

# Modélisation du risque de pandémie dans Solvabilité 2

Version 1.2 du 08/11/2012

**Frédéric Planchet\***

ISFA - Laboratoire SAF<sup>β</sup>

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

## RESUME

On propose ici un modèle simple pour le risque de pandémie destiné à s'intégrer dans un modèle interne au sens de Solvabilité 2. Ce modèle permet la prise en compte de garanties arrêt de travail, ce que l'approche par la formule standard ne permet pas simplement.

## ABSTRACT

In this paper, we propose a simple model for the risk of a pandemic for integration into an internal model in the Solvency II framework. This model allows taking into account disability contracts, which is not possible under the standard formula.

## 1. Introduction

L'évaluation du besoin en capital requis pour faire face aux conséquences d'une pandémie fait l'objet d'un module dédié dans le modèle standard de Solvabilité 2 (*cf.* CEIOPS (2010)). Dans un contexte d'assurance de personnes, les conséquences d'une pandémie grippale sont assimilées à un taux de surmortalité de 0,15 % appliqué au portefeuille. La pertinence de ce taux, issu d'une étude menée par Swiss Ré (*cf.* SWISS RE (2007)), est discutée dans de nombreuses études (voir par exemple INSTITUT CANADIEN des ACTUAIRES (2009) ou GUETTE (2010)). Il en ressort que la valeur retenue par le modèle standard se situe au niveau des évaluations les moins élevés parmi les résultats obtenus par ces différentes études.

Au surplus, cette approche ne permet pas la prise en compte de l'effet de la pandémie sur des garanties de type "arrêt de travail". Un modèle à même de prendre en compte les deux risques est proposé dans MANDHOUC (2011). Toutefois, l'approche proposée par cet auteur nécessite de disposer de données individuelles associées à une pandémie, contrainte qui n'est en pratique pas satisfaite. Par ailleurs, le modèle décrit dans cet article s'avère délicat à utiliser du fait d'une forte instabilité numérique. Enfin, il nous semble ne pas fournir une description correcte des risques en jeu.

Dans le présent article, après avoir décrit le cadre d'analyse retenu, puis explicité les limites du modèle de MANDHOUC (2011) nous proposons un modèle alternatif mieux adapté et plus souple à mettre en œuvre dans le cadre d'un portefeuille d'assurance.

---

\* Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA. Contact : frederic.planchet@univ-lyon1.fr.

<sup>β</sup> Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 - France.

## 2. Le cadre d'analyse

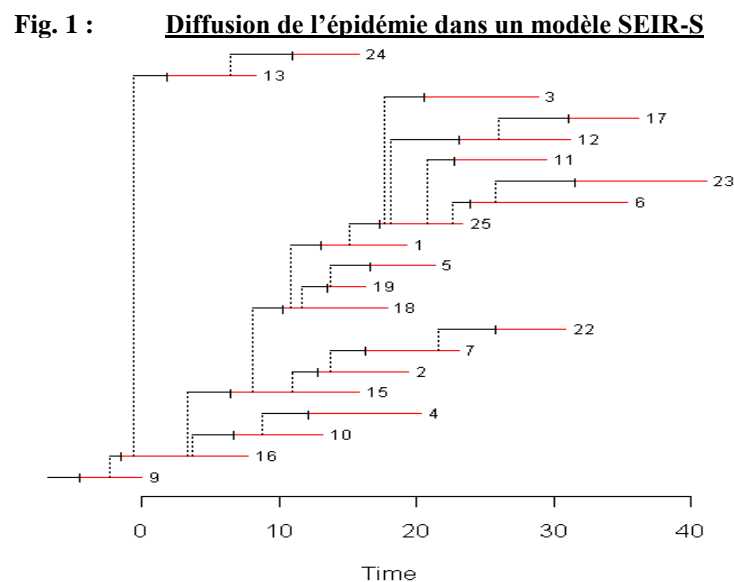
On présente ici dans un premier temps la structure générale du modèle épidémiologique retenu. L'utilisation qui peut en être faite pour calculer un capital de solvabilité dans un cadre d'assurance est ensuite décrite.

### 2.1. Le modèle épidémiologique

On se place dans le cadre général décrit dans GROENDYKE et *al.* (2010) et repris dans MANDHOUI (2011) : la propagation de la maladie est modélisée à l'aide d'un modèle épidémiologique du type SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Removed*) stochastique utilisant un graphe de Bernouilli pour rendre compte des contacts sociaux. Cela conduit à déterminer pour chaque individu les différentes dates caractérisant le déroulement de la maladie à savoir la date d'infection, la date d'infectiosité et la date de rémission.

De manière plus précise, la dynamique de l'épidémie dans le modèle SEIR fait intervenir un paramètre  $\beta$ , appelé taux instantané d'infection, tel que le délai de transmission du virus d'un infecté à un susceptible soit décrit par une loi exponentielle de paramètre  $\beta$ .  $1/\beta$  est donc le délai moyen de transmission de l'épidémie. Les durées de maintien dans les états exposé et infecté sont supposées modélisées par des lois gamma de paramètres respectifs  $(\kappa_E, \theta_E)$  et  $(\kappa_I, \theta_I)$ .

On obtient<sup>1</sup> des évolutions du type :



Au terme de l'épidémie on peut mesurer le taux moyen d'infection  $\tau$  défini comme le rapport entre le nombre cumulé d'infectés et la taille initiale de la population. Le lien entre  $\tau$  et  $\beta$  est complexe et dépend notamment de l'intensité des contacts sociaux, mesurée au travers

---

<sup>1</sup> Les applications numériques sont réalisées à l'aide du logiciel R en utilisant le *package epinet* : <http://cran.r-project.org/web/packages/epinet/index.html>.

du nombre moyen de contacts par individu,  $\rho = K \times p$ , avec  $K$  la taille de la population et  $p$  la probabilité de contact social ( $\beta$  et  $\tau$  sont confondus dans MANDHOJ (2011) comme s'il s'agissait d'un seul paramètre, ce qui est faux). La valeur de  $\rho$  est supposée fixe, de sorte que  $p$  varie de manière inversement proportionnelle à  $K$ .

On peut alors établir (cf. BRITTON et O'NEILL (2002)) que, lorsque la taille de la population  $K$  tend vers l'infini, le taux moyen d'infection converge, avec une probabilité positive, vers une valeur limite positive solution de l'équation :

$$1 - \tau = \exp(-R_0 \times \tau)$$

avec  $R_0$  le taux de reproduction net de l'épidémie, supposé supérieur à un. Lorsque la durée d'infection est modélisée par une loi gamma  $\gamma(\kappa_I, \theta_I)$ , on peut par ailleurs montrer que (cf. GROENDYKE et al. (2010)) :

$$R_0 = \rho \times \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \beta \times \theta_I} \right)^{\kappa_I} \right).$$

## 2.2. Application à un portefeuille d'assurance

Une pandémie grippale engendre des risques de morbidité et de mortalité. Dans le cadre ci-dessus, on peut observer que :

- Le risque de mortalité est caractérisé par le taux de mortalité supplémentaire liée à la pandémie, qui s'obtient en multipliant le taux moyen d'infection  $\tau$  par le taux de létalité<sup>2</sup>.
- Le risque de morbidité s'identifie dans un contexte d'assurance au nombre de jours d'incapacité, que l'on supposera ici égal à la durée totale de la maladie, soit la somme des durées d'exposition et d'infection.

Swiss Ré (cf. SWISS RE (2007)) suppose que les pandémies se produisent tous les 30 ans et la probabilité annuelle de survenance d'une pandémie est donc estimée à 3,33 %. Dans la logique de quantification des risques de Solvabilité 2, il faut donc sélectionner les pandémies dont la gravité se situe sur le quantile 99,5 %, ce qui revient à retenir le quantile 85 % pour une pandémie dont la probabilité de survenance est de 3,33 %.

Il s'agit à présent de spécifier la nature de l'incertitude que l'on souhaite intégrer dans le modèle. Différentes approches peuvent être envisagées.

MANDHOJ (2011) considère un aléa sur les paramètres de la dynamique de la pandémie et, conditionnellement à une valeur de ces paramètres, retient les valeurs moyennes du taux moyen d'infection et de la durée de maladie. De manière plus précise, MANDHOJ (2011) propose d'utiliser les lois *a posteriori* des paramètres de la dynamique de la pandémie obtenues à partir de leur estimation par la méthode MCMC dans un cadre bayésien (en

reprenant l'approche de GROENDYKE et *al.* (2010)). Cela suppose de disposer de données individuelles décrivant des trajectoires d'individus infectés telles que celles de la Fig. 1 :. Ces données ne sont malheureusement pas disponibles pour les pandémies grippales étudiées ici. MANDHOUI (2011) contourne cette difficulté en utilisant des trajectoires simulées, mais alors le modèle est globalement tautologique, le cadre bayésien étant utilisé pour estimer *a posteriori* des paramètres connus *a priori*.

On retient ici une approche différente, en fixant les paramètres de la dynamique de la pandémie et en considérant l'aléa sur les trajectoires issues du modèle SEIR. On sait (*cf.* BRITTON et O'NEILL (2002)) que, dans le cadre d'un tel modèle, pour une population de grande taille, le taux moyen d'infection peut ou bien être nul (et alors la pandémie avorte) ou bien être strictement positif et dans ce cas, comme on l'a rappelé *infra*,  $1 - \tau = \exp(-R_0 \times \tau)$ . Il s'agit donc de décider si une réalisation donnée d'un modèle SEIR est associée à un scénario pandémique non avorté, seuls ces scénarios nous intéressant ici. Pour cela on propose de raisonner de la manière suivante.

On considère  $N$  réalisations d'un modèle SEIR sur une population de taille  $K$ .  $K$  est supposé assez grand pour que le résultat asymptotique ci-dessus soit valide. Pour  $n = 1, \dots, N$  on note  $t_n = \frac{CI_n}{K}$  où  $CI_n$  désigne le nombre cumulé d'infectés à la fin de l'épidémie. Asymptotiquement (en  $K$ ) la distribution de  $t_n$  est concentrée autour des deux valeurs 0 et  $\tau$ .

Soit alors  $\hat{\tau}_{n,N} = \frac{1}{N-n+1} \sum_{u=n}^N t_{(u)}$  l'estimateur empirique du taux d'infection sur les trajectoires présentant la plus forte diffusion de l'épidémie. Comme  $\hat{\tau}_{n,N}$  est croissant en fonction de  $n$  et que du fait de la remarque précédente  $\hat{\tau}_{1,N} < \tau$ , il est naturel de poser  $M_N = \min\{n / \hat{\tau}_{n,N} \geq \tau\}$ . Pour  $N$  grand,  $\hat{\tau}_{M_N,N}$  est proche de  $\tau$ . On choisit de considérer que les réalisations du SEIR pour lesquelles  $(n) \geq M_N$  sont associées à un scénario pandémique non avorté. Ce critère de sélection est *a priori* prudent car il conduit à sélectionner les trajectoires avec le plus fort taux moyen d'infection.

A partir de ces trajectoires, on dispose de distributions empiriques du taux moyen d'infection et du nombre de jours d'arrêt de travail,  $\hat{\tau}_{n,N}$  et  $\hat{\delta}_{n,N}$ , pour  $(n) \geq M_N$ .

### 3. Le calcul du capital de solvabilité requis (SCR)

Après avoir rappelé le cadre de calcul du SCR utilisé ici, on détaille le calcul des deux premiers moments de la charge sinistres actualisée.

---

<sup>2</sup> Le taux de létalité est la probabilité de décès d'une personne infectée.

### 3.1. Formule de calcul du SCR

On utilise alors pour le calcul des SCR pour les garanties décès et arrêt de travail le cadre présenté dans GUIBERT *et al.* (2010), dont on reprend les notations, qui proposent d'utiliser l'approximation :

$$SCR = \frac{\frac{VaR_{99,5\%}(\chi) - 1}{BEL_0}}{1 - \alpha \times D_0 \times \left( \frac{VaR_{99,5\%}(\chi) - 1}{BEL_0} \right)} BEL_0$$

avec  $\chi = \frac{F_1 + BEL_1}{1 + R_1}$  et  $\alpha = 6\%$ . On observe que  $\rho_s = \frac{VaR_{99,5\%}(\chi) - 1}{BEL_0}$  représente le ratio de solvabilité à un an sans tenir compte de la durée d'immobilisation du capital et que le ratio ajusté en fonction de la durée de détention du capital est :

$$\rho_s(\alpha) = \frac{SCR}{BEL_0} = \frac{\rho_s}{1 - \alpha \times D_0 \times \rho_s} \approx \rho_s + \alpha \times D_0 \times \rho_s^2,$$

l'approximation étant valide si  $\alpha \times D_0 \times \rho_s$  est petit. On peut alors observer que la loi de  $\chi$  peut raisonnablement être approchée par la loi de la somme des prestations futures actualisées  $\Lambda$ , qui est (asymptotiquement) gaussienne, conditionnellement à l'incertitude sur le taux moyen d'infection et sur la durée d'arrêt,  $\theta = (\tau, \delta)$ . On utilise donc :

$$F_\Lambda(x) = P(\Lambda \leq x) = E_\theta \left[ P(\Lambda \leq x | \theta) \right] \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \int \Phi \left( \frac{x - \mu(\theta)}{\sigma(\theta)} \right) F_\theta(d\theta)$$

En pratique on approche cette fonction de répartition par simulation sur la base d'un échantillon de la variable  $\theta$  :

$$F_\Lambda(x) \approx F_M(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Phi \left( \frac{x - \mu(\theta_m)}{\sigma(\theta_m)} \right).$$

Le quantile d'un niveau donné se calcule alors en résolvant par dichotomie l'équation  $F_M(x_q) = q$ .

### 3.2. Les moments de la charge sinistre

Pour une population de taille  $K$ , le nombre d'infections  $K_I$  est une variable aléatoire binomiale de paramètres  $(K, \tau)$ . Si  $\lambda$  désigne le taux de létalité, conditionnellement à  $K_I$  le nombre de décès suit un loi binomiale de paramètres  $(K_I, \lambda)$ . Le nombre de jours d'arrêt de travail pour la population est simplement  $\delta K_I$  où  $\delta$  est le nombre de jours d'arrêt d'une personne infectée, que l'on suppose fixé. En notant alors  $C_{Décès}$  le capital décès moyen et  $r_{Incap}$  l'indemnité journalière en cas d'arrêt de travail on en déduit que :

$$\mu(\tau, \delta) = K \times \tau \times (\lambda \times C_{\text{Décès}} + \delta \times r_{\text{Incap}}),$$

$$\sigma^2(\tau, \delta) = K \times \tau \times ((\lambda(1-\lambda) + \lambda^2(1-\tau)) \times C_{\text{Décès}}^2 + (1-\tau) \delta^2 r_{\text{Incap}}^2).$$

La variance du nombre de décès  $D$  résulte directement de :

$$\begin{aligned} V(D) &= E[V(D|I)] + V[E(D|I)] \\ &= E(\lambda(1-\lambda)K_I) + V(\lambda K_I) \\ &= \lambda(1-\lambda)\tau K + \lambda^2\tau(1-\tau)K \end{aligned}$$

#### 4. Application numérique

On applique le modèle ci-dessus à un portefeuille d'assurance des emprunteurs (ADE).

##### 4.1. Choix des paramètres

On considère les valeurs suivantes des paramètres du modèle épidémiologique :  $\tau = 26\%$ ,  $\rho = 25$ ,  $\theta_E = 3$  et  $\theta_I = 7$ , qui correspondent aux durées de maintien moyennes dans les états  $E$  et  $I$ , du fait de l'hypothèse  $\kappa_E = \kappa_I = 1$ . Avec ce choix des paramètres,  $R_0 = 1,1581$ .

Le modèle décrit ici permet de simuler le taux moyen d'infection  $\tau$  défini comme le rapport entre le nombre cumulé d'infectés et la taille initiale de la population. Pour déterminer le nombre de décès associés à la pandémie, il reste à le multiplier par un taux de létalité pour déterminer un taux de mortalité associé à la pandémie. La logique de détermination du taux retenu, par classe d'âge et type de population (faible et grand risque d'aggravation) est la suivante :

- Pour être cohérent avec l'approche par quantile sur le taux d'infection il faut définir le taux de létalité selon la même logique. On retient donc le taux issu de SWISS RE (2007) qui donne un taux de mortalité pour la population assurée de 0,10 %.

- On combine cela à un taux d'infection normatif de 30 % issu de l'étude du GCAE repris dans INSTITUT CANADIEN des ACTUAIRES (2009) pour en déduire que cela correspond à un taux de létalité de l'ordre de 0,33 %.

- Il reste ensuite à moduler ce taux entre les 4 catégories (2 classes d'âges x fort et faible risque d'aggravation). On fait pour cela l'hypothèse, cohérente avec les observations de l'INVS (DOYLE et al. (2005)) et les résultats de SWISS RE (2007) que :

- le taux de létalité des plus de 65 ans est le double de celui des moins de 65 ans ;

- le taux de létalité de la population à fort risque d'aggravation est le double de celui à faible risque.

A partir de la répartition de la population générale présentée dans DOYLE et *al.* (2005), on détermine enfin les taux de létalité suivants :

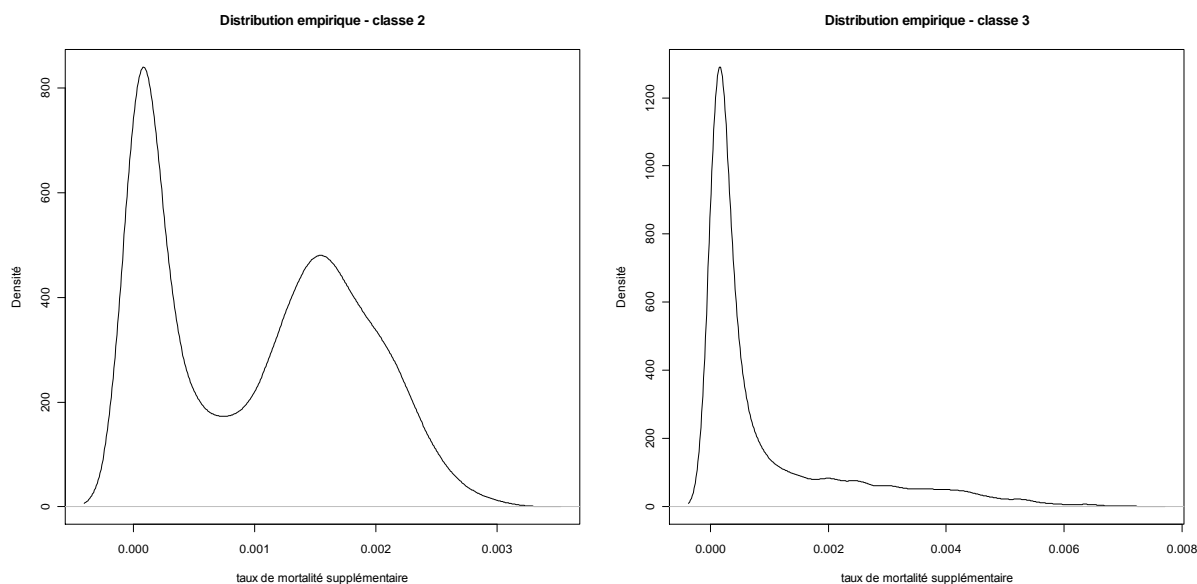
- Moins de 65 ans / faible risque : 0,30 % ;
- Moins de 65 ans / fort risque : 0,60 % ;
- Plus de 65 ans / faible risque : 0,60 % ;
- Plus de 65 ans / fort risque : 1,20 %.

Il est considéré que le taux de référence de 0,10 % de l'étude de Swiss RE intègre la sous-mortalité spécifique des populations d'assurés, conformément à la présentation qui en est faite dans INSTITUT CANADIEN des ACTUAIRES (2009).

#### 4.2. Résultats

On rappelle que, dans le cadre du modèle standard, le SCR est évalué forfaitairement à 0,15 % des capitaux sous risque (*cf.* CEIOPS (2010)). Avec le modèle proposé ici, on trouve un SCR égal à 0,09 %, soit donc un abattement de 40 % par rapport à la formule standard. Ce résultat est cohérent avec les résultats obtenus dans SWISS RE (2007) et très sensiblement inférieur aux valeurs présentées dans MANDHOUI (2011).

On remarquera que le taux de létalité utilisé dans le modèle a été déterminé à partir d'un taux de mortalité issu de SWISS RE (2007), taux que l'on retrouve en sortie du modèle. Cela revient à établir que le taux moyen d'infection normatif de 30 % utilisé pour transformer le taux de mortalité de l'étude de référence en un taux de létalité correspond grosso modo au quantile à 99,5 % du taux d'infection moyen dans l'exemple étudié ici.



On peut également noter que le rapport entre le SCR et le *best estimate* s'établit à 90 %, ce qui indique une distribution avec beaucoup de masse sur les valeurs extrêmes.

L'application numérique montre également qu'avec une franchise de 90 jours (usuelle pour les garanties arrêt de travail des contrats d'assurance des emprunteurs), le SCR associé à ce risque est négligeable.

## 5. Conclusion

On a proposé ici un modèle simple pour mettre en place un modèle interne partiel pour le risque de pandémie pour un portefeuille d'assurance de personnes.

On peut toutefois s'interroger, au-delà des aspects techniques, sur la légitimité d'une telle démarche<sup>3</sup> dans le cadre de Solvabilité 2. En effet, le taux de surmortalité associé à la pandémie bicentenaire est en pratique expliqué par le produit d'un taux d'infection (proportion de personnes infectés par le virus dans la population) et d'un taux de létalité (taux de mortalité des personnes infectées). Ces éléments ne dépendent que de facteurs exogènes à l'assureur et globaux. La principale interaction avec la structure d'un portefeuille se trouve dans le fait qu'aussi bien le taux d'infection que le taux de létalité dépendent de l'âge et que donc le taux moyen de 0,15 % issu de l'approche standard pourrait être modulé en pondérant des taux différenciés par classe d'âge.

Mais il ne revient pas à un assureur en particulier de fixer ces taux : si d'ailleurs tel était le cas et si le modèle de cet assureur était pertinent, il devrait s'appliquer à l'ensemble de la place ; en effet, comment justifier deux valeurs différentes d'un facteur exogène global ?

## 6. Bibliographie

BRITTON T., O'NEILL P. (2002) Bayesian Inference for Stochastic Epidemics in Populations with Random Social Structure. *Scandinavian Journal of Statistics*, 29(3), 375–390.

CEIOPS (2010) Technical specifications for QIS 5. *April, 2010*. (<http://www.ceiops.eu>).

DOYLE A., BONMARIN I., LEVY-BRUHL D., LE STRAT Y., DESENCLOS J-C. (2005) *Préparations à la lutte contre une pandémie grippale*. Institut National de Veille Sanitaire (INVS).

GROENDYKE C., WELCH D., HUNTER D.R. (2010) Bayesian Inference for Contact Networks Given Epidemic Data. *Technical reports and preprints*, 02(10). Department of Statistics-The Pennsylvania State University.

GUETTE V. (2010) Détermination d'un taux de surmortalité pour une catastrophe de période de retour de 200 ans. *Bulletin Français d'Actuariat*, vol.10, n°19.

GUIBERT Q., PLANCHET F., JUILLARD M. (2010). Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes : application à un contrat de rentes viagères. *Bulletin Français d'Actuariat*, vol.10, n°20.

INSTITUT CANADIEN des ACTUAIRES (2009) *Considérations relatives à l'élaboration d'un scénario de pandémie*. Document de recherche.

MANDHOUCHE K. (2011) Analyse du risque catastrophe d'une pandémie en assurance prévoyance par une approche épidémiologique, *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°21.

---

<sup>3</sup> Voir aussi <http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2011/11/un-mod%C3%A8le-interne-pour-le-risque-de-pand%C3%A9mie-.html>.



R Development Core Team (2011) R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL: <http://www.R-project.org>.

SWISS RE (2007) *Pandemic influenza: A 21st century model for mortality shocks*. Technical publishing, life and health. SwissRe.