèle de HO et LEE [1985].

## ■ Format

payoff = HoLeeCap(r,rstar);

## ■ Entrées

r                      vecteur  $Q \times 1$ , vecteur des valeurs de  $r_i^{(n)}(\tau)$ .  
rstar                  scalaire, taux d'intérêt d'exercice  $r^*$ .

## ■ Sorties

payoff                vecteur  $Q \times 1$ , valeurs du payoff du cap.

## ■ Source

*holee.src*

► Nous reprenons l'exemple de la page 364 et nous calculons les valeurs du payoff du cap pour un taux d'exercice de 10% et un contrat de 100 francs.

```
@<----- holee3.prg ----->@
new;
library spt;
SPTset;

tau = 1 | 2 | 3 | 4 ; /* Maturites 1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans */

{CouponZero,TauxZero} = Vasicek(0.10,0.8,0.11,0.15,0.01,tau);

pi_ = 0.445;
delta = 0.9;
P = arbreHoLee(CouponZero,pi_,delta);
P1 = selectionArbreHoLee(P,1);
r1 = HoLeeTaux(P1,360,365);

payoff = 100*HoLeeCap(r1,0.12); /* payoff du cap de taux d'exercice 10 %
                               pour un contrat de 100 francs */

output file = holee3.out reset;

Msym " ";
call affichageArbre(payoff);

output off;
```

```
0.000000
0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000
3.43560 0.000000 2.80884
9.02449 15.4132
```

---

# HoLeeFloor

## ■ Objectif

Calcul des valeurs du payoff d'un floor dans le modèle de HO et LEE [1985].

## ■ Format

payoff = HoLeeFloor(r,rstar);

## ■ Entrées

r                    vecteur  $Q \times 1$ , vecteur des valeurs de  $r_i^{(n)}(\tau)$ .  
rstar                scalaire, taux d'intérêt d'exercice  $r^*$ .

## ■ Sorties

payoff              vecteur  $Q \times 1$ , valeurs du payoff du floor.

## ■ Source

*holee.src*

► Voici l'exemple de AUGROS [1989], pages 192-194.

```
@<----- holee5.prg ----->@

new;
library spt;
SPTset;

CouponZero = 0.992|0.984|0.976|0.969|0.961|0.953;
pi_ = 0.5;
delta = 0.998;

P = arbreHoLee(CouponZero,pi_,delta);
P1 = selectionArbreHoLee(P,1);
P2 = selectionArbreHoLee(P,2);
P3 = selectionArbreHoLee(P,3);
P4 = selectionArbreHoLee(P,4);
P5 = selectionArbreHoLee(P,5);
P6 = selectionArbreHoLee(P,6);
r1 = HoLeeTaux(P1,360,30);
payoff = HoLeeFloor(r1,0.07);
payoff = (payoff*30*10000000)/(360 + 30*r1);
{C,arbreC} = HoLeeValorisation(payoff,P1,pi_);
C6 = selectionArbreHoLee(ArbreC,1);
C5 = selectionArbreHoLee(ArbreC,2);
C4 = selectionArbreHoLee(ArbreC,3);
C3 = selectionArbreHoLee(ArbreC,4);
C2 = selectionArbreHoLee(ArbreC,5);
C1 = selectionArbreHoLee(ArbreC,6);

output file = holee5.out reset;

print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 1 mois ---";
call affichageArbre(P1); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 2 mois ---";
call affichageArbre(P2); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 3 mois ---";
call affichageArbre(P3); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 4 mois ---";
call affichageArbre(P4); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 5 mois ---";
```

```

call affichageArbre(P5); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 6 mois ---";
call affichageArbre(P6); print;
print "--- Arbre d'evolution du taux zero de maturite 1 mois ---";
call affichageArbre(r1); print;
print "---- Arbre du floor 1 mois ----";
call affichageArbre(C1); print;
print "---- Arbre du floor 2 mois ----";
call affichageArbre(C2); print;
print "---- Arbre du floor 3 mois ----";
call affichageArbre(C3); print;
print "---- Arbre du floor 4 mois ----";
call affichageArbre(C4); print;
print "---- Arbre du floor 5 mois ----";
call affichageArbre(C5); print;
print "---- Arbre du floor 6 mois ----";
call affichageArbre(C6); print;
print ftos(sumc(c),"Valeur du FLOOR : %lf francs",10,5);

```

```
output off;
```

```

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 1 mois ---
                                0.996639
                                0.995715
                                0.995809
                                0.994645
                                0.993724
                                0.992656
0.992000  0.992928  0.993856  0.993818
                                0.991736
                                0.990671
                                0.990943  0.991830
                                0.989753
                                0.989884  0.989846
                                0.988689
                                0.987773
                                0.986712

```

```

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 2 mois ---
                                0.991376
                                0.990551
                                0.988701
                                0.987414
                                0.986592
0.984000  0.985841  0.984750  0.983468
                                0.982650
                                0.980815  0.979538
                                0.978723
                                0.975624

```

```

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 3 mois ---
                                0.985249
                                0.982497
                                0.979748  0.979349
0.976000  0.976614  0.973485
                                0.970766
                                0.967655

```

```

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 4 mois ---
                                0.976263
                                0.972629
0.969000  0.968477
                                0.964871
                                0.960752

```

```

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 5 mois ---
                                0.965494
0.961000  0.955877

```

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 6 mois ---  
 0.953000

--- Arbre d'evolution du taux zero de maturite 1 mois ---

				0.0404724
			0.0516414	0.0646016
		0.0741881	0.0504997	0.0757929
	0.0854634	0.0746490	0.0757929	0.0887791
0.0967742	0.0983849	0.0988467	0.0999929	0.113005
	0.109683	0.122630	0.124241	0.137280
		0.123093	0.148538	0.161603

--- Arbre du floor 1 mois ---

0.000000

--- Arbre du floor 2 mois ---

0.000000  
 0.000000  
 0.000000

--- Arbre du floor 3 mois ---

0.000000  
 0.000000  
 0.000000  
 0.000000  
 0.000000

--- Arbre du floor 4 mois ---

			16182.1
		8041.35	0.000000
1980.15	3992.24	0.000000	0.000000
	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000

--- Arbre du floor 5 mois ---

			15233.3
		7584.74	0.000000
	1871.21	3769.07	0.000000
928.118	0.000000	0.000000	0.000000
	0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000

--- Arbre du floor 6 mois ---

				24523.6
			14437.0	4474.59
		8295.21	2223.25	0.000000
	2591.04	4671.10	1104.75	0.000000
1419.80	271.461	547.885	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000
			0.000000	0.000000

Valeur du FLOOR : 4328.07293 francs

---

# HoLeeTaux

## ■ Objectif

Calcul des taux d'intérêt  $r_i^{(n)}(\tau)$  dans le modèle de HO et LEE [1985].

## ■ Format

`r_tau = HoLeeTaux(P_tau,br,bc);`

## ■ Entrées

`P_tau` vecteur  $Q \times 1$ , valeur des coupons zéro de maturité  $\tau$ .  
`br` scalaire, base du taux d'intérêt de référence (en nombre de jours).  
`bc` scalaire, base des coupons zéro (en nombre de jours).

## ■ Sorties

`r_tau` vecteur  $Q \times 1$ , vecteur des valeurs de  $r_i^{(n)}(\tau)$ .

## ■ Remarque

Le vecteur  $r(\tau)$  correspond aux valeurs  $r_i^{(n)}(\tau)$  pour la maturité  $\tau$ . Par exemple, nous avons

$$r(1) = \begin{bmatrix} r_0^{(0)}(1) \\ r_1^{(1)}(1) \\ r_0^{(1)}(1) \\ r_2^{(2)}(1) \\ r_1^{(2)}(1) \\ r_0^{(2)}(1) \\ \vdots \\ r_0^{(N-1)}(1) \end{bmatrix}$$

## ■ Source

`holee.src`

► Nous reprenons l'exemple de la page 364. Nous posons  $b_c = 365$  jours et  $b_r = 360$  jours. L'utilisation de la procédure `affichageArbre` permet de visualiser l'arbre du taux d'intérêt de maturité une année.

```
@<----- holee2.prg ----->@  
  
new;  
library spt;  
SPTset;  
  
tau = 1 | 2 | 3 | 4 ; /* Maturites 1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans */  
  
{CouponZero,TauxZero} = Vasicek(0.10,0.8,0.11,0.15,0.01,tau);  
  
pi_ = 0.445;
```

```

delta = 0.9;
P = arbreHoLee(CouponZero,pi_,delta);
P1 = selectionArbreHoLee(P,1);

r1 = HoLeeTaux(P1,360,365); /* Taux zero de maturite 1 an */

output file = holee2.out reset;

Msym " "; format 11,6;
print "--- Arbre d'evolution du taux zero de maturite 1 an ---";
call affichageArbre(r1);

output off;

```

```

--- Arbre d'evolution du taux zero de maturite 1 an ---

```

```

                                -0.0674456
                                -0.0170989
0.0402902                       0.0346494
0.104150                        0.0905903
                                0.148088
                                0.210245
                                0.274132

```

---

# HoLeeValorisation

## ■ Objectif

Valorisation d'un actif contingent dans le modèle de HO et LEE [1985] par la technique de remontée de l'arbre.

## ■ Format

$\{C, \text{ArbreC}\} = \text{HoLeeValorisation}(\text{payoff}, \text{P\_tau}, \text{pi}_-);$

## ■ Entrées

payoff	vecteur $Q \times 1$ , vecteur des valeurs du payoff de l'actif contingent.
P_tau	vecteur $Q \times 1$ , valeurs de l'arbre des coupons zéro de maturité $\tau$ .
pi_-	scalaire, valeur du paramètre $\pi$ .

## ■ Sorties

C	vecteur $N \times 1$ , vecteur des valeurs de chaque option $C_0^{(0)}$ .
ArbreC	vecteur $M \times 1$ , vecteur des valeurs intrinsèques $C_i^{(N)}$ .

## ■ Remarque

La dimension du vecteur des valeurs intrinsèques est  $M = \sum_{k=1}^N \frac{k(k+1)}{2}$ .

## ■ Source

*holee.src*

Nous reprenons l'exemple de la page 407. Attention à l'utilisation de la procédure `selectionArbreHoLee`.

```
@<----- holee4.prg ----->@
new;
library spt;
SPTset;

tau = 1 | 2 | 3 | 4 ; /* Maturites 1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans */

{CouponZero, TauxZero} = Vasicek(0.10, 0.8, 0.11, 0.15, 0.01, tau);

pi_ = 0.445;
delta = 0.9;
P = arbreHoLee(CouponZero, pi_, delta);
P1 = selectionArbreHoLee(P, 1);
r1 = HoLeeTaux(P1, 360, 365);
payoff = 100*HoLeeCap(r1, 0.12);

{C, ArbreC} = HoLeeValorisation(payoff, P1, pi_);

C4 = selectionArbreHoLee(ArbreC, 1);
C3 = selectionArbreHoLee(ArbreC, 2);
C2 = selectionArbreHoLee(ArbreC, 3);
C1 = selectionArbreHoLee(ArbreC, 4);
```

```

output file = holee4.out reset;

Msym " ";

print "--- Arbre du caplet 1 an ---";
call affichageArbre(C1); print;
print "--- Arbre du caplet 2 ans ---";
call affichageArbre(C2); print;
print "--- Arbre du caplet 3 ans ---";
call affichageArbre(C3); print;
print "--- Arbre du caplet 4 ans ---";
call affichageArbre(C4); print;

print;
print "Valeur des caplets : ";
print C;
print;
print ftos(sumc(C),"Prime du cap : %lf francs",5,2);

output off;

```

```

--- Arbre du caplet 1 an ---

0.000000

--- Arbre du caplet 2 ans ---

0.000000
1.72464 3.43560

--- Arbre du caplet 3 ans ---

0.000000
0.000000 0.000000
2.17403 4.33082 9.02449

--- Arbre du caplet 4 ans ---

0.000000
0.000000 0.000000
0.761312 1.42777 2.80884
2.52908 4.42768 8.08154 15.4132

```

Valeur des caplets :

```

0.000000
1.72464
2.17403
2.52908

```

Prime du cap : 6.43 francs



---

# HullWhite

## ■ Objectif

Modèle de HULL et WHITE [1993].

## ■ Format

```
arbreHW = HullWhite(CouponZero,a,sigma,deltaT);
```

## ■ Entrées

CouponZero	vecteur $N \times 1$ , prix des coupons zéro.
a	scalaire, valeur du paramètre $a$ .
sigma	scalaire, valeur du paramètre $\sigma$ .
deltaT	scalaire, valeur de $\Delta t$ .

## ■ Sorties

arbreHW	matrice $M \times 6$ , valeurs de l'arbre.
---------	--

## ■ Remarque

La matrice arbreHW se présente de la façon suivante :

$$i-1 \quad : \quad k \quad : \quad i \quad : \quad j \quad : \quad p(i-1, k, i, j) \quad : \quad r(i, j)$$

Elle indique donc le nœud  $(i-1, k)$  de départ, le nœud  $(i, j)$  d'arrivée, la probabilité de transition  $p(i, k, i+1, j)$  et la valeur  $r(i, j)$  du taux d'intérêt annualisée. Cinq autres procédures sont disponibles : `affichageHW`, `HWcap`, `HWfloor`, `HWvalorisation` et `selectionHW`. Leur syntaxe est

```
call affichageHW(arbreHW);  
  
payoff = HWcap(arbreHW,rStar);  
payoff = HWfloor(arbreHW,rStar);  
  
{C,arbreC} = HWvalorisation(arbreHW,deltaT,payoff);
```

Elles s'utilisent comme les procédures du modèle de Ho et Lee.

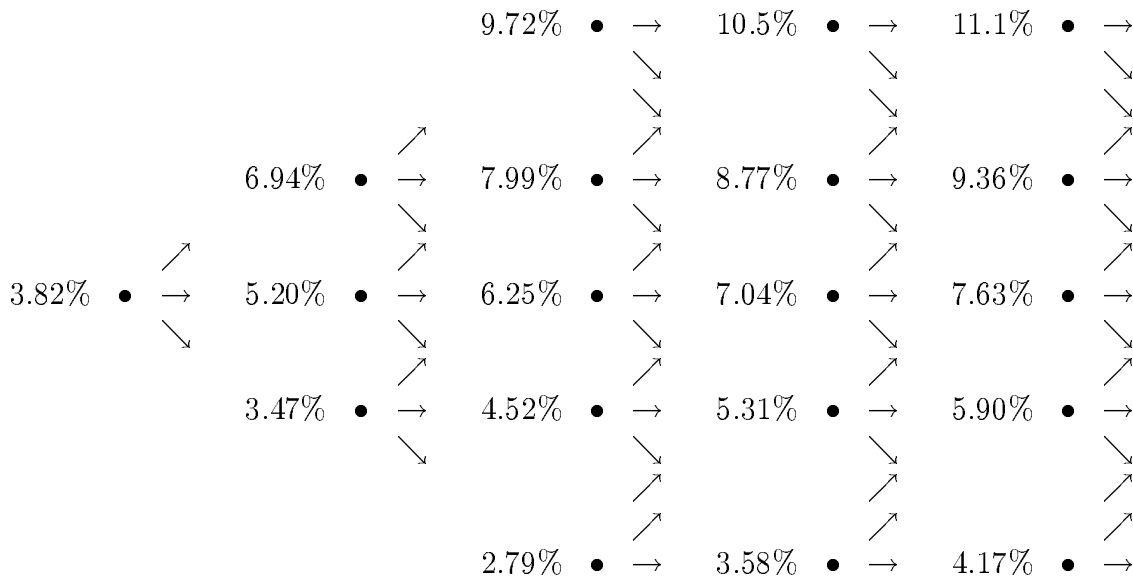
## ■ Source

*hw.src*

► Nous considérons l'exemple de HULL [1997] pages 438-444. Les taux zéro sont définis par la fonction

$$R(\tau) = 0.08 - 0.05e^{-0.18\tau}$$

Les coefficients  $a$  et  $\sigma$  sont égaux à 0.1 et 0.01. La période de référence est l'année ( $\Delta t = 1$ ). La procédure HullWhite affiche des informations sur la forme de l'arbre trinomial si la variable `_print` est égale à 1. Nous obtenons finalement l'arbre suivant



@<----- hw1.prg ----->@

```
new;
library spt,pgraph;

tau = seqa(1,1,5);
TauxZero = 0.08-0.05*exp(-0.18*tau);
CouponZero = exp(-tau.*TauxZero);
a = 0.1;
sigma = 0.01;
deltaT = 1;

Msym " ";
_print = 1;

output file = hw1.out reset;

arbreHW = HullWhite(CouponZero,a,sigma,deltaT);
call affichageHW(arbreHW);

output off;
```

		(2,2)	(3,2)	(4,2)
	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)
	(1,-1)	(2,-1)	(3,-1)	(4,-1)
		(2,-2)	(3,-2)	(4,-2)

Noeud precedent		Noeud suivant		Probabilite	Taux d'interet
i	j	i	j	p	r
		0	0	1.000000	0.038236
0	0	1	1	0.166667	0.069366
0	0	1	0	0.666667	0.052046
0	0	1	-1	0.166667	0.034725
1	1	2	2	0.121667	0.097177
1	1	2	1	0.656667	0.079856

1	1	2	0	0.221667	0.062536
1	0	2	1	0.166667	0.079856
1	0	2	0	0.666667	0.062536
1	0	2	-1	0.166667	0.045215
1	-1	2	0	0.221667	0.062536
1	-1	2	-1	0.656667	0.045215
1	-1	2	-2	0.121667	0.027895
2	2	3	2	0.886667	0.105070
2	2	3	1	0.026667	0.087749
2	2	3	0	0.086667	0.070429
2	1	3	2	0.121667	0.105070
2	1	3	1	0.656667	0.087749
2	1	3	0	0.221667	0.070429
2	0	3	1	0.166667	0.087749
2	0	3	0	0.666667	0.070429
2	0	3	-1	0.166667	0.053108
2	-1	3	0	0.221667	0.070429
2	-1	3	-1	0.656667	0.053108
2	-1	3	-2	0.121667	0.035788
2	-2	3	0	0.086667	0.070429
2	-2	3	-1	0.026667	0.053108
2	-2	3	-2	0.886667	0.035788
3	2	4	2	0.886667	0.110940
3	2	4	1	0.026667	0.093620
3	2	4	0	0.086667	0.076299
3	1	4	2	0.121667	0.110940
3	1	4	1	0.656667	0.093620
3	1	4	0	0.221667	0.076299
3	0	4	1	0.166667	0.093620
3	0	4	0	0.666667	0.076299
3	0	4	-1	0.166667	0.058979
3	-1	4	0	0.221667	0.076299
3	-1	4	-1	0.656667	0.058979
3	-1	4	-2	0.121667	0.041658
3	-2	4	0	0.086667	0.076299
3	-2	4	-1	0.026667	0.058979
3	-2	4	-2	0.886667	0.041658

		0.0971769	0.105070	0.110940
	0.0693664	0.0798564	0.0877495	0.0936199
0.0382365	0.0520459	0.0625359	0.0704290	0.0762994
	0.0347254	0.0452154	0.0531085	0.0589788
		0.0278949	0.0357880	0.0416583

►La procédure `HWvalorisation` utilise une procédure auxiliaire `_HWvalorisation` de valorisation d'option simple. Ce programme correspond à l'exemple de HULL [1997] page 437.

```
@<----- hw2.prg ----->@
```

```
new;
library spt;
SPTset;

cls;
Msym " ";

let x[13,6] = . . 0 0 1 0.10
              0 0 1 1 0.25 0.12
              0 0 1 0 0.50 0.10
              0 0 1 -1 0.25 0.08
              1 1 2 2 0.25 0.14
              1 1 2 1 0.50 0.12
              1 1 2 0 0.25 0.10
              1 0 2 1 0.25 0.12
              1 0 2 0 0.50 0.10
              1 0 2 -1 0.25 0.08
              1 -1 2 0 0.25 0.10
```

```

1 -1 2 -1 0.50 0.08
1 -1 2 -2 0.25 0.06;

output file = hw2.out reset;

call affichageHW(x);
print "-----";

let payoff[5,3] = 2 2 3
                2 1 1
                2 0 0
                2 -1 0
                2 -2 0;

arbreVI = _HWvalorisation(x,1,payoff);
print arbreVI;
print "-----";

arbreHw = x[.,1 2 3 4 5] ~ arbreVI[.,5];
call affichageHW(arbreHW);

output off;

```

```

0.140000
0.120000 0.120000
0.100000 0.100000
0.0800000 0.0800000
0.0600000

```

```

-----
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.353128
0.000000 0.000000 1.00000 1.00000 1.10865
0.000000 0.000000 1.00000 0.000000 0.226209
0.000000 0.000000 1.00000 -1.00000 0.000000
1.00000 1.00000 2.00000 2.00000 3.00000
1.00000 1.00000 2.00000 1.00000 1.00000
1.00000 1.00000 2.00000 0.000000 0.000000
1.00000 0.000000 2.00000 1.00000 1.00000
1.00000 0.000000 2.00000 0.000000 0.000000
1.00000 0.000000 2.00000 -1.00000 0.000000
1.00000 -1.00000 2.00000 0.000000 0.000000
1.00000 -1.00000 2.00000 -1.00000 0.000000
1.00000 -1.00000 2.00000 -2.00000 0.000000

```

```

-----
3.00000
1.10865 1.00000
0.353128 0.226209 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000

```

► Nous reprenons l'exemple de valorisation d'un floor de la page 408. Les procédures HWcap et HWfloor renvoient un matrice payoff qui comporte trois colonnes

$$i \quad j \quad G(i, j)$$

Elle indique donc le nœud  $(i, j)$  et la valeur du payoff correspondante ( $\max(0, r(i, j) - r^*)$  pour un cap et  $\max(0, r^* - r(i, j))$  pour un floor). La matrice arbreC définie par la procédure HWvalorisation est de dimension  $M \times (4 + N)$ . Les quatre premières colonnes indiquent les deux nœuds de la branche de l'arbre. Les autres colonnes contiennent les valeurs intrinsèques des options européennes pour les différentes périodes.

@<----- hw3.prg ----->@

```
new;
library spt,pgraph;

CouponZero = 0.992|0.984|0.976|0.969|0.961|0.953;
deltaT = 1/12;

a = 0.8;
sigma = 0.04;

format 10,6;
Msym " ";
_print = 0;

outwidth 256;

output file = hw3.out reset;

arbreHW = HullWhite(CouponZero,a,sigma,deltaT);
call affichageHW(arbreHW);

payoff = HWfloor(arbreHW,0.07);
payoff[.,3] = payoff[.,3]*1000000*deltaT;
{V,arbreV} = HWvalorisation(arbreHW,deltaT,payoff);

print arbreV;

x = arbreHW[.,1:5];

print "--- Arbre du floor 4 mois ---";
call affichageHW(x~arbreV[.,8]);
print "--- Arbre du floor 5 mois ---";
call affichageHW(x~arbreV[.,9]);
print "--- Arbre du floor 6 mois ---";
call affichageHW(x~arbreV[.,10]);
print ftos(sumc(V),"Valeur du FLOOR : %lf francs",10,5);

output off;
```

				0.146419	0.159555	0.160420			
			0.137980	0.126419	0.139555	0.140420			
		0.117172	0.117980	0.106419	0.119555	0.120420			
0.0963861	0.0971721	0.0979805	0.0864194	0.0995551	0.100420				
	0.0771721	0.0779805	0.0664194	0.0795551	0.0804205				
		0.0579805	0.0464194	0.0595551	0.0604205				
			0.0264194	0.0395551	0.0404205				
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	223.044	1640.12	693.693	868.763
0.000000	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	98.7795	38.8442	105.271	
0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1088.27	442.440	645.553	
0.000000	0.000000	1.000000	-1.000000	0.000000	0.000000	1349.06	5468.20	2387.12	2567.13
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000000	1.000000	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	35.6190
1.000000	1.000000	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	493.263	193.971	409.039	
1.000000	0.000000	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	35.6190
1.000000	0.000000	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	493.263	193.971	409.039	
1.000000	0.000000	2.000000	-1.000000	0.000000	0.000000	4609.65	1900.34	2233.04	
1.000000	-1.000000	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	493.263	193.971	409.039	
1.000000	-1.000000	2.000000	-1.000000	0.000000	0.000000	4609.65	1900.34	2233.04	
1.000000	-1.000000	2.000000	-2.000000	0.000000	0.000000	10016.3	17344.3	8150.51	7540.91
2.000000	2.000000	3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2.000000	2.000000	3.000000	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2.000000	2.000000	3.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2.000000	1.000000	3.000000	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2.000000	1.000000	3.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2.000000	1.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	177.878
2.000000	0.000000	3.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2.000000	0.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	177.878
2.000000	0.000000	3.000000	-1.000000	0.000000	0.000000	2983.84	1173.37	1762.84	
2.000000	-1.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	177.878
2.000000	-1.000000	3.000000	-1.000000	0.000000	0.000000	2983.84	1173.37	1762.84	
2.000000	-1.000000	3.000000	-2.000000	0.000000	0.000000	19650.5	8378.08	7703.35	
2.000000	-2.000000	3.000000	-1.000000	0.000000	0.000000	2983.84	1173.37	1762.84	
2.000000	-2.000000	3.000000	-2.000000	0.000000	0.000000	19650.5	8378.08	7703.35	
2.000000	-2.000000	3.000000	-3.000000	0.000000	0.000000	36317.2	22677.5	19761.6	
3.000000	3.000000	4.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3.000000	3.000000	4.000000	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

3.00000	3.00000	4.00000	1.00000	0.000000	0.000000
3.00000	2.00000	4.00000	3.00000	0.000000	0.000000
3.00000	2.00000	4.00000	2.00000	0.000000	0.000000
3.00000	2.00000	4.00000	1.00000	0.000000	0.000000
3.00000	1.00000	4.00000	2.00000	0.000000	0.000000
3.00000	1.00000	4.00000	1.00000	0.000000	0.000000
3.00000	1.00000	4.00000	0.000000	0.000000	0.000000
3.00000	0.000000	4.00000	1.00000	0.000000	0.000000
3.00000	0.000000	4.00000	0.000000	0.000000	0.000000
3.00000	0.000000	4.00000	-1.00000	0.000000	1074.98
3.00000	-1.00000	4.00000	0.000000	0.000000	0.000000
3.00000	-1.00000	4.00000	-1.00000	0.000000	1074.98
3.00000	-1.00000	4.00000	-2.00000	8704.05	7825.18
3.00000	-2.00000	4.00000	-1.00000	0.000000	1074.98
3.00000	-2.00000	4.00000	-2.00000	8704.05	7825.18
3.00000	-2.00000	4.00000	-3.00000	25370.7	21996.2
3.00000	-3.00000	4.00000	-1.00000	0.000000	1074.98
3.00000	-3.00000	4.00000	-2.00000	8704.05	7825.18
3.00000	-3.00000	4.00000	-3.00000	25370.7	21996.2
4.00000	3.00000	5.00000	3.00000	0.000000	0.000000
4.00000	3.00000	5.00000	2.00000	0.000000	0.000000
4.00000	3.00000	5.00000	1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	2.00000	5.00000	3.00000	0.000000	0.000000
4.00000	2.00000	5.00000	2.00000	0.000000	0.000000
4.00000	2.00000	5.00000	1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	1.00000	5.00000	2.00000	0.000000	0.000000
4.00000	1.00000	5.00000	1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	1.00000	5.00000	0.000000	0.000000	0.000000
4.00000	0.000000	5.00000	1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	0.000000	5.00000	0.000000	0.000000	0.000000
4.00000	0.000000	5.00000	-1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	-1.00000	5.00000	0.000000	0.000000	0.000000
4.00000	-1.00000	5.00000	-1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	-1.00000	5.00000	-2.00000	7982.95	7982.95
4.00000	-2.00000	5.00000	-1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	-2.00000	5.00000	-2.00000	7982.95	7982.95
4.00000	-2.00000	5.00000	-3.00000	24649.6	24649.6
4.00000	-3.00000	5.00000	-1.00000	0.000000	0.000000
4.00000	-3.00000	5.00000	-2.00000	7982.95	7982.95
4.00000	-3.00000	5.00000	-3.00000	24649.6	24649.6

--- Arbre du floor 4 mois ---

			0.000000	
		0.000000	0.000000	
	98.7795	0.000000	0.000000	
1640.12	1088.27	493.263	0.000000	
	5468.20	4609.65	2983.84	
		17344.3	19650.5	
			36317.2	

--- Arbre du floor 5 mois ---

			0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000
	38.8442	0.000000	0.000000	0.000000
693.693	442.440	193.971	0.000000	0.000000
	2387.12	1900.34	1173.37	0.000000
		8150.51	8378.08	8704.05
			22677.5	25370.7

--- Arbre du floor 6 mois ---

			0.000000	0.000000	0.000000
		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	105.271	35.6190	0.000000	0.000000	0.000000
868.763	645.553	409.039	177.878	0.000000	0.000000
	2567.13	2233.04	1762.84	1074.98	0.000000
		7540.91	7703.35	7825.18	7982.95
			19761.6	21996.2	24649.6

Valeur du FLOOR : 3425.61474 francs

---

# Interpolation\_Donnees

## ■ Objectif

Interpolation spline cubique d'une série temporelle multidimensionnelle.

## ■ Format

`y = Interpolation_Donnees(x);`

## ■ Entrées

`x`                      matrice  $N \times (K + 1)$ , matrice des dates et des données.

## ■ Sorties

`y`                      matrice  $N \times (K + 1)$ , données interpolées.

## ■ Remarque

La première colonne de la matrice `x` correspond aux dates observées. La procédure remplace chaque donnée manquante par la valeur de la fonction d'interpolation spline cubique.

## ■ Source

*interp.src*

► Voici un exemple d'utilisation de la procédure `Interpolation_Donnees`.

```
@<----- interp.prg ----->@
```

```
new;
library spt;
SPTset;

let x[6,2] =
    19970101 10
    19970102 5
    19970103 7
    19970107 8
    19970110 9
    19970115 -5;

y = calendrier_31jpm(x,0,0);
z = Interpolation_Donnees(y);

output file = interp.out reset;

print z[.,1]~y[.,2]~z[.,2];

output off;
```

```
19970101.    10.000000    10.000000
19970102.     5.000000     5.000000
19970103.     7.000000     7.000000
19970104.     .           8.8495585
19970105.     .           9.0219128
19970106.     .           8.4333107
```

19970107.	8.0000000	8.0000000
19970108.	.	8.3495509
19970109.	.	8.9548235
19970110.	9.0000000	9.0000000
19970111.	.	7.8510963
19970112.	.	5.6014618
19970113.	.	2.5262790
19970114.	.	-1.0992691
19970115.	-5.0000000	-5.0000000



---

# intsimpHJM

## ■ Objectif

Calcul numérique de l'intégrale  $\int_{t_0}^t \sigma_n(u, t) \left[ \int_u^t \sigma_n(u, v) dv \right] du$  par l'algorithme de Simpson (modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1991]).

## ■ Format

`I = intsimpHJM(&procSigma,t0,t,Nd);`

## ■ Entrées

<code>&amp;procSigma</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(\theta, T)$ .
<code>t0</code>	scalaire, valeur de $t_0$ .
<code>t</code>	scalaire, valeur de $t$ .
<code>Nd</code>	scalaire, nombre de points de discrétisation.

## ■ Sorties

<code>I</code>	vecteur $1 \times N$ , valeurs de $x_n(t)$ .
----------------	--

## ■ Source

*hjm.src*

► Nous reprenons l'exemple du chapitre 7. Il est important de noter que l'algorithme est beaucoup plus efficace si nous utilisons un nombre **pair** de points de discrétisation.

```
@<----- hjm1.prg ----->@
new;
library spt;
SPTset;

sigma1 = 0.02;
sigma2 = 0.05;
c = 0.125;

proc procSigma(theta,T);
  local Nobs;
  Nobs = maxc(rows(theta)|rows(T));
  retp( sigma1*ones(Nobs,1) ~ sigma2.*exp(-c/2.*(T-theta)) );
endp;

proc Solution(t0,t);
  local dt,sol1,sol2;
  dt = t - t0;
  sol1 = 0.5*(sigma1*dt)^2;
  sol2 = -2*(sigma2/c)^2*( (1-exp(-c*dt)) - 2*(1-exp(-c/2*dt)) );
  retp(sol1 ~ sol2);
endp;

output file = hjm1.out reset;

t = 20;
print Solution(1,t); print;
print intsimpHJM(&procSigma,1,t,5);
print intsimpHJM(&procSigma,1,t,10);
```

```
print intsimpHJM(&procSigma,1,t,25);  
print intsimpHJM(&procSigma,1,t,24);  
print intsimpHJM(&procSigma,1,t,50);
```

```
output off;
```

0.072200000	0.15457566
0.066488178	0.14130052
0.072200000	0.15457110
0.071199340	0.15285669
0.072200000	0.15457553
0.072200000	0.15457566

---

## Lire\_EDP

### ■ Objectif

Procédure de lecture de la base de données contenant la solution de l'équation de valorisation du prix du coupon zéro.

### ■ Format

$U_j = \text{Lire\_EDP}(\text{fichier}, "x" | x_j)$     ou     $U_n = \text{Lire\_EDP}(\text{fichier}, "t" | t_n)$

### ■ Entrées

fichier	base de données créée par la procédure <code>solution_EDP</code> .
$x_j$	scalaire, valeur de $x_j$ .
$t_n$	scalaire, valeur de $t_n$ .

### ■ Sorties

$U_j$	vecteur $N \times 1$ , vecteur des solutions numériques des prix des coupons zéro pour $x = x_j$ .
	— ou —
$U_n$	vecteur $J \times 1$ , vecteur des solutions numériques des prix des coupons zéro pour $t = t_n$ .

### ■ Source

*edp.src*

► Voir les exemples qui accompagnent la procédure `solution_EDP` pour une illustration de cette procédure.

---

# LongstaffSchwartz

## ■ Objectif

Modèle de LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992].

## ■ Format

{CouponZero,TauxZero} =  
LongstaffSchwartz(r0,V0,alpha,beta,gamma\_,delta,eta,xi,lambda,tau);

## ■ Entrées

r0	matrice $E \times E$ , valeurs du taux d'intérêt $r_0$ .
v0	matrice $E \times E$ , valeurs de la volatilité $V_0$ .
alpha	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\alpha$ .
beta	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\beta$ .
gamma_	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\gamma$ .
delta	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\delta$ .
eta	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\eta$ .
xi	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\xi$ .
lambda	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\lambda$ .
tau	matrice $E \times E$ , maturités $\tau$ des coupons zéro.

## ■ Sorties

CouponZero	matrice $E \times E$ , prix des coupons zéro $P_{t_0}^c(\tau)$
TauxZero	matrice $E \times E$ , taux zéro $R_{t_0}(\tau)$ .

## ■ Source

*modeles.src*

► Dans cet exemple, nous estimons les paramètres du modèle de Longstaff et Schwartz pour la structure par terme française des taux zéro du 15 février 1994 en utilisant la méthode de DAHLQUIST et SVENSSON [1996]. Remarquez l'utilisation de la reparamétrisation pour imposer que les coefficients soient positifs.

```
@<----- ls1.prg ----->@  
  
new;  
library spt,optnum,pgraph;  
SPTset;  
  
data = load(spt_data_path $+ "frf");  
CZ = data[:,2:cols(data)];  
Dates = data[:,1];  
tau = load(spt_data_path $+ "mat_frf");  
nCZ = rows(tau);  
  
CouponZero = selif(CZ, Dates .== 19940215);  
TauxZero = -ln(CouponZero') ./ tau;  
  
proc (9) = LScoefficients(theta);  
  local r0,V0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda;  
  
  theta = theta^2;
```

```

r0 = theta[1];
V0 = theta[2];
alpha = theta[3];
beta = theta[4];
gamma_ = theta[5];
delta = theta[6];
eta = theta[7];
xi = theta[8];
lambda = theta[9];

retp(r0,V0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda);
endp;

proc FonctionCritere(theta);
local r0,v0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda;
local CZtheorique,TZtheorique,scr;

{r0,V0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda} = LScoefficients(theta);

{CZtheorique,TZtheorique} =
    LongstaffSchwartz(r0,V0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda,tau);

scr = sumc( (TauxZero-TZtheorique)^2 );
retp(scr);
endp;

{theta,f,g,retcode} = optnum(&FonctionCritere,rndu(9,1));

{r0,V0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda} = LScoefficients(theta);
NomVariable = "r0"|"V0"|"alpha"|"beta"|"gamma"|"delta"|"eta"|"xi"|"lambda";

output file = ls1.out reset;

print "Courbe des taux du 15/02/94";
print "-----";
print "Coefficients du modele de Longstaff et Schwartz";
print;
call printfmt(NomVariable~theta^2,0~1);

output off;

tau_ = seqa(0,1/10,301);
{CZtheorique,TZtheorique} =
    LongstaffSchwartz(r0,V0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda,tau_);

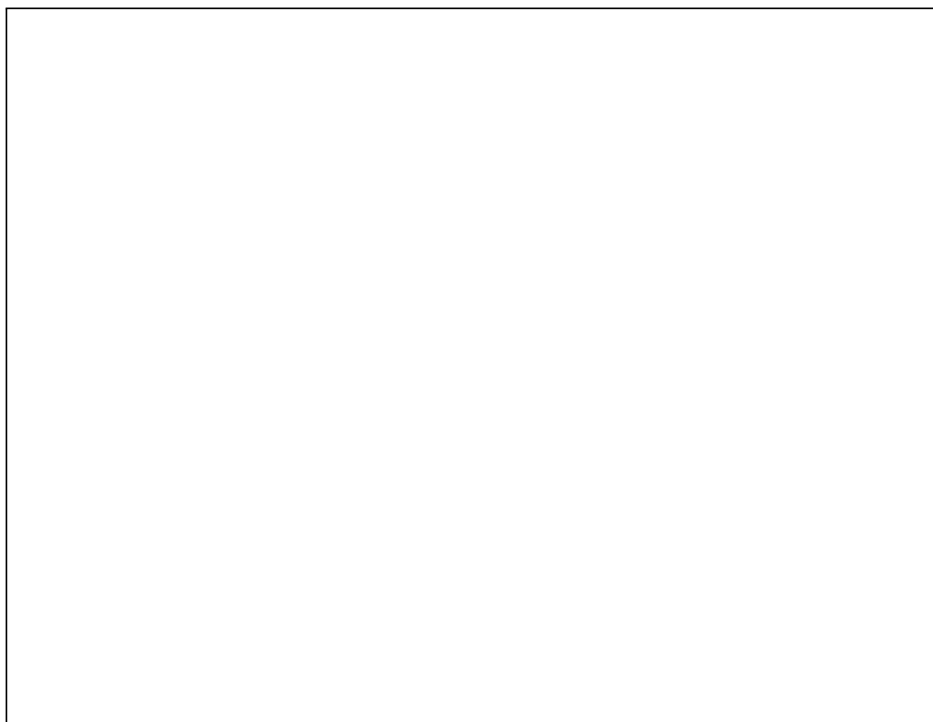
graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2;
fonts("simplex singrma");
title("Estimation de la courbe des taux zero du 15/02/94\"
    "\Lmodele de Longstaff et Schwartz");
_psym = tau~TauxZero~ones(nCZ,1).*(14^8~2~1~1);
xlabel("maturite \202t\201 (en annees)");
ylabel("Taux zero R]t[(\202t\201)");
xtics(0,30,5,5); ytics(0.053,0.065,0.002,0);
graphprt("-c=1 -cf=_ls1.eps");
xy(tau_,TZtheorique);

Courbe des taux du 15/02/94
-----
Coefficients du modele de Longstaff et Schwartz

r0      0.061448386
V0      0.040419483
alpha   0.052139366
beta    0.92955634

```

gamma	0.29047384
delta	0.17101326
eta	0.012475784
xi	0.65761552
lambda	1.06184e-005



---

## `_maturite_entre_2dates`

### ■ Objectif

Calcul de la maturité (en années) entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$ .

### ■ Format

```
tau = _maturite_entre_2dates(date1,date2);
```

### ■ Entrées

`date1`                    scalaire, date  $t_1$  au format **SPT**.  
`date2`                    scalaire, date  $t_2$  au format **SPT**.

### ■ Sorties

`tau`                      scalaire, maturité (en nombre d'années) entre les deux dates.

### ■ Source

*util.src*

► Voici un exemple qui illustre l'utilisation de la procédure `_maturite_entre_2dates`.

```
@<----- mat.prg ----->@  
  
new;  
library spt;  
SPTset;  
  
tau1 = _Maturite_entre_2dates(19940101,19950101);  
tau2 = _Maturite_entre_2dates(19940101,19950601);  
tau3 = _Maturite_entre_2dates(19940101,20000312);  
tau4 = _Maturite_entre_2dates(19940101,19940104);  
  
output file = mat.out reset;  
  
print ftos(tau1,"Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 01 janvier 1995 : %lf",10,5);  
print ftos(tau2,"Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 01 juin 1995 : %lf",10,5);  
print ftos(tau3,"Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 12 Mars 2000 : %lf",10,5);  
print ftos(tau4,"Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 04 janvier 1994 : %lf",10,5);  
  
output off;  
  
Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 01 janvier 1995 :    1.00000  
Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 01 juin 1995 :    1.41370  
Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 12 Mars 2000 :    6.19726  
Maturite entre le 01 janvier 1994 et le 04 janvier 1994 :   0.00822
```

---

## mc\_SPT

### ■ Objectif

Résolution numérique d'un modèle de structure par terme à une variable d'état par la méthode de Monte Carlo (algorithme de Euler-Maruyama).

### ■ Format

`{tau,CouponZero,TauxZero} = mc_SPT(x0,N,Ns);`

### ■ Entrées

<code>x0</code>	scalaire, position initiale $x_0$ .
<code>N</code>	scalaire, nombre $N$ de points de discrétisation.
<code>NS</code>	scalaire ou vecteur $2 \times 1$ , nombre $N_s$ de simulations.

### ■ Sorties

<code>tau</code>	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.
<code>CouponZero</code>	vecteur $N \times 1$ , prix des coupons zéro $P_{t_0}^c(\tau)$ .
<code>TauxZero</code>	vecteur $N \times 1$ , taux zéro $R_{t_0}(\tau)$ .

### ■ Variable globale

Pour prendre en compte une accélération par les variables antithétiques, nous initialisons `_mc_acceleration` à 1.

### ■ Remarque

La variable  $N_s$  indique le nombre de simulations. Or, la procédure `mc_SPT` utilise la vectorisation pour une raison d'efficacité. Cependant, cette technique peut poser des problèmes de mémoire. C'est pourquoi  $N_s = [n_1 \ n_2]^\top$  peut aussi être un vecteur de dimension 2.  $n_1$  indique le nombre de simulations "vectorisées" et  $n_2$  indique le nombre d'appels à la vectorisation. Le nombre final de simulations est  $n_1 \times n_2$ .

### ■ Source

`mc.src`

► Dans l'exemple suivant, nous comparons la solution analytique du modèle CIR avec celle obtenue par la méthode de Monte Carlo.

```
@<----- spt3.prg ----->@
new;
library spt,pgraph;
SPTset;

kappa = 0.8; theta = 0.10; sigma = 0.5; lambda = 0.05;

proc procMu(t,x);
  x = x .* (x > 0);
  retp(kappa*(theta-x));
```



```

endp;

proc procSigma(t,x);
  x = x .* (x .> 0);
  retp(sigma*sqrt(x));
endp;

proc procLambda(t,x);
  x = x .* (x .> 0);
  retp(lambda*sqrt(x)/sigma);
endp;

proc procR(t,x);
  retp(x);
endp;

t0 = 0;
T = 2;
call SPT(&procMu,&procSigma,&procLambda,&procR,t0,T,1);

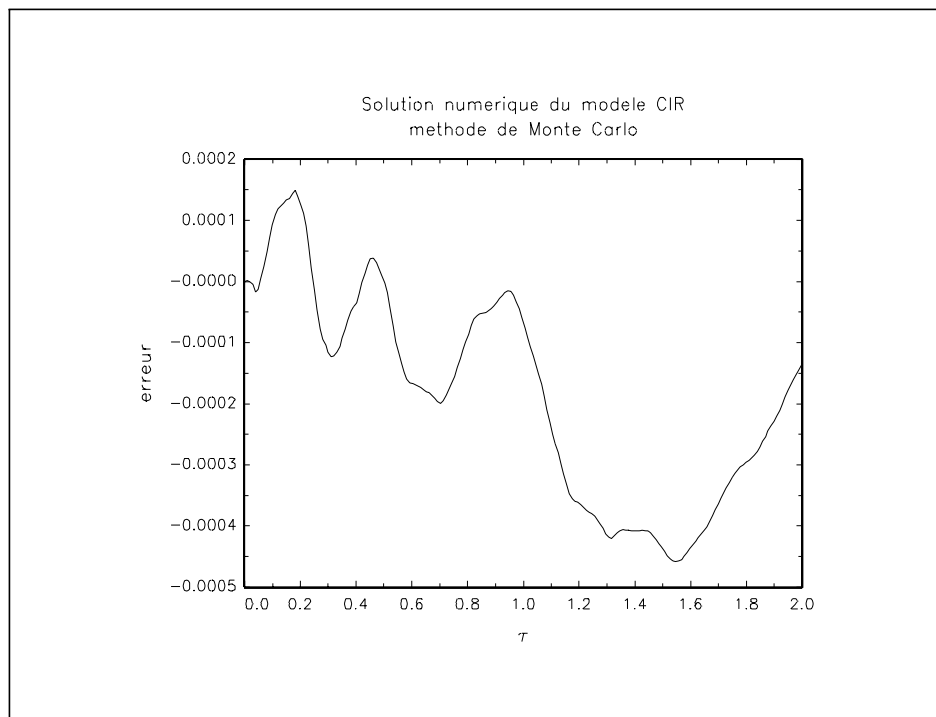
r0 = 0.20;

_mc_acceleration = 1;

{tau,CouponZero,TauxZero} = mc_SPT(r0,200,100|5);
{CZ,TZ} = CIR(r0,kappa,theta,sigma,lambda,tau);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2;
fonts("simplex simgrma");
title("Solution numerique du modele CIR\"
      "\Lmethode de Monte Carlo");
xlabel("\202t\201");
ylabel("erreur");
graphprt("-c=1 -cf=_spt3.eps");
xy(tau,TZ-TauxZero);

```



---

# mc\_SPTm

## ■ Objectif

Réolution numérique d'un modèle de structure par terme à plusieurs variables d'état par la méthode de Monte Carlo (schéma de Taylor de forme forte à l'ordre 0.5).

## ■ Format

{tau,CouponZero,TauxZero} = mc\_SPTm(x0,N,Ns);

## ■ Entrées

X0	vecteur $M \times 1$ , position initiale $X_0$ .
N	scalaire, nombre $N$ de points de discrétisation.
NS	scalaire, nombre $N_s$ de simulations.

## ■ Sorties

tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.
CouponZero	vecteur $N \times 1$ , prix des coupons zéro $P_{t_0}^c(\tau)$ .
TauxZero	vecteur $N \times 1$ , taux zéro $R_{t_0}(\tau)$ .

## ■ Variable globale

Pour prendre en compte une accélération par les variables antithétiques, nous initialisons `_mc_acceleration` à 1.

## ■ Source

*mc.src*

► Nous considérons le modèle de CHEN [1995] avec  $\kappa_r = 1$ ,  $\kappa_\theta = 0.8$ ,  $\kappa_v = 0.5$ ,  $\bar{\theta} = 0.12$ ,  $\bar{v} = 0.05$ ,  $\sigma_\theta = 0.10$ ,  $\sigma_v = 0.08$ ,  $\rho_{12} = 0.25$  et  $\rho_{13} = 0.5$ . La position initiale du système est

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\% \\ 7\% \\ 6\% \end{bmatrix}$$

```
@<----- spt4.prg ----->@
```

```
new;
library spt,pgraph;
SPTset;

declare matrix kappa_r,kappa_theta,kappa_v;
declare matrix thetaB,vB;
declare matrix sigma_theta,sigma_v;
declare matrix rho12,rho13;
declare matrix lambda_r,lambda_theta,lambda_v;

proc procMu(t,x);
  local mu;
  x = x .* (x .> 0);
  mu = kappa_r * (x[2] - x[1]) |
```

```

        kappa_theta * (thetaB - x[2]) |
        kappa_v * (vB - x[3])      ;

    retp(mu);
endp;

proc procSIGMA(t,x);
    local sigma;
    x = x .* (x .> 0);
    sigma = sqrt(x[1])*sqrt(x[3]) ~ 0 ~ 0 |
           0 ~ sigma_theta*sqrt(x[2]) ~ 0 |
           0 ~ 0 ~ sigma_v*sqrt(x[3])    ;

    retp(sigma);
endp;

proc procLambda(t,x);
    local lambda;
    x = x .* (x .> 0);
    lambda = lambda_r*sqrt(x[1])*sqrt(x[2]) |
            lambda_theta*sqrt(x[2])/sigma_theta |
            lambda_v*sqrt(x[3])/sigma_v ;
    retp(lambda);
endp;

proc procR(t,x);
    retp(x[.,1]);
endp;

kappa_r = 1;
kappa_theta = 0.8;
kappa_v = 0.5;
thetaB = 0.12;
thetaV = 0.05;
sigma_theta = 0.10;
sigma_v = 0.08;
rho12 = 0.25;
rho13 = 0.5;
lambda_r = 0.03;
lambda_theta = 0.01;
lambda_v = 0.02;

rho = 1 ~ rho12 ~ rho13 |
      rho12 ~ 1 ~ 0 |
      rho13 ~ 0 ~ 1 ;

t0 = 0;
T = 10;
call SPTm(&procMu,&procSigma,rho,&procLambda,&procR,t0,T,1);

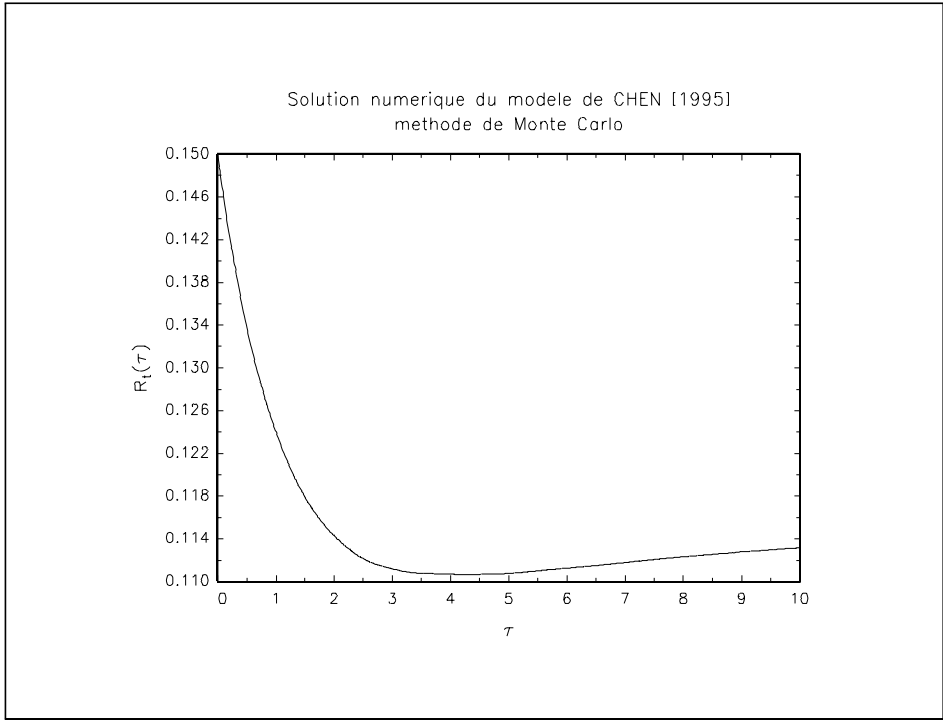
X0 = 0.15|0.07|0.06;

_mc_acceleration = 1;

{tau,CouponZero,TauxZero} = mc_SPTm(X0,1000,100);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2;
fonts("simplex simgrma");
title("Solution numerique du modele de CHEN @[1995@]\"
      "\Lmethode de Monte Carlo");
xlabel("\202t\201");
ylabel("R]t[(\202t\201)");
graphprt("-c=1 -cf=_spt4.eps");
xy(tau,TauxZero);

```



---

# Merton

## ■ Objectif

Modèle de MERTON [1973].

## ■ Format

{CouponZero,TauxZero} = Merton(r0,mu,sigma,lambda,tau);

## ■ Entrées

r0	matrice $E \times E$ , valeurs du taux d'intérêt $r_0$ .
mu	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\mu$ .
sigma	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\sigma$ .
lambda	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\lambda$ .
tau	matrice $E \times E$ , valeurs de la maturité $\tau$ .

## ■ Sorties

CouponZero	matrice $E \times E$ , coupons zéro $P_{t_0}^c(\tau)$
TauxZero	matrice $E \times E$ , taux zéro $R_{t_0}(\tau)$ .

## ■ Source

*modeles.src*

► Voici un exemple qui utilise la procédure Merton.

```
@<----- merton.prg ----->@
new;
library spt, tsm, optnum, pgraph;
SPTset;
TSMset;

tau = seqa(0,1/100,301);

r0 = 0.10;
{P,r1} = Merton(r0,0.08,0.1,0.05,tau);
{P,r2} = Merton(r0,0.08,0.5,0.05,tau);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2;
fonts("simplex singrma");
title("Taux zero dans le modele de Merton"
      "\Lr]0[ = 0.10 \202m\201 = 0.08 \202l\201 = 0.05");
xlabel("\202t\201");
xtics(0,3,0.5,0);
ytics(-0.2,0.2,0.05,0);
graphprt("-c=1 -cf=_merton.eps");
xy(tau,r1~r2);
```



---

## ml\_eds

### ■ Objectif

Estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique (méthode du maximum de vraisemblance).

### ■ Format

```
{theta,stderr,Mcov,Logl} = ml_eds(x,&procMu,&procSigma,t0,k,sv,RR,r);
```

### ■ Entrées

x	vecteur $Nobs \times 1$ , vecteur des données.
&procMu	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, x, \theta)$ .
&procSigma	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(t, x, \theta)$ .
t0	scalaire, valeur de $t_0$ .
k	scalaire, valeur du pas d'observation $k$ .
sv	vecteur $g \times 1$ , valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation.
RR	matrice $np \times g$ , matrice $R$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
r	vecteur $np \times 1$ , vecteur $r$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .

### ■ Sorties

theta	vecteur $np \times 1$ , vecteur des coefficients estimés.
stderr	vecteur $np \times 1$ , vecteur des écart-types associés.
Mcov	matrice $np \times np$ , matrice de covariance des coefficients estimés.
LogL	scalaire, valeur de la fonction de log-vraisemblance.

### ■ Variables globales

_eds_gradp	vecteur $2 \times 1$ de pointeurs qui calculent les jacobiens $\mu_\theta(t, x(t), \theta)$ et $\sigma_\theta(t, x(t), \theta)$ — ou — 0 pour les jacobiens numériques.
------------	---

### ■ Remarque

La procédure `gmm_eds` considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu(t, x(t), \theta) dt + \sigma(t, x(t), \theta) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Pour obtenir une estimation non contrainte, nous posons `RR` égal à 0.

### ■ Source

`estim.src`

► Nous considérons l'estimation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour utiliser un gradient totalement numérique, nous devons calculer  $\mu_\theta(t, x, \theta)$  et  $\sigma_\theta(t, x, \theta)$ . Nous avons

$$\mu_\theta(t, x, \theta) = \begin{bmatrix} \theta_2 - x & \theta_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

et

$$\sigma_\theta(t, x, \theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
@<----- ml3.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optmum;
SPTset;
TSMset;

rndseed 123;
a = 0.9; b = 8; sigma = 0.75;
{t,x} = simulation_OU(9,a,b,sigma,0,10,1000,1);

proc procMu(t,x,theta);
    retp(theta[1]*(theta[2]-x));
endp;

proc gradMu(t,x,theta);
    local Nobs;
    Nobs = rows(x);
    retp( (theta[2]-x) ~ ((theta[1]^0).*ones(Nobs,1)) );
endp;

proc procSigma(t,x,theta);
    retp(theta[3]);
endp;

proc gradSigma(t,x,theta);
    retp((0^0^1));
endp;

_eds_gradp = &gradMu|&gradSigma; /* Jacobien analytique */

k = 10/1000;

sv = a|b|sigma;
CC = 0^1^0; c = 8;
{RR,r} = Explicit_to_Implicit(CC,c);
sv = invpd(RR'RR)*RR'(sv-r);

output file = ml3.out reset;

{theta,stderr,Mcov,LogL} = ml_eds(x,&procMu,&procSigma,0,k,sv,RR,r);

output off;

Total observations:                999
Usable observations:              999
Number of parameters to be estimated: 2
Degrees of freedom:               997
Value of the maximized log-likelihood function: 1144.15405

Parameters      estimates      std.err.      t-statistic      p-value
-----
P01              0.599189       0.323285       1.853438       0.064115
P02              8.000000       0.000000       .              .
P03              0.769779       0.017222       44.697509     0.000000

Covariance matrix: inverse of the negative Hessian.
```



---

## ml\_MBG

### ■ Objectif

Estimation des paramètres d'un mouvement brownien géométrique (méthode du maximum de vraisemblance).

### ■ Format

`{theta,stderr,Mcov,Logl} = ml_MBG(x,k,sv,RR,r);`

### ■ Entrées

<code>x</code>	vecteur $Nobs \times 1$ , vecteur des données.
<code>k</code>	scalaire, valeur du pas d'observation $k$ .
<code>sv</code>	vecteur $g \times 1$ , valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation.
<code>RR</code>	matrice $2 \times g$ , matrice $R$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
<code>r</code>	vecteur $2 \times 1$ , vecteur $r$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .

### ■ Sorties

<code>theta</code>	vecteur $2 \times 1$ , vecteur des coefficients estimés.
<code>stderr</code>	vecteur $2 \times 1$ , vecteur des écart-types associés.
<code>Mcov</code>	matrice $2 \times 2$ , matrice de covariance des coefficients estimés.
<code>LogL</code>	scalaire, valeur de la fonction de log-vraisemblance.

### ■ Variables globales

Toutes les variables globales définies dans **TSM** sont accessibles.

### ■ Remarque

La procédure `ml_MBG` nécessite la bibliothèque **TSM**. Elle considère le mouvement brownien géométrique suivant

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu x(t) dt + \sigma x(t) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Le vecteur  $\theta$  de paramètres est

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \end{bmatrix}$$

La méthode du jacobien analytique est implémentée dans la procédure `ml_MBG`. Pour obtenir une estimation non contrainte, nous posons `RR` égal à 0..

### ■ Source

`estim.src`

► Nous reprenons l'exemple de la page 402.

```

@<----- m1.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optmum;
SPTset;
TSMset;

rndseed 456;

mu = 0.2; sigma = 0.5;
{t,x} = simulation_MBG(10,mu,sigma,0,10,1000,1);

sv = mu|sigma;
k = 10/1000;

output file = m1.out reset;

{theta,stderr,Mcov,Logl} = ml_MBG(x,k,sv,0,0);

output off;

Total observations:                999
Usable observations:              999
Number of parameters to be estimated:  2
Degrees of freedom:               997
Value of the maximized log-likelihood function: 1585.47815

Parameters      estimates      std.err.      t-statistic      p-value
-----
mu              0.192837      0.149943      1.286068        0.198718
sigma          0.494890      0.011070      44.703807        0.000000

Covariance matrix: inverse of the negative Hessian.

```

---

## ml\_OU

### ■ Objectif

Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (méthode du maximum de vraisemblance).

### ■ Format

`{theta,stderr,Mcov,Logl} = ml_OU(x,k,sv,RR,r);`

### ■ Entrées

<code>x</code>	vecteur $Nobs \times 1$ , vecteur des données.
<code>h</code>	scalaire, valeur du pas d'observation $k$ .
<code>sv</code>	vecteur $g \times 1$ , valeurs de départ pour l'algorithme d'optimisation.
<code>RR</code>	matrice $3 \times g$ , matrice $R$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .
<code>r</code>	vecteur $3 \times 1$ , vecteur $r$ de la restriction linéaire $\theta = R\gamma + r$ .

### ■ Sorties

<code>theta</code>	vecteur $3 \times 1$ , vecteur des coefficients estimés.
<code>stderr</code>	vecteur $3 \times 1$ , vecteur des écart-types associés.
<code>Mcov</code>	matrice $3 \times 3$ , matrice de covariance des coefficients estimés.
<code>LogL</code>	scalaire, valeur de la fonction de log-vraisemblance.

### ■ Variables globales

Toutes les variables globales définies dans **TSM** sont accessibles.

### ■ Remarque

La procédure `ml_OU` nécessite la bibliothèque **TSM**. Elle considère le processus d'Ornstein-Uhlenbeck suivant

$$\begin{cases} dx(t) &= a(b - x(t)) dt + \sigma dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Le vecteur  $\theta$  de paramètres est

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \sigma \end{bmatrix}$$

La méthode du jacobien analytique est implémentée dans la procédure `ml_OU`. Pour obtenir une estimation non contrainte, nous posons `RR` égal à 0.

### ■ Source

`estim.src`

► Nous reprenons l'exemple de la page 404.

```

@<----- ml2.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optnum;
SPTset;
TSMset;

rndseed 123;

a = 0.9;
b = 8;
sigma = 0.75;

{t,x} = simulation_OU(9,a,b,sigma,0,10,1000,1);

sv = a|b|sigma;
k = 10/1000;

/* contrainte : b = 8 */

CC = 0~1~0;
c = 8;
{RR,r} = Explicit_to_Implicit(CC,c);
sv = invpd(RR'RR)*RR'(sv-r);

output file = ml2.out reset;

{theta,stderr,Mcov,Logl} = ml_OU(x,k,sv,RR,r);

output off;

Total observations:                999
Usable observations:              999
Number of parameters to be estimated:  2
Degrees of freedom:              997
Value of the maximized log-likelihood function:  1144.15405

Parameters      estimates      std.err.      t-statistic      p-value
-----
a                0.600979      0.318789      1.885193      0.059694
b                8.000000      0.000000      .              .
sigma           0.772094      0.017316      44.587465     0.000000

Covariance matrix: inverse of the negative Hessian.

```

---

# NelsonSiegel

## ■ Objectif

Estimation des coefficients du modèle de NELSON et SIEGEL [1987].

## ■ Format

`coefficients = NelsonSiegel(Obligations,Poids,CC,c);`

## ■ Entrées

Obligations	matrice $L \times N$ , base de données des obligations au format <b>SPT</b> .
Poids	vecteur $N \times 1$ , vecteur des poids $w_n$ .
CC	matrice $g \times 4$ , matrice $C$ du système de contraintes $C\theta = c$ .
c	vecteur $g \times 1$ , vecteur $c$ du système de contraintes $C\theta = c$ .

## ■ Sorties

`coefficients` vecteur  $4 \times 1$ , vecteur  $\hat{\theta}$  des valeurs estimées des coefficients.

## ■ Remarques

Pour une estimation non contrainte, nous initialisons la matrice CC à 0. Nous rappelons que le vecteur des coefficients est

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \tau_1 \end{bmatrix}$$

Cette procédure nécessite la bibliothèque **TSM**. La procédure `NelsonSiegel_` permet d'estimer les coefficients du modèle de façon non contrainte et ne nécessite pas la bibliothèque **TSM**. Sa syntaxe est

```
coefficients = NelsonSiegel_(Obligations,Poids,0,0);
```

## ■ Source

*tsmspt.src*

► Nous reprenons l'exemple de la page 385. Nous imposons que le taux court soit égal à 6.3 %. Le graphique obtenu se trouve à la page 445.

```
@<----- ns1.prg ----->@  
  
new;  
library spt, tsm, optnum, pgraph;  
SPTset;  
TSMset;  
  
r0 = 0.061448386; V0 = 0.040419483; alpha = 0.052139366;
```

```

beta = 0.92955634; gamma_ = 0.29047384; delta = 0.17101326;
eta = 0.012475784; xi = 0.65761552; lambda = 1.06184e-005;

tau = seqa(1/10,1/10,100);
{CouponZeroLS,TauxZeroLS} =
    LongstaffSchwartz(r0,V0,alpha,beta,gamma_,delta,eta,xi,lambda,tau);

obligation = CouponZero_to_Obligation(CouponZeroLS,tau);

CC = 1~1~0~0;
c = 0.063;

/* Estimation contrainte r(0) = 6.3% */

theta = NelsonSiegel(obligation,1,CC,c);

tau = seqa(1/10,1/10,100);
CouponZero = NelsonSiegel_CouponZero(theta,tau);
TauxZero = NelsonSiegel_TauxZero(theta,tau);
TauxAterme1 = NelsonSiegel_TauxATerme(theta,tau,0);
TauxAterme2 = NelsonSiegel_TauxATerme(theta,5,tau);

graphset;
begwind;
window(2,2,0);

    _pdate = ""; _pnum = 2; _paxht = 0.30; _pnumht = 0.30; _ptitlht = 0.30;
    _pltype = 6|1|3|4;
    fonts("simplex singrma");
    xtics(0,10,1,12); xlabel("\202t\201");

setwind(1);

    title("Coupon zero P[c]]t[(\202t\201)");
    ytics(0.5,1,0.1,0);
    xy(tau,CouponZero);

setwind(2);

    title("Taux zero R]t[(\202t\201)");
    ytics(0.053,0.063,0.005,0);
    xy(tau,TauxZero);

setwind(3);

    title("Taux a terme instantane F]t[(\202t\201,0)");
    ytics(0.05,0.07,0.005,0);
    xy(tau,TauxAterme1);

setwind(4);

    title("Taux a terme (a 5 ans) F]t[(5,\202t\201)");
    ytics(0.06,0.066,0.002,0);
    xy(tau,TauxAterme2);

    graphprt("-c=1 -cf=_ns1.eps");

endwind;

```

---

## NelsonSiegel\_CouponZero

### ■ Objectif

Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).

### ■ Format

`CouponZero = NelsonSiegel_CouponZero(coefficients,tau);`

### ■ Entrées

<code>coefficients</code>	vecteur $4 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
<code>tau</code>	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.

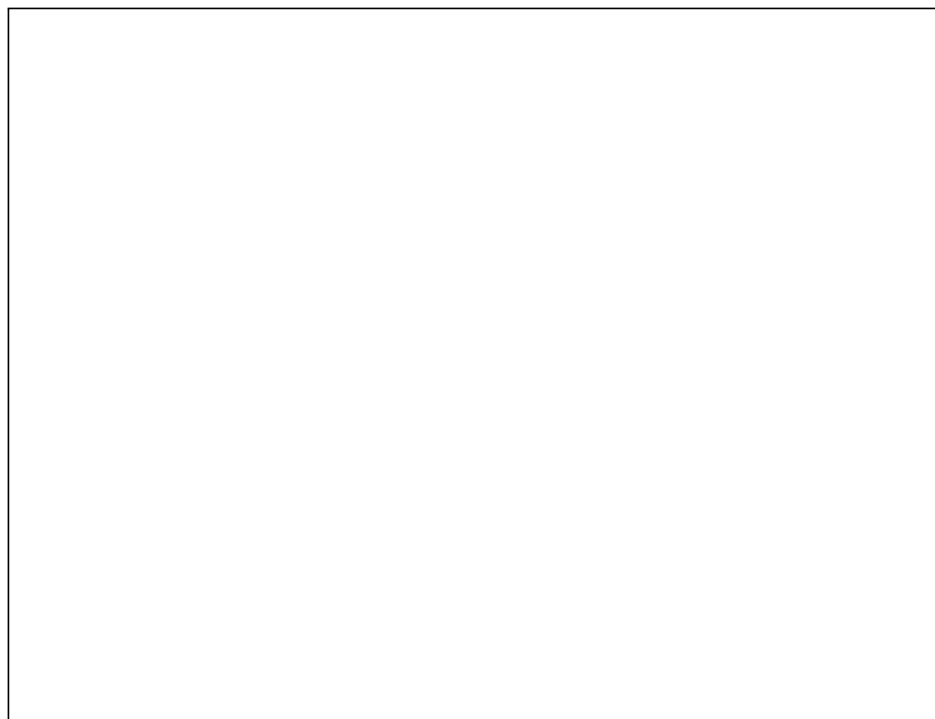
### ■ Sorties

<code>CouponZero</code>	vecteur $N \times 1$ , prix des coupons zéro $P_t^c(\tau)$ .
-------------------------	--

### ■ Source

*nelson.src*

► Voir l'exemple de la page 443.



---

## NelsonSiegel\_Inversion

### ■ Objectif

Calcul de  $\tau^\#(m)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).

### ■ Format

`tauDiese = NelsonSiegel_Inversion(NSdata,m);`

### ■ Entrées

<code>NSdata</code>	Matrice $T \times 5$ , base de données des coefficients du modèle de Nelson et Siegel.
<code>m</code>	scalaire, valeur de la maturité $m$ .

### ■ Sorties

<code>tauDiese</code>	vecteur $T \times 1$ , vecteur des valeurs de $\tau^\#(m)$ .
-----------------------	--

### ■ Remarque

La matrice `NSdata` est décrite page 448.

### ■ Source

`nelson2.src`

► Voici un exemple d'utilisation de la procédure `NelsonSiegel_SPN`.

```
@<----- ns5.prg ----->@

new;
library spt;
SPTset;

Dates = miss(0,0);
theta = 0.067 | -0.005 | -0.045 | 1.800 ;
NS = Dates~theta'; /* Base de donnees Nelson-Siegel */

output file = ns5.out reset;

m = 0;
do until m > 5;
  tauDiese = NelsonSiegel_Inversion(NS,m);
  str = ftos(m,"tau#(%lf) = ",0,0) $+ ftos(tauDiese,"%lf annees",5,3);
  print str;
  m = m + 1;
endo;

output off;

tau#(0) = 1.600 annees
tau#(1) = 1.146 annees
tau#(2) = 0.781 annees
tau#(3) = 0.499 annees
tau#(4) = 0.286 annees
tau#(5) = 0.131 annees
```



---

# NelsonSiegel\_Pente

## ■ Objectif

Calcul de la pente  $p_t(\tau)$  de la courbe des taux (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).

## ■ Format

Pente = NelsonSiegel\_SPN(NSdata,tau);

## ■ Entrées

NSdata	Matrice $T \times 5$ , base de données des coefficients du modèle de Nelson et Siegel.
tau	vecteur $1 \times L$ ou scalaire, maturité $\tau$ .

## ■ Sorties

Pente	matrice $T \times L$ , valeur des pentes $p_t(\tau)$ .
-------	--

## ■ Remarque

La matrice NSdata est décrite page 448.

## ■ Source

*nelson2.src*

► Voici un exemple d'utilisation de la procédure NelsonSiegel\_SPN.

```
@<----- ns4.prg ----->@  
  
new;  
library spt;  
SPTset;  
  
Dates = miss(0,0);  
theta = 0.067 | -0.005 | -0.045 | 1.800 ;  
NS = Dates~theta'; /* Base de donnees Nelson-Siegel */  
  
tau = 0|1|5;  
pente = NelsonSiegel_Pente(NS,tau);  
  
output file = ns4.out reset;  
  
print pente;  
  
output off;  
  
-0.011110237  
-0.0046693144  
0.0011999862
```

---

# NelsonSiegelSPN

## ■ Objectif

Calcul du spread  $S_t$ , de la pente  $p_t$  et du niveau  $\bar{R}_t(\tau_1, \tau_2)$  de la courbe des taux (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).

## ■ Format

{Spread,Pente,Niveau} = NelsonSiegelSPN(NSdata,tau1,tau2);

## ■ Entrées

NSdata	Matrice $T \times 5$ , base de données des coefficients du modèle de Nelson et Siegel.
tau1	scalaire, maturité $\tau_1$ .
tau2	scalaire, maturité $\tau_2$ .

## ■ Sorties

Spread	vecteur $T \times 1$ , vecteur des spreads $S_t$ .
Pente	vecteur $T \times 1$ , vecteur des pentes $p_t$ .
Niveau	vecteur $T \times 1$ , vecteur des niveaux $\bar{R}_t(\tau_1, \tau_2)$

## ■ Remarque

La matrice NSdata est une matrice qui contient les dates d'observation et les valeurs des coefficients du modèle. Nous avons

$$\begin{bmatrix} t_1 & \mu_1(t_1) & \mu_2(t_1) & \mu_3(t_1) & \tau_1(t_1) \\ & & \vdots & & \\ t & \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) & \tau_1(t) \\ T & \mu_1(T) & \mu_2(T) & \mu_3(T) & \tau_1(T) \end{bmatrix}$$

## ■ Source

*nelson2.src*

► Voici un exemple d'utilisation de la procédure NelsonSiegelSPN.

```
@<----- ns2.prg ----->@  
  
new;  
library spt;  
SPTset;  
  
Dates = miss(0,0);  
theta = 0.067 |  
        -0.005 |  
        -0.045 |  
        1.800 ;  
  
NS = Dates~theta'; /* Base de donnees Nelson-Siegel */  
  
{S,P,N} = NelsonSiegel_SPN(NS,1/100,5);
```

```
output file = ns2.out reset;

print ftos(S,"Spread : %lf",10,5);
print ftos(P,"Pente : %lf",10,5);
print ftos(N,"Niveau : %lf",10,5);

output off;

Spread :    0.00500
Pente :    -0.01111
Niveau :    0.05313
```

---

# NelsonSiegel\_TauxATerme

## ■ Objectif

Calcul des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).

## ■ Format

$F = \text{NelsonSiegel\_TauxATerme}(\text{coefficients}, \text{tau}, m);$

## ■ Entrées

coefficients	vecteur $4 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tau	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteur des valeurs de $\tau$ .
m	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteurs des valeurs de $m$ .

## ■ Sorties

F	vecteur $N \times 1$ , taux à terme $F_t(\tau, m)$ .
---	--

## ■ Remarque

Pour obtenir les taux à terme instantanés  $f_t(\tau)$ , nous posons  $m$  égal à 0.

## ■ Source

*nelson.src*

► Dans cet exemple, nous calculons les taux à terme  $f_t(1)$  français pour la période d'étude considérée dans notre travail et nous présentons graphiquement la relation entre  $r_t$  et  $f_t(1) - r_t$ .

```
@<----- ns3.prg ----->@

new;
library spt,pgraph;
SPTset;

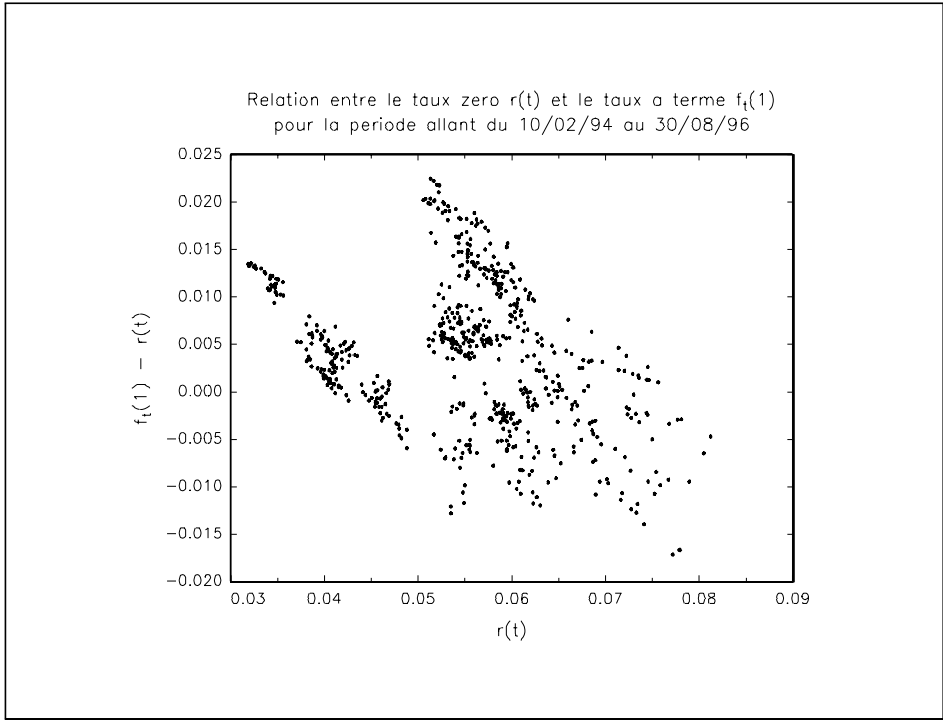
fichier = spt_data_path $+ "NS_frf";
load NSfrf = ~fichier;

Dates = NSfrf[.,1];
NScoeff = NSfrf[.,2 3 4 5]; /* Coefficients de Nelson et Siegel */
Nobs = rows(NScoeff);

r0 = NScoeff[.,1] + NScoeff[.,2];

f = NelsonSiegel_TauxATerme(NScoeff',1,0)';

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2; _pstype = 8|11; _plctrl = -1; _psymsiz = 1;
title("Relation entre le taux zero r(t) et le taux a terme f]t[(1)\"
      "\Lpour la periode allant du 10/02/94 au 30/08/96");
xlabel("r(t)");
ylabel("f]t[(1) - r(t)");
ytics(-0.020,0.025,0.005,0);
graphprt("-c=1 -cf=_ns3.eps");
xy(r0,f-r0);
```



---

## NelsonSiegel\_TauxZero

### ■ Objectif

Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle de NELSON et SIEGEL [1987]).

### ■ Format

TauxZero = NelsonSiegel\_TauxZero(coefficients,tau);

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $4 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.

### ■ Sorties

TauxZero	vecteur $N \times 1$ , taux zéro $R_t(\tau)$ .
----------	--

### ■ Source

*nelson.src*

► Voir l'exemple de la page 443.

---

## optionCouponZero

### ■ Objectif

Prime d'une option européenne sur une obligation à coupon zéro (modèle de JAMSHIDIAN [1990]).

### ■ Format

$\{C,P\} = \text{optionCouponZero}(t_0,T,czT,T_c,czT_c,K,a,\text{sigma});$

### ■ Entrées

$t_0$	matrice $E \times E$ , valeur de $t_0$ .
$T$	matrice $E \times E$ , échéance $T$ du coupon zéro.
$czT$	matrice $E \times E$ , valeur du coupon zéro d'échéance $T$ .
$T_c$	matrice $E \times E$ , échéance $T_c$ de l'option.
$czT_c$	matrice $E \times E$ , valeur du coupon zéro d'échéance $T_c$ .
$K$	matrice $E \times E$ , prix d'exercice $K$ .
$a$	matrice $E \times E$ , valeur du paramètre $a$ .
$\text{sigma}$	matrice $E \times E$ , valeur du paramètre $\sigma$ .

### ■ Sorties

$C$	matrice $E \times E$ , prime de l'option d'achat.
$P$	matrice $E \times E$ , prime de l'option de vente.

### ■ Remarque

En général, nous posons  $t_0$  égal à 0.

### ■ Source

*actifs.src*

► Dans l'exemple suivant, nous calculons dans un premier temps les primes de l'option d'achat et de l'option de vente lorsque l'option est à la monnaie, c'est-à-dire lorsque le prix d'exercice est égal au prix à terme  $\frac{P_{t_0}^c(T-t_0)}{P_{t_0}^c(T_c-t_0)}$  de l'obligation à coupon zéro. Dans un deuxième temps, nous regardons l'impact du coefficient de retour à la moyenne sur les primes d'option.

```
@<----- optioncz.prg ----->@  
  
new;  
library spt;  
SPTset;  
  
cls;  
  
t0 = 0;  
Tc = 0.5;   T = 1;  
czTc = 0.97;  czT = 0.93;  
  
K = czT/czTc;  
a = 0.8; sigma = 0.02;  
{C,P} = optionCouponZero(t0,T,czT,Tc,czTc,K,a,sigma);
```

```

output file = optioncz.out reset;

K = czT/czTc;
a = 0.8; sigma = 0.02;
{C,P} = optionCouponZero(t0,T,czT,Tc,czTc,K,a,sigma);

print "Option a la monnaie "$+ftos(K,"(prix d'exercice = %lf) :",10,6);
print ftos(C,"call = %lf",10,6)$+ftos(P," --- put = %lf",10,6);

a = 1|0.8|0.6|0.2; sigma = 0.02;
{C,P} = optionCouponZero(t0,T,czT,Tc,czTc,0.956,a,sigma);

print;
print "          a          C          P";
print "-----";
print a~C~P;

let cn = "czTc" "czT/czTc" "0.956";
cz = czTc|K|0.956;
r = -ln(cz)/.05;
print;
print "Taux implicite :";
call printfmt(cn~r,0~1);

output off;

```

```

Option a la monnaie (prix d'exercice = 0.958763) :
call = 0.001794 --- put = 0.001794

```

```

          a          C          P
-----
1.0000000 0.0033159038 0.00063590376
0.8000000 0.0034412852 0.00076128524
0.6000000 0.0035868527 0.00090685275
0.2000000 0.0039501926 0.0012701926

```

```

Taux implicite :
  czTc      0.060918415
 czT/czTc   0.084222971
  0.956     0.089994732

```



---

## selectionArbre

### ■ Objectif

Sélection du vecteur des valeurs du  $j$ -ième arbitrage d'un arbre binomial.

### ■ Format

$x_j = \text{selectionArbre}(x,j);$

### ■ Entrées

$x$  vecteur  $N \times 1$ , valeurs de l'arbre binomial sous la forme compacte.

$j$  scalaire,  $j$ -ième arbitrage.

### ■ Sorties

$x_j$  vecteur  $(j + 1) \times 1$ , valeurs de l'arbre pour le  $j$ -ième arbitrage.

### ■ Remarque

$N$  admet la factorisation  $\frac{M(M+1)}{2}$  avec  $M \in \mathbb{N}$ .  $M$  est le nombre de périodes de l'arbre, c'est-à-dire que l'arbre comporte  $M - 1$  arbitrages.  $j$  peut donc prendre les valeurs  $0, 1, 2, \dots, M - 1$ . Le vecteur  $x_j$  correspond aux valeurs  $x^{(j)}$  du  $j$ -ième arbitrage. Par exemple, nous avons

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_2^{(2)} \\ x_1^{(2)} \\ x_0^{(2)} \end{bmatrix}$$

### ■ Source

*holee.src*

► Voici un programme qui utilise la procédure `selectionArbre`.

```
@<----- arbre2.prg ----->@
```

```
new;
library spt;
SPTset;

M = 5;
x = seqa(1,1,M*(M+1)/2);

output file = arbre2.out reset;

format 6,2;

j = 0;
do until j > M-1;
  print ftos(j," --- j = %lf --- ",0,0);
  xj = selectionArbre(x,j);
  print xj;
  print;
  j = j + 1;
```

```
endo;  
output off;  
  
--- j = 0 ---  
1.0  
  
--- j = 1 ---  
2.0  
3.0  
  
--- j = 2 ---  
4.0  
5.0  
6.0  
  
--- j = 3 ---  
7.0  
8.0  
9.0  
10.  
  
--- j = 4 ---  
11.  
12.  
13.  
14.  
15.
```

---

## selectionArbreHoLee

### ■ Objectif

Sélection de l'arbre binomial de maturité  $\tau$  dans le modèle de HO et LEE [1985].

### ■ Format

P\_tau = selectionArbreHoLee(P,tau);

### ■ Entrées

P                    vecteur  $M \times 1$ , vecteur des valeurs de l'arbre de Ho et Lee.  
tau                   scalaire, maturité  $\tau$ .

### ■ Sorties

P\_tau                vecteur  $Q \times 1$ , valeurs de l'arbre pour la maturité  $\tau$ .

### ■ Remarque

$P$  est le vecteur des valeurs  $P_i^{(n)}(\tau)$  obtenu par la procédure `arbreHoLee`. Le vecteur  $P(\tau)$  correspond aux valeurs de  $P_i^{(n)}(\tau)$ . Par exemple, nous avons

$$P(1) = \begin{bmatrix} P_0^{(0)}(1) \\ P_1^{(1)}(1) \\ P_0^{(1)}(1) \\ P_2^{(2)}(1) \\ P_1^{(2)}(1) \\ P_0^{(2)}(1) \\ \vdots \\ P_0^{(N-1)}(1) \end{bmatrix}$$

La dimension du vecteur  $P(\tau)$  est donc  $Q = \frac{(N-\tau+1)(N-\tau+2)}{2}$  avec  $N$  le nombre de coupons zéro utilisé dans la procédure `arbreHoLee`.

### ■ Source

*holee.src*

► Nous utilisons cette procédure pour sélectionner un arbre, que nous pouvons visualiser avec `affichageArbre`. Voyons une illustration en considérant l'exemple de la page 364.

```
@<----- holee1.prg ----->@
```

```
new;  
library spt;  
SPTset;
```

```

tau = 1 | 2 | 3 | 4 ; /* Maturites 1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans */

{CouponZero,TauxZero} = Vasicek(0.10,0.8,0.11,0.15,0.01,tau);

pi_ = 0.445;
delta = 0.9;
P = arbreHoLee(CouponZero,pi_,delta);

P1 = selectionArbreHoLee(P,1); /* coupon zero 1 an */
P2 = selectionArbreHoLee(P,2); /* coupon zero 2 an */
P3 = selectionArbreHoLee(P,3); /* coupon zero 3 an */
P4 = selectionArbreHoLee(P,4); /* coupon zero 4 an */

output file = holee1.out reset;

msym "";

print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 1 an ---";
call affichageArbre(P1); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 2 ans ---";
call affichageArbre(P2); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 3 ans ---";
call affichageArbre(P3); print;
print "--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 4 ans ---";
call affichageArbre(P4); print;

output off;

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 1 an ---
                                1.0734018
                                1.0176422
0.96075339                      0.96606160
0.90448885                      0.91587799
                                0.86467805
                                0.86945544
                                0.82429019
                                0.78250990

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 2 ans ---
                                1.0317142
                                0.92344068
0.82076174                      0.83568847
                                0.74798695
                                0.67690766

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 3 ans ---
                                0.88669842
0.74716555                      0.64640315

--- Arbre d'evolution du prix du coupon zero de maturite 4 ans ---
0.68138269

```

---

## simulation\_EDS

### ■ Objectif

Simulation d'une équation différentielle stochastique (algorithme de Euler-Maruyama).

### ■ Format

`{t,x} = simulation_EDS(x0,&procMu,&procSigma,t0,TT,N,Ns);`

### ■ Entrées

<code>x0</code>	scalaire ou vecteur $1 \times N_s$ , position initiale $x_0$ .
<code>&amp;procMu</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, x)$ .
<code>&amp;procSigma</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(t, x)$ .
<code>t0</code>	scalaire, valeur de $t_0$ .
<code>TT</code>	scalaire, valeur de $T$ .
<code>N</code>	scalaire, nombre de points de discrétisation.
<code>Ns</code>	scalaire, nombre de simulations $N_s$ .

### ■ Sorties

<code>t</code>	vecteur $N \times 1$ , vecteur des valeurs de $t_n$ .
<code>x</code>	matrice $N \times N_s$ , matrice des trajectoires simulées.

### ■ Remarque

La procédure `simulation_EDS` considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dx(t) &= \mu(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

### ■ Source

`simul.src`

► Nous considérons le processus stochastique borné de SCHLÖGL et SOMMER [1995]

$$\begin{cases} dx(t) &= \left[ c \frac{a+b-x(t)}{b-a} - \frac{(b-x(t))(x(t)-a)}{b-a} \right] dt + \sigma \frac{(b-x(t))(x(t)-a)}{b-a} dW(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Nous simulons deux trajectoires de ce processus pour  $t \in [0, 5]$  en considérant 500 points de discrétisation.

```
@<----- simul3.prg ----->@
```

```
new;
library spt,pgraph;
SPTset;
```

```
a = 0.05; /* borne inferieure du processus */
b = 0.10; /* borne superieure du processus */
theta = 0.8; /* retour a la moyenne */
```

```

sigma = 2; /* tres forte variance !!! */
c = 0.1; /* tres faible intensite !!! */

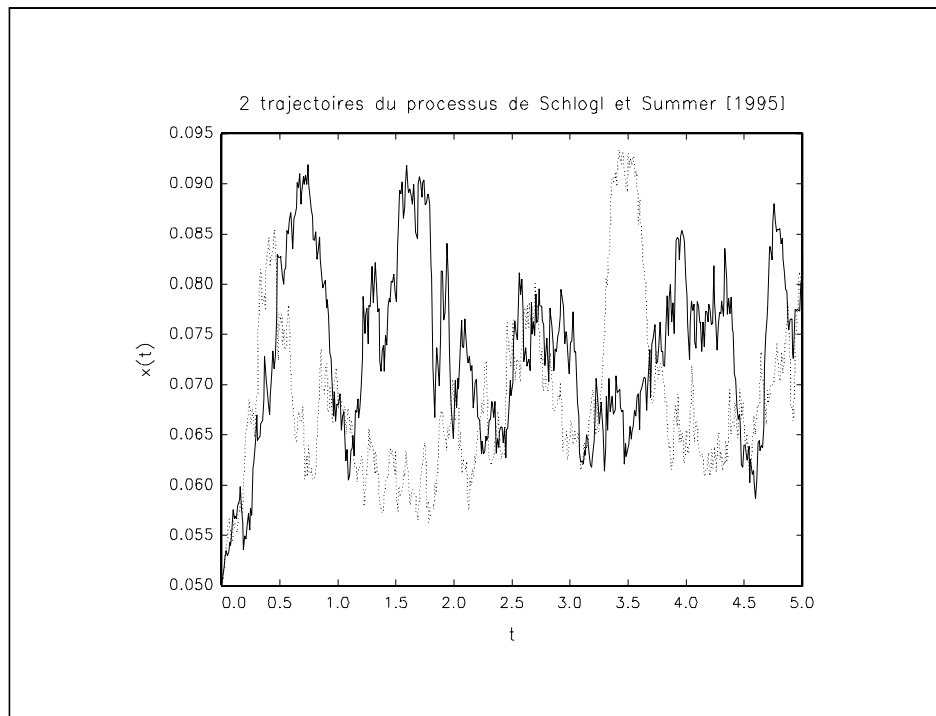
proc procMu(t,x);
  local w1,w2,w3,w;
  w1 = b - a;
  w2 = b - x;
  w3 = x - a;
  w = (c.*(w2-w3) - w2.*w3.*theta)./w1;
  retp(w);
endp;

proc procSigma(t,x);
  local w1,w2,w3,w;
  w1 = b - a;
  w2 = b - x;
  w3 = x - a;
  w = sigma.*w2.*w3./w1;
  retp(w);
endp;

{t,x} = simulation_EDS(0.05,&procMu,&procSigma,0,5,500,2);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2; _pltype = 6|4;
title("2 trajectoires du processus de Schlogl et Summer @[1995@]");
xlabel("t"); ylabel("x(t)");
graphprt("-c=1 -cf=_simul3.eps");
xy(t,x);

```



► Considérons maintenant un processus stochastique non homogène par rapport au temps

$$\begin{cases} dx(t) = 0.8 \times (0.10 - x(t)) dt + \exp\left(-\frac{(t-5)^2}{3}\right) x(t) dW(t) \\ x(0) = 0.1 \end{cases}$$

Ceci est un processus stochastique de retour à la moyenne mais avec une variance

qui dépend du temps. Remarquez l'utilisation des opérateurs élément par élément pour spécifier les fonctions  $\mu(t, x)$  et  $\sigma(t, x)$ .

```
@<----- simul4.prg ----->@

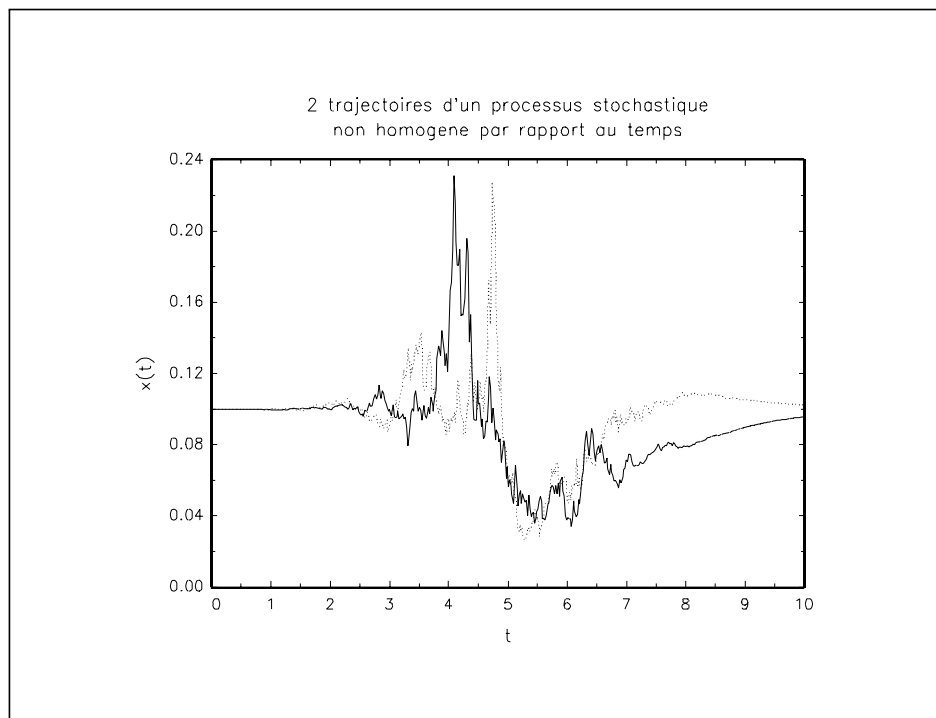
new;
library spt,pgraph;
SPTset;

proc procMu(t,x);
  retp(0.8*(0.10-x));
endp;

proc procSigma(t,x);
  retp(exp(-(t-5)^2/3).*x);
endp;

{t,x} = simulation_EDS(0.1,&procMu,&procSigma,0,10,500,2);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2; _pltype = 6|4;
title("2 trajectoires d'un processus stochastique\"
      "\nnon homogène par rapport au temps");
xlabel("t"); ylabel("x(t)");
graphprt("-c=1 -cf=_simul4.eps");
xy(t,x);
```



---

## Simulation\_EDSm

### ■ Objectif

Simulation d'une équation différentielle stochastique multidimensionnelle (schéma de Taylor de forme forte à l'ordre 0.5).

### ■ Format

`{t,X} = Simulation_EDSm(X0,&procMu,&procSigma,rho,t0,TT,Nd);`

### ■ Entrées

<code>X0</code>	vecteur $M \times 1$ , position initiale $X_0$ .
<code>&amp;procMu</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, X)$ .
<code>&amp;procSigma</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\Sigma(t, X)$ .
<code>rho</code>	matrice $N \times N$ , matrice de covariance $\rho$ du processus de Wiener multidimensionnel.
<code>t0</code>	scalaire, valeur de $t_0$ .
<code>TT</code>	scalaire, valeur de $T$ .
<code>Nd</code>	scalaire, nombre de points de discrétisation.

### ■ Sorties

<code>t</code>	vecteur $N_d \times 1$ , vecteur des valeurs de $t_n$ .
<code>X</code>	matrice $N_d \times M$ , matrice des trajectoires simulées.

### ■ Remarque

La procédure `Simulation_EDSm` considère l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \Sigma(t, X(t)) dW(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

avec  $W(t)$  un processus de Wiener de dimension  $N$  et de covariance  $\rho t$ .

### ■ Source

`simul.src`

► Considérons l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle

$$dX(t) = \begin{bmatrix} 5 - x_1(t) \\ t(x_1(t) + x_2(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0.75x_1(t) & 0 & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \end{bmatrix} dW(t)$$

avec

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous simulons une trajectoire des processus  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour  $t \in [0, 1]$  en prenant 500 points de discrétisation.



```

@<----- simul5.prg ----->0

new;
library spt,pgraph;
SPTset;

rndseed 456;

proc procMu(t,x);
  local mu;

  mu = 5 - x[1]      |
      t * (x[1] + x[2]) ;

  retp(mu);
endp;

proc procSIGMA(t,x);
  local sigma;

  sigma = 0.75*x[1] ~ 0 ~ 0 |
          x[1] ~ x[2] ~ sqrt((x[1]^2+x[2]^2)) ;

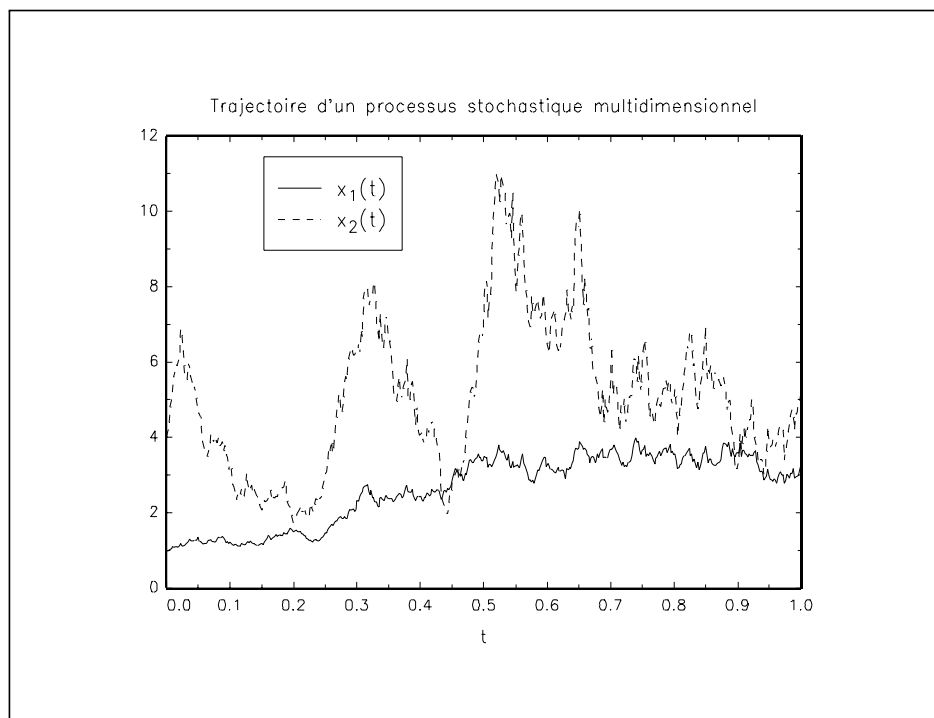
  retp(sigma);
endp;

X0 = 1|4;
let rho[3,3] = 1 0.25 0
              0 1 -0.10
              0 -0.10 1;

{t,x} = simulation_EDSm(X0,&procMu,&procSigma,rho,0,1,500);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2; _pltype = 6|3;
title("Trajectoire d'un processus stochastique multidimensionnel");
xlabel("t");
_plegstr = "x1[(t)\000x]2[(t)";
_plegctl = {2 7 1.8 4.8};
graphprt("-c=1 -cf=_simul5.eps");
xy(t,x);

```



► Considérons maintenant le modèle de CHEN [1995] avec  $\kappa_r = 1$ ,  $\kappa_\theta = 0.8$ ,  $\kappa_v = 0.5$ ,  $\bar{\theta} = 0.12$ ,  $\bar{v} = 0.05$ ,  $\sigma_\theta = 0.10$ ,  $\sigma_v = 0.08$ ,  $\rho_{12} = 0.25$  et  $\rho_{13} = 0.5$ .

```
@<----- simul6.prg ----->0

new;
library spt,pgraph;
SPTset;

rndseed 456;

declare matrix kappa_r,kappa_theta,kappa_v;
declare matrix thetaB,vB;
declare matrix sigma_theta,sigma_v;
declare matrix rho12,rho13;

proc procMu(t,x);
  local mu;

  mu = kappa_r * (x[2] - x[1])      |
      kappa_theta * (thetaB - x[2]) |
      kappa_v * (vB - x[3])        ;

  retp(mu);
endp;

proc procSIGMA(t,x);
  local sigma;

  sigma = sqrt(x[1])*sqrt(x[3]) ~ 0 ~ 0 |
          0 ~ sigma_theta*sqrt(x[2]) ~ 0 |
          0 ~ 0 ~ sigma_v*sqrt(x[3])    ;

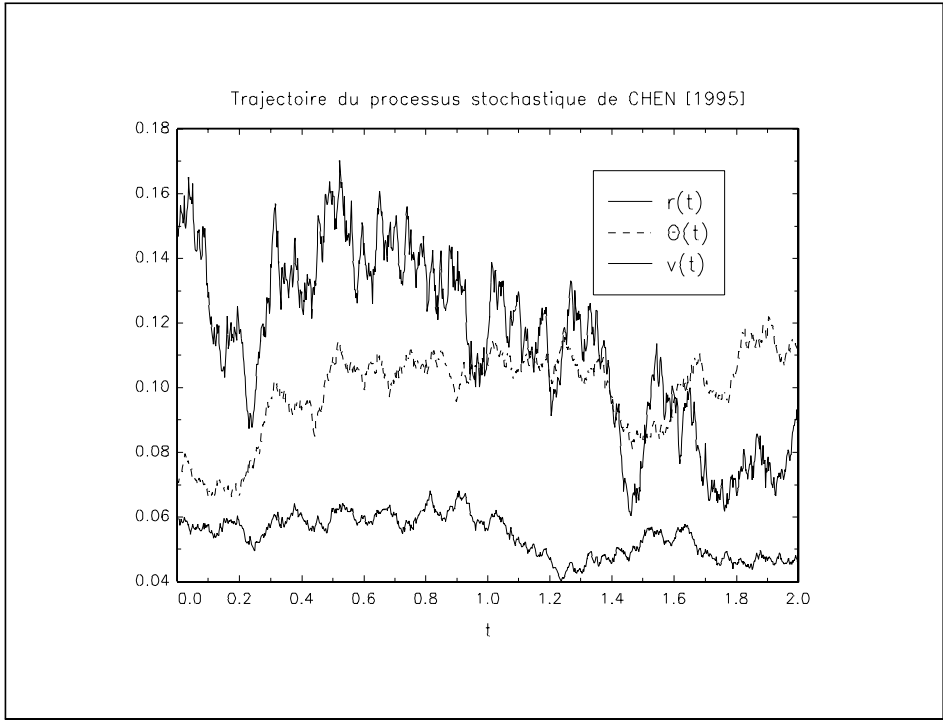
  retp(sigma);
endp;

kappa_r = 1;
kappa_theta = 0.8;
kappa_v = 0.5;
thetaB = 0.12;
thetaV = 0.05;
sigma_theta = 0.10;
sigma_v = 0.08;
rho12 = 0.25;
rho13 = 0.5;

rho = 1 ~ rho12 ~ rho13 |
      rho12 ~ 1 ~ 0     |
      rho13 ~ 0 ~ 1     ;

X0 = 0.15|0.07|0.06;
{t,x} = simulation_EDSm(X0,&procMu,&procSigma,rho,0,2,1000);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2; _pltype = 6|3;
fonts("simplex simgrma");
title("Trajectoire du processus stochastique de CHEN @[1995@]");
xlabel("t");
_plegstr = "\201r(t)\000\202Q\201(t)\000v(t)";
_plegctl = {2 7 6 4.2};
graphprt("-c=1 -cf=_simul6.eps");
xy(t,x);
```



---

## simulation\_MBG

### ■ Objectif

Simulation d'un mouvement brownien géométrique (méthode exacte).

### ■ Format

`{t,x} = simulation_MBG(x0,mu,sigma,t0,TT,N,Ns);`

### ■ Entrées

<code>x0</code>	vecteur $1 \times N_s$ ou scalaire, position initiale $x_0$ .
<code>mu</code>	vecteur $1 \times N_s$ ou scalaire, valeur du paramètre $\mu$ .
<code>sigma</code>	vecteur $1 \times N_s$ ou scalaire, valeur du paramètre $\sigma$ .
<code>t0</code>	scalaire, valeur de $t_0$ .
<code>TT</code>	scalaire, valeur de $T$ .
<code>N</code>	scalaire, nombre de points de discrétisation.
<code>Ns</code>	scalaire, nombre de simulations $N_s$ .

### ■ Sorties

<code>t</code>	vecteur $N \times 1$ , vecteur des valeurs de $t_n$ .
<code>x</code>	matrice $N \times N_s$ , matrice des trajectoires simulées.

### ■ Remarque

La procédure `simulation_MBG` considère le mouvement brownien géométrique suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = \mu x(t) dt + \sigma x(t) dW(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

### ■ Source

`simul.src`

► Dans le programme suivant, nous considérons le processus

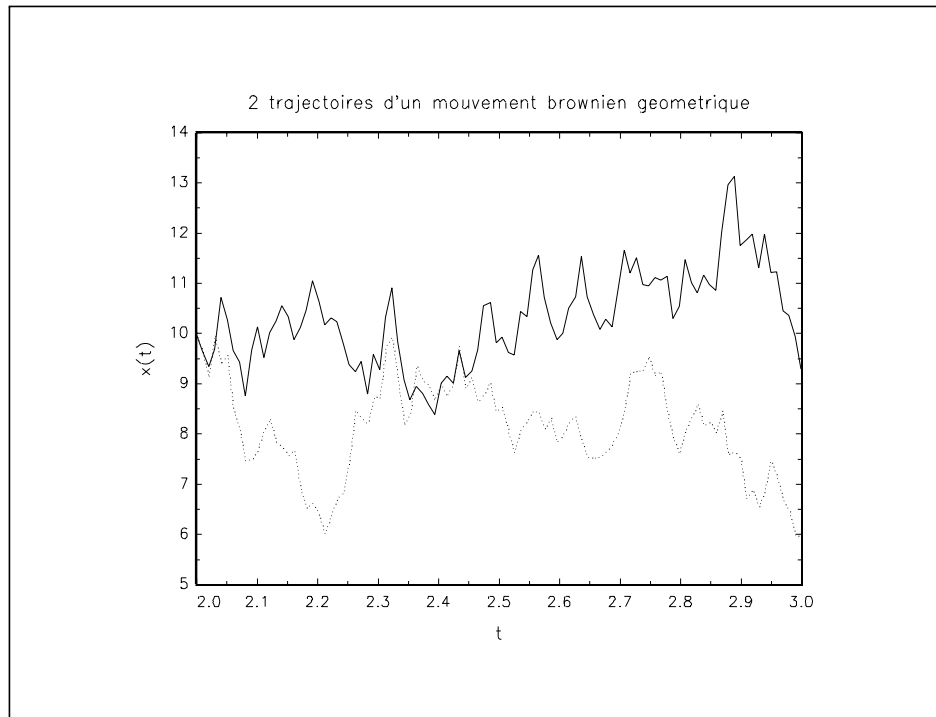
$$\begin{cases} dx(t) = 0.1x(t) dt + 0.5x(t) dW(t) \\ x(2) = 10 \end{cases}$$

Nous simulons deux trajectoires de ce processus pour  $t \in [2, 3]$  avec 100 points de discrétisation.

```
@<----- simul1.prg ----->@
new;
library spt,pgraph;
SPTset;

x0 = 10;
mu = 0.1;
sigma = 0.5;
t0 = 2;
T = 3;
{t,x} = simulation_MBG(x0,mu,sigma,t0,T,100,2); /* 2 trajectoires simulees */
```

```
graphset;  
_pdate = ""; _pnum = 2; _pltype = 6|4;  
title("2 trajectoires d'un mouvement brownien geometrique");  
xlabel("t"); ylabel("x(t)");  
graphprt("-c=1 -cf=_simul1.eps");  
xy(t,x);
```



---

# simulation\_OU

## ■ Objectif

Simulation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (méthode exacte).

## ■ Format

$\{t,x\} = \text{simulation\_OU}(x_0,a,b,\text{sigma},t_0,TT,N,N_s);$

## ■ Entrées

$x_0$	vecteur $1 \times N_s$ ou scalaire, position initiale $x_0$ .
$a$	vecteur $1 \times N_s$ ou scalaire, valeur du paramètre $a$ .
$b$	vecteur $1 \times N_s$ ou scalaire, valeur du paramètre $b$ .
$\text{sigma}$	vecteur $1 \times N_s$ ou scalaire, valeur du paramètre $\sigma$ .
$t_0$	scalaire, valeur de $t_0$ .
$TT$	scalaire, valeur de $T$ .
$N$	scalaire, nombre de points de discrétisation.
$N_s$	scalaire, nombre de simulations $N_s$ .

## ■ Sorties

$t$	vecteur $N \times 1$ , vecteur des valeurs de $t_n$ .
$x$	matrice $N \times N_s$ , matrice des trajectoires simulées.

## ■ Remarque

La procédure `simulation_OU` considère le processus d'Ornstein-Uhlenbeck suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = a(b - x(t)) dt + \sigma dW(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

## ■ Source

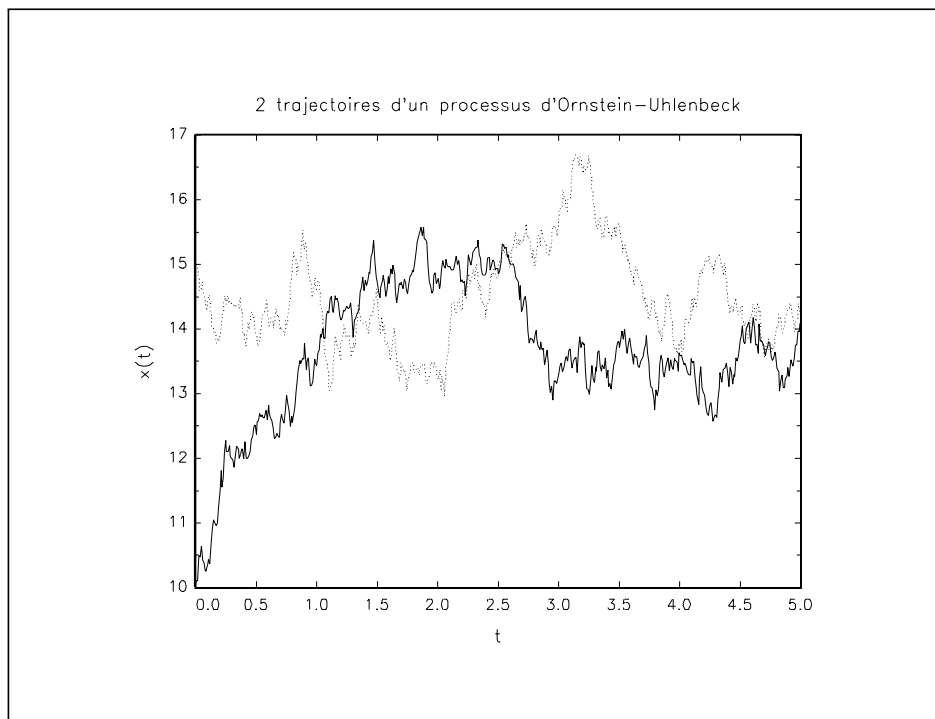
*simul.src*

► Nous simulons deux trajectoires du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour  $t \in [0, 5]$ .

```
@<----- simul2.prg ----->@
new;
library spt,pgraph;
SPTset;

x0 = 10^15;
a = 0.7;
b = 15;
sigma = 1.5;
t0 = 0;
TT = 5;
{t,x} = simulation_OU(x0,a,b,sigma,t0,TT,500,2); /* 2 trajectoires simulees */

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2; _pltype = 6|4;
title("2 trajectoires d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck");
xlabel("t"); ylabel("x(t)");
graphprt("-c=1 -cf=_simul2.eps");
xy(t,x);
```



---

## solution\_EDP

### ■ Objectif

Résolution numérique d'un modèle de structure par terme à une variable d'état par les méthodes des différences finies et des  $\theta$ -schémas.

### ■ Format

`{t,x,k,h} = solution_EDP(x_min,x_max,J,N,theta,fichier);`

### ■ Entrées

<code>x_min</code>	scalaire, valeur de $x^-$ .
<code>x_max</code>	scalaire, valeur de $x^+$ .
<code>J</code>	scalaire, nombre de points de discrétisation $J$ de $[x^-, x^+]$ .
<code>N</code>	scalaire, nombre de points de discrétisation $N$ de $[t_0, T]$ .
<code>theta</code>	scalaire, valeur du $\theta$ -schéma.
<code>fichier</code>	nom du fichier de stockage des solutions $u_j^n$ .

### ■ Sorties

<code>t</code>	vecteur $N \times 1$ , valeurs de $t_n$ .
<code>x</code>	vecteur $J \times 1$ , valeurs de $x_j$ .
<code>k</code>	scalaire, pas de discrétisation du temps.
<code>h</code>	scalaire, pas de discrétisation de l'espace.

### ■ Remarque

Pour des raisons liées à la gestion de la mémoire, la procédure `solution_EDP` ne renvoie pas la matrice des solutions  $u_j^n$ . Celle-ci est stockée dans la base de données `fichier` au format **GAUSS**. Les éléments sont rangés de la façon suivante :

<code>miss(0,0)</code>	$x^-$	$\cdots$	$x_j$	$\cdots$	$x^+$
$t_0$			$u_j^0$		
$\vdots$			$\vdots$		
$t_n$	$u_0^n$	$\cdots$	$u_j^n$	$\cdots$	$u_{j-1}^n$
$\vdots$			$\vdots$		
$T$			$u_j^{N-1}$		

La procédure `Lire_EDP` permet d'extraire les solutions  $u_j^n$  pour une date donnée ("`t`"| $t_n$ ) ou pour une valeur de  $x$  donnée ("`x`"| $x_j$ ).

### ■ Source

`edp.src`

► Dans l'exemple suivant, nous considérons le modèle CIR. Remarquez l'utilisation de la procédure `Lire_EDP`.



```

@<----- spt1.prg ----->@

new;
library spt,pgraph;
SPTset;

kappa = 0.8; theta = 0.10; sigma = 0.5; lambda = 0.05;

proc procMu(x);
  retp(kappa*(theta-x));
endp;

proc procSigma(x);
  retp(sigma*sqrt(x));
endp;

proc procLambda(x);
  retp(lambda*sqrt(x)/sigma);
endp;

proc procR(x);
  retp(x);
endp;

t0 = 0;
T = 5;
call SPT(&procMu,&procSigma,&procLambda,&procR,t0,T,0);

_spt_algorithme = 0;
_print = 0;

{t,x,k,h} = solution_EDP(0,1,101,501,0.5,"spt1");
tau1 = 5 - t;

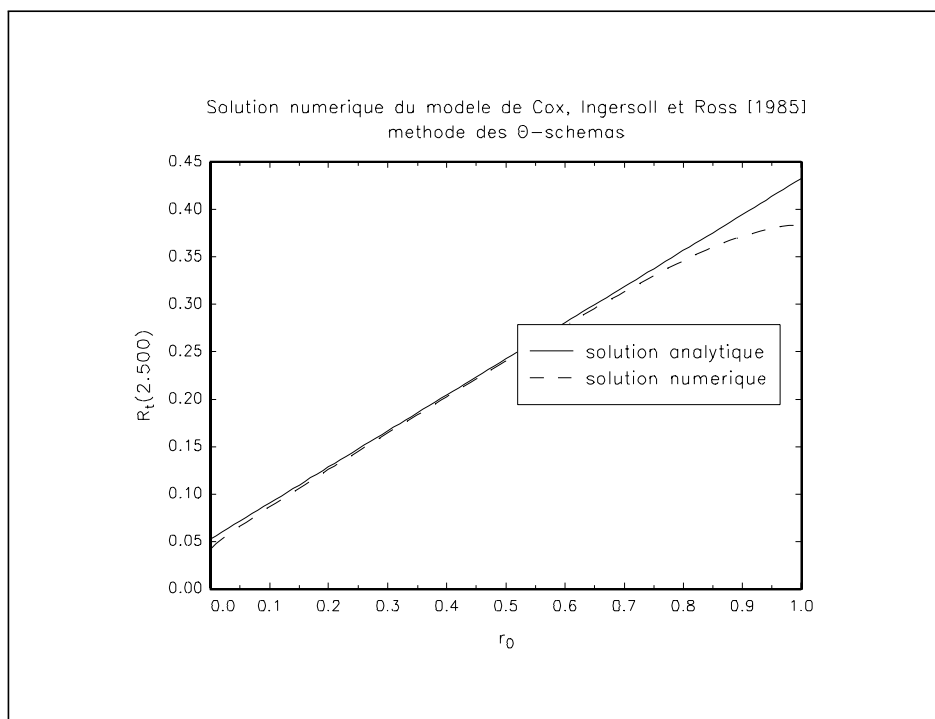
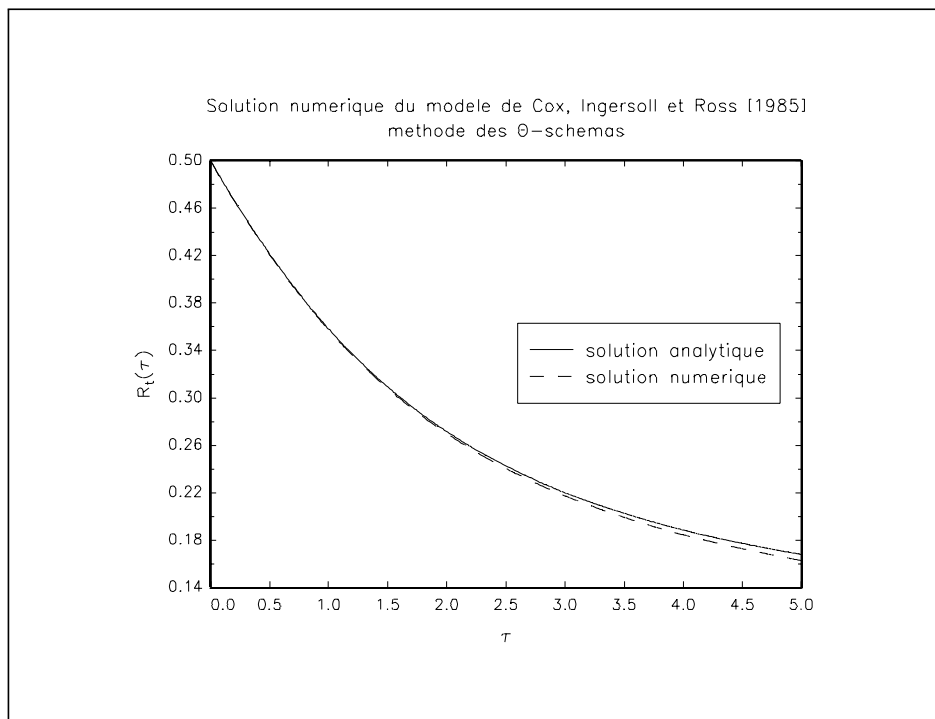
r0 = x[51];
U1 = Lire_EDP("spt1","x|r0");
U1 = -ln(U1)/miss(tau1,0);
{CZ1,TZ1} = CIR(r0,kappa,theta,sigma,lambda,tau1);

t0 = t[251];
tau2 = 5 - t0;
U2 = Lire_EDP("spt1","t|t0");
U2 = -ln(U2)/tau2;
{CZ2,TZ2} = CIR(x,kappa,theta,sigma,lambda,tau2);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2;
fonts("simplex simgrma");
title("Solution numerique du modele de Cox, Ingersoll et Ross @[1985@]"
      "\Lmethode des \202Q\201-schemas");
_plegstr = "solution analytique\000solution numerique";
_plegctl = {2 6 5 3};
xlabel("\202t\201");
ylabel("R]t[(\202t\201)");
graphprt("-c=1 -cf=_spt1a.eps");
xy(tau1,TZ1~U1);

xlabel("r]0[");
str = "R]t[( " $+ ftos(t0,"%lf",4,3) $+ " ) " ;
ylabel(str);
graphprt("-c=1 -cf=_spt1b.eps");
xy(x,TZ2~U2);

```



@<----- spt2.prg ----->@

```
new;
library spt,pgraph;
SPTset;
```

```
a = 0.9; b = 0.15; sigma = 0.25; lambda = 0.05;
```

```
proc procMu(t,x);
  retp(a*(b-x));
```

```

endp;

proc procSigma(t,x);
  retp(sigma*sqrt(t));
endp;

proc procLambda(t,x);
  retp(lambda);
endp;

proc procR(t,x);
  retp(x);
endp;

t0 = 0;
T = 5;
call SPT(&procMu,&procSigma,&procLambda,&procR,t0,T,1);

_spt_algorithme = 1;
_print = 0;

{t,x,k,h} = solution_EDP(-1,1,201,501,1,"spt2");

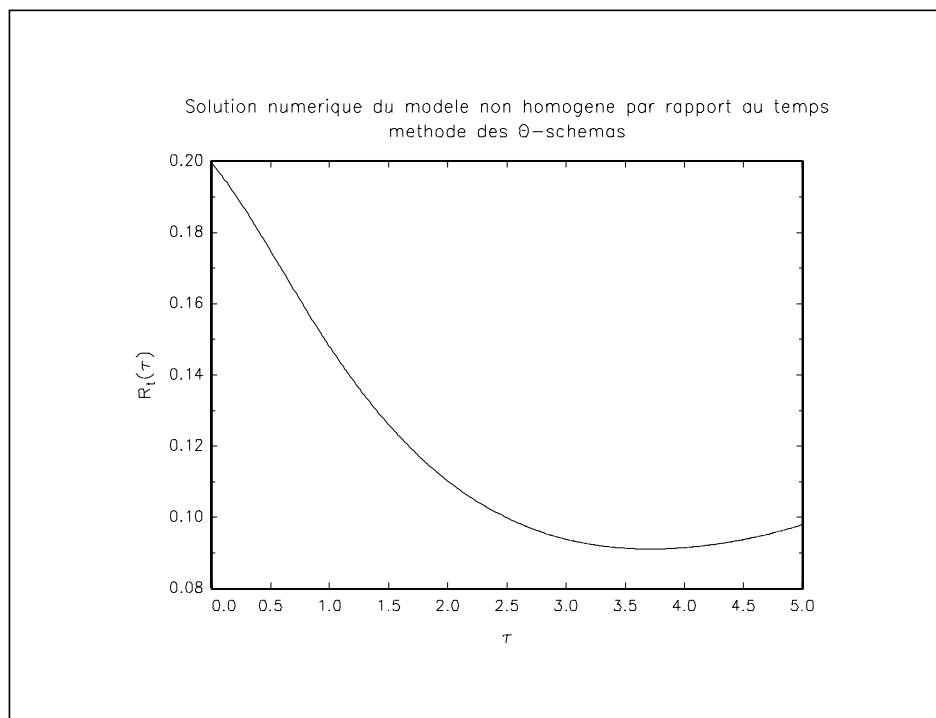
tau = 5 - t;

r0 = x[121];
U = Lire_EDP("spt2","x"|r0);
U = -ln(U)./miss(tau,0);

graphset;
_pdate = ""; _pnum = 2;
fonts("simplex singrma");
title("Solution numerique du modele non homogene par rapport au temps"\  

      "\Lmethode des \202Q\201-schemas");
xlabel("\202t\201");
ylabel("R]t[\202t\201");
graphprt("-c=1 -cf=_spt2.eps");
xy(tau,U);

```



---

# SPT

## ■ Objectif

Initialisation d'un modèle de structure par terme à une variable d'état.

## ■ Format

```
call SPT(&procMu,&procSigma,&procLambda,&procR,t0,T,cn);
```

## ■ Entrées

<code>&amp;procMu</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, x)$ .
<code>&amp;procSigma</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\sigma(t, x)$ .
<code>&amp;procLambda</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\lambda(t, x)$ .
<code>&amp;procR</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $r(t, x)$ .
<code>t0</code>	scalaire, valeur de $t_0$ .
<code>T</code>	scalaire, valeur de $T$ .
<code>cn</code>	scalaire, prend la valeur 1 si le modèle n'est pas homogène par rapport au temps.

## ■ Remarque

Nous devons utiliser cette procédure pour initialiser un modèle qui sera résolu numériquement par `mc_SPT` ou `solution_EDP`. Si `cn` est égal à 0, les procédures sont de la forme `procMu(x)` et non de la forme `procMu(t,x)`.

## ■ Source

*spt.src*

► Voir les exemples qui accompagnent les procédures `mc_SPT` et `solution_EDP`.

---

## SPTm

### ■ Objectif

Initialisation d'un modèle de structure par terme à plusieurs variables d'état.

### ■ Format

```
call SPTm(&procMu,&procSigma,Rho,&procLambda,&procR,t0,T,cn);
```

### ■ Entrées

<code>&amp;procMu</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\mu(t, X)$ .
<code>&amp;procSigma</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\Sigma(t, X)$ .
<code>Rho</code>	matrice $N \times N$ , matrice de covariance $\rho$ du processus de Wiener multidimensionnel.
<code>&amp;procLambda</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $\lambda(t, X)$ .
<code>&amp;procR</code>	pointeur d'une procédure qui calcule la fonction $r(t, X)$ .
<code>t0</code>	scalaire, valeur de $t_0$ .
<code>T</code>	scalaire, valeur de $T$ .
<code>cn</code>	scalaire, prend la valeur 1 si le modèle n'est pas homogène par rapport au temps.

### ■ Remarque

Nous devons utiliser cette procédure pour initialiser un modèle qui sera résolu numériquement par `mc_SPTm`. Si `cn` est égal à 0, les procédures sont de la forme `procMu(x)` et non de la forme `procMu(t, x)`.

### ■ Source

*spt.src*

► Voir les exemples qui accompagnent la procédure `mc_SPTm`.

---

## Svensson

### ■ Objectif

Estimation des coefficients du modèle de SVENSSON [1994].

### ■ Format

```
coefficients = Svensson(Obligations,Poids,CC,c);
```

### ■ Entrées

Obligations	matrice $L \times N$ , base de données des obligations au format <b>SPT</b> .
Poids	vecteur $N \times 1$ , vecteur des poids $w_n$ .
CC	matrice $g \times 6$ , matrice $C$ du système de contraintes $C\theta = c$ .
c	vecteur $g \times 1$ , vecteur $c$ du système de contraintes $C\theta = c$ .

### ■ Sorties

coefficients	vecteur $6 \times 1$ , vecteur $\hat{\theta}$ des valeurs estimées des coefficients du modèle.
--------------	--

### ■ Remarques

Pour une estimation non contrainte, nous initialisons la matrice CC à 0. Nous rappelons que le vecteur des coefficients est

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Cette procédure nécessite la bibliothèque **TSM**. La procédure `Svensson_` permet d'estimer les coefficients du modèle de façon non contrainte et ne nécessite pas la bibliothèque **TSM**. Sa syntaxe est

```
coefficients = Svensson_(Obligations,Poids,0,0);
```

### ■ Source

*tsmspt.src*

► Nous reprenons l'exemple de la page 385. Nous imposons que le taux court est égal à 6.3% et que le taux long est égal à 5.7%. Cet exemple est intéressant, puisqu'il permet de montrer que le modèle de Svensson permet d'appréhender les structures par terme qui présentent une double inversion (le graphique est page 478).

```

@<----- svensson.prg ----->@

new;
library spt, tsm, optnum, pgraph;
SPTset;
TSMset;

r0 = 0.061448386; V0 = 0.040419483; alpha = 0.052139366;
beta = 0.92955634; gamma_ = 0.29047384; delta = 0.17101326;
eta = 0.012475784; xi = 0.65761552; lambda = 1.06184e-005;

tau = seqa(1/10, 1/10, 100);
{CouponZeroLS, TauxZeroLS} =
    LongstaffSchwartz(r0, V0, alpha, beta, gamma_, delta, eta, xi, lambda, tau);

obligation = CouponZero_to_Obligation(CouponZeroLS, tau);

CC = 1~1~0~0~0~0 |
    1~0~0~0~0~0 ;
c = 0.06 |
    0.057 ;

/* Estimation contrainte r(0) = 6% et r(infini) = 5.7% */

theta = Svensson(obligation, 1, CC, c);

tau = seqa(1/10, 1/10, 500);

CouponZero = Svensson_CouponZero(theta, tau);
TauxZero = Svensson_TauxZero(theta, tau);
TauxAterme1 = Svensson_TauxATerme(theta, tau, 0);
TauxAterme2 = Svensson_TauxATerme(theta, 5, tau);

graphset;
begwind;
window(2, 2, 0);

    _pdate = ""; _pnum = 2; _paxht = 0.30; _pnumht = 0.30; _ptitlht = 0.30;
    _pltype = 6|1|3|4;
    fonts("simplex simgrma");
    xtics(0, 50, 10, 10); xlabel("\202t\201");

setwind(1);

    title("Coupon zero P[c]]t[(\202t\201)");
    ytics(0.0, 1, 0.25, 0);
    xy(tau, CouponZero);

setwind(2);

    title("Taux zero R]t[(\202t\201)");
    ytics(0.052, 0.062, 0.002, 0);
    xy(tau, TauxZero);

setwind(3);

    title("Taux a terme instantane F]t[(\202t\201, 0)");
    ytics(0.05, 0.07, 0.005, 0);
    xy(tau, TauxAterme1);

setwind(4);

    title("Taux a terme (a 5 ans) F]t[(5, \202t\201)");
    ytics(0.055, 0.065, 0.0025, 0);
    xy(tau, TauxAterme2);

graphprt("-c=1 -cf=_svensso.eps");

endwind;

```

# Svensson\_CouponZero

## ■ Objectif

Calcul des prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$  (modèle de SVENSSON [1994]).

## ■ Format

CouponZero = Svensson\_CouponZero(coefficients,tau);

## ■ Entrées

coefficients      vecteur  $6 \times 1$ , vecteur  $\theta$  des coefficients du modèle.  
tau                vecteur  $N \times 1$ , maturité  $\tau$  des coupons zéro.

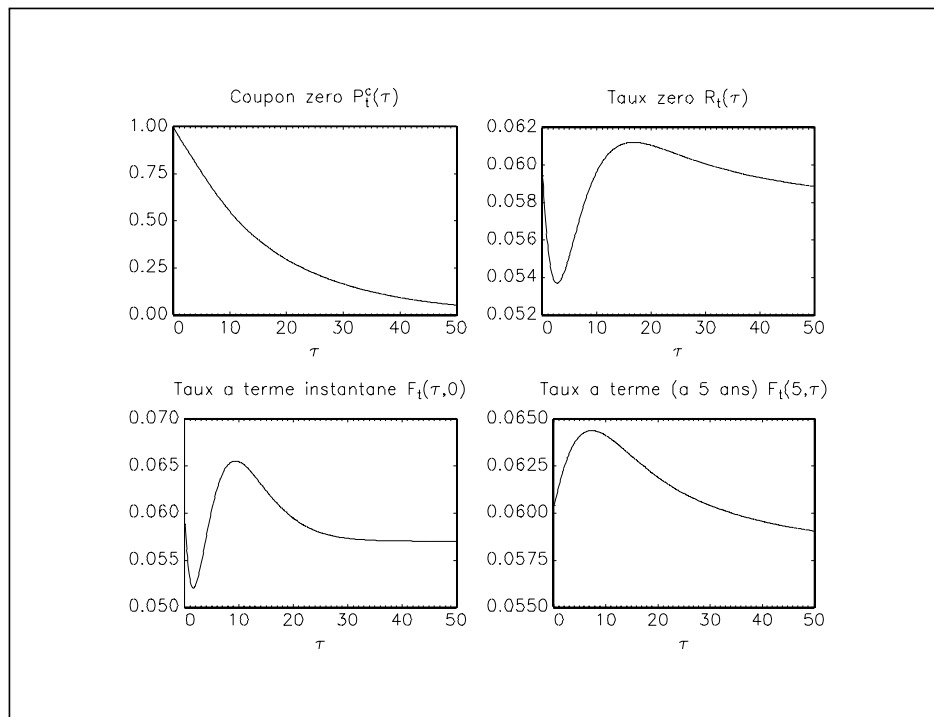
## ■ Sorties

CouponZero      vecteur  $N \times 1$ , prix des coupons zéro  $P_t^c(\tau)$ .

## ■ Source

*svensson.src*

► Voir l'exemple de la page 476.





---

## Svensson\_TauxATerme

### ■ Objectif

Calcul des taux à terme  $F_t(\tau, m)$  (modèle de SVENSSON [1994]).

### ■ Format

$F = \text{Svensson\_TauxATerme}(\text{coefficients}, \text{tau}, m);$

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $6 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tau	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteur des valeurs de $\tau$ .
m	vecteur $N \times 1$ ou scalaire, vecteur des valeurs de $m$ .

### ■ Sorties

F	vecteur $N \times 1$ , taux à terme $F_t(\tau, m)$ .
---	--

### ■ Remarque

Pour obtenir les taux à terme instantanés  $f_t(\tau)$ , nous posons  $m$  égal à 0.

### ■ Source

*svensson.src*

► Voir l'exemple de la page 476.

---

## Svensson\_TauxZero

### ■ Objectif

Calcul des taux zéro  $R_t(\tau)$  (modèle de SVENSSON [1994]).

### ■ Format

TauxZero = Svensson\_TauxZero(coefficients,tau);

### ■ Entrées

coefficients	vecteur $6 \times 1$ , vecteur $\theta$ des coefficients du modèle.
tau	vecteur $N \times 1$ , maturité $\tau$ des coupons zéro.

### ■ Sorties

TauxZero	vecteur $N \times 1$ , taux zéro $R_t(\tau)$ .
----------	--

### ■ Source

*svensson.src*

► Voir l'exemple de la page 476.

---

# Vasicek

## ■ Objectif

Modèle de VASICEK [1977].

## ■ Format

{CouponZero,TauxZero} = Vasicek(r0,a,b,sigma,lambda,tau);

## ■ Entrées

r0	matrice $E \times E$ , valeurs du taux d'intérêt $r_0$ .
a	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $a$ .
b	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $b$ .
sigma	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\sigma$ .
lambda	matrice $E \times E$ , valeurs du paramètre $\lambda$ .
tau	matrice $E \times E$ , maturités $\tau$ des coupons zéro.

## ■ Sorties

CouponZero	matrice $E \times E$ , prix des coupons zéro $P_{t_0}^c(\tau)$ .
TauxZero	matrice $E \times E$ , taux zéro $R_{t_0}(\tau)$ .

## ■ Source

*modele.src*

► Dans l'exemple suivant, nous calculons les taux à terme du modèle de Vasicek avec la procédure numérique gradp.

```
@<----- vasicek.prg ----->@
```

```
new;
library spt,pgraph;
SPTset;

declare matrix r0,a,b,sigma,lambda;

proc lnCouponZero(tau);
  local P,r;

  {P,r} = Vasicek(r0,a,b,sigma,lambda,tau);

  retp(ln(P));
endp;

r0 = seqa(0,1/100,21);

a = 0.90; b = 0.10; sigma = 0.1; lambda = 0.02;

tau = 1; /* 1 an */
f1 = -gradp(&lnCouponZero,tau);

tau = 2; /* 2 ans */
f2 = -gradp(&lnCouponZero,tau);

tau = 5; /* 5 ans */
f3 = -gradp(&lnCouponZero,tau);
```

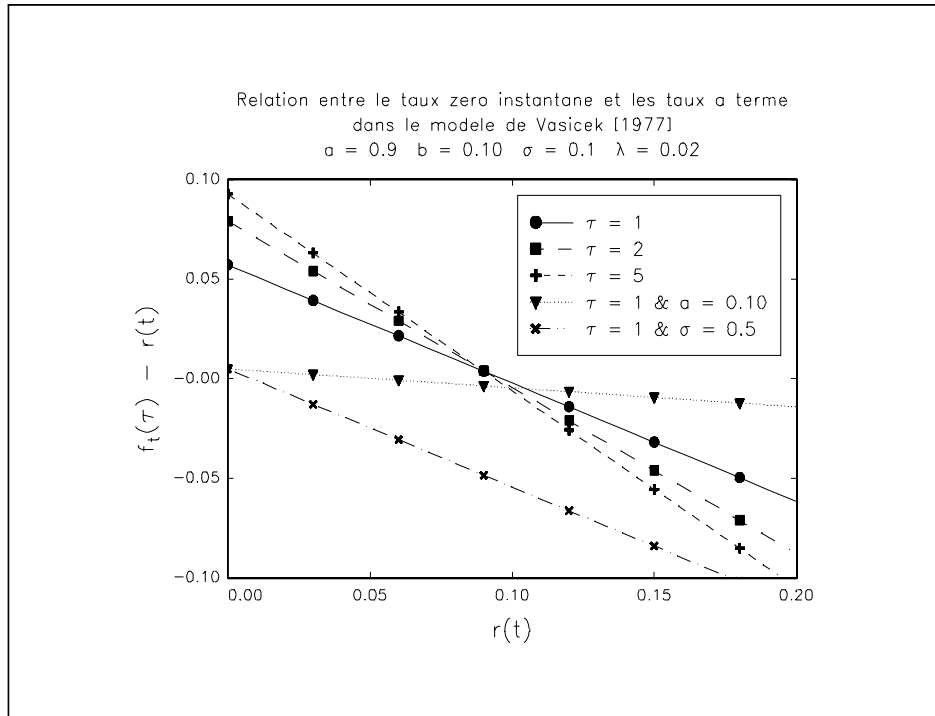
```

tau = 1; /* 1 an */
a = 0.10; b = 0.10; sigma = 0.1; lambda = 0.02;
f4 = -gradp(&lnCouponZero,tau);

tau = 1; /* 1 an */
a = 0.90; b = 0.10; sigma = 0.5; lambda = 0.02;
f5 = -gradp(&lnCouponZero,tau);

graphset;
_date = ""; _pnum = 2; _pltype = 6|1|3|4|5; _pstype = 8|9|11|13|14;
_plctrl = 3; _paxht = 0.20;
fonts("simplex simgma");
title("Relation entre le taux zero instantane et les taux a terme" \
      "\Ldans le modele de Vasicek @[1977@]" \
      "\La = 0.9 b = 0.10 \202s\201 = 0.1 \2021\201 = 0.02");
xlabel("r(t)");
ylabel("f_t(\tau) - r(t)");
xtics(0,0.2,0.05,0);
ytics(-0.1,0.1,0.05,0);
_plegstr = "\202t\201 = 1\000\202t\201 = 2\000\202t\201 = 5" \
           "\000\202t\201 = 1 & a = 0.10\000\202t\201 = 1 & \202s\201 = 0.5";
_plegctl = {2 6 5 3.5};
graphprt("-c=1 -cf=_vasicek.eps");
xy(r0,(f1~f2~f3~f4~f5)-r0);

```



# Liste des programmes

Les programmes de la thèse utilisent les bases de données suivantes :

- data
  - *change.dat* : Cours de change FRF/DEM du 03/01/94 au 31/12/96
  - *dem.dat* : Prix des Reuter Bonds allemands du 10/02/94 au 01/11/96
  - *frf.dat* : Prix des Reuter Bonds français du 10/02/94 au 30/08/96
  - *inflatio.dat* : Taux d'inflation français et allemand du 01/94 au 03/97
  - *mat\_dem.dat* : Maturité des Reuter Bonds allemands
  - *mat\_frf.dat* : Maturité des Reuter Bonds français
  - *nelson\_dem* : Calcule les coefficients du modèle de Nelson et Siegel pour la structure par terme allemande
  - *nelson\_frf* : Calcule les coefficients du modèle de Nelson et Siegel pour la structure par terme française
  - *ns\_dem.fmt* : Base de données (format matrice) des coefficients du modèle de Nelson et Siegel pour la structure par terme allemande
  - *ns\_dem.frf* : Base de données (format matrice) des coefficients du modèle de Nelson et Siegel pour la structure par terme française
- chap1 : *courbure, debandt1, debandt2, monotone, nelson1, nelson2, nelson3, nscomp1, nscomp2, nstestar, recursif, sargent1, sargent2, sargent3, sargent4, spline1, spline2, spline3, sptfrf1, sptfrf2, sptfrf3, sptfrf4*.
- chap2 : *change1, change2, change3, change4, change5, change6, change7, change8, change9, change10, inflat0, inflat1, inflat2, inflat3, inflat5, spn1, spn2, spn3, spn4, sptdem1, sptdem2, sptdem4, terme1, terme2, terme3, terme4, terme5, terme6, terme7, terme8, terme9, terme10, terme11*.
- chap3 : *acp1, acp2, acp3, acp4, acp5, acp6, acp7, acp8, inobs1, inobs2, inobs3, inobs4, mltltrl1, mltltrl2, mltltrl3, mltltrl4, mltltrl5, mltltrl6, mltltrl7*.
- chap4 : *edp1, edp2, edp3, edp4, mc1, mc2, mc3, mc4, modeles, stable1, stable2, tridiag1, tridiag2, vasicek1, vasicek2*.
- chap5 : *mc5, mc6*.
- chap6 : *con2dis1, ei1, ei2, etude1, etude2, etude3, etude4, etude5, mbg1, ou1, ou2, ou3, ou4, ou5, ou6, ou7*.

- **chap7** : *bd1, bd2, bk1, bk2, hjm1, hjm2, hjm3, hjm4, holee1, holee2, holee3, holee4, holee5, holee6, hw1, hw2, obligat, option1, option2, option3.*
- **exemples** : Ces programmes sont ceux utilisés pour illustrer les procédures. Les noms des programmes sont donnés par l'en-tête :

```
@<----- vasicek.prg ----->@
new;
library spt,pgraph;
SPTset;
```

## Remarques sur la gestion de la base de données des obligations

### Construction de la base de données des obligations

Soit  $N$  le nombre d'obligations. La base de données des obligations au format **SPT** est une matrice  $L \times N$ . La première et la deuxième ligne correspondent au nombre de coupons et au prix de l'obligation. Les autres lignes définissent la maturité et la valeur de chaque coupon. Pour chaque date, nous avons **une** base de données. Dans la cadre d'une analyse journalière, la construction de cette base peut être assez difficile. Cependant, la procédure `creationObligation` permet de la construire très facilement. Nous supposons que les caractéristiques (date d'émission, date et valeur des coupons) d'une obligation sont définies dans un fichier `ascii` ayant une extension `.inf`. Considérons par exemple un titre de nominal 100 francs émis le 10/02/1993 et dont la date de remboursement est le 10/02/2001. La date de versement du coupon est fixé le 10 février et son montant est constant est égal à 5. Le fichier `titre1.inf` se présente donc ainsi :

```
19930210    0
19940210    5
19950210    5
19960210    5
19970210    5
19980210    5
19990210    5
20000210    5
20010210   105
```

Un deuxième fichier ayant une extension `.prx` définit pour chaque date la valeur du titre. Voici comment se présente le fichier `titre2.inf` :

```
19980126  98.5
19980127  99
19980128  97
19980129  92
19980130  93
19980202  96
```

Pour chaque obligation, nous avons donc deux fichiers. Le fichier *.inf* est créé une fois pour toute, alors que le fichier *.prx* peut être actualisé. Considérons un deuxième titre. Le contenu du fichier *titre2.inf* est

```
19950815    0
19960815    7
19970815    7
19980820    8.5
19990820    8.5
20000820    8.5
20010815    7
20020815    7
20030815    7
20040815    7
20050815   100
```

et celui de *titre2.prx* est

```
19980126 102.5
19980127 103.
19980129 102.5
19980130 103.5
19980202 102.5
```

La syntaxe de la procédure `creationObligation` est

```
Obligations = creationObligation(titres,d,cn);
```

`titres` est le vecteur contenant les noms des différents obligations. `d` est la date pour laquelle nous voulons créer la base de données `Obligations`. Deux types de problème peuvent se présenter :

1. Pour une date  $d$  donnée, une des obligations n'existe plus (la date de remboursement est antérieure à  $d$ ) ou n'existe pas encore (l'émission n'a pas encore eu lieu).
2. Nous ne disposons pas de cotation de l'obligation pour la date  $d$ .

La variable `cn` indique si nous gardons (+) ou éliminons (−) l'obligation de la base de données lorsque ces types de problème surviennent. Nous avons :

	Problème de type 1	Problème de type 2
$cn = 0$	−	−
$cn = 1$	−	+
$cn = 2$	+	+

Voci quelques exemples d'utilisation de cette procédure avec les titres précédents :

```
new;
library spt;
SPTset;

let string titres = "titre1" "titre2";
```

```
Obligations = creationObligation(titres,19980127,0);
print Obligations;
```

```

4.0000000      8.0000000
99.000000      103.000000
0.038356164    0.56164384
5.0000000      8.5000000
1.0383562      1.5616438
5.0000000      8.5000000
2.0383562      2.5643836
5.0000000      8.5000000
3.0410959      3.5506849
105.00000      7.0000000
.              4.5506849
.              7.0000000
.              5.5506849
.              7.0000000
.              6.5534247
.              7.0000000
.              7.5534247
.              100.00000
```

```
Obligations = creationObligation(titres,20020527,1);
print Obligations;
```

```

4.0000000
.
0.21917808
7.0000000
1.2191781
7.0000000
2.2219178
7.0000000
3.2219178
100.00000
```

```
Obligations = creationObligation(titres,19980128,2);
print Obligations;
```

```

4.0000000      8.0000000
97.000000      .
0.035616438    0.55890411
5.0000000      8.5000000
1.0356164      1.5589041
5.0000000      8.5000000
2.0356164      2.5616438
5.0000000      8.5000000
3.0383562      3.5479452
105.00000      7.0000000
.              4.5479452
.              7.0000000
.              5.5479452
.              7.0000000
.              6.5506849
.              7.0000000
.              7.5506849
.              100.00000
```

## L'utilisation des données DATASTREAM

Nous avons élaboré la procédure `creationObligation` dans le cadre d'une utilisation de DATASTREAM. La fiche signalétique DATASTREAM de l'obligation OAT FRANCE 1995 6.5% 25/04/2011 se présente ainsi :





```

"26/09/97";108,0000
"03/10/97";108,0800
"10/10/97";107,2400
"17/10/97";105,9100
"24/10/97";106,0200
"31/10/97";106,4400
"07/11/97";106,6600
"14/11/97";106,8200
"21/11/97";107,5600
"28/11/97";108,3100
"05/12/97";108,4000
"12/12/97";110,0200
"19/12/97";110,0800
"26/12/97";110,4500
"02/01/98";109,0900
"09/01/98";111,7000
"16/01/98";111,5900
"23/01/98";111,1500

```

call csv2spt(NomDuFichierCSV,1) permet de convertir un fichier *.csv* en fichier *.prx* (1 indique le nombre de lignes de l'en-tête du fichier *csv* à éliminer). L'exécution de la commande call csv2spt('oat1995',3) entraîne la création du fichier *oat1995.prx* suivant :

```

19941230      .
19950106      .
19950113      .
19950120      .
19950127      .
19950203      .
19950210      .
19950217      .
19950224      .
19950303      .
19950310      .
19950317      .

```

```

19970912      106.6300000000
19970919      107.6300000000
19970926      108.0000000000
19971003      108.0800000000
19971010      107.2400000000
19971017      105.9100000000
19971024      106.0200000000
19971031      106.4400000000
19971107      106.6600000000
19971114      106.8200000000
19971121      107.5600000000
19971128      108.3100000000
19971205      108.4000000000
19971212      110.0200000000
19971219      110.0800000000
19971226      110.4500000000
19980102      109.0900000000
19980109      111.7000000000
19980116      111.5900000000
19980123      111.1500000000

```