

Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée

Application à un régime de rentes

Frédéric Planchet* **Marc Juillard^ψ** **Pierre-E. Thérond^α**

ISFA – Laboratoire SAF^β
Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1
WINTER & Associés^γ

Résumé

L'objectif de ce travail est de proposer un modèle réaliste et opérationnel pour mesurer le risque systématique associé à la construction de tables de mortalité prospectives. Une application du modèle à l'évaluation de l'engagement d'un engagement de retraite est proposée. Le modèle présenté est construit sur la base d'un modèle de Lee-Carter. Les tables prospectives stochastiques sont obtenues en modélisant l'incertitude attachée au paramètre de tendance du modèle.

MOTS-CLEFS : Tables prospectives, extrapolation, lissage, rentes viagères, mortalité stochastique.

Abstract

The aim of this paper is to propose a realistic and operational model to quantify the systematic risk of mortality included in an engagement of retirement. The model presented is built on the basis of model of Lee-Carter. The stochastic prospective tables thus built make it possible to project the evolution of the random mortality rates in the future and to quantify the systematic risk of mortality.

KEYWORDS: Prospective tables, extrapolation, adjustment, life annuities, stochastic mortality.

Mars 2008 – version 1.0

* Frédéric Planchet est docteur en sciences de gestion, Professeur associé à l'ISFA et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : fplanchet@winter-associés.fr

^ψ Marc Juillard est actuaire chez WINTER & Associés. Contact : mjuillard@winter-associés.fr

^α Pierre Thérond est docteur en sciences de gestion, chargé de cours à l'ISFA et actuaire chez WINTER & Associés. Contact : ptherond@winter-associés.fr

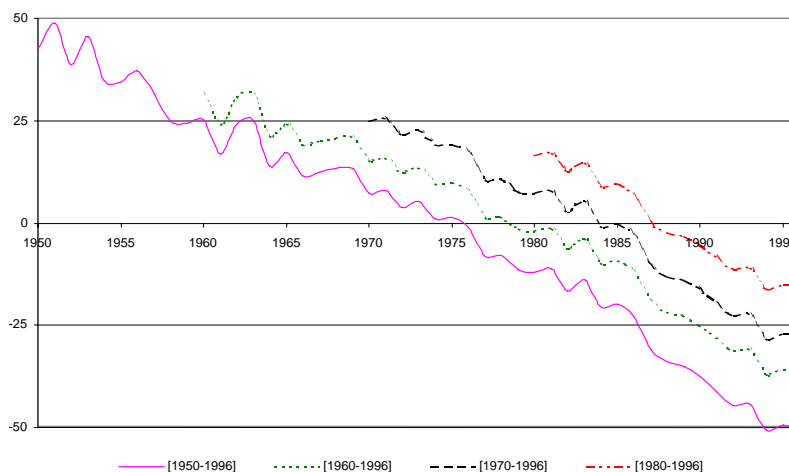
^β Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 – France.

^γ WINTER & Associés – 43-47 avenue de la Grande Armée - 75116 Paris et 18 avenue Félix Faure - 69007 Lyon – France.

1. Introduction

Lors de la construction d'une table de mortalité prospective par la méthode de Lee & Carter (1992) ou l'un de ses dérivés (cf. Planchet & Thérond (2006)), on est conduit à estimer la tendance future au travers de la modélisation du coefficient $(k_t, t \geq t_M)$. Cette modélisation met en général en évidence une tendance linéaire. Deux risques sont attachés à cette modélisation. On constate tout d'abord que si la forme de la tendance est robuste, notamment relativement au choix de la période d'observation, son niveau ne l'est pas comme l'illustre la Figure 1 qui reprend la tendance estimée à partir de différentes périodes d'observation sur les données nationales françaises.

Figure 1 - Tendances estimées dans Lee-Carter en fonction de la période d'observation



La prise en compte de ce risque est abordée dans Planchet [2007].

Quand bien même la tendance serait correctement positionnée, les fluctuations autour de cette tendance, et notamment les chocs à la baisse, font porter aux engagements d'assurance en cas de vie à long terme (essentiellement les rentes viagères en cours de service ou différées) un risque systématique qu'il convient de quantifier.

En effet, qu'il s'agisse du pilotage d'un régime de rentes ou uniquement de l'évaluation de son engagements, ce point est particulièrement important. Dans le projet Solvabilité 2, les tests d'impacts quantitatifs effectués par les assureurs en vue de calibrer la future formule standard d'évaluation de l'exigence de fonds propres intègrent le risque de longévité au travers d'un choc à la baisse sur les taux de mortalité de la table *best estimate*. Dans une approche de type modèle interne, il faudra, en toute rigueur, modéliser les chocs sur les niveaux de mortalité futurs d'autant plus que ceux-ci sont généralement systématiques et ne se mutualisent pas par l'effet taille du portefeuille.

Cette observation conduit à rechercher une modélisation de la tendance qui, tout en respectant l'allure générale linéaire, prenne en compte des chocs dissymétriques importants tels qu'on peut les observer sur les données

historiques. Nous proposons ici une telle approche et l'appliquons à la mesure du risque systématique porté par un régime de rentes viagères. En pratique, l'hypothèse de mortalité déterministe est donc remplacée par une hypothèse de mortalité stochastique, l'incertitude sur la table traduisant la volatilité associée aux déviations par rapport à la tendance de référence.

Il s'avère que ce risque est potentiellement non négligeable, et doit dès lors être pris en compte dans le cadre des normes comptables IFRS ainsi que dans le contexte des règles prudentielles Solvabilité 2. Le présent article complète les analyses présentées dans Planchet et al. (2006) et Planchet et Juillard (2007), auquel le lecteur pourra se référer pour les détails méthodologiques des modèles de base.

Ce travail s'articule en deux parties. Dans la première, le modèle de tendance est spécifié puis estimé sur des données nationales françaises. Dans la seconde, sur les bases de ce modèle, l'analyse du risque d'un régime de rentes viagères en cours de service est proposée.

2. Le modèle de mortalité

2.1. Présentation

Le modèle retenu pour construire les tables prospectives est un modèle stochastique adapté du modèle de Lee et Carter (1992). On rappelle que la modélisation proposée pour le taux instantané de mortalité dans Lee-Carter est la suivante :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt},$$

avec les notations usuelles (x indice l'âge et t la génération) et en supposant les variables aléatoires ε_{xt} indépendantes et identiquement distribuées et que l'on dispose d'un historique $t_m \leq t \leq t_M$. La question de l'ajustement des paramètres du modèle n'est pas abordée ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux nombreuses références sur le sujet citées dans Planchet et Thérond (2006).

Une fois ajustée la surface de mortalité sur les données passées, il reste à modéliser la série (k_t) pour extrapoler les taux futurs ; pour cela, on utilise la modélisation la plus simple que l'on puisse imaginer, une régression linéaire en supposant une tendance affine :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

avec (γ_t) un bruit blanc.

Toutefois, alors que dans les approches usuelles, ce bruit est supposé gaussien ou suivre un processus ARIMA, on le suppose ici décrit par un modèle conditionnel, qui distingue trois plages parmi les résidus de l'ajustement des (k_t) empiriques :

- la proportion p_- des résidus les plus petits,
- la proportion p_+ des résidus les plus grands ; et
- les $1 - (p_- + p_+)$ résidus centraux, faibles en valeur absolu.

Compte tenu du faible nombre de données disponibles (une cinquantaine d'observations) et du fait que l'on s'intéresse ici aux grandes variations par rapport à la tendance (les faibles écarts étant sans incidence pratique), on fixe arbitrairement $p_- = p_+ = 0,429$. De plus, on suppose que l'écart positif γ_t^+ par rapport à la valeur tendancielle¹ suit une loi de Pareto de paramètre (m_+, α_+) et l'écart γ_t^- est distribué selon une loi Pareto de paramètre (m_-, α_-) .

On retient la paramétrisation suivante de la loi de Pareto :

$$S_{m,\alpha}(x) = \left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha}, \quad x \geq m.$$

Le découpage en trois plages de taille équivalente proposé ici est essentiellement justifié par le fait que l'on s'intéresse aux déviations importantes par rapport à la tendance. Ces déviations ne doivent pas être sensiblement impactées par le choix du début de la plage. Le choix de distributions de Pareto est dans la même logique, l'idée étant de rechercher un modèle compatible avec les observations générant une part importante de risque systématique.

L'estimation des paramètres du modèle est effectuée en deux temps. On calcule tout d'abord des estimateurs \hat{a} et \hat{b} qui permettent de construire la surface projetée de référence en utilisant simplement $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$ via un ajustement de moindres carrés ordinaires. Afin de simplifier l'écriture des formules à venir, on pose $\tau = t - t_m + 1$ et $T = t_M - t_m + 1$, ce qui conduit aux expressions :

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{T} \sum \tau k_\tau - \frac{T+1}{2} \bar{k}}{T^2 - 1},$$

et

$$\hat{b} = \bar{k} - \frac{T+1}{2} \hat{a},$$

avec $\bar{k} = \frac{1}{T} \sum k_\tau = \frac{1}{T} \sum k_t$.

Cette première étape d'estimation n'est donc pas effectuée dans un contexte probabiliste, mais via un simple critère de moindres carrés. Dans un second temps, on estime les paramètres des déviations m_+ , m_- , α_- et α_+ par la méthode du maximum de vraisemblance :

$$\hat{m}_+ = \min \left\{ \gamma_{(i)}; i \geq n \times p_+ \right\}, \quad \hat{m}_- = -\max \left\{ \gamma_{(i)}; i \leq n \times p_- \right\}$$

¹. Il s'agit donc de l'écart entre la valeur empirique et la valeur tendancielle ajustée par les moindres carrés.

$$\hat{\alpha}_+ = \frac{[n \times p_+]}{\sum_{i=1}^{n_+} \ln\left(\frac{\gamma_i}{\hat{m}_+}\right)}, \quad \hat{\alpha}_- = \frac{[n \times p_-]}{\sum_{i=1}^{n_-} \ln\left(\frac{-\gamma_i}{\hat{m}_-}\right)},$$

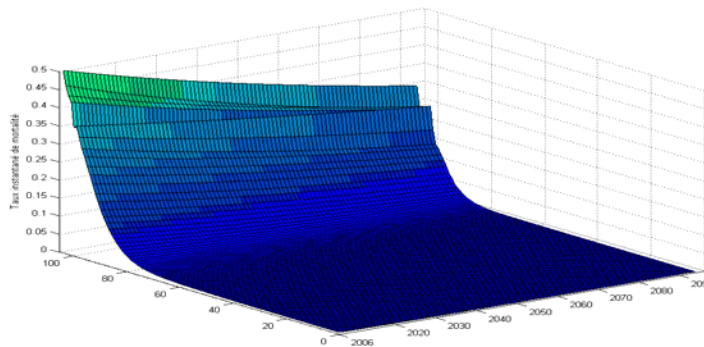
où $(\gamma_{(i)})$ est la statistique d'ordre associée à (γ_i) .

La qualité de l'ajustement est évaluée en effectuant des tests de Khi-2 sur les distributions conditionnelles des déviations positives (resp. négatives).

2.2. Application numérique

La table prospective utilisée dans cette étude est celle utilisée dans Planchet et al. (2006) ; elle est construite à partir des tables du moment fournies par l'INED² dans Mesle et Vallin (2002) et conduit à la surface de mortalité Lee-Carter représentée sur la Figure 2.

Figure 2 - Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter



Les paramètres du modèle stochastique sont résumés dans le tableau suivant.

	Résidus négatifs		Résidus Positifs
p-	42,9 %	p+	42,9 %
M-	1,4385	M+	1,3878
α -	1,13	α +	1,1105

3. Application à un régime de rentes viagères

3.1. Le portefeuille

Dans la suite, nous utiliserons pour les applications numériques un portefeuille constitué de 374 rentiers de sexe féminin âgés en moyenne de 63,8 ans à la fin de l'exercice. La rente annuelle moyenne s'élève à 5,5 k€. Avec un taux d'escompte des provisions de 2,5 %, la provision mathématique

². Ces tables sont disponibles sur : <http://www.ined.fr/>

initiale, s'élève à 37,9 M€ avec la table prospective déterminée *supra*. Nous noterons dans la suite de l'article :

- L_0 le montant des provisions mathématiques à la date initiale,
- \tilde{F}_t le flux de prestation (aléatoire) à payer à la date t ,
- i le taux (discret) d'escompte des provisions mathématiques,
- \mathbf{J} l'ensemble des individus,
- $x(j)$ l'âge en 0 de l'individu j et r_j le montant de sa rente annuelle.

3.2. Problématique

La problématique est décrite de manière détaillée dans Planchet et al. (2006). Nous retiendrons ici que l'on s'intéresse à la loi de du montant de l'engagement du régime :

$$\Lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{F}_t (1+i)^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \sum_{j \in \mathbf{J}} r_j \times \mathbf{1}_{]t; \infty[} (T_{x(j)}),$$

qui est une variable aléatoire telle que $E(\Lambda) = L_0$, avec $L_0 = \sum_{t=1}^{\infty} F_t (1+i)^{-t}$.

Lorsque la mortalité future est supposée connue (approche dite « déterministe » dans la suite), l'analyse de la loi de Λ revient à mesurer les fluctuations d'échantillonnage. Dans le contexte d'une mortalité stochastique, cette analyse nous fournit un moyen de quantifier le risque systématique qui vient s'ajouter à ce risque de base. Nous pourrions donc mesurer ainsi le risque associé au choix de la dérive. Ace stade, on peut d'ores et déjà remarquer que, même lorsque les paramètres des lois de Pareto perturbatrices sont strictement inférieurs à 1, l'engagement reste intégrable, puisque cette variable est bornée supérieurement (par la table dans laquelle tous les individus sortent à 120 ans).

La méthode retenue consiste à simuler les durées de survie des rentiers, $T_{x(j)}$, $j \in \mathbf{J}$, à calculer des réalisations $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de Λ puis à déterminer la fonction de répartition empirique de l'engagement. La provision L_0 est approchée par $\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n$. La variance de l'engagement est estimée par

$\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\lambda_n - L_0)^2$; on calcule également le coefficient de variation empirique :

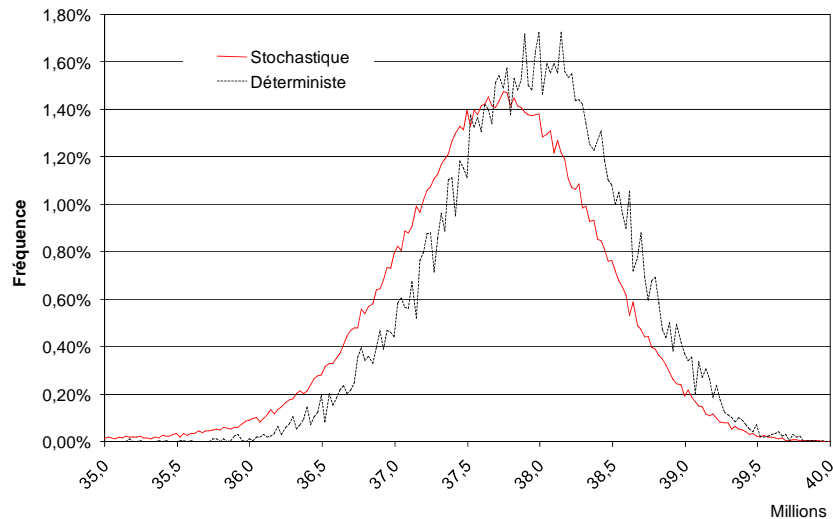
$$cv = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\lambda_n - L_0)^2}}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n},$$

qui fournit un indicateur de la dispersion de l'engagement et dans une certaine mesure de sa dangerosité.

3.3. Résultats

La distribution empirique de l'engagement, représentée ici avec la distribution de référence dans le cas déterministe (avec 20 000 tirages) est présentée sur la Figure 3.

Figure 3 - Distribution empirique de l'engagement



Les résultats détaillés sont repris dans le Tableau 1.

Tableau 1 - Statistiques descriptives de l'engagement

	Déterministe	Stochastique
Espérance	37 937 707	37 380 862
Ecart-type	626 918	2 418 408
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 625 000	34 295 073
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 075 000	38 945 073
Coefficient de variation	1,65 %	6,47 %

Même sur un portefeuille de petite taille, l'impact de la mortalité stochastique sur la structure de l'engagement est important. On constate deux effets :

- le coefficient de variation de l'engagement est multiplié par 3 par rapport à la situation de non prise en compte du risque systématique ;
- l'engagement moyen diminue, du fait de l'impact des chocs à la hausse sur les taux de décès.

Les conséquences en termes de gestion du risque sont donc contrastées : la vision *best estimate* de l'engagement est revue à la baisse, mais la présence d'un risque systématique conduit à calibrer une marge pour risque tenant compte de la plus forte volatilité. Au global, il n'est pas certain que le montant change notablement, mais sa décomposition (en terme d'en terme d'espérance

et de marge pour risque) dans les logiques prudentielles (Solvabilité 2) et comptable (IFRS phase 2) est revue de manière sensible.

Cependant comme nous l'avons montré dans Planchet et al. (2006) la taille du portefeuille est un paramètre important à prendre en compte. En effet, si le niveau absolu de risque systématique ne dépend pas de la taille du portefeuille, il n'en va pas de même pour le risque mutualisable. La part de variance expliquée par la composante stochastique de la mortalité augmente donc avec la taille du portefeuille ; afin de mesurer cet effet, on construit un portefeuille fictif en répliquant le portefeuille de base n fois. En observant que l'on obtient ainsi une décomposition de l'engagement total Λ en la somme de n variables i.i.d. $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}$ on trouve que :

$$\text{Var}[E(\Lambda|\Pi)] = n^2 \text{Var}[E(\Lambda^{(1)}|\Pi)],$$

et

$$E[\text{Var}(\Lambda|\Pi)] = nE[\text{Var}(\Lambda^{(1)}|\Pi)],$$

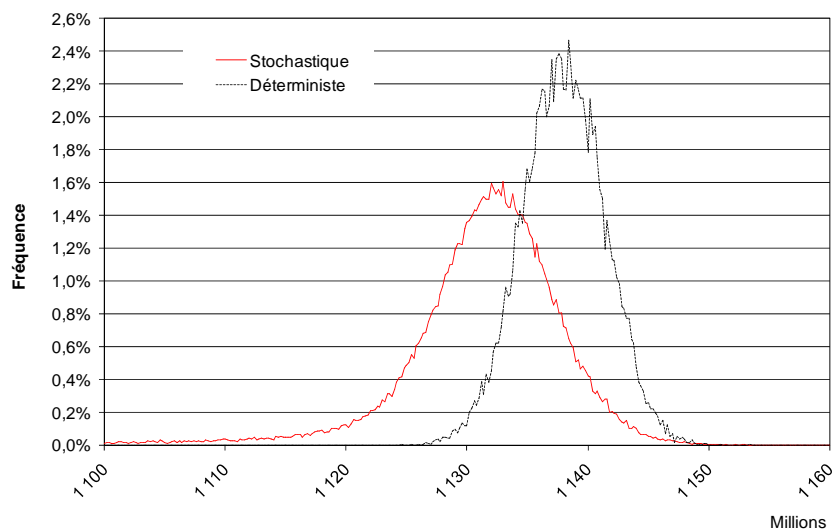
ce qui conduit, avec des notations évidentes, à :

$$\omega_n = \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)\right)^{-1}$$

avec $\omega = \frac{\text{Var}[E(\Lambda|\Pi)]}{\text{Var}[\Lambda]}$.

Si l'on multiplie la taille du portefeuille par 30, on obtient les résultats présentés sur la Figure 4.

Figure 4 - Distribution empirique de l'engagement (taille x30)



Les résultats détaillés sont repris dans le Tableau 2.

Tableau 2 - Statistiques descriptives de l'engagement (portefeuille triplé)

	Déterministe	Stochastique
Espérance	1 138 008 113	1 121 529 390
Ecart-type	5 592 212	69 931 571
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	1 131 130 658	1 032 811 610
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	1 144 480 658	1 141 811 610
Coefficient de variation	0,30 %	6,24 %

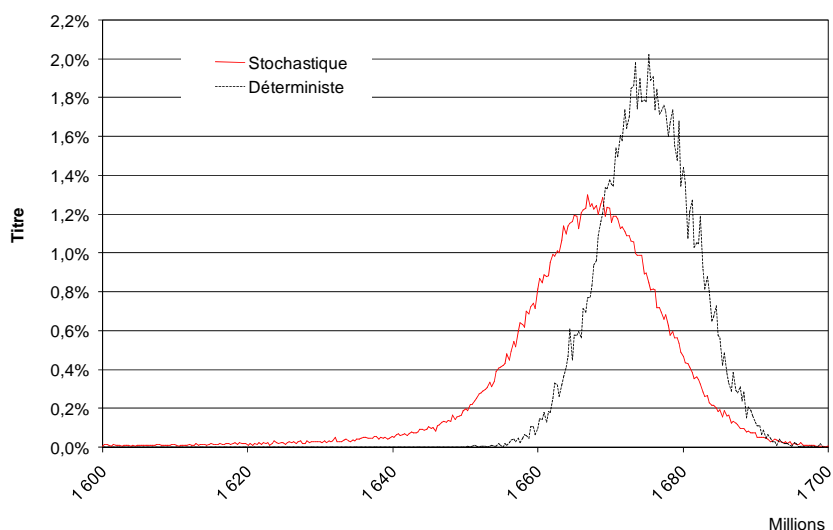
La prise en compte de la mortalité stochastique multiplie le coefficient de variation par 20 en réintroduisant une source de risque.

Dans une approche *value-at-risk* (VaR), on trouve que le quantile à 75 % de la distribution de l'engagement est de 1 135 M€ dans le cas stochastique, ce qui est très légèrement inférieur à la valeur obtenue dans le cas déterministe, soit 1 140 M€. En d'autres termes, la prise en compte du risque de dérive conduit ici (en suivant une approche VaR pour le calcul de la provision) à baisser marginalement le montant provisionné de 0,17 %.

La prise en compte du risque de dérive a également pour conséquence d'augmenter très significativement l'imprécision dans l'évaluation de l'engagement³ qui, au niveau de confiance de 95 %, passe de [-0,7 % ; 0,7 %] environ à près de [-7,9 % ; 1,8 %].

Par ailleurs l'engagement stochastique tire sa volatilité des rentes qui vont être servies pendant longtemps. Or, plus la durée de vie de la rente est importante, plus le coefficient d'actualisation est important. En fixant le taux d'actualisation nul, on obtient les résultats présentés sur la Figure 5.

Figure 5 - Distribution empirique de l'engagement (taux technique nul)



Les résultats détaillés sont repris dans le Tableau 3.

³. L'imprécision est mesurée par la longueur relative de l'intervalle de confiance à 95 %.

Tableau 3 - Statistiques descriptives de l'engagement (actualisation nulle)

	Déterministe	Stochastique
Espérance	1 675 256 646	1 647 334 981
Ecart-type	6 389 153	122 294 843
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	1 662 554 600	1 465 849 300
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	1 687 754 600	1 685 449 300
Coefficient de variation	0,38 %	7,42 %

En prenant un taux technique nul on augmente le coefficient de variation de l'engagement déterministe de 27 % et le coefficient de variation de l'engagement stochastique de 19 %. Ainsi la prise en compte de la mortalité stochastique induit une plus grande sensibilité de l'engagement au taux d'actualisation.

4. Conclusion

On propose ici un modèle qui intègre explicitement dans les calculs de provision d'un régime de rentes viagères l'incertitude dans la détermination de la tendance à long terme lors de l'ajustement de cette tendance.

Si le niveau de provision n'est pas sensiblement impacté par ce changement, la structure de la provision change : le *best estimate* est revu à la baisse et la marge pour risque à la hausse du fait de ce risque systématique. Ce modèle nous semble de ce fait mieux à même de rendre compte du risque porté par le régime de rente en permettant une segmentation plus pertinente du montant de l'engagement entre les différentes sources de risque.

Bibliographie

- Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K. (2002) « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economic* 31, 373-93.
- Lee R.D., Carter L. (1992) « Modelling and forecasting the time series of US mortality », *Journal of the American Statistical Association* 87, 659–71.
- Lee R.D. (2000) « The Lee–Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications », *North American Actuarial Journal* 4, 80–93.
- Planchet F., Juillard M., Faucillon L. (2006) « Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service », *Assurance et gestion des risques* 75, XXX.
- Planchet F. (2007) « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress*
- Planchet F., Thérond P.E. (2006) *Modèles de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.
- Planchet F., Thérond P.E. (2007) *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.
- Sithole T., Haberman S., Verrall R.J. (2000) « An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners », *Insurance: Mathematics and Economics* 27, 285–312.