

VALEUR ÉCONOMIQUE DE DETTES SUBORDONNÉES POUR DES SOCIÉTÉS NON-VIE

Version¹ 1.5 du 09/05/2015

François Bonnin²

Frédéric Planchet³

Montassar Tammar⁴

Amédée de Clermont-Tonnerre⁵

Domenico Sapone

ISFA - Laboratoire SAF^ß

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

RÉSUMÉ

Cet article présente un modèle de valorisation économique d'une dette subordonnée pour une entité non-vie non cotée et l'applique au calcul de la valeur d'un fonds commun de titrisation.

ABSTRACT

This article presents an economic valuation model for a conditional debt to an unlisted non-life entity and apply it to calculate the value of a mutual securitization fund.

1. INTRODUCTION.....	2
2. DESCRIPTION DU MODÈLE	3
1. Environnement de taux	5
2. Bilan d'une entité	5
3. Valeur de l'actif du FCT	8
a. Définition du défaut	8
b. Détermination des flux reçus par le FCT	9
c. Valeur de l'actif du FCT.....	9
d. Expression en montant.....	10
e. Valorisation <i>via</i> un <i>spread</i> au-delà du taux sans risque.....	10
3. STRUCTURE ET JUSTIFICATION DU PARAMÉTRAGE.....	11
1. Taux d'intérêt.....	11
2. Paramétrage propre à une entité	11
3. Structures de dépendance	13
4. Calcul du MCR.....	14
4. APPLICATION NUMÉRIQUE	15
5. CONCLUSION.....	16
6. RÉFÉRENCES	17

Remerciements : Les auteurs remercient le relecteur anonyme dont les observations ont permis d'améliorer sensiblement la première version de ce travail.

¹ Ce travail a bénéficié du soutien de la chaire Management de la Modélisation (<http://isfa.univ-lyon1.fr/m2a>)

² F. Bonnin est Directeur du département quantitatif de KPMG, Insurance and financial risk consulting.

³ F. Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé chez PRIM'ACT. Contact : frederic@planchet.net.

⁴ M. Tammar est consultant chez PRIM'ACT.

⁵ A. de Clermont-Tonnerre, actuaire, est gérant de portefeuille et D. Sapone, CFA, est analyste senior, tous deux chez Cohen & Company.

^ß Université de Lyon, université Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 - France.

1. Introduction

L'entrée en vigueur au 1^{er} janvier 2016 du nouveau dispositif réglementaire européen pour les activités d'assurance, Solvabilité 2, conduit à une modification profonde des modalités de gestion des organismes concernés. On trouvera par exemple dans GUILLAUMAT DE BLIGNIERES et MILANESI [2014] une analyse globale des conséquences économiques de la mise en place de ce nouveau cadre et dans le chapitre 4 d'EWALD [2013] une description synthétique de passage de la réglementation actuelle (« Solvabilité 1 ») au nouveau cadre (« Solvabilité 2 »). GUIBERT et *al.* [2014] fournit de son côté des éléments détaillés sur les évolutions induites en termes de gestion des risques pour les assureurs.

On peut en retenir ici de manière très synthétique qu'alors que les règles actuelles de fixation du niveau de l'exigence de marge de solvabilité (EMS) sont forfaitaires et fonction du volume de l'activité et non des risques supportés, le nouveau système détermine le capital de solvabilité (SCR) en fonction du profil de risque de l'entité en s'appuyant sur une analyse de la structure d'un bilan en valeur de marché et de sa déformation à l'horizon d'un an.

Cela a pour conséquence un besoin supplémentaire en capital réglementaire pour certaines entreprises d'assurance européennes, du fait des contraintes globalement plus fortes que fait peser cette réglementation sur le bilan et de la volatilité inhérente à une appréciation en valeur de marché des actifs et des passifs.

Il en résulte dans certains cas un besoin d'augmentation des fonds propres afin de maintenir le ratio de couverture des engagements à un niveau suffisant, niveau déterminé à la fois par les contraintes réglementaires et par les règles de gouvernance interne. On peut ainsi retenir que le taux de couverture du SCR visé est *a minima* entre 120 et 150 % en fonction des acteurs.

Afin de satisfaire ces exigences, certaines entreprises d'assurance, notamment parmi les mutuelles, seront ainsi amenées à émettre dans les prochains mois des titres obligataires subordonnés assimilables à des quasi-fonds propres par les autorités de tutelle. Ces instruments constituent à ce titre une modalité intéressante de financement du besoin en capital (les modalités de leur prise en compte sont précisées à l'article A334-1 du Code des Assurances). Mais pour pouvoir effectuer une telle opération, il est nécessaire de disposer d'un accès aux marchés financiers pour y trouver des contreparties. Au surplus, le volume de l'émission doit être suffisant pour que les frais ne soient pas rédhibitoires. Une émission d'environ 10 M€ dont pourrait avoir besoin une mutuelle typique est de ce point de vue trop faible.

La création d'un fonds commun de titrisation (FCT) dont l'actif est constitué par ce type d'émissions permet de contourner ces difficultés et d'apporter ainsi un financement sous forme de titres subordonnés remboursables. Ce type de fonds commun rémunère alors les

investisseurs à l'aide de coupons indexés sur des taux variables offrant une rémunération additionnelle au-dessus de l'Euribor.

Du point de vue de l'entreprise d'assurance, ce type de montage vient s'ajouter aux instruments permettant de disposer d'un financement dont la charge est modulée en fonction d'indicateurs de solvabilité tels que le l'exigence de capital minimum (MCR) ou le capital de solvabilité requis (SCR).

La mise en place d'un tel dispositif implique toutefois de fournir une valeur économique de la dette subordonnée pour une entité supposée ici non cotée. Ceci n'est pas immédiat, en l'absence d'indicateurs de marché sur le niveau des primes de risque attendues par les investisseurs en fonction des caractéristiques de l'émetteur.

On propose dans le présent article un modèle permettant de répondre à cette problématique.

2. Description du modèle

Le fonctionnement du fonds proposé est le suivant : une entité financée par le FCT paye trimestriellement un intérêt égal au taux Euribor majoré d'une prime de risque ; lorsque le *Solvency Capital Requirement* (SCR) ou le *Minimum Solvency Requirement* (MCR) défini par la Directive Solvabilité 2 ne sont plus couverts par les fonds propres économique de l'entité n'est plus couvert, tout ou partie de la créance du FCT peut être incorporée aux fonds propres, le fonds n'étant alors plus remboursé (totalement ou partiellement). Le détail de ce mécanisme est présenté à la section 3 ci-dessous).

Compte tenu de l'absence de données financières directes permettant d'apprécier l'évaluation des anticipations de défaut des mutuelles émettrices de dette subordonnée sur un marché, une approche *marked to model* est proposée. Du fait des spécificités du contexte, les modèles usuels de crédit (dont on trouvera par exemple une synthèse dans DUFFIE et SINGLETON [2003]) ne s'avèrent pas adaptés : on ne dispose ni de prix de dérivés de crédit, ni d'une notation et de plus le « défaut » est défini contractuellement en fonction d'une condition relative au bilan économique et non au bilan comptable.

L'évaluation de la valeur des dettes subordonnées est donc effectuée sur la base du calcul sous une mesure martingale de la somme des flux futurs servis par ces instruments actualisés au taux sans risque. Les risques suivants sont intégrés au modèle :

- le risque de taux, *via* un modèle de projection risque-neutre du taux court (utilisé comme proxy pour le taux Euribor) ;
- le risque de marché de chaque mutuelle ;
- le risque de souscription de chaque mutuelle.

La prise en compte de ces risques est effectuée dans le cadre d'un modèle de projection de flux dont les principales caractéristiques sont les suivantes :

- les données disponibles sont des données synthétiques sur la structure de bilan des mutuelles : valeur de marché de l'actif, montant des engagements (provisions techniques Solvabilité 2) et hypothèses sur la volatilité de ces grandeurs (données de marché ou issues des spécifications techniques de l'EIOPA) ;
- la logique générale du modèle s'inspire du modèle de Merton dans une vision dynamique et multi-sociétés de ce modèle. On propose donc de décrire le bilan d'une mutuelle par un actif aléatoire modélisé par un brownien géométrique et un passif aléatoire log-normal (par branche) également. Dans le cas d'un passif d'une mutuelle de taille petite ou moyenne l'hypothèse qu'il n'y a pas de dette extérieure, qui serait *senior* par rapport au passif subordonné objet de la titrisation, paraît raisonnable. Dans le cas contraire, et si celle-ci reste secondaire dans le bilan, un proxy *via* un changement de paramètre dans la modélisation du passif est possible et décrite au paragraphe 2.2 « Bilan d'une entité » ci-après.

Le modèle est dynamique car les défauts peuvent survenir à des dates distinctes. Cela implique de tenir compte des cotisations acquises par les mutuelles, année après année et des prestations qu'elles paient auprès de leurs assurés.

Sous l'hypothèse qu'une mutuelle émettrice de dette est une mutuelle santé ou IARD sans interactions actif / passif matérielles et dont le passif est peu sensible au risque de taux, la dynamique proposée dans GUIBERT *et al.* [2012] est utilisée, avec toutefois une dynamique d'actif risque-neutre et non historique, en suivant une logique proche de BONNIN *et al.* [2014], [2015].

Il reste alors à décrire les flux servis par l'actif tenant compte d'éventuels défauts et d'un taux de recouvrement. L'évaluation de l'espérance de la somme actualisée de ces flux (en probabilité risque neutre pour l'actif et historique pour le passif), fournit une « valeur économique » de l'actif du FCT.

On soulignera que, s'agissant d'une valorisation, la structure de dépendance entre les flux des différentes entités n'intervient pas (voir la section 3), ce qui constitue un facteur important de simplification du modèle.

Par ailleurs, comme le souligne CUMMINS [1988], le défaut d'une entité peut être impacté par des événements rares se traduisant du point de vue de la modélisation par la prise en compte de sauts dans les processus d'actifs et / ou de passif. Cette possibilité a été ignorée dans le cadre du modèle proposé ici du fait de la complexité mathématique qu'elle engendre. Elle peut être partiellement contournée en augmentant la volatilité des processus concernés.

1. Environnement de taux

Afin de pouvoir projeter les risques financiers sous une probabilité risque neutre cohérente avec cette courbe, on en retient la représentation de Vasicek (VASICEK [1977]) basée sur le taux court avec l'hypothèse d'une dynamique de la forme

$$dr_t = a(r_\infty - r_t)dt + \sigma dW_t$$

qui conduit à l'expression paramétrique suivante des taux (cf. PLANCHET et al. [2011]) zéro-coupon ($R(0, \tau), \tau \geq 0$) :

$$R(t, \tau) = r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\tau\sigma^2}{4a} \varphi(\tau a)^2 - \varphi(\tau a) \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t \right)$$

avec $\varphi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$. Les paramètres (a, r_∞, σ) de la diffusion sont estimés par minimisation des écarts quadratiques entre les taux zéro-coupons issus du modèle et les taux issus de la courbe de référence. Lorsque la maturité du prêt est petite on a :

$$\begin{aligned} \tau R(t, \tau) &= \tau \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\tau^2 \sigma^2}{4a} \varphi(\tau a)^2 - \frac{1 - e^{-\tau a}}{a} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t \right) \\ &\approx \tau \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \tau \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t \right) = \tau \times r_t \end{aligned}$$

ce qui permet d'approcher l'intérêt servi entre t et $t + \tau$, $\tau R(t, \tau)$, par $\tau \times r_t$.

Dans la mesure où le calcul se fait par simulation, un autre choix aurait été possible, notamment un modèle de marché permettant la prise en compte des prix d'options de taux.

2. Bilan d'une entité

Les aléas affectant le bilan d'une entité sont synthétisés, comme dans GUIBERT et al. [2012], en quatre risques agrégés : l'incertitude sur le rendement de l'actif, les cotisations perçues, le risque de provisionnement et le risque de réserve. Ainsi, à l'instant t , il s'agit de décrire la structure de quatre variables aléatoires : la valeur de la part d'actif S_t , le montant des cotisations acquises C_t , le *best estimate* BEL_t (net de réassurance) et β_t le ratio combiné (également net de réassurance). Les autres éléments du calcul se déduisent de ces facteurs de risque de base.

Le choix d'une description agrégée de l'actif a été fait, en supposant que l'actif est investi dans une unité de compte S_t , ce qui revient à supposer que la gestion d'actif de l'entité est réalisée en référence à une allocation stratégique cible stable sur l'horizon de projection.

Dès lors, les caractéristiques de cette allocation déterminent la volatilité de l'unité de compte.

La dynamique du bilan d'une entité repose ainsi sur les équations suivantes :

- ✓ pour la valeur de l'actif⁶ : $A_t = A_{t-d_p} \times (1 + R_t) - I_t - \sum_{j=1}^n (F_t^j - C_t^j)$;
- ✓ pour la valeur du passif⁷ : $L_t = BEL_t + RM_t = BEL_t + \alpha \times D_t \times SCR_t$.

en notant $BEL_t = \sum_{j=1}^n BEL_t^j$. On doit donc déterminer le rendement R_t du fonds dans lequel est investi l'actif⁸, des prestations servies (F_t), de la charge de la dette (I_t), des cotisations perçues (C_t), des provisions techniques *best estimate* (BEL_t) et des exigences de capital (MCR_t et SCR_t). La durée D_t sera supposée fixe, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de structures ayant une activité installée et en « régime de croisière ». Ces différentes valeurs seront calculées en suivant la démarche décrite dans le travail de Guibert et al. [2012], qui repose sur l'utilisation des équations de récurrence suivantes :

- ✓ valeur de la part d'actif : $S_{t+1} = S_t \times \exp\left(r_t - \frac{\sigma_a^2}{2} + \sigma_a \times \varepsilon_{t+1,a}\right)$,
- ✓ cotisations perçues : $C_{t+d_p} = C_t \exp\left(\left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2}\right) \times d_p + \sigma_c \sqrt{d_p} \times z_{t+d_p,c}\right)$,
- ✓ ratio combiné : $\beta_{t+d_p} = \beta \exp\left(-\frac{\sigma_\beta^2}{2} d_p + \sigma_\beta \sqrt{d_p} \times z_{t+d_p,\beta}\right)$,
- ✓ provisions : $BEL_{t+d_p} = BEL_t \exp\left(\left(\mu_p(t) - \frac{\sigma_p^2}{2}\right) \times d_p + \sigma_p \sqrt{d_p} \times z_{t+d_p,p}\right) + \beta_{t+d_p} \times C_{t+d_p}$,

avec $z_{t,a}, z_{t,c}, z_{t,p}$ des bruits blancs gaussiens, $\mu_p(t) = r_t + \ln(1 - \varphi)$ et φ la quote-part des réserves servies en prestations annuellement. φ et la durée D sont des paramètres du modèle. Les prestations de la branche considérée sont déterminées par l'égalité (cf. GUIBERT et al. [2012] pour la démonstration) :

$$F_{t+d_p} = \exp\left(\left(r_t - \frac{\sigma_p^2}{2}\right) \times d_p + \sigma_p \sqrt{d_p} \times z_{t+d_p,p}\right) \times \varphi_{d_p} \times BEL_t = \theta \times (BEL_{t+d_p} - \beta_{t+d_p} \times C_{t+d_p})$$

⁶ Dans le cas où existerait une dette extérieure, senior par rapport à la dette subordonnée, de montant Do , les paramètres d'actif ($A'o$ et σ') peuvent être réajustés : $A'o = A_o - Do$ (conservation de la valeur nette) ; et $\sigma'^2 = \sigma^2 A_o / A'o$ (conservation de la variance, vue de l'origine). Ce proxy sera d'autant meilleur que $A_o/A'o \sim 1$

⁷ $\alpha = 6\%$, conformément aux spécifications techniques de l'EIOPA.

⁸ Voir BONNIN et al. [2015] pour la logique de gestion de l'actif *via* un FCP.

Avec $\varphi_{d_p} = 1 - (1 - \varphi)^{d_p}$ et $\theta = \frac{\varphi_{d_p}}{1 - \varphi_{d_p}}$.

On introduit une structure de dépendance entre les branches de la manière suivante :

$$\mathbf{z}_{t+1}^i = A_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^i$$

avec \mathbf{z}_{t+1}^i et $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^i$ des vecteurs de taille n (le nombre de branches de l'entité) et A_i la racine carrée de la matrice de corrélation des branches. La matrice A_i est supposée identique pour tous les facteurs de risque de passif.

Le MCR est calculé conformément aux spécifications techniques de la formule standard (MCR.19) en utilisant la formule $MCR_{i,t} = \sum_j (a_j \times BEL_t^j + b_j \times C_t^j)$ avec les coefficients a et b fixés pour une branche donnée. Les bornes prévues dans MCR.11 seront ensuite appliquées, soit

$$MCR_t = \min(\max(MCR_{i,t}, 0, 25 \times SCR_t), 0, 45 \times SCR_t).$$

Le SCR est quant à lui calculé en résolvant par dichotomie l'équation implicite suivante, reprise de GUIBERT et al. [2012],

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \times D_t} (\exp(\mu_t(\chi) + \sigma_t(\chi) \times \phi^{-1}(99,5\%)) - BEL_t)$$

avec $\mu_t(\chi) = \mu_t - \mu_a + \frac{\sigma_a^2}{2}$, $\sigma_t^2(\chi) = \sigma_t^2 + \sigma_a^2$ et

$$\sigma_t^2 = \ln(1 + \omega_t^2), \quad \mu_t = \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^j} - (1 - c_t \times \beta^j) \times C_t^j \times e^{\mu_c^j} \right)}{\sqrt{1 + \omega_t^2}} \right)$$

où on a noté

$$\omega_t = \frac{\sqrt{V_t \left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_{t+1}^j - (1 + \beta_{t+1}^j \times \theta^j) \times C_{t+1}^j \right) \right)}}{\left(\sum_{j=1}^n \left((c_t + \theta^j) \times BEL_t^j \times e^{\mu_p^j} - (1 - c_t \times \beta^j) \times C_t^j \times e^{\mu_c^j} \right) \right)}.$$

Le calcul du coefficient de variation ω_i est détaillé en annexe. Le calcul du SCR ne dépend pas du pas de discrétisation d_p puisque le SCR est systématiquement calculé sur un horizon d'un an.

La charge de la dette pour un montant nominal de l'émission N est de la forme $I_t = N \times (R(t, T) + p)$ avec $T = 10$ et p le *spread* à l'émission exprimé en points de base.

Le défaut de paiement associé au non remboursement partiel de la dette survient lorsque le MCR (ou le SCR en fonction des dispositions contractuelles) n'est plus couvert.

3. Valeur de l'actif du FCT

Le calcul de la valeur de l'actif du fonds nécessite de définir préalablement les conditions du défaut, dont on déduit ensuite les flux reçus par le fonds. La valeur actualisée au taux sans risque de ces flux (projetés à l'aide d'une mesure martingale) fournit alors une valeur de l'actif du FCT.

a. Définition du défaut

Le défaut est défini comme le premier instant τ où le MCR n'est plus couvert par les fonds propres économiques $NAV_t = A_t - L_t$:

$$\tau_i = \min \left\{ t = 1, \dots, T / \frac{NAV_{i,t}}{MCR_{i,t}} < 1 \right\}.$$

On se place dans le contexte défini par l'art. A334-1 du Code des Assurances⁹. À la date de défaut, la perte subie par l'investisseur est estimée en se plaçant dans le contexte d'une liquidation de l'entité (soit que l'entité est liquidée complètement, ce qui est en pratique rare, soit que le portefeuille fasse l'objet d'un transfert d'office puis que l'entité « vidée de ses engagements » soit alors liquidée). L'investisseur, prioritaire sur l'actionnaire, récupère alors la valeur des fonds propres économiques, dans la limite du nominal de l'émission¹⁰. Avec ce raisonnement le taux de perte en cas de défaut est :

$$LGD_i(\tau_i) = \max \left(0, 1 - \frac{\max(0, NAV_{i,\tau_i})}{N_i} \right).$$

⁹

<http://www.legifrance.gouv.fr/affichCodeArticle.do?cidTexte=LEGITEXT000006073984&idArticle=LEGIARTI000006788426&dateTexte=&categorieLien=cid>

¹⁰ On considère que, s'agissant d'une activité d'assurance, le montant d'une éventuelle dette senior est négligeable.

b. Détermination des flux reçus par le FCT

Le coût de la dette pour l'entité, égal au revenu servi par le FCT (aux chargements près), correspond au taux Euribor majoré de p points de base, jusqu'à la maturité, la dette étant alors remboursée, ce que l'on traduit ici, pour un nominal N , par :

$$I_t = N \times (r_t + p) \times d_p \times 1_{\{t \leq T\}} + N \times 1_{\{t=T\}}$$

avec p le *spread* de l'émetteur (par exemple $p = 600$ points de base). On utilise l'approximation $R(t, d_p) \approx r_t$ lorsque d_p est petit. La valeur économique de ces flux en l'absence de défaut se calcule simplement :

$$\begin{aligned} V_{sd} &= \sum_{t \leq T} E^{Q^f} [\delta(t) \times I_t] \\ &= N \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T} \left(E^{Q^f} [\delta(t) \times r_t] + p \times P(0, t) \right) + P(0, T) \right) \end{aligned}$$

La somme étant prise sur tous les instants de la grille de discrétisation inférieurs à T . En observant que $E^{Q^f} [\delta(t) \times r_t] = -\frac{\partial}{\partial t} P(0, t)$ et comme en utilisant :

$$-\frac{\partial}{\partial t} P(0, t) = P(0, t) \times \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - e^{-at} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_0 \right) \right)$$

on trouve finalement :

$$V_{sd} = N \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T} P(0, t) \times \left(p + r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - e^{-at} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_0 \right) \right) + P(0, T) \right).$$

c. Valeur de l'actif du FCT

A partir des composants décrits ci-dessus, le modèle permet de projeter les flux servis par l'actif du FCT actualisés au taux sans risque et à en calculer la somme, dont la structure est la suivante :

$$\Lambda = \sum_{i \in I} \Lambda_i$$

où on a noté Λ_i la somme des flux actualisés servis par l'entité $i \in I$, qui est donnée par :

$$\Lambda_i = N_i \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T \wedge \tau_i} \delta(t) \times (r(t) + p_i) + (1 - LGD_i(T \wedge \tau_i)) \times \delta(T \wedge \tau_i) \right)$$

avec $T = 10$, $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r_u du\right)$, LGD_i le taux de perte en cas de défaut et τ_i l'instant de défaut de l'entité i . De manière évidente $LGD_i(T) = 0$ si $\tau_i > T$. On suppose que le défaut survient au plus une fois sur la durée T du contrat.

d. Expression en montant

La valeur du FCT est alors simplement, en utilisant les notations de BONNIN et *al.* [2015] :

$$V_d = E^{P^a \otimes Q^f} [\Lambda] = \sum_{i \in I} E^{P^a \otimes Q^f} [\Lambda_i].$$

On peut observer que la valeur du fonds ne dépend pas de la structure de dépendance entre les entités, du fait de la linéarité de l'espérance.

Cette valeur théorique est estimée par simulation. De manière plus précise, on simule des trajectoires de l'environnement économique et du bilan de chaque entité, ce qui conduit à calculer pour la simulation n°k :

$$\Lambda_i^{(k)} = N_i \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T \wedge \tau_i^{(k)}} \delta^{(k)}(t) \times (r^{(k)}(t) + p_i) + (1 - LGD_i^{(k)}(T \wedge \tau_i^{(k)})) \times \delta^{(k)}(T \wedge \tau_i^{(k)}) \right)$$

puis à utiliser l'approximation $V_{i,d} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Lambda_i^{(k)}$ pour une entité et $V_d \approx \sum_{i \in I} V_{i,d}$ pour l'actif du FCT.

À la date d'émission, la valorisation théorique réalisée est confrontée à la valeur nominale et est réconciliée avec sa valeur nominale au moyen d'un *spread*, en pratique exprimé en référence à un indice de marché¹¹. Ce *spread*, calé à l'émission est pris en compte dans les évaluations ultérieures et évolue comme le *spread* de l'indice de référence.

e. Valorisation via un spread au-delà du taux sans risque

Une fois la valeur économique du fonds (ou de la dette d'une entité) déterminée, il est commode de l'exprimer sous la forme d'un *spread* fixe à ajouter au taux sans risque de sorte que la valeur des flux sans prise en compte du défaut actualisée avec le taux sans risque majoré du *spread* soit égale à la valeur économique du contrat. On introduit donc pour un *spread* x fixé le facteur d'actualisation

$$\delta_x(t) = \exp\left(-\int_0^t (r_u + x) du\right)$$

¹¹ Par exemple l'indice IBOX EUR Insurance Ticker Bloomberg « QX44 Index Go ».

ce qui conduit aux prix $P_x(0,t) = E^{Q_f}(\delta_x(t)) = P(0,t)e^{-xt}$. On peut alors vérifier que la valeur des flux sans défaut basée sur cette courbe d'actualisation décalée est égale à :

$$V_{sd}(x) = N \times \left(d_p \times \sum_{t \leq T} P_x(0,t) \times \left(p + r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - e^{-at} \left(r_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_0 \right) \right) + P_x(0,T) \right).$$

Pour une entité donnée, on peut donc calculer le *spread* associé en résolvant (par dichotomie) l'équation $V_{i,sd}(x) = V_{i,d}$. Ce *spread* x est donc celui qui, ajouté au taux sans risque, permet, en actualisant les flux contractuels ($r_t + p$ pour les intérêts) en l'absence de défaut, de retrouver la valeur de ces flux avec prise en compte du défaut.

3. Structure et justification du paramétrage

On décrit dans cette section la structure et la source du paramétrage du modèle. Il est précisé que les valeurs numériques utilisées pour décrire l'entité et les caractéristiques du fonds sont purement illustratives et ne correspondent à aucune situation réelle.

1. Taux d'intérêt

On utilise la courbe de taux $(R(0,\tau), \tau \geq 0)$ à la date du calcul. Cette courbe est utilisée pour estimer les paramètres du modèle de projection risque neutre pour le taux court :

Tab. 1 : Paramètres du modèle de taux

Paramètre	Description	Remarque
r_0	Valeur initiale	Estimé à partir de la courbe initiale
a	Vitesse de retour à la moyenne	Estimé à partir de la courbe initiale
r_∞	Taux d'intérêt moyen en régime stationnaire	Estimé à partir de la courbe initiale
σ_r	Volatilité du taux court	Estimé à partir de la courbe initiale

L'estimation est effectuée en minimisant la somme des écarts quadratiques entre les prix des ZC issus de la courbe et ceux fournis par le modèle. Il convient de noter que le paramètre de volatilité σ_r pourrait également être calibré sur un panier de prix d'options.

2. Paramétrage propre à une entité

Les paramètres spécifiques à chaque entité sont composés de trois éléments :

- Les valeurs initiales du bilan ;
- Les paramètres de déformation du bilan ;
- Les caractéristiques de la dette.

Ces éléments sont détaillés ci-après.

Tab. 2 : Valeurs initiales

Paramètre	Description	Remarque
A_0	Valeur de marché de l'actif	
BEL_0	Montant des provisions <i>best estimate</i> nettes de réassurance	Avec la ventilation par branches si la société exerce plusieurs activités significatives
C_0	Montant de cotisations pour l'année du calcul ; ce montant ne sert que pour le calcul de C_1	Avec la ventilation par branches si la société exerce plusieurs activités significatives
β_0	Ratio combiné initial	Avec la ventilation par branches si la société exerce plusieurs activités significatives
SCR_0	Valeur initiale du SCR	Pour contrôle avec le résultat issu du modèle
MCR_0	Valeur initiale du MCR	Pour contrôle avec le résultat issu du modèle
DS	Valeur nominale de la dette senior	

Tab. 3 : Paramètres pour la dynamique du bilan

Paramètre	Description	Source
μ_a	Taux de rendement de l'actif synthétique ¹²	Entité
σ_a	Volatilité du rendement de l'actif synthétique	Entité ou référence de marché
μ_c	Taux de croissance des cotisations	Entité (nul par défaut) – ventilé par branche
σ_c	Volatilité des cotisations	Entité (nulle par défaut) – ventilée par branche
β	Ratio combiné cible	Entité ou référence de marché (par défaut on pourra utiliser la valeur initiale) – ventilé par branche
σ_β	Volatilité du ratio combiné	Entité ou EIOPA (SCR.8.71) – ventilé par branche
D	Duration des engagements	Entité ou référence de marché – ventilé par branche
σ_p	Volatilité des réserves (pour 1€ de provision)	Entité ou EIOPA (SCR.8.74) – ventilé par branche
φ	Part des réserves payées en prestations	Entité ou référence de marché – ventilé par branche

Les valeurs par défaut des volatilités pour les risques de réserve et de primes sont issues de la formule standard de Solvabilité 2 et reprises dans le tableau ci-après :

¹² Le taux de rendement historique de l'actif intervient dans le calcul du SCR de l'entité.

Tab. 4 : Valeurs par défaut pour les volatilités du passif

Branches	Nom de la branche	σ_p	σ_β
B1	Motor vehicle liability insurance and proportional reinsurance	9 %	10 %
B2	Other motor insurance and proportional reinsurance	8 %	8 %
B3	Marine, aviation and transport insurance and proportional reinsurance	11 %	15 %
B4	Fire and other damage to property insurance and proportional reinsurance	10 %	8 %
B5	General liability insurance and proportional reinsurance	11 %	14 %
B6	Credit and suretyship insurance and proportional reinsurance	19 %	12 %
B7	Legal expenses insurance and proportional reinsurance	12 %	7 %
B8	Assistance and its proportional reinsurance	20 %	9 %
B9	Miscellaneous financial loss insurance and proportional reinsurance	20 %	13 %
B10	Non proportional casualty reinsurance	20 %	17 %
B11	Non proportional marine, aviation and transport reinsurance	20 %	17 %
B12	Non proportional property reinsurance	20 %	17 %
B13	Medical expense insurance and proportional reinsurance	5 %	5 %
B14	Income protection insurance and proportional reinsurance	14 %	9 %
B15	Workers' compensation insurance and proportional reinsurance	11 %	8 %
B16	Non-proportional health reinsurance	20 %	17 %

Lorsque la source indiquée est l'EIOPA, il s'agit de reprendre les valeurs par défaut proposées dans les spécifications techniques¹³ de la formule standard du 30/04/2014. L'ensemble de ces données doit être communiqué en date de calcul.

Enfin, il convient de disposer des caractéristiques de la dette émise par l'entité et figurant à l'actif du FCT.

Tab. 5 : Caractéristiques de l'émission obligataire

Paramètre	Description	Remarque
S	Date d'émission de l'emprunt	
N	Valeur nominal de l'emprunt	
T	Maturité en années	10 ans par défaut
p	Spread contractuel	600 bp par défaut
f	Fractionnement	Trimestriel par défaut

3. Structures de dépendance

Des coefficients de corrélation permettent d'introduire des dépendances entre les branches. La matrice de corrélation fournie par l'EIOPA dans les spécifications techniques est utilisée :

¹³ <https://eiopa.europa.eu/publications/technical-specifications/index.html>

Tab. 6 : Coefficients de corrélations entre branches d'activité

Matrice de corrélation entre branches d'activité																
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15	B16
B1	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0
B2	0,5	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0
B3	0,5	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0
B4	0,25	0,25	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0	0	0	0
B5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0	0	0	0
B6	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0	0	0	0
B7	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0	0	0	0
B8	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0
B9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0
B10	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	1	0,25	0,25	0	0	0	0
B11	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1	0,25	0	0	0	0
B12	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0	0	0	0
B13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,5	0,5	0,5
B14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0,5
B15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5
B16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	1

La matrice A est la racine carrée de la matrice de corrélation ci-dessus.

4. Calcul du MCR

Les coefficients utilisés pour le calcul du MCR sont définis par les spécifications de la formule standard de Solvabilité 2, repris dans le tableau ci-après :

Tab. 7 : Coefficients pour le calcul du MCR

Branches	Nom de la branche	a	b
B1	Motor vehicle liability insurance and proportional reinsurance	8,50 %	9,40 %
B2	Other motor insurance and proportional reinsurance	7,50 %	7,50 %
B3	Marine, aviation and transport insurance and proportional reinsurance	10,30 %	14,00 %
B4	Fire and other damage to property insurance and proportional reinsurance	9,40 %	7,50 %
B5	General liability insurance and proportional reinsurance	10,30 %	13,10 %
B6	Credit and suretyship insurance and proportional reinsurance	17,70 %	11,30 %
B7	Legal expenses insurance and proportional reinsurance	11,30 %	6,60 %
B8	Assistance and its proportional reinsurance	18,60 %	8,50 %
B9	Miscellaneous financial loss insurance and proportional reinsurance	18,60 %	12,20 %
B10	Non proportional casualty reinsurance	18,60 %	15,90 %
B11	Non proportional marine, aviation and transport reinsurance	18,60 %	15,90 %
B12	Non proportional property reinsurance	18,60 %	15,90 %
B13	Medical expense insurance and proportional reinsurance	4,70 %	4,70 %
B14	Income protection insurance and proportional reinsurance	13,10 %	8,50 %
B15	Workers' compensation insurance and proportional reinsurance	10,70 %	7,50 %
B16	Non-proportional health reinsurance	18,60 %	15,90 %

4. Application numérique

La mise en œuvre du modèle est illustrée ici dans le cas d'une société typique d'assurance non-vie exerçant une activité santé et prévoyance.

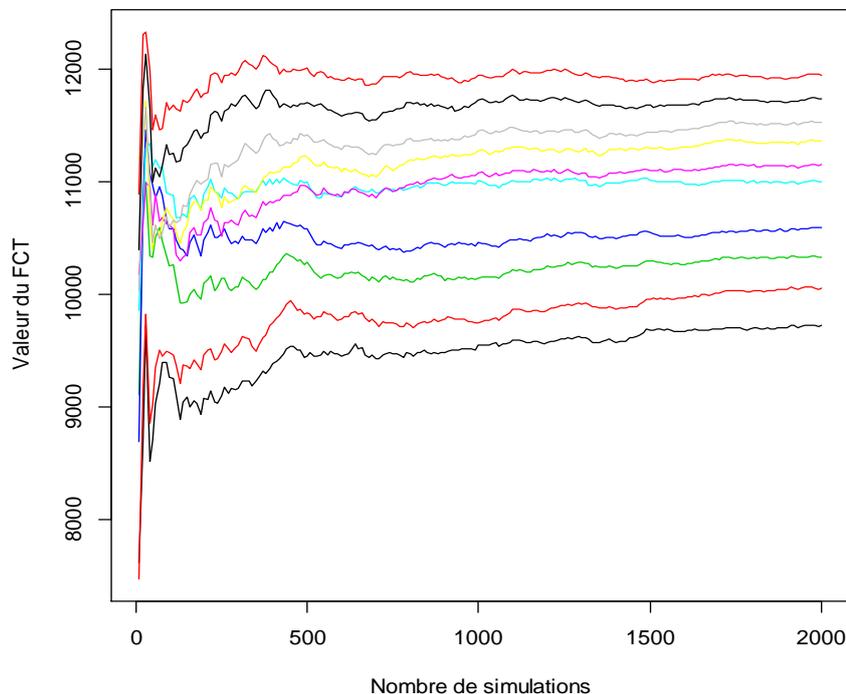
Dans cet exemple, l'entité de référence exerce son activité en santé / prévoyance sur 3 branches (n°6, 13 et 14) et couvre deux fois son SCR. Il est supposé de manière normative que le contrat sert 600 bp au-dessus du taux court.

Fig. 1 : Paramétrage de l'exemple

Nom de la variable	Notation dans le modèle de projection	Valeur	Valeur (et Ventilation par branches)																
			B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15	B16	
Actif			Actif																
Valeur de marché de l'Actif	A	16491																	
Taux de croissance de l'Actif (historique)	μ_a	4,36%																	
Volatilité de l'Actif	σ_a	7,0%																	
Indicateurs de risque			Indicateurs de risque																
Nominal de la Dette Subordonnée	NDS	10000																	
Spread de la Dette Subordonnée	Spread	0,06																	
Maturité initiale	Maturity	10,00																	
Liabilités			Liabilités																
Best Estimate Liabilités - BEL	BEL		0	0	0	0	0	2092	0	0	0	0	0	0	0	4797	3997	0	0
Volatilité du BEL	σ_b		9,0%	8%	11%	10%	11%	19,0%	12%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	14,0%	14,0%	11,0%	20,0%
Cote-part des réserves servies en prestations	phi		10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%
Duration du Passif ventilée par branche	D		5,00	4,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
Cotisations			Cotisations																
Montant des cotisations perçues	C		0	0	0	0	0	205	0	0	0	0	0	0	0	4720	3938	0	0
Taux de croissance des cotisations	μ_c		1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
Volatilité des cotisations	σ_c		5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%
Ratio combiné			Ratio combiné																
Ratio combiné réalisé initial	R		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Ratio combiné cible	beta		100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Volatilité du ratio combiné	σ_r		10%	8%	15%	8%	14%	12,0%	7%	8%	15%	17%	17%	17%	16,0%	9,0%	8,0%	17,0%	17,0%
Indicateurs de solvabilité initiaux			Indicateurs de solvabilité initiaux																
SCR	SCR_entree	37 845																	
MCR	MCR_entree	18 922																	

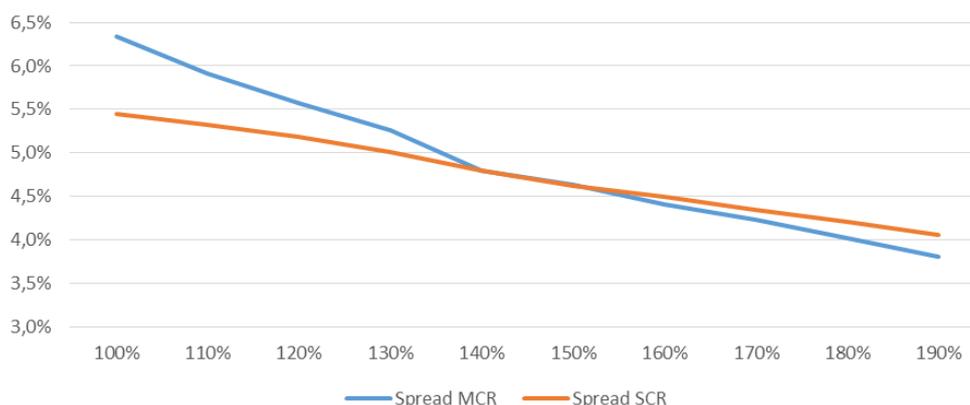
On vérifie graphiquement que 2 000 simulations suffisent à stabiliser les résultats des estimateurs empiriques :

Fig. 2 : Convergence des estimateurs en fonction du nombre de simulations



Sur cette base, on peut comparer les spreads de défaut du contrat en fonction du taux de couverture du SCR, selon que le défaut est défini par le non-respect du MCR ou du SCR :

Fig. 3 : Spread de défaut en fonction du taux de couverture du SCR



Le défaut défini sur la base du SCR se produit plus souvent, mais avec une intensité moindre que lorsqu'il est défini en référence au MCR. On observe que le *spread* de défaut défini avec le MCR comme déclencheur de défaut décroît plus rapidement que celui défini avec le SCR, ce qui s'explique par le fait qu'une variation du taux de couverture du SCR engendre une meilleure amélioration de la solvabilité de l'entité lorsqu'on utilise le MCR comme déclencheur de défaut plutôt que le SCR.

5. Conclusion

Fournir une valeur *mark-to-model* à l'actif d'un fonds commun de titrisation mutualisation des dettes subordonnées d'organismes non cotés est un exercice *a priori* complexe et nécessite une mesure de la probabilité de défaut de chaque entité concernée.

En supposant que seuls les risques financiers peuvent être couverts et que les risques d'assurance ne le sont pas, la modélisation des bilans proposée dans GUIBERT et *al.* [2012] permet de construire les flux de ressources du FCT et d'en déduire la valeur de ce dernier.

Disposer d'un modèle de valorisation de ce type d'instruments de financement doit faciliter leur émission, en permettant aux acteurs de disposer d'une base de discussion autour de la valeur, aussi bien au moment de l'émission que sur un éventuel marché secondaire. Comme cela est usuel, le fait de disposer d'un modèle de valorisation permet également une approche en risque en permettant une correspondance entre variation de facteurs de risques d'une part et impacts sur la valeur d'autre part.

Pour la valorisation de l'émission au passif de l'assureur, il paraît naturel de valoriser au nominal au moment de l'émission pour des raisons de cohérence, la question des méthodes de réévaluations ultérieures restant posée : convient-il de mettre à jour en fonction de l'évolution de l'ensemble des paramètres comme le voudrait une approche en *full fair-value* ou de le faire en figeant le *spread* de crédit à l'émission comme cela est prévu pour les émissions obligataires dans le cadre des normes IFRS ? Il s'agit de questions qui ne sont pas encore totalement tranchées à notre connaissance pour le bilan prudentiel sous Solvabilité 2.

Il est intéressant de noter que la valeur modélisée ici repose sur une hypothèse de continuité d'activité, conformément à la réalité du FCT, alors que la valorisation dans le bilan prudentiel des passifs sous-jacents (*i.e.* le *best estimate*) se fait quant à elle sous une hypothèse de *run-off* pour les contrats résiliables à l'initiative de l'assureur et de primes futures des contrats en cours pour ceux qui ne le sont pas.

Les impacts de ces écarts entre hypothèse prudentielle et réalité économique sur l'efficacité de ce type d'instrument dans le pilotage de la solvabilité réglementaire pourront faire l'objet de travaux ultérieurs. Par exemple le seuil de déclenchement de défaut, considéré ici sur des hypothèses liées à la réglementation prudentielle MCR ou SCR, pourrait être défini sur des bases économiques plus en cohérence avec le niveau de risque réel du fonds.

Un autre axe de recherches ultérieures possible concerne les problématiques d'aléa moral et l'analyse de l'impact de la titrisation des dettes subordonnées *via* le fonds sur le comportement individuel des entités face au risque. Ce sujet est bien identifié s'agissant de la titrisation en général, mais rarement quantifié dans les modèles de valorisation.

Enfin, la modélisation proposée ici reste centrée sur la valorisation, donc sur le calcul d'une espérance, ce qui évite de considérer la structure de dépendance entre les entités. La construction d'indicateurs de risque pour le fonds tels que le niveau de la perte (pour le fonds) en cas de défaut d'une (ou plusieurs) entité(s) pourrait être envisagée, sous réserve de construire une telle structure de dépendance, par exemple dans le cadre d'un modèle à choc commun.

6. Références

- BONNIN F., COMBES F., PLANCHET F., TAMMAR M. [2015] « [Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l'ORSA](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 14, n°28.
- BONNIN F., JUILLARD M., PLANCHET F. [2014] « [Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA](#) », *European Actuarial Journal*, doi: 10.1007/s13385-014-0086-z.
- CUMMINS J.D. [1988] « Risk-Based Premiums for Insurance Guaranty Funds », *Journal of Finance*, 4.
- DUFFIE D., SINGLETON K.J. [2003] *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*, Princeton University Press.
- EWALD F. (Editeur) [2013] *Gestion d'une entreprise d'assurance*, Collection : Management Sup, Paris : Dunod.
- GUIBERT Q., JUILLARD M., NTEUKAM T. O., PLANCHET F. [2014] *Solvabilité Prospective en Assurance - Méthodes quantitatives pour l'ORSA*, Paris : Economica.
- GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2012] « [Measuring Uncertainty of Solvency Coverage Ratio in ORSA for Non-Life Insurance](#) », *European Actuarial Journal*, 2:205-226, doi: 10.1007/s13385-012-0051-7.
- GUILLAUMAT DE BLIGNIERES A., MILANESI J.P. [2014] « Les conséquences de Solvabilité II sur le financement des entreprises », Conseil Économique et Social, Étude n°2014-06.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] [Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques](#) - seconde édition revue et augmentée, Paris : Economica (première édition : 2005).
- VASICEK O. [1977] « An equilibrium characterisation of the term structure », *Journal of financial economics*, vol. 5, 177-188.