



Risque de longévité et détermination du besoin en capital : travaux en cours

*Soutenance pour l'habilitation à diriger des recherches (HDR)
19 mars 2009*

Frédéric PLANCHET

<http://www.ressources-actuarielles.net>

Le pilotage technique d'une activité d'assurance a connu ces dernières années deux évolutions majeures :

- la prise en compte d'une analyse plus fine des risques, qui conduit notamment à modifier le cadre de calcul des provisions ; d'une approche « prudente », on est ainsi passé à une approche « best estimate + marge pour risque ».

- la référence à un critère de probabilité de ruine pour déterminer le niveau de fonds propres dans le futur référentiel prudentiel Solvabilité 2.

La modification de l'approche pour le calcul des provision a des conséquences théoriques et pratiques importantes :

- nécessité d'intégrer l'expérience de manière plus systématique dans la détermination des hypothèses du calcul ;
- approches « couverture » pour les engagements financiers ;
- plus généralement, identification et quantification des risques systématiques associés au passif.

Dans le cas particulier des contrats de retraite, cela se traduit par une attention particulière portée aux tables de mortalités prospectives et aux risques associés.

L'introduction d'un critère de probabilité de ruine pour le calcul du montant global de capital alloué conduit également à une refonte profonde des modèles :

- d'un point de vue théorique en imposant de prendre en considération les risques extrêmes de manière explicites, tant à l'actif qu'au passif ;

- d'un point de vue pratique, du fait du niveau très global de cette contrainte (qui porte sur le surplus) et des contraintes sur la capacité à produire des réalisations de la loi empirique du surplus.

- 1. Risque de longévité**
2. Besoin en capital
3. Perspectives

1- Risque de longévité

Publications récentes

PLANCHET F. [2007] « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », Proceedings of the 11th IME Congress

PLANCHET F., JUILLARD M. [2007] « Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité – application à un régime de rentes », Assurance et gestion des risques, Vol. 75 (3).

PLANCHET F.; JUILLARD M.; THEROND P. [2008] « Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée », Assurances et gestion des risques, Vol. 76 (3).

PLANCHET F., LELIEUR V. [2007] « Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations », Bulletin Français d'Actuariat, vol. 7, n°14.

1- Risque de longévité



Références

BONGAARTS J. [2004] « Long-Range Trends in Adult Mortality : Models and Projection Methods », Population Council, n°194.

BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », Insurance: Mathematics and Economics, vol. 31, 373-393.

CAREY J.R., TULAPURKAR S. Ed. [2003] Life Span, Evolutionary, Ecological and Demographic Perspectives, Population and Development Revue (sup. to vol. 29) , Population Council.

GUTTERMAN S., VANDERHOOFT I.T. [1999] « Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects », North American Actuarial Journal, vol. 2, 135-138.

LEE R.D., CARTER L. [1992] « Modelling and forecasting the time series of US mortality », Journal of the American Statistical Association, vol. 87, 659–671.

LEE R.D. [2000] « The Lee–Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications », North American Actuarial Journal, vol. 4, 80–93.

MESLE F., VALLIN J. [2002] « Comment améliorer la précision des tables de mortalité aux grands âges ? Le cas de la France », Population n°4, INED, 603.

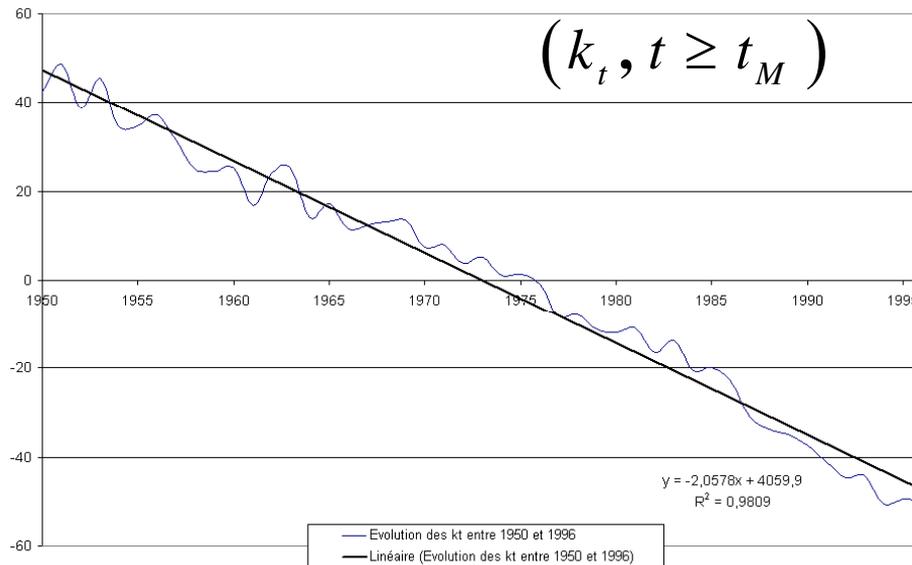
SITHOLE T., HABERMAN S., VERRALL R.J. [2000] « An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners », Insurance: Mathematics and Economics, vol. 27, 285–312.

1- Risque de longévité

1.1. Contexte

La modélisation de la dérive temporelle de la mortalité s'accompagne d'un risque systématique associé aux déviations de la mortalité future par rapport à la tendance anticipée initialement. Ce risque apparaît même si le modèle est correctement spécifié. Par exemple avec Lee-Carter :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt}$$



Modèle n°1

$$k_t^* = at + b + \gamma_t$$

$$\gamma_t \approx N(0, \sigma_\gamma^2)$$

Modèle n°2

$$k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$$

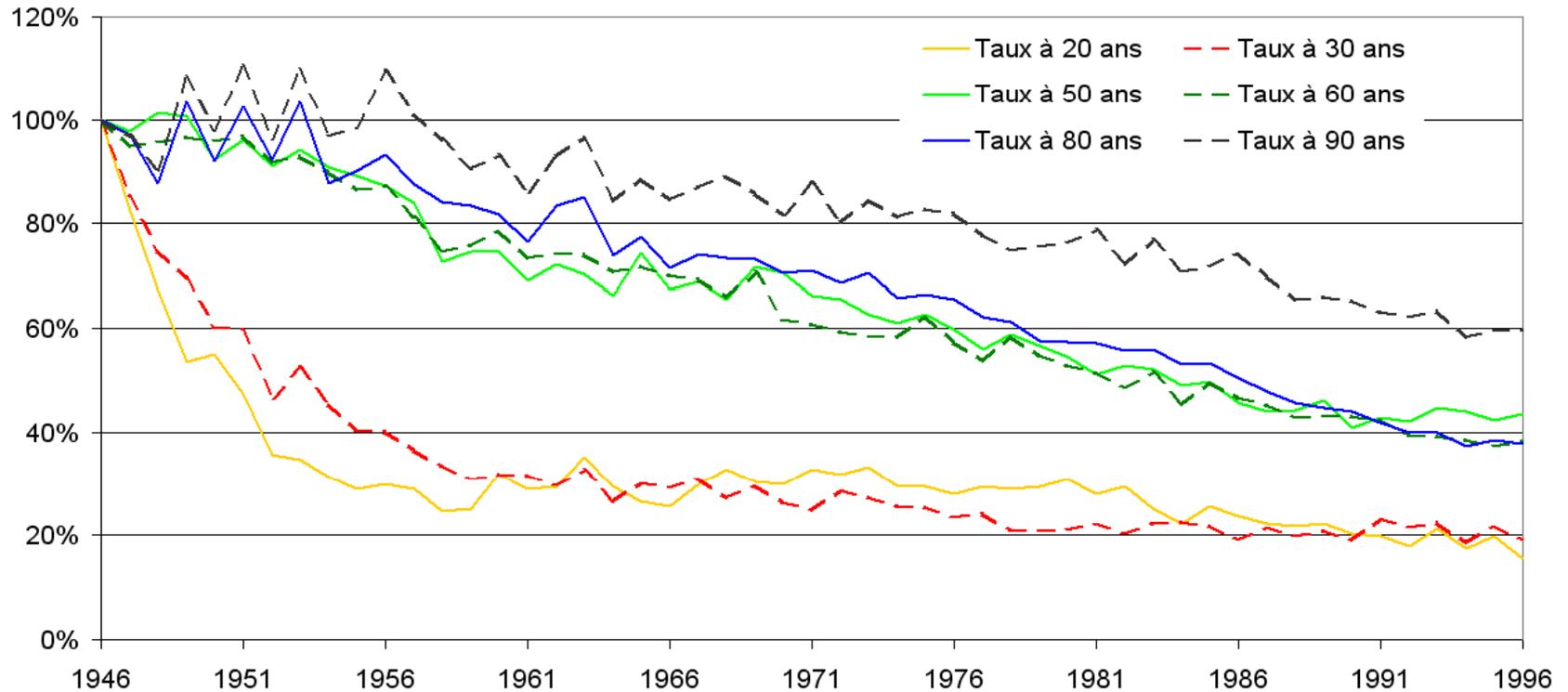
Modèle n°3

Déviations
« Pareto »

1- Risque de longévité

1.1. Contexte

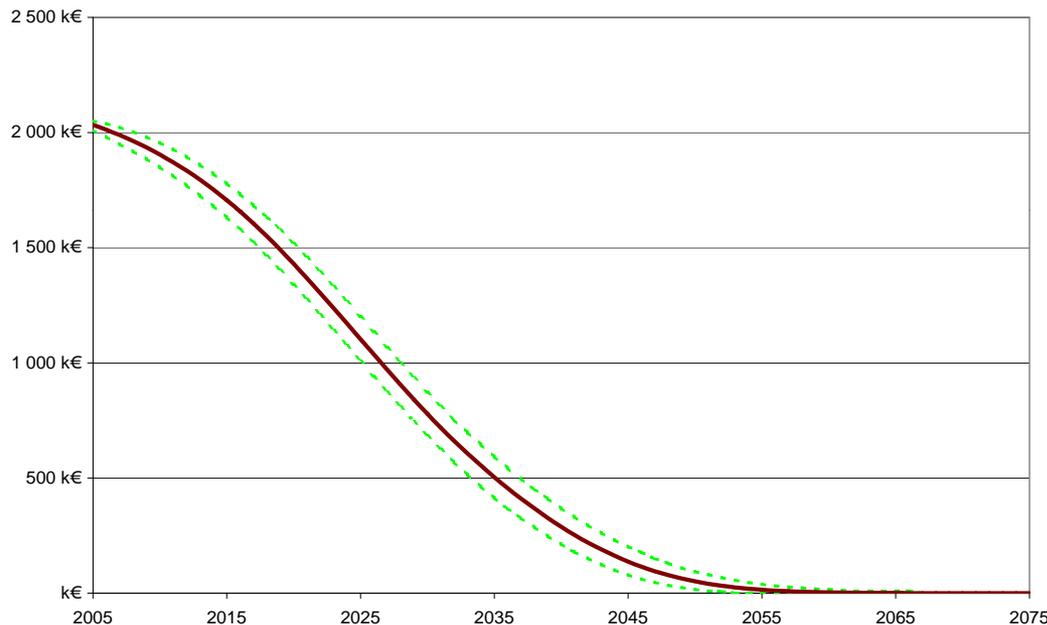
Les fluctuations de la tendance peuvent être mises en évidence simplement sur la population française :



1- Risque de longévité

1.2. Risque systématique pour un régime de rentes

On s'intéresse à la valeur actuelle des flux futurs d'un régime de rentes :



374 rentiers en cours de service, d'âge moyen 64 ans avec une rente moyenne de 5,5 K€

$$\Lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{F}_t (1+i)^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \sum_{j \in J} r_j * \mathbf{1}_{]t; \infty[} (T_{x(j)})$$

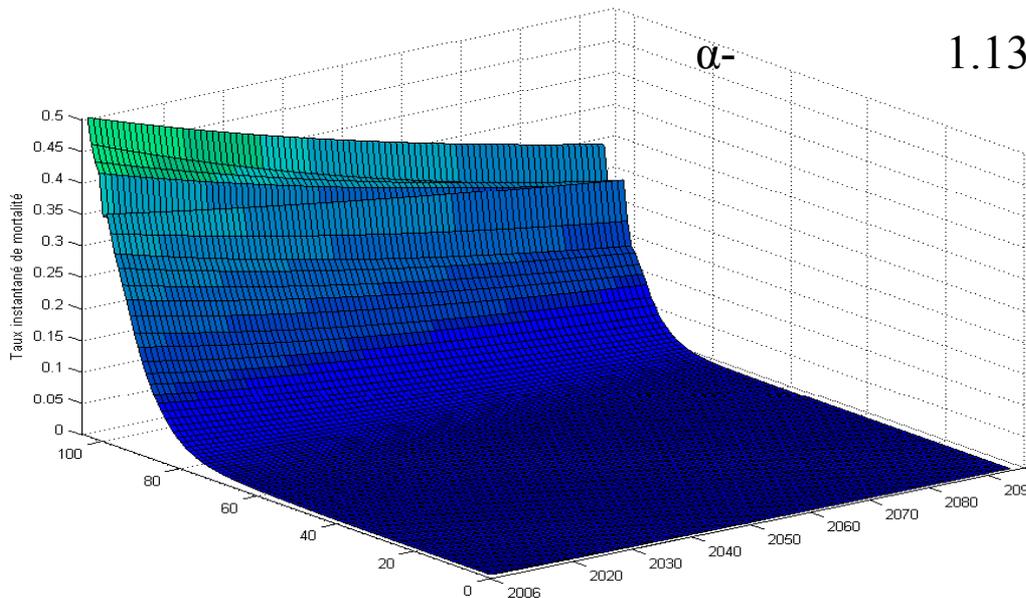
$$L_0 = E(\Lambda) = \sum_{t=1}^{\infty} F_t (1+i)^{-t}$$

1- Risque de longévité

1.2. Risque systématique pour un régime de rentes

L'ajustement de ce modèle sur des données INED (1946-1996) conduit à :

Negative Residuals		Positive Residuals	
p-	42.9 %	p+	42.9 %
M-	1.4385	M+	1.3878
α -	1.13	α +	1.1105



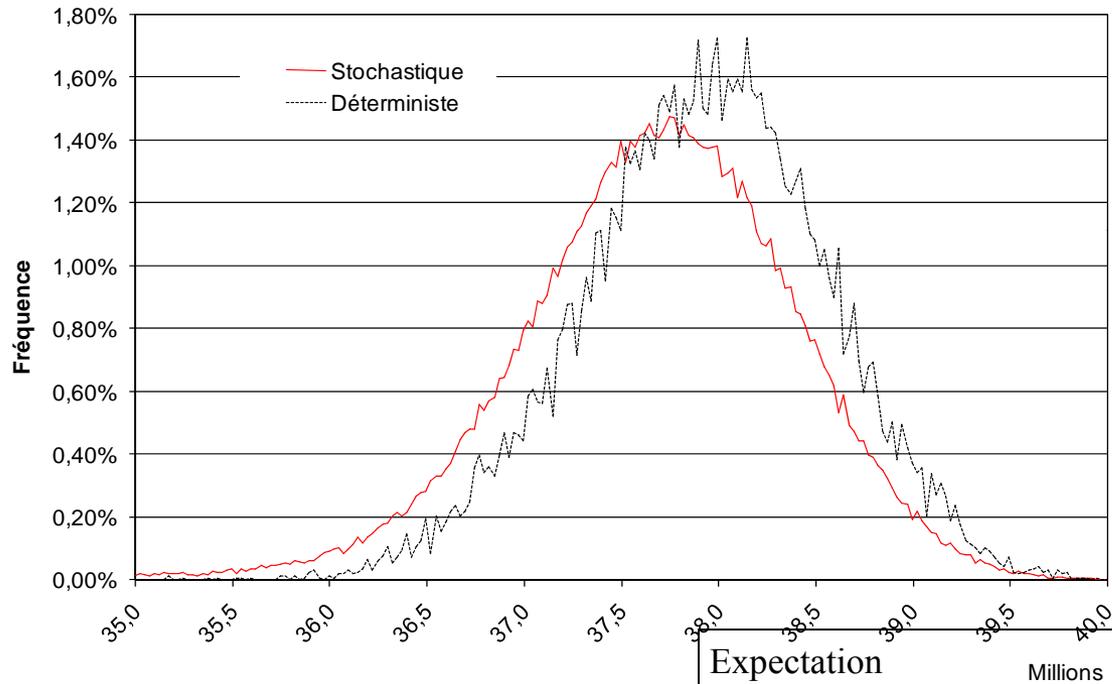
$$\hat{m}_+ = \min \left\{ \gamma_{(i)} ; i \geq n \times p_+ \right\}$$

$$\hat{\alpha}_+ = \frac{\left[n \times p_+ \right]}{\sum_{i=1}^{n_+} \ln \left(\frac{\gamma_i}{\hat{m}_+} \right)}$$

1- Risque de longévité

1.2. Risque systématique pour un régime de rentes

Les conséquences pour le régime sont non négligeables :



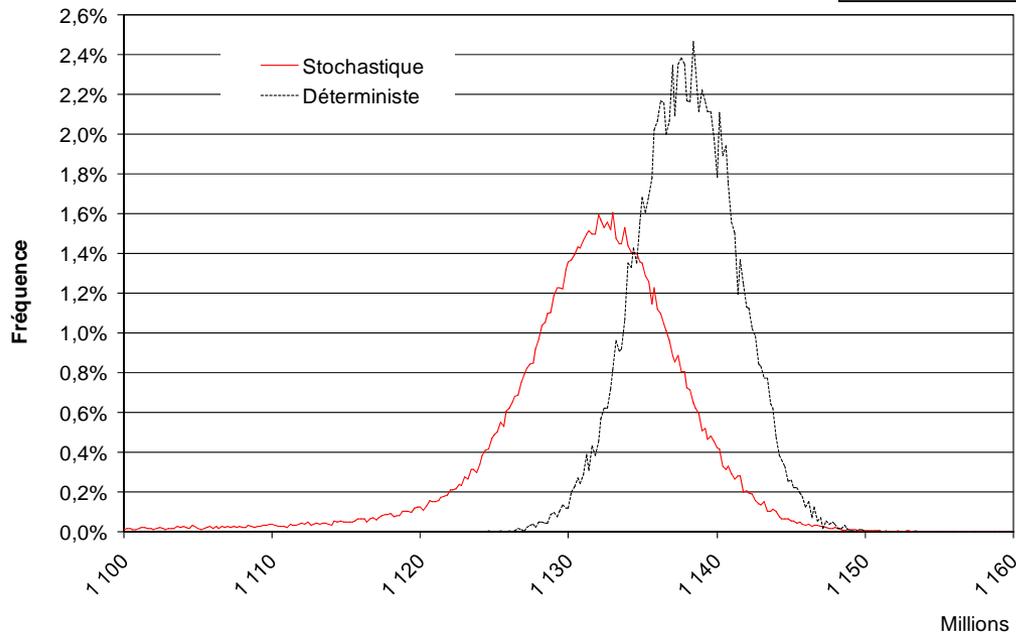
	Deterministic	Stochastic
Expectation	37 937 707	37 380 862
Standard Deviation	626 918	2 418 408
Lower Bound of Confidence Interval	36 625 000	34 295 073
Upper Bound of Confidence Interval	39 075 000	38 945 073
Coefficient of variation	1.65 %	6.47 %

1- Risque de longévité

1.2. Risque systématique pour un régime de rentes

Avec un régime plus gros (x30), les fluctuations d'échantillonnage disparaissent :

	Deterministic	Stochastic
Expectation	1 138 008 113	1 121 529 390
Standard deviation	5 592 212	69 931 571
Lower bound of confidence interval	1 131 130 658	1 032 811 610
Upper bound of confidence interval	1 144 480 658	1 141 811 610
Coefficient of variation	0,30 %	6,24 %



1- Risque de longévité

1.2. Risque systématique pour un régime de rentes

Ainsi des ajustements relativement mineurs sur le modèle peuvent modifier sensiblement l'appréciation que l'on a du niveau du risque systématique.

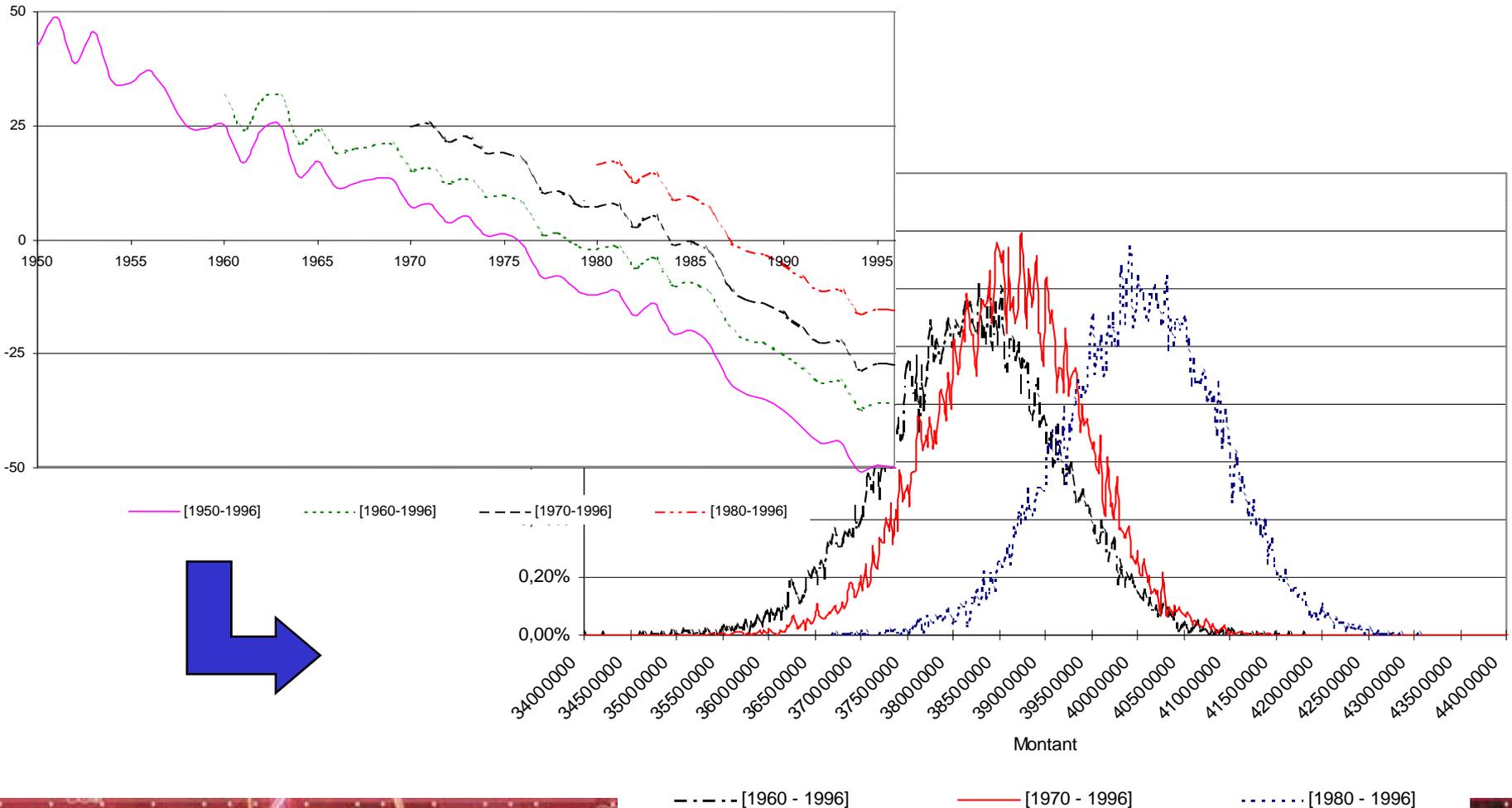
Le partage du capital alloué entre provision « best estimate » et marge pour risque s'en trouve modifié, même si le niveau global reste du même ordre.

Le risque d'estimation et le risque de modèle sont importants.

1- Risque de longévité

1.2. Risque systématique pour un régime de rentes

Risque d'estimation et risque de modèle



1- Risque de longévité

1.3. Conclusion

La prise en compte d'avis d'expert dans les modèles et plus généralement d'informations exogènes constitue un moyen de justifier le niveau de l'anticipation retenue.

L'étude du passé montre que l'évolution de la mortalité a subi des accélérations ou décélérations à des moments clés : 1950-1960 diffusion des antibiotiques, 1960-1970 ralentissement de l'impact des antibiotiques, 1970-2000 évolution des soins cardio-vasculaires.

Les modifications exogènes (médecine comme mode de vie) ont impacté la dérive des taux de mortalité sur une période précise. Ainsi, il est nécessaire de prédire et de quantifier l'impact des variables exogènes futures afin d'évaluer correctement la dérive de la mortalité.

Des phénomènes comme l'obésité, la pollution, le stress ou le traitement de la maladie d'Alzheimer impacteront dans les prochaines années la dérive de la mortalité.

1- Risque de longévité

1.3. Conclusion

Le modèle de Lee-Carter permet d'intégrer un avis d'expert en imposant l'espérance de vie à un âge donné sur un horizon donné. On impose :

$$e_{x_0}(t) = a \times t + b \qquad k(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, t \geq t_M$$

alors la relation $e_{xt} = \sum_{h>0} \prod_{k=0}^{h-1} (1 - q_{x+k, t+k})$ conduit à :

$$\text{Min}_{(a_0, a_1, a_2, a_3)} \sum_{t=t_M}^{t_M+h} \left(a + bt - \varphi_{x_0 t}(a_0, a_1, a_2, a_3) \right)^2$$

$$\varphi_{xt}(a_0, a_1, a_2, a_3) =$$

$$\sum_{h>0} \prod_{k=0}^{h-1} \left(1 - \frac{\exp\left(\alpha_{x+k} + \beta_{x+k} \left(a_0 + a_1(t+k) + a_2(t+k)^2 + a_3(t+k)^3 \right)\right)}{1 + \exp\left(\alpha_{x+k} + \beta_{x+k} \left(a_0 + a_1(t+k) + a_2(t+k)^2 + a_3(t+k)^3 \right)\right)} \right)$$

1- Risque de longévité

1.3. Conclusion

Des modèles présentant une plus grande souplesse dans la prise en compte de la dérive temporelle peuvent être étudiés, comme le modèle logistique décalé (Bongaart [2004]) :

$$\mu_{xt} = \frac{\alpha(t) \mathbf{exp}(\beta x)}{1 + \alpha(t) \mathbf{exp}(\beta x)} + \gamma(t)$$

1. Risque de longévité
- 2. Besoin en capital**
3. Perspectives

2- Besoin en capital



Publications récentes

PLANCHET F., THEROND P.E. [2007] « Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de la Value-at-Risk », Assurances et gestion des risques, Vol. 74 (4).

PLANCHET F., THÉRONND P.E. [2007] « Model risk and determination of economic capital in the Solvency 2 project », Proceedings of the 16th AFIR Colloquium.

PLANCHET F., THÉRONND P.E. [2007] Mesure et gestion des risques d'assurance, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉRONND P.E. [2008] « Expected Shortfall of Claims Events: Some Practical Aspects », Proceedings of the 38th ASTIN Colloquium.

2- Besoin en capital



Références

- AAI [2004] A global framework for insurer solvency assessment, <http://www.actuaires.org>.
- BOYLE P., WINDCLIFF H. [2004] « The $1/n$ pension investment puzzle », North American Actuarial Journal 8.
- COORAY K., ANANDA M. [2005] « Modeling actuarial data with a composite lognormal-Pareto model », Scandinavian Actuarial Journal, 321-334.
- EMBRECHTS P., KLUPPELBERG C., MIKOSCH T. [1997] Modelling extremal events, Berlin : Springer Verlag.
- GAUTHIER C., PISTRE N. [2000] « Evénements extrêmes sur les spreads de crédit », Working Paper ENSAE.
- ROBERT C. [1998] « Mouvements extrêmes des séries financières haute fréquence », Finance 19, 221-71.
- SCOLLNIK D.P.M. [2007] « On composite lognormal-Pareto models », Scandinavian Actuarial Journal, 20-33.
- ZAJDENWEBER D. [2000] Économie des extrêmes, Paris : Flammarion

2- Besoin en capital

2.1. Contexte

Le SCR dans un modèle interne c'est :

- le quantile à 99,5 % ;
- d'une distribution non directement observable (montant du capital nécessaire pour équilibrer le bilan en fin d'exercice).

Recours à un modèle interne partiel , *ie* à la modélisation :

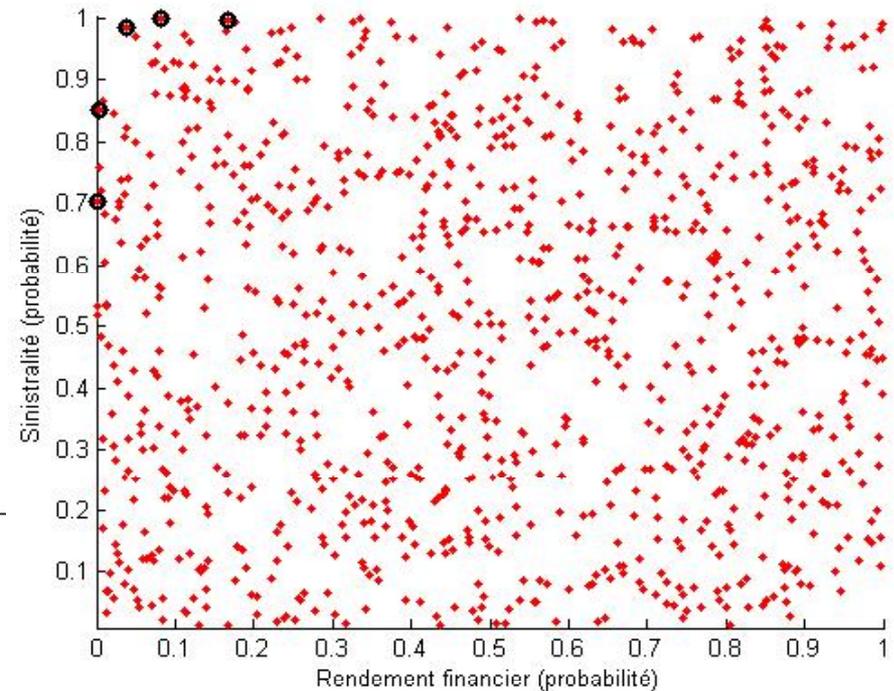
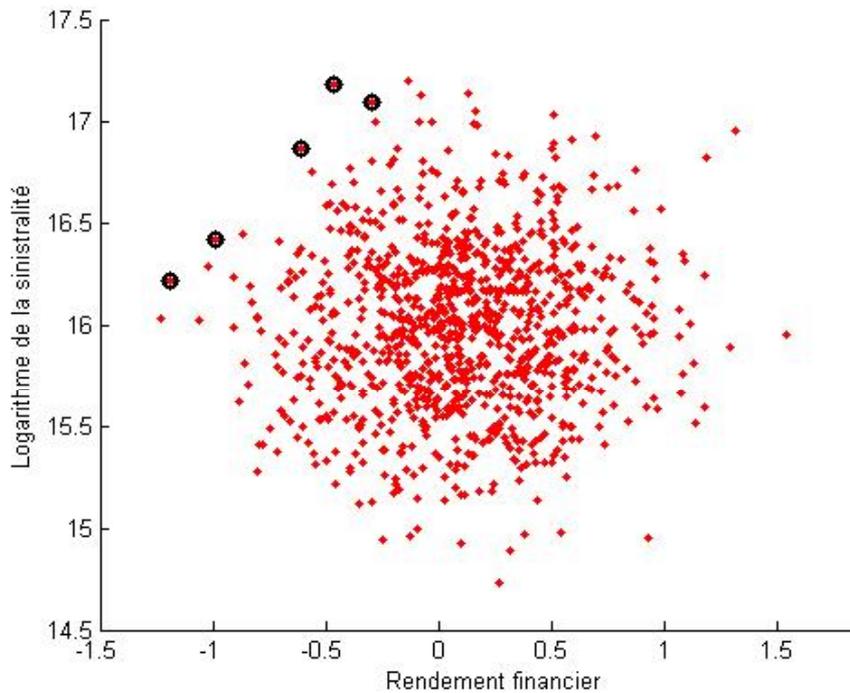
- de l'actif ;
- du passif ;
- des interactions actif / passif.

Il est donc nécessaire de modéliser la loi du « surplus ».

2- Besoin en capital

2.1. Contexte

La modélisation des événements « rares » est déterminante pour la détermination du SCR :

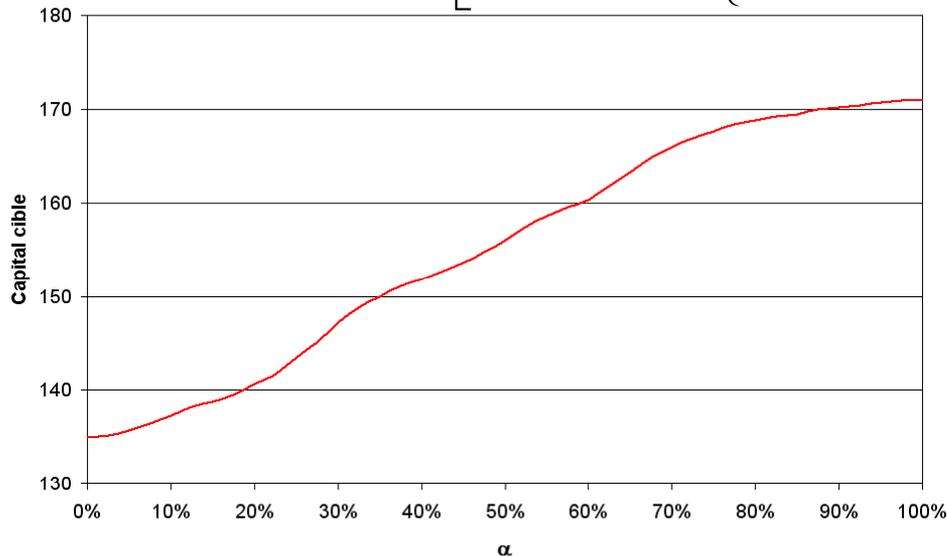


2- Besoin en capital

2.1. Contexte

Supposons qu'au bout d'une année, la société doit avoir un actif assez important pour venir en contrepartie d'un passif qui vaudra, de manière certaine, 100. L'assureur dispose en 0 de ce même montant en provisions, il s'agit donc de déterminer le montant du capital cible tel que :

$$\Pr \left[(100 + \gamma) \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma B_1 + \sum_{k=1}^{N_1} U_k \right\} \leq 100 \right] \leq 0,01$$



$$\alpha = \frac{\sigma_U \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda \sigma_U^2}}$$

2- Besoin en capital

2.2. Robustesse

La robustesse est la propriété d'un estimateur de rester convergent même si le modèle est mal spécifié.

Exemple : estimation de l'espérance dans un modèle log-normal

On a : $\mu = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ ce qui conduit à proposer $\hat{\mu} = \exp\left(\hat{m} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)$

Avec $\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(X_i) - \hat{m})^2$

Mais si la vraie loi est exponentielle de paramètre 1 :

$$\exp\left(m^* + \frac{\sigma^{*2}}{2}\right) = \exp\left(-0,577 + \frac{\pi^2}{12}\right) \approx 1,28$$

2- Besoin en capital



2.3. Approche paramétrique

On fait l'hypothèse que la loi du phénomène sous-jacent appartient à une famille paramétrique (normale, log-normale, Pareto, Benktander, etc.).

L'estimation d'un quantile d'ordre quelconque peut alors être envisagée de la manière suivante :

- estimation des paramètres (par maximum de vraisemblance ou autre méthode) ;
- inversion de la fonction de répartition ;
- Estimation de la VaR par $V\hat{a}R(p) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(p)$;
- recherche d'un intervalle de confiance.

2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

Par exemple pour une loi log-normale on dispose d'une expression explicite de la fonction quantile :

$$VaR_p (X) = F^{-1}(p) = \mathbf{exp}\left(m + \sigma\phi^{-1}(p)\right)$$

Et on peut proposer comme estimateur naturel de la VaR :

$$V\hat{a}R_p (X) = \mathbf{exp}\left(\hat{m} + \hat{\sigma}\phi^{-1}(p)\right)$$

2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

La sensibilité de l'estimation aux paramètres peut être approchée par :

$$\frac{1}{VaR_p(X)} \frac{\partial}{\partial m} VaR_p(X) = 1 \quad \frac{1}{VaR_p(X)} \frac{\partial}{\partial \sigma} VaR_p(X) = \phi^{-1}(p)$$

On en déduit qu'une erreur de mesure de 1% sur l'espérance conduit à une erreur de mesure de 1% sur la valeur à risque ; mais parallèlement une erreur de mesure de 1% sur la volatilité induit une erreur de $\phi^{-1}(p)$ sur la valeur à risque. Au seuil $p=99,5\%$, on a

$$\phi^{-1}(99,5\%) = 2,58$$

et donc une erreur de 1% sur la volatilité conduit à une erreur 2,6 fois plus grande sur la VaR . Le biais est ici déterminé avec Jensen :

$$EV\hat{a}R_p(X) \geq \mathbf{exp}\left(E(\hat{m}) + E(\hat{\sigma})\phi^{-1}(p)\right) \approx VaR_p(X)$$

2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

Que se passe-t-il si le modèle sous-jacent est en fait :

$$S_X(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \leq m \\ \left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha} S_0(m) & x > m \end{cases}$$

c'est à dire un modèle « presque » log-normal avec une queue Pareto :

$$\Pr(X > x | X > m) = \frac{\Pr(X > x)}{\Pr(X > m)} = \frac{S_X(x)}{S_X(m)} = \left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha}$$

La fonction quantile est ici : $F^{-1}(p) = x_p = m \times \left(\frac{1-p}{S_0(m)}\right)^{-1/\alpha}$

2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

Avec un modèle de référence log-normal on est amené à comparer les SCR suivants:

$$x_p^{MEL} = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p_0)\right) \times \left(\frac{1-p}{1-p_0}\right)^{-1/\alpha} \quad x_p^{LN} = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p)\right)$$

On sera confronté à une situation de risque de modèle dans le cas où malgré une valeur du rapport entre les 2 quantiles sensiblement différente de 1, un échantillon issu du modèle mélangé serait difficilement discernable d'un échantillon log-normal.

2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

Estimation des paramètres par maximum de vraisemblance :

$$l(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma, m, \alpha) = cste - (k-1) \ln(\sigma) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\ln(x_{(i)}) - \mu}{\sigma} \right)^2$$

$$+ (n-k+1) \ln(\alpha) + \alpha(n-k+1) \ln(m) - \alpha \sum_{i=k}^n \ln(x_{(i)}) + (n-k+1) S_0(m)$$

avec $k = \min \{i; x_{(i)} \geq m\}$

$$\max_{(\mu, \sigma, m, \alpha)} l(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma, m, \alpha) = \max_m \max_{(\mu, \sigma, \alpha)} l(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma, m, \alpha)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \ln x_{(i)}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (\ln x_{(i)} - \hat{\mu})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n-k+1}{\sum_{i=k}^n \ln \left(\frac{x_{(i)}}{m} \right)}$$

2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

On remarque que si on fixe une probabilité p , alors la probabilité que le quantile d'ordre p de la distribution log-normale soit dépassé dans la distribution mélangée est :

$$\pi(p) = 1 - \left(\frac{\exp(\mu + \sigma\phi^{-1}(p))}{m} \right)^{-\alpha} S_0(m)$$

en conséquence, sur un échantillon log-normal de 1 000 valeurs, on trouvera en moyenne deux valeurs qui dépassent le quantile de niveau 99,8 % , alors que ce seront 5 valeurs qui dépasseront ce seuil si la distribution sous-jacente est la distribution mélangée. Comme le nombre de valeurs dépassant un seuil u est approximativement normal on dispose d'un moyen de tester la cohérence du nombre de « grandes valeurs » :

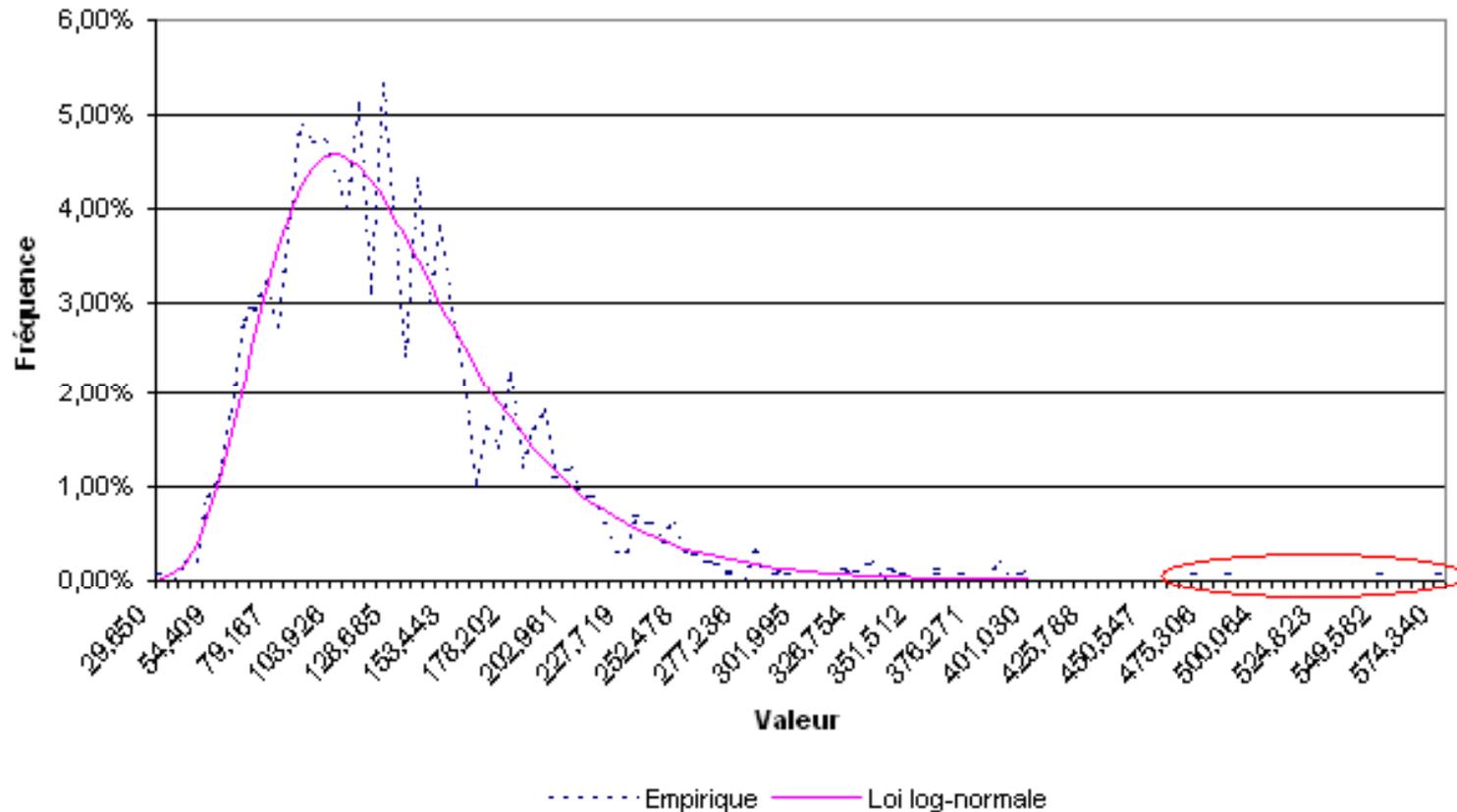
$$\Pr(N_u \geq k) \approx 1 - \phi \left(\frac{k - nS(u)}{\sqrt{nS(u)(1-S(u))}} \right)$$

2- Besoin en capital



2.3. Approche paramétrique

Illustration :



2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

On a donc estimé la VaR par $V\hat{a}R(\alpha) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha)$ et on s'intéresse à la précision de l'estimateur ainsi obtenu.

On se place dans le cas particulier où le paramètre est estimé par l'estimateur du maximum de vraisemblance ; on déduit des propriétés générales de l'estimateur du maximum de vraisemblance que $V\hat{a}R(\alpha)$ est alors l'estimateur du maximum de vraisemblance de la VaR . Il est donc asymptotiquement sans biais et gaussien. En obtenant une estimation de sa variance asymptotique on pourra donc construire un intervalle de confiance.

La loi de la statistique $V\hat{a}R(\alpha)$ est toutefois difficile à déterminer, et on est conduit à se tourner vers des techniques de simulation, et tout particulièrement la méthode « Bootstrap ».

2- Besoin en capital

2.3. Approche paramétrique

Le principe de la méthode consiste à remarquer que pour un échantillon de taille suffisante, la fonction de répartition de la loi sous-jacente peut être approchée par la fonction de répartition empirique. Evaluer des statistiques par simulation se ramène alors à générer des échantillons à l'aide de la distribution empirique. Hors un tirage dans la distribution empirique s'obtient simplement par un tirage avec remise des n valeurs dans l'échantillon initial. On obtient ainsi au plus n^n échantillons « bootstrapés » à partir desquels on va calculer les estimateurs empiriques des statistiques d'intérêt.

Dans le cas de l'estimation d'une VaR , l'échantillon initial est constitué par les n observations de X utilisées pour estimer les paramètres du modèle. La statistique d'intérêt est :

$$\hat{VaR}(\alpha) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha)$$

2- Besoin en capital



2.3. Approche paramétrique

On peut procéder de deux manières (au moins) pour construire l'intervalle de confiance recherché :

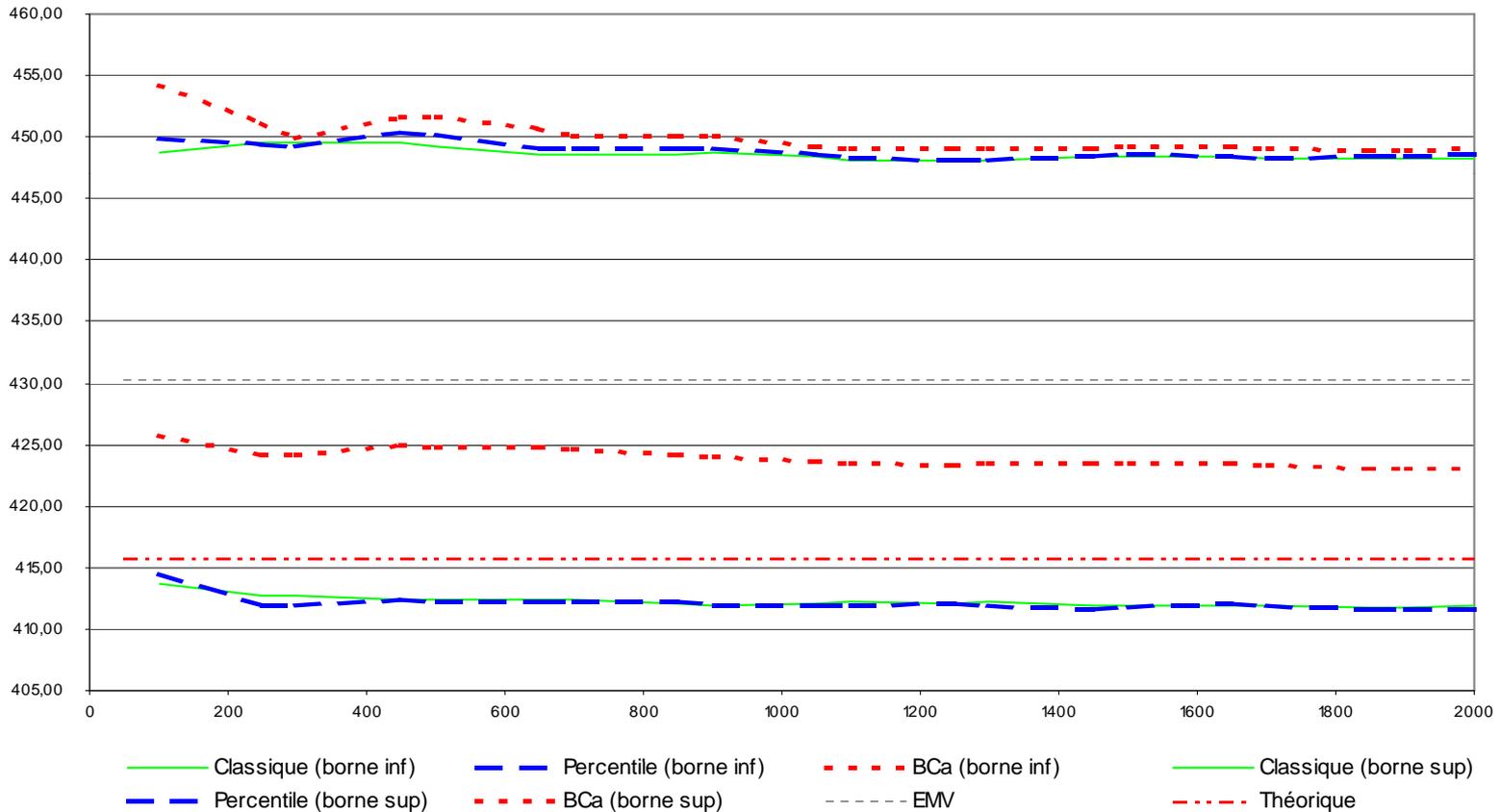
- estimation de la variance bootstrapée de $V\hat{a}R(\alpha)$, que l'on utilise ensuite avec l'hypothèse de normalité asymptotique ;
- estimation directe d'un intervalle de confiance bootstrapé via la méthode BCa (« Bias corrected and accelerated »).

2- Besoin en capital



2.3. Approche paramétrique

Mais attention, les méthodes « bootstrap » sont mal adaptées à l'analyse d'un quantile élevé :



2- Besoin en capital

2.4. Approche non paramétrique

On ne suppose plus ici d'hypothèse sur la forme *a priori* de la loi sous-jacente ; on dispose dans ce contexte de la fonction de répartition empirique :

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq u\}}$$

Une approche naturelle consiste à utiliser directement cette approximation de la vraie loi pour proposer des estimateurs, par exemple :

$$\hat{F}^{-1}(p) = ([pn] - pn + 1) X_{([pn])} + (pn - [pn]) X_{([pn]+1)}$$

Cependant, pour un quantile d'ordre élevé cette approche est inefficace car les données sont insuffisantes.

2- Besoin en capital

2.4. Approche non paramétrique

En l'absence de données suffisantes il faut imaginer un moyen d'intégrer au modèle des contraintes structurantes. La théorie des valeurs extrêmes fournit ces contraintes en indiquant que la forme de la queue de distribution est déterminée par une même forme paramétrique, quelle que soit la distribution d'origine.

On est donc ramené d'une certaine manière à un cadre paramétrique « classique », qui va permettre de calculer des VaR et des $TVaR$ pour des quantiles d'ordre élevé.

2- Besoin en capital

2.4. Approche non paramétrique

Dans le cas du domaine de Fréchet, on remarque que :

$$S(x) = 1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x)$$

On en déduit que
$$\frac{S(x)}{S(X_{(n-k)})} = \frac{L(x)}{L(X_{(n-k)})} \left(\frac{x}{X_{(n-k)}} \right)^{-1/\xi}$$

En considérant alors le rapport des fonctions à variation lente proche de 1 on trouve que :

$$S(x) \approx S(X_{(n-k)}) \left(\frac{x}{X_{(n-k)}} \right)^{-1/\xi}$$

2- Besoin en capital

2.4. Approche non paramétrique

Cela conduit à proposer comme estimateur de la fonction de répartition, pour $x > X_{(n-k)}$

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n} \left(\frac{x}{X_{(n-k)}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_{k,n}^H}}$$

Par inversion on propose l'estimateur suivant de la VaR :

$$x_p = X_{(n-k)} \left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\frac{\hat{\xi}_{k,n}^H}{\xi}}$$

avec $\hat{\xi}_{k,n}^H = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \ln \left(\frac{X_{j,n}}{X_{k,n}} \right)$, qui est EMV pour $S(x) = 1 - F(x) = Cx^{-\frac{1}{\xi}}$

2- Besoin en capital

2.4. Approche non paramétrique

On peut également utiliser l'estimateur suivant :

$$x_p = \begin{cases} X_{(n-k)} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] & \text{si } \hat{\xi} \neq 0 \\ X_{(n-k)} - \hat{\beta} \ln \left(\frac{n}{k} (1-p) \right) & \text{si } \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

Il trouve sa justification dans l'étude de la loi des « excès au delà d'un seuil », dont on peut montrer qu'il s'agit d'une loi universelle, la loi de Pareto généralisé.

2- Besoin en capital



2.5. Conclusion

Estimer un SCR est délicat, du fait du niveau « élevé » du quantile :

- nécessité d'une approche paramétrique (directe ou *via* la théorie des valeurs extrêmes) ;
- difficulté à proposer un estimateur robuste ;
- contraintes sur la représentation des extrêmes dans le modèle interne ;
- pas facile de proposer des intervalles de confiance ;
- autre point à examiner : dépendance non linéaire.

1. Risque de longévité
2. Besoin en capital
- 3. Perspectives**

3- Perspectives

Les travaux présentés ici se poursuivent sur les sujets suivants :

- Mortalité : tables prospectives sur de « petits » groupes : choix de la référence, méthode d'ajustement et mesure de l'incertitude.

- Solvabilité : modèle d'actifs pour un assureur, détermination de l'allocation stratégique d'actifs, prise en compte des décisions de l'assureur et de l'assuré. La notion de robustesse et la capacité à intégrer des contraintes macro-économiques de long terme (informations exogènes au modèle, avis d'experts) sont déterminantes.

3- Perspectives



Thèses encadrées

FARJALLAH Mariem (en cours depuis 2007) : *Impact des stress sur la valeur des produits structurés dans une perspective Solvabilité 2.*

KAMEGA Aymric (début en septembre 2008) : *Outils théoriques et opérationnels adaptés au contexte de l'assurance vie en Afrique subsaharienne francophone.*

MANDHOJJ KhouLOUD (début en octobre 2008) : *Etude de la structure de dépendance multidimensionnelle et Application en assurance.*

MERHI Nisrine (début en octobre 2008) : *Modélisation des décisions de l'assureur dans la gestion de la participation aux bénéficiaires - conséquences de ces décisions sur l'évaluation des options et garanties d'un contrat d'assurance vie.*

KALAMOUN Mehdi (début dès que possible) : *Conception d'un modèle d'actifs intégré pour la détermination du SCR.*