

MESURE DE L'INCERTITUDE SUR LE TAUX DE COUVERTURE DES ENGAGEMENTS DANS UN CADRE ORSA

LE CAS DE L'ASSURANCE NON-VIE

Version 1.0 du 30/05/2010

Frédéric Planchet* **Quentin Guibert** **Marc Juillard^α**

ISFA - Laboratoire SAF^β

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

WINTER & Associés^γ

RESUME

On s'intéresse ici à un modèle simplifié dans lequel on puisse projeter le SCR sur plusieurs exercices, dans une perspective ORSA, afin d'évaluer la probabilité de pouvoir réaliser un taux de couverture de l'exigence de marge fixé à l'avance. Pour cela on s'appuie sur le cadre simplifié proposé dans GUIBERT [2010] qui fournit une expression explicite du SCR. On introduit ensuite une dynamique temporelle pour le passif, les primes et le rendement de l'actif. On considère ici le cadre de garanties de type IARD. Ce contexte permet de supposer par simplification une distribution log-normale du passif.

* Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : fplanchet@winter-associes.fr.

^α Marc Juillard et Quentin Guibert sont actuaires consultants R&D chez WINTER & Associés

^β Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 - France.

^γ WINTER & Associés 55 avenue René Cassin - 69009 Lyon - France.

SOMMAIRE

1. Introduction	2
2. Cadre général et notations	3
3. Définition de la dynamique temporelle du modèle	5
3.1. Dynamique des facteurs de risque	5
3.2. Equations d'évolution des autres facteurs	6
4. Calcul de la loi de χ	7
5. Un exemple simple de mise en œuvre dans un cadre ORSA	9
5.1. Description de la compagnie	9
5.2. Validation de l'approximation log-normale	10
5.3. Choix de l'appétit pour le risque	11
6. Extensions	15
6.1. Prise en compte d'une provision de primes	15
6.2. Prise en compte de plusieurs lignes d'affaires	16
7. Conclusion.....	17
8. Bibliographie.....	17
9. Annexe	18

1. INTRODUCTION

Avec la mise en place de l'*Own Risk Solvency Assessment* (ORSA) dans le cadre du pilier 2 de Solvabilité 2 (*cf.* PLANCHET et JUILLARD [2010]), le régulateur impose à l'entreprise d'assurance de justifier de sa capacité à respecter l'exigence de marge réglementaire non seulement à la date de l'inventaire mais aussi de manière prospective sur l'horizon de son plan stratégique (*cf.* CEIOPS [2010a]). En conséquence, un assureur doit être en mesure de projeter les principales caractéristiques de son bilan, sur une durée de 3 à 5 ans selon l'horizon du plan stratégique et en tenant compte des affaires nouvelles souscrites sur la période.

En particulier, il doit, pour justifier de sa capacité à couvrir le besoin de marge réglementaire (SCR), être capable d'estimer l'incertitude sur la valeur future de son actif (en vision économique) et de son passif afin d'estimer la probabilité de ne pas couvrir la marge réglementaire sur la durée requise.

Cette estimation est potentiellement délicate puisqu'elle nécessite la projection des principaux postes du bilan et des ratios réglementaires sur la durée choisie afin d'estimer la distribution du taux de couverture du SCR à chaque date. La mise en œuvre d'un modèle d'un niveau de détail analogue à celui utilisé pour les calculs d'inventaire est ici inadaptée, du fait de sa complexité et de son manque de robustesse potentiel.

Dès lors, il convient de se tourner vers des approches plus globales modélisant de manière agrégée les variables d'intérêt à partir d'un nombre limité de paramètres décrivant de manière synthétique les risques portés.

Dans le présent travail, on propose un modèle agrégé en introduisant une dimension intertemporelle prolongeant les travaux de GUBERT et al. [2010] dans un contexte d'assurance non-vie pour des risques de type IARD.

L'article est organisé de la manière suivante : dans un premier temps, on décrit un modèle général de prise en compte des interactions entre les trois risques considérés ici, le risque financier, le risque de souscription et le risque *business* associé à l'incertitude sur le niveau des primes futures perçues. Ce modèle est une généralisation du modèle de GUIBERT et al. [2010] en présence de cotisations futures. Une illustration numérique est ensuite proposée. Une section spécifique est ensuite consacrée aux extensions possibles pour une utilisation dans le cadre de l'ORSA, pour tenir compte de la provision de prime imposées par le modèle standard de Solvabilité 2 et pour prendre en compte simultanément plusieurs branches. L'article se termine par la présentation des adaptations à apporter pour envisager l'utilisation d'un tel modèle dans un cadre d'assurance de personnes. Ces adaptations sont seulement présentées dans leur principe, leur développement fera l'objet de travaux ultérieurs.

2. CADRE GENERAL ET NOTATIONS

On se place dans le cadre d'un modèle à temps discret, les périodes étant indicées par $t = 0, \dots, T$ pour un horizon de projection T . On utilise dans la suite de ce travail les notations suivantes, reprises de GUIBERT et al. [2010], où t se rapporte à la période $[t, t+1[$:

- A_t désigne la valeur de marché de l'actif supposé investi dans un support S_t de rendement R_t ; les intérêts financiers sont crédités en fin de période. On utilise également un taux d'actualisation sans risque, supposé constant et noté r .

- L_t désigne la valeur des provisions techniques, égale à la somme du *best estimate* BEL_t et de la marge pour risque RM_t , $L_t = BEL_t + RM_t$; on désigne par D_t la durée du passif à la date t .

- C_t et F_t désignent respectivement les cotisations perçues et prestations servies ; on suppose par simplification que les mouvements sur ces valeurs interviennent en fin de période.

- β_t désigne le ratio combiné à la date t , de sorte qu'aux cotisations perçues C_t se trouve associé un coût $\beta_t \times C_t$.

- SCR_t désigne le montant de l'exigence de marge déterminée dans le cadre de Solvabilité 2, donc égale à l'opposé du quantile à 0,5 % de l'actif net projeté à un an.

Enfin, on note $\chi_t = \frac{F_t + L_t - C_t}{1 + R_t}$ qui jouera dans la suite un rôle central. La marge pour risque

est supposée calculée dans une logique de coût du capital, conformément aux règles imposées par Solvabilité 2, avec un coût $\alpha = 6\%$.

On s'appuie ici sur l'analyse du bilan proposé par GUIBERT et al. [2010] et on part de la relation $SCR = VaR_{99,5\%} \left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1} \right) - L_0$ que l'on réécrit à un instant quelconque, en tenant compte des cotisations futures :

$$SCR_t = VaR_t \left(\frac{F_{t+1} + L_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}} ; 99,5\% \right) - L_t$$

avec $L_t = BEL_t + RM_t$. L'indice t sur les *value at risk* (VaR), espérances et variances désigne dans la suite le conditionnement par rapport à l'information disponible à la date t . Pour aller plus loin, il faut faire des hypothèses sur la prise en compte de la marge pour risque. Pour cela, on observe qu'en retenant l'hypothèse de proportionnalité du SCR par rapport au *best estimate* (cf. GUIBERT et al. [2010]), $\chi_{t+1} = \frac{F_{t+1} + L_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}} = \frac{F_{t+1} + c_t \times BEL_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$ avec

$c_t = 1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_{t+1}$, approché en pratique¹ par $c_t = 1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_t$ pour supprimer l'aléa

induit par la présence de la duration D_{t+1} . L'équation définissant le SCR devient alors :

$$SCR_t = VaR_t \left(\frac{F_{t+1} + c_t \times BEL_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}} ; 99,5\% \right) - BEL_t - \alpha \times SCR_t \times D_t$$

et donc

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \times D_t} \left(VaR_t \left(\frac{F_{t+1} + \left(1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_{t+1} \right) \times BEL_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}} ; 99,5\% \right) - BEL_t \right).$$

Cette expression n'est toutefois pas simple à manipuler car elle fournit une équation implicite en SCR_t qui ne peut être résolue que numériquement comme on le verra ci-après.

Remarque :

La simplification consistant à calculer le SCR en ignorant la marge pour risque :

$$SCR_t = VaR_t (\chi_{t+1} ; 99,5\%) - BEL_t,$$

si elle n'apparaît pas incohérente avec les choix effectués par l'EIOPA dans le cadre du QIS 5 (cf. CEIOPS [2010b]), la marge pour risque étant par exemple ignorée lors de l'agrégation des SCR unitaires, conduit à surestimer le SCR et n'est pas pertinente.

¹ Ce qui justifie l'indice t et non $t + 1$.

On doit maintenant spécifier le comportement des différents éléments pris en compte dans la projection : valeur de l'actif, valeur du passif, prestations, cotisations, etc.

3. DEFINITION DE LA DYNAMIQUE TEMPORELLE DU MODELE

Les calculs sont menés en deux étapes : dans un premier temps on choisit une dynamique temporelle pour les quatre facteurs de risque retenus dans le modèle, les cotisations, le *best estimate* (risque de tarification passée), le ratio combiné (risque de tarification future et risque de frais) et le rendement de l'actif. Puis, dans un second temps, on en déduit les équations d'évolution des autres variables d'intérêt telles que les prestations et la valeur de l'actif.

3.1. DYNAMIQUE DES FACTEURS DE RISQUE

On suppose que, conditionnellement à l'information disponible en t , les variables BEL_{t+1} ,

C_{t+1} , β_{t+1} et S_{t+1} (l'actif dont le rendement est $\frac{S_{t+1}}{S_t} = 1 + R_{t+1}$) satisfont les relations suivantes :

$$C_{t+1} = C_t \times \exp\left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2} + \sigma_c \times \varepsilon_{t+1,c}\right)$$

$$\beta_{t+1} = \beta \times \exp\left(-\frac{\sigma_\beta^2}{2} + \sigma_\beta \times \varepsilon_{t+1,\beta}\right)$$

$$BEL_{t+1} = BEL_t \times \exp\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}\right) + \beta_{t+1} \times C_{t+1}$$

$$S_{t+1} = S_t \times \exp\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2} + \sigma_a \times \varepsilon_{t+1,a}\right)$$

où β est un ratio combiné cible fixé et les paramètres σ_β , (μ_p, σ_p) , (μ_c, σ_c) et (μ_a, σ_a) décrivent les distributions des facteurs de risque. $\varepsilon_{t+1,\beta}$, $\varepsilon_{t+1,p}$, $\varepsilon_{t+1,c}$ et $\varepsilon_{t+1,a}$ sont des bruits blancs gaussiens indépendants. Le taux de variation des provisions μ_p doit être impacté par l'effet d'actualisation et le niveau des prestations réglées ; on propose de retenir la relation simple $\mu_p = r + \ln(1 - \varphi)$ avec φ une constante. Sur la base de ces notations, l'équation définissant BEL_{t+1} se met sous la forme :

$$BEL_t \times e^{-\frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}} = e^{-r} \times (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \times C_{t+1}) + \varphi \times BEL_t \times e^{-\frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}}$$

soit :

$$BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \times C_{t+1} = BEL_t \times e^{r - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}} - \varphi \times BEL_t \times e^{-\frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}} .$$

Cette équation traduit la consommation des provisions en *run-off* : la variation tendancielle du *best estimate* est la conséquence de l'effet de désactualisation minoré des prestations servies. En identifiant les deux termes de l'équation, on trouve alors que les prestations sont égales à :

$$F_{t+1} = e^{\frac{r - \sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}} \times \varphi \times BEL_t = \theta \times (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \times C_{t+1})$$

avec $\theta = \frac{\varphi}{1 - \varphi}$. On notera que sur la base de ces notations, et en l'absence de cotisations nouvelles, la propriété de martingale du processus de *best estimate* est vérifiée, à savoir :

$$BEL_t = E_t \left(e^{-r} \times (F_{t+1} + BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \times C_{t+1}) \right)$$

3.2. EQUATIONS D'EVOLUTION DES AUTRES FACTEURS

Une fois définie les processus d'évolution des différents postes du bilan, il convient d'analyser la loi de $\chi_t = \frac{F_t + L_t - C_t}{1 + R_t}$. En l'absence de marge pour risque, on obtient une expression de la forme :

$$\chi_{t+1} = \frac{(1 + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

avec $\theta = \frac{\varphi}{1 - \varphi}$ donné, dont il s'agit de déterminer la loi pour pouvoir calculer le SCR en utilisant la relation présentée à la section 2. En présence de marge pour risque, on utilise :

$$\chi_{t+1} = \frac{(c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

avec $c_t = 1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_t$.

Une fois déterminé SCR_t , on dispose aisément de l'ensemble des autres variables d'intérêt :

- la valeur de l'actif : $A_t = A_{t-1} \times (1 + R_t) - F_t + C_t$;
- la valeur du passif : $L_t = BEL_t + RM_t = BEL_t + \alpha \times D_t \times SCR_t$.

On est alors en mesure de calculer le taux de couverture de la marge réglementaire :

$$\pi_t = \frac{A_t - L_t}{SCR_t}$$

On doit donc préalablement déterminer la loi de χ_{t+1} conditionnellement à l'information disponible en t , ce qui est l'objet de la section suivante.

4. CALCUL DE LA LOI DE χ

La variable aléatoire χ_{t+1} est composée de la différence de deux variables log-normales au numérateur, rapportée à une variable log-normale au dénominateur. La forme de cette loi n'est pas particulièrement simple. Une littérature abondante est consacrée à l'approximation de la somme de lois log-normales (cf. EL FAOUZI et MAURIN [2006]) et dès lors que la volatilité n'est pas trop importante, on peut retenir une approximation par une loi log-normale dont les paramètres sont obtenus par la méthode des moments. On applique ce principe ici au cas d'une différence de lois log-normale, ce qui ne pourra valablement fonctionner que pour des situations où les cotisations sont relativement faibles par rapport aux engagements en stock, pour assurer la positivité de la différence.

Comme l'espérance et la variance d'une loi log-normale sont données respectivement par (cf.

SAPORTA [1990]) $m = \mathbf{exp}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ et $v^2 = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) \times m^2$, on a la spécification suivante des

deux premiers moments conditionnels, avec Y_t la variable log-normale considérée :

$$E_t(Y_{t+1}) = Y_t \times e^{\mu_y} \text{ et } V_t(Y_{t+1}) = Y_t^2 \times e^{2\mu_y} \times (e^{\sigma_y^2} - 1).$$

En approchant donc la loi de $F_{t+1} + BEL_{t+1} - C_{t+1}$ par la loi log-normale obtenue par la méthode des moments, on trouve que la loi de χ_{t+1} peut être approchée par une loi log-normale et on dispose d'une expression explicite pour le quantile de χ_{t+1} , puisque, pour une loi log-normale X de paramètres (μ, σ) on a $x_p = VaR_p(X) = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p)\right)$. Tout se ramène ainsi à calculer les paramètres (μ, σ) de la loi log-normale approchant celle de χ_{t+1} pour obtenir une expression explicite de SCR_t en fonction de BEL_t , β_t , C_t et $1 + R_t$.

Pour cela, on observe que la variance de la loi normale sous-jacente se calcule simplement à l'aide du coefficient de variation de la loi log-normale : $\sigma^2 = \mathbf{ln}\left(1 + \omega^2\right)$, $\omega = \frac{v}{m}$. Une fois

connu ce paramètre, l'espérance de la loi normale sous-jacente s'obtient en utilisant $\mu = \mathbf{ln}(m) - \frac{\sigma^2}{2}$, soit $\mu = \mathbf{ln}\left(\frac{m}{\sqrt{1 + \omega^2}}\right)$.

En partant de l'expression :

$$(c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1} = (c_t + \theta) \times BEL_t \times e^{\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}} - (1 - c_t \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
& E_t \left((c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1} \right) \\
& = (c_t + \theta) \times BEL_t \times e^{\mu_p} - (1 - c_t \times \beta) \times C_t \times e^{\mu_c}
\end{aligned}$$

Par indépendance de $\varepsilon_{t+1,\beta}$, $\varepsilon_{t+1,p}$, $\varepsilon_{t+1,c}$, on a :

$$\begin{aligned}
& V_t \left((c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1} \right) \\
& = V_t \left((c_t + \theta) \times BEL_t \times e^{\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}} - (1 - c_t \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1} \right) \\
& = (c_t + \theta)^2 \times BEL_t^2 \times e^{2\mu_p} \times (e^{\sigma_p^2} - 1) + c_t^2 \times \beta^2 \times (e^{\sigma_\beta^2} - 1) \times C_t^2 \times e^{2\mu_c} \times (e^{\sigma_c^2} - 1) + \\
& \quad c_t^2 \times \beta^2 \times (e^{\sigma_\beta^2} - 1) \times C_t^2 \times e^{2\mu_c} + C_t^2 \times e^{2\mu_c} \times (e^{\sigma_c^2} - 1) \times (1 - c_t \times \beta)^2 \\
& = (c_t + \theta)^2 \times BEL_t^2 \times e^{2\mu_p} \times (e^{\sigma_p^2} - 1) + c_t^2 \times \beta^2 \times (e^{\sigma_\beta^2} - 1) \times C_t^2 \times e^{2\mu_c + \sigma_c^2} + \\
& \quad C_t^2 \times e^{2\mu_c} \times (e^{\sigma_c^2} - 1) \times (1 - c_t \times \beta)^2
\end{aligned}$$

on en déduit le coefficient de variation de $(c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1}$:

$$\omega_t = \frac{\sqrt{(c_t + \theta)^2 \times BEL_t^2 \times e^{2\mu_p} \times (e^{\sigma_p^2} - 1) + c_t^2 \times \beta^2 \times (e^{\sigma_\beta^2} - 1) \times C_t^2 \times e^{2\mu_c + \sigma_c^2} + C_t^2 \times e^{2\mu_c} \times (e^{\sigma_c^2} - 1) \times (1 - c_t \times \beta)^2}}{(c_t + \theta) \times BEL_t \times e^{\mu_p} - (1 - c_t \times \beta) \times C_t \times e^{\mu_c}}$$

puis les paramètres de la loi log-normale approchée :

$$\sigma_t^2 = \ln(1 + \omega_t^2), \quad \mu_t = \ln \left(\frac{(c_t + \theta) \times BEL_t \times e^{\mu_p} - (1 - c_t \times \beta) \times C_t \times e^{\mu_c}}{\sqrt{1 + \omega_t^2}} \right)$$

Finalement, la loi de $\chi_{t+1} = \frac{(c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$ conditionnellement à

l'information en t est log-normale avec pour les paramètres de la loi normale sous-jacente :

$$\mu_t(\chi) = \mu_t - \mu_a + \frac{\sigma_a^2}{2}, \quad \sigma_t^2(\chi) = \sigma_t^2 + \sigma_a^2.$$

On en déduit enfin l'équation implicite en SCR_t suivante :

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \times D_t} \left(\exp(\mu_t(\chi) + \sigma_t(\chi) \times \phi^{-1}(99,5\%)) - BEL_t \right)$$

En effet, $\mu_t(\chi)$ et $\sigma_t^2(\chi)$ dépendent de SCR_t . Cette équation nécessite la mise en œuvre d'une résolution numérique. Une méthode par dichotomie est suffisante pour résoudre numériquement cette équation.

On peut déterminer la valeur de l'actif en utilisant $A_t = A_{t-1} \times (1 + R_t) - F_t + C_t$. Enfin, le montant du passif est donné par $L_t = BEL_t + RM_t = BEL_t + \alpha \times D_t \times SCR_t$.

5. UN EXEMPLE SIMPLE DE MISE EN ŒUVRE DANS UN CADRE ORSA

Cette section présente l'utilisation du modèle dans le cadre plus global de la mise en œuvre d'un processus d'ORSA² d'une compagnie d'assurance non vie (au sens Solvabilité 2).

5.1. DESCRIPTION DE LA COMPAGNIE

On considère par la suite une compagnie d'assurance commercialisant un unique contrat frais de santé dont la structure générale est présentée ci-après :

- ratio combiné moyen de 100 % ;
- commercialisation moyenne de 75 M€ de cotisations ;
- allocation d'actifs composée de 20 % d'actions et 80 % d'obligations (OAT 1 an) ;
- ratio de couverture initial du SCR de 204 % ;
- son plan stratégique est de maintenir le profil de risque actuel de la structure (i.e. commercialisation et allocation stable) ;
- on suppose pour simplifier dans l'exemple ci-dessous que la durée du passif est stable au cours du temps (hypothèse fortement admissible dans le cas de contrats frais de santé).

Sur la base d'une analyse statistique de son portefeuille, la société valide statistiquement le caractère log-normale de ses risques dont les paramètres respectifs sont présentés ci-après :

- $\mu_c = 0$, $\sigma_c = 1\%$;
- $\sigma_p = 10\%$, $\varphi = 80\%$;
- $\sigma_\beta = 2\%$, $\beta = 100\%$;
- $\mu_a = 3,6\%$, $\sigma_a = 6,3\%$.

Préalablement à la mise en œuvre à proprement parler et après avoir fixé un scénario de référence, on valide le postulat selon lequel le caractère log-normale des différents risques

² Le lecteur trouvera une description du cadre général de l'ORSA dans PLANCHET et JUILLARD [2010].
Projection du SCR *Planchet - Guibert - Juillard*

conduit à un risque global qui suit une loi log-normale (hypothèse retenue dans le modèle afin d'obtenir une expression analytique du SCR, *via* l'équation implicite présentée à la section 2).

5.2. VALIDATION DE L'APPROXIMATION LOG-NORMALE

Afin de mesurer l'écart entre l'approximation log-normale de la loi conditionnelle de χ_{t+1} , on compare ici la distribution log-normale approchée avec la distribution empirique obtenue par simulation. De manière plus précise, on construit par simulation la distribution empirique de (cf. 3.2) :

$$\chi_{t+1} = \frac{(c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}.$$

On examine ci-dessous la loi de χ_1 dans le scénario de référence, qui conduit graphiquement au résultat suivant :

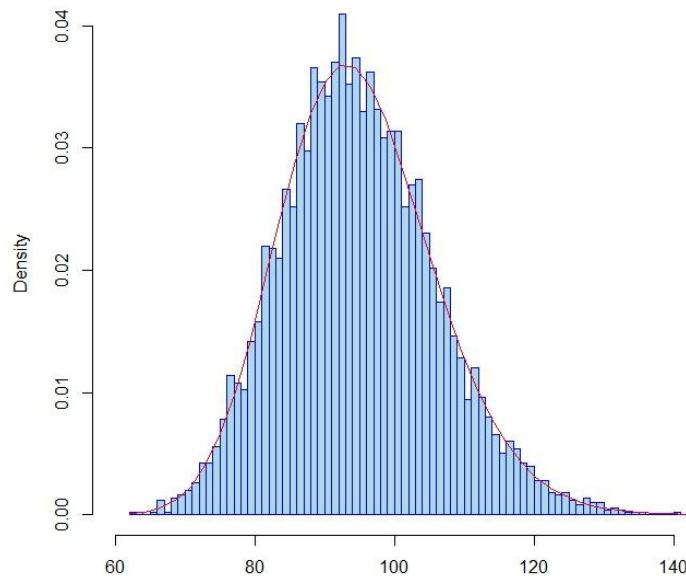


Fig. 1 - Comparaison des distributions empiriques et théoriques de $xhi(1)$

Ainsi, l'adéquation semble graphiquement correcte. Le test de Jarque-Bera (BERA et JARQUE [1980]), utilisé en général pour des échantillons de grande taille, pour l'adéquation à une loi normale de $\ln(\chi_1)$ conduit à une p -valeur de 35 %. L'approximation log-normale apparaît donc acceptable.

Le scénario de référence conduit aux résultats suivants :

```

[1] "Taux de couverture de l'année 0"
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  2.037  2.037  2.037  2.037  2.037  2.037
[1] "Taux de couverture de l'année 1"
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  0.5655 1.7910  2.0600  2.0660  2.3350  3.4730
[1] "Taux de couverture de l'année 2"
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.009893 1.737000  2.113000  2.127000  2.510000  4.350000
[1] "Taux de couverture de l'année 3"
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.9932 1.7040  2.1770  2.2020  2.6710  5.2120
[1] "Taux de couverture de l'année 4"
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.8918 1.6920  2.2320  2.2810  2.8160  5.7530
[1] "Taux de couverture de l'année 5"
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-1.192  1.667  2.286  2.350  2.979  6.689

```

5.3. CHOIX DE L'APPETIT POUR LE RISQUE

Dans le cadre de son processus d'appétit pour le risque, le conseil d'administration souhaite suivre deux dimensions : la solvabilité et la rentabilité économique de ses fonds propres. La traduction de cet appétit pour le risque est précisée ci-après :

- présenter, dans 95 % des cas, un ratio de couverture du SCR de 130 % et ce sur 5 ans (durée du plan stratégique) ;
- présenter, dans 80 % des cas, un rendement économique de ses fonds propres à 1 an d'au moins - 13,5 %.

Dans un premier temps et sur la base du modèle de projection proposé, la structure vérifie l'adéquation entre son plan stratégique et sa politique d'appétit pour le risque :

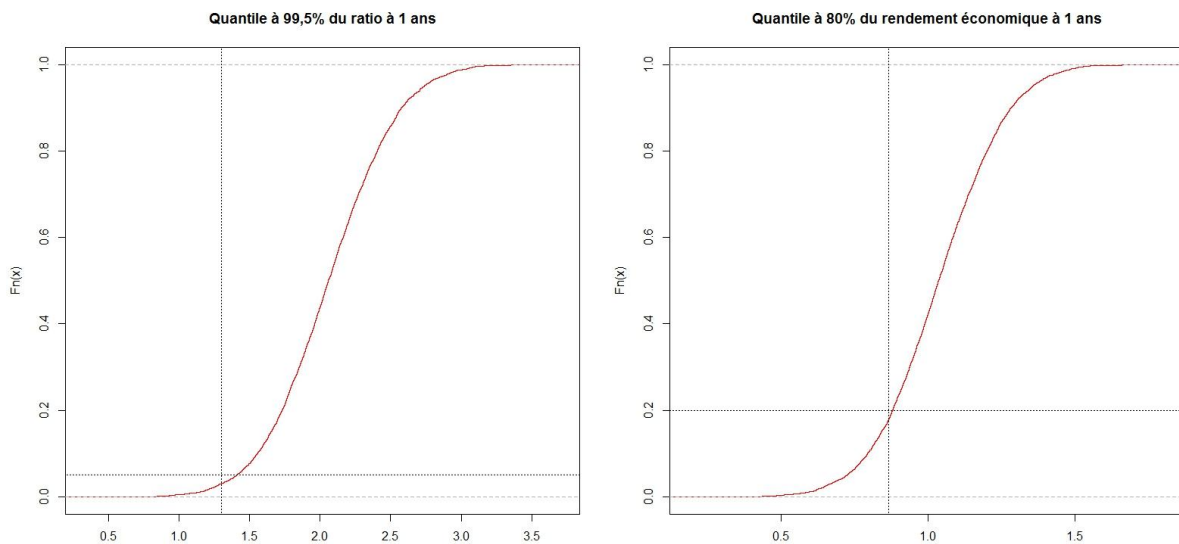


Fig. 2 - Adéquation du plan stratégique et du processus d'appétit pour le risque

Le graphique précédent indique que le plan stratégique permet de respecter les contraintes liées à l'appétit pour le risque définies par la compagnie. Cependant, il ne fournit pas de limites opérationnelles dans le sens où il s'agit de points et non d'intervalles d'allocations. Afin de répondre ce problème, deux solutions sont alors envisageables :

- tester plusieurs types d'allocations fixées arbitrairement ;
- définir l'ensemble des allocations permettant de respecter l'appétit du risque défini par la compagnie.

Le fait de tester de manière aléatoire un ensemble d'allocation stratégique n'est pas *optimum* dans un cadre d'appétit pour le risque. En effet, ce processus a pour objectif de chercher des stratégies optimales tout en restant dans le cadre des tolérances aux risques que la compagnie s'est fixée. La compagnie décide donc de définir l'ensemble des allocations acceptables, ceci conduisant au graphique suivant, représentant le quantile à 5 % du ratio de couverture à un an sur l'ensemble des allocations possibles :

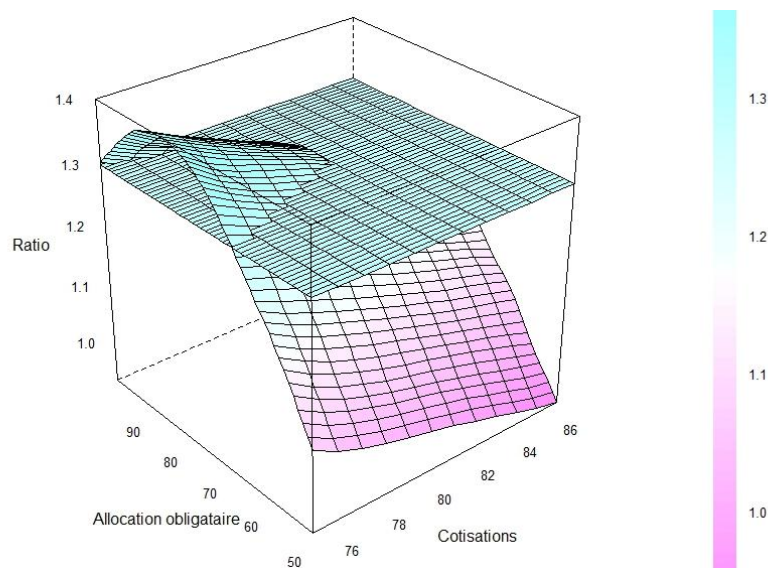


Fig. 3 - Évolution en fonction de l'allocation stratégique de la contrainte sur le SCR

Le graphique précédent indique que :

- plus la compagnie accroît son volume de cotisations, plus son allocation action doit être faible (ceci traduisant la notion de transfert de capital entre les risques) ;
- certains volumes de cotisations font apparaître une contrainte d'allocation action minimale ainsi qu'une impossibilité de respecter la contrainte liée au SCR.

Avant de fixer des contraintes liées à l'allocation financière, la compagnie analyse les contraintes liées au rendement économique des fonds propres.

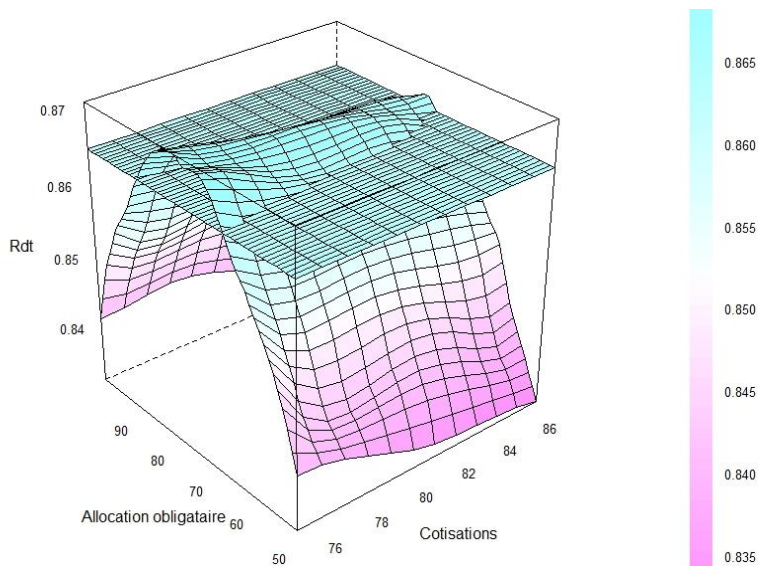


Fig. 4 - Évolution en fonction de l'allocation stratégique de la contrainte sur le rendement

Le graphique précédent indique qu'une dimension de type « valeur » permet de définir des limites minimales d'investissements risqués, alors qu'une dimension de type « solvabilité » conduit principalement à des contraintes d'investissement maximal.

A ce stade, la compagnie doit en premier lieu exprimer sa préférence de risque : « préfère-t-elle allouer du risque à l'actif ou au passif » ? En général, il est logique de privilégier les risques de passif, liés au développement de l'activité (il s'agit d'une expression de la culture du risque de la structure). Aussi, il est décidé d'attribuer dans un premier temps les limites opérationnelles relatives au risque de tarification : commercialiser sur les 5 ans à venir entre 75 M€ et 78 M€ de cotisations (soit une augmentation de prêt de 5%)

Compte tenu de l'évolution du risque en fonction du montant de cotisations, les contraintes liées à l'allocation cible seront établies sur la base d'un montant de cotisations cible de 78 M€. Cette analyse est présentée ci-après :

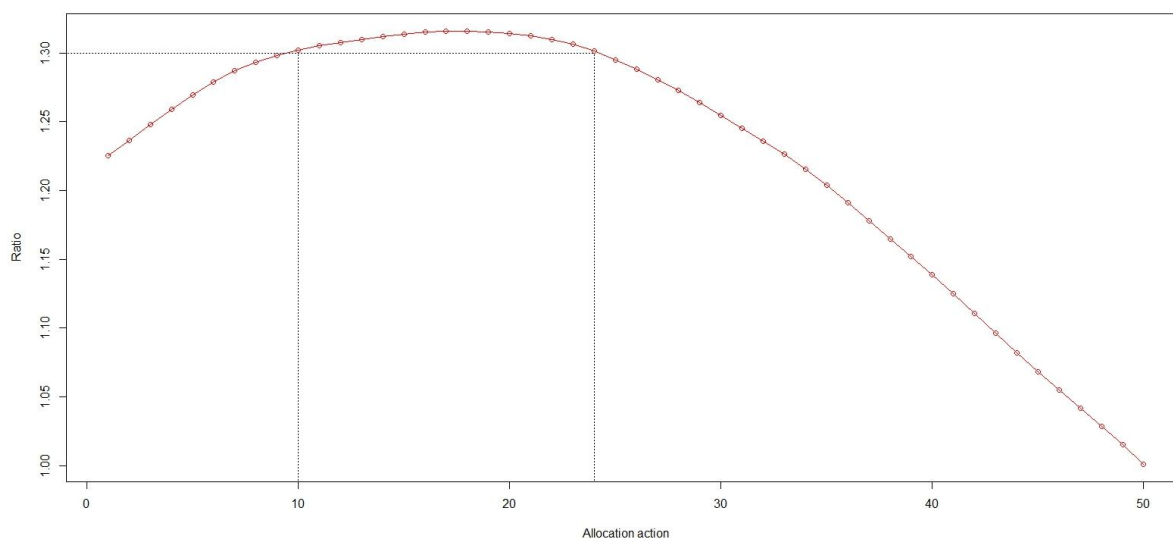


Fig. 5 - Limites opérationnelles action induites par la contrainte sur le SCR

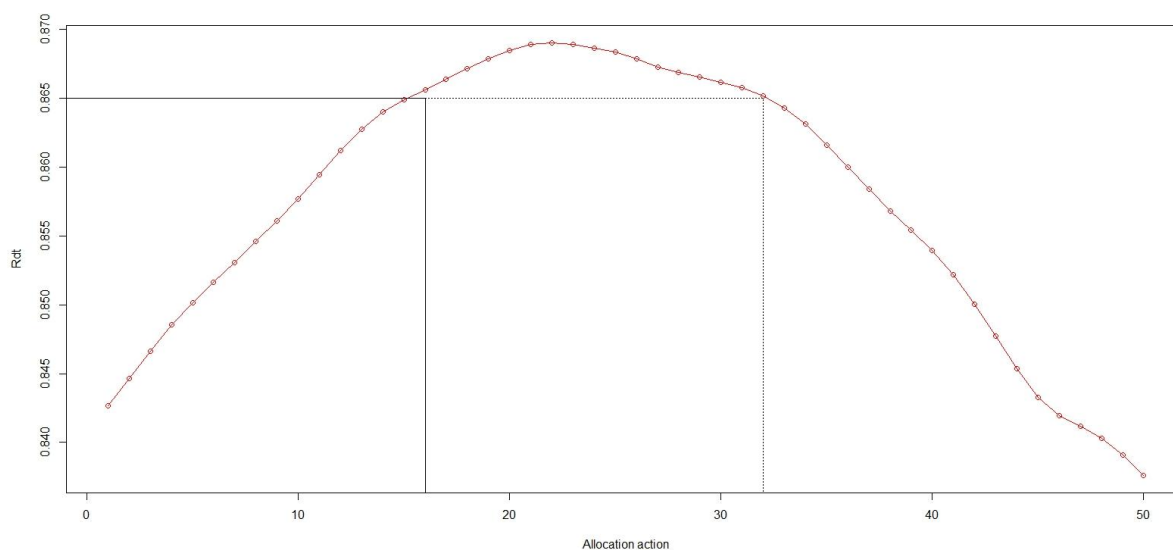


Fig. 6 - *Limites opérationnelles action induites par la contrainte sur le rendement*

Les figures 5 et 6 indiquent que, sur la base d'une commercialisation de 78 M€ de cotisations, le respect de la contrainte SCR à 1 an implique de retenir une allocation actions comprise entre 10 % et 24 % et le respect de la contrainte relative au rendement économique à 1 an implique de retenir une allocation action comprise entre 16 % et 32 %. *In fine*, la compagnie décide de fixer comme limite opérationnelles :

- la commercialisation de 75 M€ à 78 M€ de cotisations ;
- une allocation action comprise entre 16 % et 24 %.

Afin de finaliser le processus d'appétit pour le risque, il est nécessaire de valider le respect de la contrainte SCR sur la durée du plan stratégique (à savoir 5 ans). Le modèle est alors relancé en retenant comme plan stratégique la borne supérieure des limites de risques ainsi qu'un horizon de projection de 5 ans :

[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
0.95	0.9	0.85	0.81	0.77
1.31	1.3	1.33	1.41	1.52

On observe que les limites opérationnelles permettent de respecter l'appétit pour le risque sur toute la durée du plan stratégique. La contrainte relative au rendement économique est vérifiée par construction étant donné qu'elle porte sur 1 an.

Il est à noter que ce respect des contraintes sur toute la durée du plan stratégique n'est pas acquis par avance : les limites opérationnelles sont fixées sur l'analyse des résultats à 1 an, de ce fait un non respect (relativement faible) peu s'observer au-delà et nécessiter de revoir les limites opérationnelles. L'évolution sur 5 ans de la distribution du ratio de couverture est présentée ci-après :

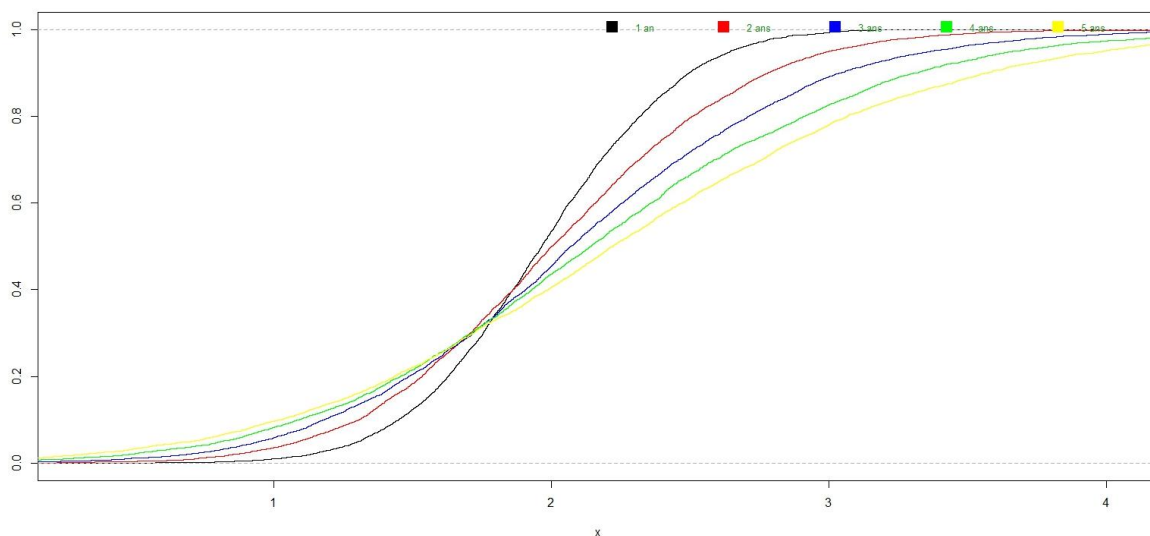


Fig. 7 - Analyse du respect de l'appétit pour le risque sur la durée du plan stratégique

6. EXTENSIONS

On décrit ci-après deux extensions du modèle décrit *supra* en envisageant la prise en compte d'une provision de primes puis la présence de plusieurs lignes d'affaires.

6.1. PRISE EN COMPTE D'UNE PROVISION DE PRIMES

Le QIS 5 prévoit une décomposition du *best estimate* entre un *best estimate* de sinistres, relatifs aux sinistres déjà survenus à la date d'inventaire, et un *best estimate* de primes relatifs aux sinistres futurs découlant des contrats en portefeuille à la date d'inventaire et des probables primes futures que ces contrats émettront. Les règles de prise en compte des primes futures³ sont relativement complexes dans le dispositif Solvabilité 2. En particulier, celles-ci varient en fonction du processus de détermination des tarifs de chaque assureur et elles conduisent donc à une grande hétérogénéité de situations, même en présence de risques par ailleurs identiques. On peut toutefois observer que, dans les calculs du pilier 1, et dans le contexte de l'assurance IARD retenu ici, l'horizon de prise en compte des primes futures est d'un an. Comme dans le modèle présenté dans ce travail, la situation est projetée sur plusieurs exercices, le seul impact de la non prise en compte rigoureuse des règles de détermination du montant des primes futures à intégrer dans le calcul de l'exigence de marge de l'exercice est un décalage dans le temps de la perception de la prime considérée. En conséquence, le niveau absolu de l'exigence de marge issue du modèle peut être biaisé, mais sa variation ne l'est pas et ce sont les variations de cette valeur (et du taux de couverture) que l'on cherche à décrire.

³ Voir par exemple <http://actudactulaires.typepad.com/laboratoire/2011/04/prise-en-compte-des-primes-futures-sous-sii.html>

Ceci étant précisé, l'ajout de primes futures au sens de Solvabilité 2 peut être introduit simplement en modifiant comme suit la dynamique de la variable BEL_t , définie à la section 3.1 :

$$BEL_{t+1} = BEL_t \times \exp\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t,p}\right) + \beta_{t+1} \times C_{t+1} + \delta \times e^\mu \times (\beta_{t+1} - 1) \times C_{t+1}.$$

avec δ le taux de reconduction des contrats et $\mu < \mu_c$ le taux de revalorisation annuel du tarif. On peut noter que cet ajustement n'a qu'un effet limité sur les résultats du modèle lorsque le ratio combiné est proche de un.

6.2. PRISE EN COMPTE DE PLUSIEURS LIGNES D'AFFAIRES

L'utilisation pratique du modèle proposé ici implique de pouvoir prendre en compte plusieurs lignes d'affaires adossées à un actif général, autrement dit de distinguer des BEL_t^j et C_t^j pour $j = 1, \dots, n$. Dans ce cas, on a :

$$\chi_{t+1} = \frac{\sum_{j=1}^n (F_{t+1}^j + BEL_{t+1}^j - C_{t+1}^j) + RM_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

et on peut donc utiliser encore une approximation par une loi log-normale de la loi conditionnelle de χ_{t+1} , le calcul seul des deux premiers moments du numérateur étant modifié. Il est simple de prendre en compte la dépendance entre les branches, pour autant que celle-ci soit mesurée par des coefficients de corrélation entre les lois normales sous-jacentes. Cette approche permet de mesurer l'effet de l'évolution des primes sur le *mix-produit* et d'identifier des arbitrages dans le politique de souscription.

En notant comme précédemment ω_t le coefficient de variation de la variable

$$\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) :$$

$$\omega_t = \frac{\sqrt{V_t \left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right)}}{\left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^j} - (1 - c_t \times \beta^j) \times C_t^j \times e^{\mu_c^j} \right) \right)}$$

on calcule les paramètres de la loi log-normale approchée :

$$\sigma_t^2 = \ln(1 + \omega_t^2), \mu_t = \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^j} - (1 - c_t \times \beta^j) \times C_t^j \times e^{\mu_c^j} \right)}{\sqrt{1 + \omega_t^2}} \right)$$

Comme pour le cas monobranche, la loi χ_{t+1} conditionnellement à l'information en t est approchée par une loi log-normale de paramètres :

$$\mu_t(\chi) = \mu_t - \mu_a + \frac{\sigma_a^2}{2}, \sigma_t^2(\chi) = \sigma_t^2 + \sigma_a^2.$$

Conformément aux exigences du QIS 5, il convient de noter que la marge pour risque est calculée au global en prenant en compte le SCR c'est-à-dire en utilisant le coefficient

$c_t = \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_t$. Le calcul de la variance utilisé pour évaluer ω_t est présenté en annexe.

On peut enfin observer numériquement que l'approximation log-normale de la variable χ_{t+1} est de bonne qualité.

7. CONCLUSION

On a décrit ici un modèle simple permettant, sur la base de la prise en compte des caractéristiques synthétiques des facteurs de risque (provisions, primes et risque financier), de déterminer la distribution du taux de couverture de l'exigence de marge réglementaire sur l'horizon d'un plan stratégique.

Un tel modèle trouve sa place dans l'ensemble des outils à déployer dans le cadre de l'ORSA en fournissant à un organisme assureur le moyen de mesurer l'impact de choix de gestion (relatifs au niveau des primes, à l'allocation d'actifs, au mix-produit, *etc.*) sur sa couverture de la marge. Il lui permet notamment d'évaluer la probabilité de non couverture sur un horizon donné ou, plus généralement, le non respect d'un seuil minimal de couverture qu'imposerait la gouvernance interne. Il s'agit donc d'un outil d'aide à la décision précieux. Cet outil, qui conduit à répondre à l'exigence du régulateur de mesurer l'effet de la production future sur l'exigence de marge et sa couverture, intervient en aval du modèle utilisé dans le cadre du pilier 1, qu'il vient compléter. En particulier, il peut être déployé sur la base du modèle standard comme d'un modèle interne et présente l'avantage d'être peu coûteux en temps de calcul et donc adapté à une utilisation fréquente.

8. BIBLIOGRAPHIE

BERA A., JARQUE C. [1980] « Efficient Tests for Normality, Heteroscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals », *Economic Letter*, 255-9.

CEIOPS [2010a] « Draft proposal for Level 3 Guidelines on Own Risk and Solvency Assessment », *Consultation Paper*

CEIOPS [2010b] « QIS5 Technical Specifications », July 2010.

EL FAOUZI N.E.; MAURIN M. [2006] « Sur la loi de la somme de variables log-normales : application à la fiabilité de temps de parcours routiers », INRETS, *Working Paper*.

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.

PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Le Pilier 2 : du calcul de l'exigence de marge au pilotage d'un profil de risques. », *la Tribune de l'Assurance* (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°153 du 01/12/2010.

SAPORTA G. [1990] *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip, 1990.

9. ANNEXE

On présente ici le calcul des moments de la variable χ_{t+1} en présence de plusieurs branches. Dans un premier temps, on calcule les deux premiers moments du numérateur de χ_{t+1} puis on en déduit ceux de χ_{t+1} . On a :

$$\begin{aligned} E_t \left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right) \\ = \sum_{j=1}^n \left(E_t \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right) \\ = \sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^j} - (1 - c_t \times \beta^j) \times C_t^j \times e^{\mu_c^j} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_t \left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right) \\ = \sum_{j=1}^n \left(V_t \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right) \\ + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov_t \left((c_t + \theta^i) \times BEL_{t+1}^i - (1 + \beta_{t+1}^i \times \theta^i) \times C_{t+1}^i, (c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \end{aligned}$$

La première composante de la variance conditionnelle s'obtient simplement en reprenant les résultats développés dans la partie 4 :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(V_t \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right) \\ = \sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j)^2 \times BEL_t^{j2} \times e^{2\mu_p^j} \times \left(e^{\sigma_p^{j2}} - 1 \right) \right. \\ \left. + C_t^{j2} \times e^{2\mu_c^j} \times \left(c_t^2 \times \beta^{j2} \times \left(e^{(\sigma_c^{j2} + \sigma_\beta^{j2})} - 1 \right) + \left(e^{\sigma_c^{j2}} - 1 \right) (1 - 2c_t \times \beta^j) \right) \right) \end{aligned}$$

Le second terme est obtenue en notant que la covariance de deux variables aléatoires log-normale (Y_1, Y_2) de paramètres respectifs (μ_1, σ_1) et (μ_2, σ_2) s'obtient à partir de la covariance des variables normales sous-jacentes $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$:

$$Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1) \times E(Y_2) \left(e^{Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} - 1 \right)$$

On obtient en notant ρ_p^{ij} , ρ_c^{ij} et ρ_β^{ij} les coefficients de corrélation respectifs associés aux variables (BEL_t^i, BEL_t^j) , (C_t^i, C_t^j) et (β_t^i, β_t^j) :

$$\begin{aligned} & Cov_t \left((c_t + \theta^i) \times BEL_{t+1}^i - (1 + \beta_{t+1}^i \times \theta^i) \times C_{t+1}^i, (c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \\ &= (c_t + \theta^i) (c_t + \theta^j) \times BEL_t^i \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^i + \mu_p^j} \times \left(e^{\rho_p^{ij} \sigma_p^i \sigma_p^j} - 1 \right) \\ &+ c_t^2 \times Cov_t \left(\beta_{t+1}^i \times C_{t+1}^i, \beta_{t+1}^j \times C_{t+1}^j \right) - c_t \times Cov_t \left(\beta_{t+1}^i \times C_{t+1}^i, C_{t+1}^j \right) \\ &- c_t \times Cov_t \left(\beta_{t+1}^j \times C_{t+1}^j, C_{t+1}^i \right) + Cov_t \left(C_{t+1}^i, C_{t+1}^j \right) \end{aligned}$$

Mais on a :

$$Cov_t \left(C_{t+1}^i, C_{t+1}^j \right) = C_t^i \times C_t^j \times e^{\mu_c^i + \mu_c^j} \times \left(e^{\rho_c^{ij} \sigma_c^i \sigma_c^j} - 1 \right),$$

$$\begin{aligned} Cov_t \left(C_{t+1}^i, \beta_{t+1}^j \times C_{t+1}^j \right) &= E_t \left(\beta_{t+1}^j \right) \times Cov_t \left(C_{t+1}^i, C_{t+1}^j \right) \\ &= \beta^j \times C_t^i \times C_t^j \times e^{\mu_c^i + \mu_c^j} \times \left(e^{\rho_c^{ij} \sigma_c^i \sigma_c^j} - 1 \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & Cov_t \left(\beta_{t+1}^i \times C_{t+1}^i, \beta_{t+1}^j \times C_{t+1}^j \right) \\ &= E_t \left(\beta_{t+1}^i \right) \times E_t \left(\beta_{t+1}^j \right) \times Cov_t \left(C_{t+1}^i, C_{t+1}^j \right) + E_t \left(C_{t+1}^i \right) \times E_t \left(C_{t+1}^j \right) \times Cov_t \left(\beta_{t+1}^i, \beta_{t+1}^j \right) \\ &= \beta^i \times \beta^j \times C_t^i \times C_t^j \times e^{\mu_c^i + \mu_c^j} \times \left(e^{\rho_c^{ij} \sigma_c^i \sigma_c^j + \rho_\beta^{ij} \sigma_\beta^i \sigma_\beta^j} - 1 \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & Cov_t \left((c_t + \theta^i) \times BEL_{t+1}^i - (1 + \beta_{t+1}^i \times \theta^i) \times C_{t+1}^i, (c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \\ &= (c_t + \theta^i) (c_t + \theta^j) \times BEL_t^i \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^i + \mu_p^j} \times \left(e^{\rho_p^{ij} \sigma_p^i \sigma_p^j} - 1 \right) \\ &+ C_t^i \times C_t^j \times e^{\mu_c^i + \mu_c^j} \left[c_t^2 \times \beta^i \times \beta^j \times \left(e^{\rho_c^{ij} \sigma_c^i \sigma_c^j + \rho_\beta^{ij} \sigma_\beta^i \sigma_\beta^j} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(e^{\rho_c^{ij} \sigma_c^i \sigma_c^j} - 1 \right) \left(1 - c_t \times (\beta^i + \beta^j) \right) \right] \end{aligned}$$

On en déduit finalement le coefficient de variation de

$$\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) :$$

$$\omega_t = \frac{\sqrt{V_t \left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right)}}{\left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^j} - (1 - c_t \times \beta^j) \times C_t^j \times e^{\mu_c^j} \right) \right)}$$

puis les paramètres de la loi log-normale approchée :

$$\sigma_t^2 = \ln(1 + \omega_t^2), \quad \mu_t = \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^j} - (1 - c_t \times \beta^j) \times C_t^j \times e^{\mu_c^j} \right)}{\sqrt{1 + \omega_t^2}} \right)$$

Comme pour le cas monobranche, la loi χ_{t+1} conditionnellement à l'information en t est approchée par une loi log-normale de paramètres :

$$\mu_t(\chi) = \mu_t - \mu_a + \frac{\sigma_a^2}{2}, \quad \sigma_t^2(\chi) = \sigma_t^2 + \sigma_a^2.$$