

BULLETIN DES ACTUAIRES

VF 1117

L'engagement d'un régime de retraite supplémentaire à prestations définies

Auteurs :

Frédéric PLANCHET
Actuaire I.A.F.

Fabrice MAGNIN
Actuaire I.S.F.A.

® RESUME

Au cours de cet article, nous envisagerons différents aspects de l'engagement d'un régime de retraite à prestations définies. Nous chercherons à déterminer la valeur actuelle probable de la charge de retraite future. Cette grandeur intéresse bien sûr en priorité les dirigeants du régime puisqu'elle représente une estimation du montant nécessaire pour faire face aux engagements pris.

Cependant, "l'approche *VAP*", si elle répond de manière concise à une question importante, n'est pas suffisante pour gérer de manière prudente et réactive le régime. En effet, les conditions démographiques, économiques et financières liées au service des prestations sont soumises à des événements fortement aléatoires sur une très longue période : l'estimateur de la valeur actuelle probable ne peut donc pas être considéré comme le seul critère de gestion du régime.

C'est pourquoi il est nécessaire de se doter d'autres moyens pour évaluer le degré de confiance à accorder à la *VAP*. L'écart type de la valeur actuelle des engagements permet ainsi de mesurer la dispersion de l'échantillon des valeurs actuelles autour de la moyenne. En outre, la variance présente l'avantage de se décomposer naturellement en risque d'investissement et risque d'assurance ce qui permet d'analyser l'incertitude liée aux deux principales sources d'aléa et de disposer d'indicateurs de risque pertinents.

Dans cet article, l'approche retenue pour prendre en compte le caractère aléatoire des différents paramètres a été d'abord de choisir un modèle de taux tel qu'on puisse obtenir des expressions exactes pour l'espérance et la variance de la valeur actuelle de l'engagement du régime avant de choisir un modèle en temps continu en procédant à des simulations par la méthode de *Monte-Carlo*. On utilise ensuite les méthodes classiques d'estimation sur les échantillons obtenus : ainsi, la mortalité et le turnover de chaque individu traité est simulé en tirant au sort, pour chaque période, des nombres entre 0 et 1 puis en les comparant aux taux de sortie des tables utilisées. De même, selon le modèle de taux choisi - binomial ou racine carrée - le tirage revient à un moment ou à un autre à simuler une variable aléatoire de *Loi Uniforme sur [0;1]* :

- ♦ Modèle binomial : le résultat du tirage au sort est comparé avec la probabilité de hausse ou de baisse des taux.
- ♦ Modèle en racine carrée : le résultat du tirage au sort sert à simuler une *Loi Normale sur [0;1]*.

Ces simulations ont également permis d'obtenir des échantillons constitués d'observations de la variable aléatoire "Valeur Actuelle de l'engagement de l'employeur". Ces échantillons, grâce à un logiciel statistique, ont pu être ajustés à des lois continues de type *Bêta II* dont les paramètres varient selon les hypothèses retenues et le nombre d'itérations réalisées. La loi de leur engagement n'est certes pas ce qui intéresse le plus vivement les dirigeants des régimes de retraite ; cependant, elle est un point de départ indispensable pour une étude statistique et probabiliste plus poussée. En particulier, elle permet d'obtenir des intervalles de confiance asymptotiques pour l'engagement du régime.

← MOTS CLEFS

engagement, prestations définies, facteurs aléatoires, risque de taux, risque d'assurance, modèle binomial, modèle en racine carrée



INTRODUCTION

Les retraites à prestations définies, qu'ils revêtent la forme de régimes d'entreprise (régime supplémentaire) ou de régimes obligatoires (régimes fonctionnaires, régime de la Banque de France, caisse de retraite marocaine etc.), sont l'objet d'engagements à long terme qu'ils convient d'apprécier au mieux compte-tenu d'hypothèses macro-économiques, pas toujours favorables (réductions d'effectifs, vieillissement de la population).

Nous nous attacherons au cours de cet article à décrire le plus précisément possible la valeur actuelle des engagements futurs d'un tel régime.

Notre étude se décompose en trois parties principales. Dans un premier temps, nous décrivons le contexte du modèle mis en place avec les notations, hypothèses et méthodes utilisées. La seconde partie présentera le cas du modèle discret pour lequel nous obtenons des formules explicites pour le calcul de la VAP de l'engagement. Enfin, la troisième partie abordera le cas du modèle en racine carrée et ses algorithmes de résolution.

PARTIE A. LE MODELE GENERAL : NOTATIONS, HYPOTHESES ET METHODES

I. LES FACTEURS ALEATOIRES PRIS EN COMPTE

Les facteurs responsables du caractère aléatoire de l'engagement de le régime sont nombreux ; nous ne présentons que ceux dont la prise en compte paraît indispensable à un modèle rigoureux. Ils se répartissent en trois catégories : les facteurs démographiques, économiques et sociaux.

1. Les facteurs démographiques

On entend par facteur démographique, tout événement dont la réalisation incertaine est susceptible de modifier l'effectif ou la nature du groupe des adhérents - actifs ou retraités - au régime de retraite.

Dans ce paragraphe, il faut entendre le terme "mortalité" au sens large : il recouvre toutes les causes de sortie du groupe des individus, actifs ou inactifs, présents dans le fonds de retraite. Les causes de sortie retenues seront le décès proprement dit, le turnover et éventuellement l'invalidité.

Ces causes de sortie sont celles que l'on peut généralement retenir pour la modélisation d'un fonds de retraite : néanmoins, la théorie présentée ici et connue sous le nom de "*Multiple Decrement Models*"¹ s'applique à un nombre de causes de sortie m quelconque.

L'objectif est de connaître, pour chaque âge, la probabilité - relative à une ou plusieurs causes - de présence ou de sortie du groupe. On notera ces fonctions de probabilité de manière classique :

$${}_t p_x, {}_t q_x$$

mais avec l'indice supérieur (j) lorsque la cause de sortie est j et avec (τ) lorsqu'on se réfère à toutes les causes.

¹ Référence : "*Actuarial Mathematics*" BOWER, GERBER, HICKMAN, JONES & NESBITT, Society of Actuaries

Dans cette étude, les sorties sont décrites de manière non paramétrique par la donnée de la suite des effectifs, notés l_x , des personnes restant dans le groupe en partant d'une population d'effectif arbitraire à un âge initial. Cette table de sorties multiples résulte du cumul des tables relatives à chaque cause de sortie : les fonctions $d_x^{(j)}$ désignent le nombre de sorties à l'âge x dues à la cause j .

On s'intéresse ici à la définition et aux relations qui existent entre les fonctions ${}_t p_x^{(\tau)}$, ${}_t q_x^{(\tau)}$, ${}_t p_x^{(j)}$, ${}_t q_x^{(j)}$ et $d_x^{(j)}$.

On définit deux variables aléatoires réelles : la première, notée $T(x)$, est continue et désigne le temps avant la sortie de la tête d'âge x ; la seconde, notée J , est discrète et désigne la cause de sortie. L'objectif est de déterminer la distribution conjointe de T et J et les distributions marginales et conditionnelles induites.

On définit donc les fonctions suivantes :

$$f(t, j)dt = \Pr(t < T \leq t + dt, J = j)$$

$$h(j) = \Pr(J = j)$$

$$g(t)dt = \Pr(t < T \leq t + dt)$$

et on a les relations :

$$\sum_{j=1}^m h(j) = 1$$

$$\int_0^{\infty} g(t)dt = 1$$

La probabilité de sortie due à la cause j avant la date t pour (x) est alors définie par :

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t f(s, j)ds$$

et comme

$$g(t) = \sum_{j=1}^m f(t, j)$$

on a :

$${}_t q_x^{(\tau)} = \Pr(T \leq t) = \int_0^t g(s)ds$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = \Pr(T > t) = 1 - {}_t q_x^{(\tau)}$$

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}} \frac{d}{{}^t dt} {}_t q_x^{(\tau)}$$

On peut définir de même le taux de sortie dû à la cause j par :

$$\begin{aligned}\mu_{x+t}^{(j)} &= \frac{f(t, j)}{{}_t p_x^{(\tau)}} \\ &= \frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} {}_t q_x^{(j)}\end{aligned}$$

Les probabilités de sorties ${}_t q_x^{(j)}$ sont définies par la relation suivante :

$${}_t q_x^{(j)} = \Pr(0 < T \leq t, J = j) = \int_0^t f(s, j) ds$$

On a donc :

$$\begin{aligned}{}_t q_x^{(\tau)} &= \int_0^t g(s) ds \\ &= \int_0^t \sum_{j=1}^m f(s, j) \cdot ds \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^t f(s, j) ds \\ &= \sum_{j=1}^m {}_t q_x^{(j)}\end{aligned}$$

Il faut remarquer que les probabilités de sortie par causes notées ${}_t q_x^{(j)}$ ne sont pas à proprement parler des probabilités de décès classiques en ce sens qu'elles ne sont pas définies, pour chaque table marginale, par la relation :

~~$${}_t q_x^{(j)} = \frac{l_x^{(j)} - l_{x+t}^{(j)}}{l_x^{(j)}}$$~~

mais le nombre de décès dus à la cause (j) doit être rapporté aux effectifs de la table conjointe, c'est-à-dire aux individus ayant "survécu" à toutes les causes de sorties :

$${}_t q_x^{(j)} = \frac{l_x^{(j)} - l_{x+t}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}$$

On a alors les formules de passage suivantes :

$$\begin{aligned}l_x^{(\tau)} &= l_a^{(\tau)} {}_{x-a} p_a^{(\tau)} \\ d_x^{(j)} &= l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}\end{aligned}$$

2. Les facteurs économiques et sociaux

2.1. Les modèles de taux

Un des éléments importants de notre démarche est le choix d'un modèle de taux permettant d'actualiser les prestations probables futures de le régime au titre du régime de retraite. Dans la mesure où les engagements de retraite s'inscrivent sur le très long terme, le choix d'un taux d'actualisation s'avère à la fois primordial et difficile.

En pratique, nous avons retenu deux modèles : le premier consiste en une évolution binomiale des taux, le second en une évolution selon un processus dit "*en racine carrée*". Une distinction importante de ces deux modèles réside dans la possibilité ou non d'obtenir des formules analytiques explicites. Nous verrons que le modèle binomial permet, sous certaines conditions, d'obtenir une formulation simple alors que pour le modèle en temps continu, nous devons faire appel à des algorithmes numériques.

2.2. L'évolution de carrière et la revalorisation des prestations

Pour obtenir un modèle d'évaluation des engagements de retraite de le régime, il faut également tenir compte des revalorisations éventuelles des prestations accordées aux retraités (nous retiendrons un taux constant de revalorisation) et de l'évolution de carrière supposée des actifs constituant le groupe. En effet, dans l'hypothèse où les prestations sont calculées en prenant comme assiette une ou plusieurs des dernières années de rémunération, il convient d'intégrer dans le modèle l'évolution future des rémunérations des adhérents. Pour ce faire, nous utiliserons une échelle de salaire permettant de mesurer l'accroissement du salaire entre deux âges.

Ces différents facteurs vont nous permettre de décrire les modèles complets et d'étudier la variable aléatoire VA .

II. LE CALCUL DES ELEMENTS DE VALORISATION DE VA :

On considère ici un groupe de adhérents actifs constitués de Λ individus.

1. Les notations

Soit $j \in \{1, 2, \dots, \Lambda\}$, on note :

x^j : l'âge d'entrée dans l'entreprise du salarié (j).

$x^j + h^j$: l'âge actuel de ce salarié.

$x^j + h^j + t^j$: l'âge de départ à la retraite de ce salarié.

$(SA)_{x^j+h^j}^j$: le salaire actuel de ce salarié.

Ω : la durée maximale sur laquelle on projette les flux ; cette durée est majorée par l'âge limite de la table de décès ; on prendra en pratique cet âge limite moins l'âge minimal d'entrée dans le régime ($a_i = 16$ ans). On introduit cette durée par commodité d'écriture en considérant que quand on dépasse l'âge limite de la table de décès, la probabilité de service est nulle.

$P_i^j(x^j, h^j, t^j)$: la prestation annuelle versée à ce salarié à compter de son départ en retraite ; elle s'exprime en pourcentage d'une moyenne des salaires de fin de carrière et elle intègre l'éventuelle revalorisation annuelle.

$(F_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$: le processus de flux aléatoires versés depuis l'âge de départ en retraite s'il est atteint jusqu'au décès du salarié.

p_{t+i}^j : la probabilité de service de la prestation $P_i^j(x^j, h^j, t^j)$.

2. La variable aléatoire VA

Le processus de flux aléatoires est décrit par :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, 2, \dots, \Lambda\}, \forall i \in \mathbb{N}, F_{t+i}^j = & \quad \textcircled{1} \quad P_i^j(x^j, h^j, t^j) & \quad p_{t+i}^j = {}_{t+i}p_{x+h}^{(\tau), j} \\ & \quad \textcircled{2} \quad 0 & \quad q_{t+i}^j = 1 - p_{t+i}^j \end{aligned}$$

En supposant dans un premier temps que le taux d'actualisation r est constant et en notant le taux d'escompte $v = \frac{1}{1+r}$, on a :

$$VA^j = \sum_{i=0}^{\Omega} v^{t+i} \cdot F_{t+i}^j,$$

et :

$$VA^{Coll} = \sum_{j=1}^{\Lambda} VA^j.$$

Il est alors possible de calculer facilement et explicitement les premiers moments centrés de VA^{Coll} . Cependant, pour une évaluation rigoureuse des engagements de retraite de le régime il faut actualiser les flux au moyen d'un processus de taux aléatoire.

PARTIE B. LE CAS DES MODELES DISCRETS : FORMULES EXPLICITES

I. LA DESCRIPTION DU MODELE DE TAUX BINOMIAL

On considère ici que le temps n'est pas une variable continue mais une variable discrète et on l'envisage comme des dates successives n à valeurs dans \mathbb{N} . La date $n = 0$ représente l'instant présent et l'unité de temps retenue sera, dans un premier temps, l'année (elle pourrait aussi bien être le mois, la semaine ou le jour sans aucune restriction théorique).

L'approche retenue pour l'évolution de la structure des taux s'apparente à celle décrite par *HO & LEE*, "*Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*" : la structure actuelle des taux est considérée comme étant une donnée exogène du modèle ce qui présente l'avantage de fournir des résultats en accord avec les observations possibles du marché. Nous supposons une évolution binomiale des taux d'intérêt qui doit être rapprochée du modèle binomial utilisé par *COX, ROSS & RUBINSTEIN*, "*Option pricing a simplified approach*". *J.C. AUGROS* présente une synthèse des résultats obtenus dans le cadre d'un tel modèle d'évolution de la structure des taux dans son livre : "*Les options sur taux d'intérêt : dynamique des taux et évaluation*".

Toutefois, s'il s'inspire des précédents travaux, le modèle présenté a fait l'objet d'ajustements destinés à utiliser l'information que l'on peut avoir a priori sur l'évolution des taux.

Notations :

${}_0r_t$: taux "forward", taux d'intérêt (observable en $n = 0$) à terme applicable aux obligations zéro-coupon de maturité un an et émises au début de l'année t .

${}_0R_\tau$: taux annuel au comptant applicable aux obligations zéro-coupon émises à l'instant $n = 0$ et de maturité τ .

On a la relation suivante :

$$(1+{}_0R_\tau)^\tau = (1+{}_0r_1)(1+{}_0r_2)\dots(1+{}_0r_\tau)$$

Les taux "forward" notés ${}_0r_t$ sont ceux observables à la date d'évaluation, ils forment la courbe des taux initiale. Les taux "réels" issus du modèle seront quant à eux notés r_t .

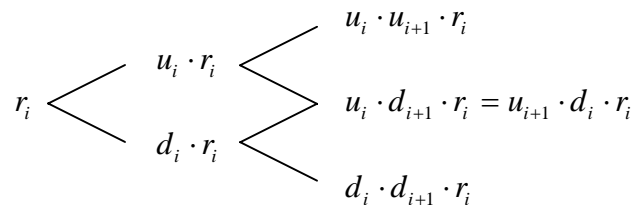
Nous envisageons ici un horizon à ω^* périodes et nous supposons que les taux "forward" évoluent d'une période à l'autre selon un processus binomial multiplicatif.

Pour la période $(i + 1)$, on note : u_i le mouvement multiplicatif à la hausse du taux d'intérêt associé à la probabilité de survenance p et d_i le mouvement multiplicatif à la baisse du taux d'intérêt associé à la probabilité de survenance $1 - p$.

On a schématiquement :

$$r_i \begin{cases} u_i \cdot r_i & \text{avec la probabilité } p \\ d_i \cdot r_i & \text{avec la probabilité } 1 - p \end{cases}$$

À la différence de l'arbre binomial classique, on ne suppose pas ici une symétrie des hausses et des baisses des taux d'intérêt mais on utilise la courbe des taux initiale pour "centrer" l'arbre d'évolution. A titre d'exemple, considérons les deux premières périodes, si le taux initial ${}_0r_0$ (correspondant au taux pour la période $[-1;0]$) subit deux mouvements inverses (hausse/baisse ou baisse/hausse), on impose que le taux observé en $n = 2$ soit le taux prévu pour cette date en $n = 0$ c'est-à-dire ${}_0r_2$.



De manière classique, en centrant l'arbre d'évolution binomiale sur une courbe des taux plate et en choisissant un modèle de taux sous-jacent tel que :

$$dr = \mu \cdot dt + \sigma_r \cdot dz ,$$

les mouvements multiplicatifs à la hausse ou à la baisse sont constants pour toutes les périodes :

$$u = \frac{1}{d} = e^{\sigma_r \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\omega^*}}}$$

où σ_r est la volatilité des taux (paramètre observable) et $\frac{\tau}{\omega^*}$ prend la valeur 1 pour des périodes annuelles, $\frac{1}{12}$ pour des périodes mensuelles, etc.. La déformation de l'arbre due à une structure non plate des taux implique alors :

$$u_i = u \cdot \frac{{}_0r_{i+1}}{{}_0r_i}$$

et

$$d_i = d \cdot \frac{{}_0r_{i+1}}{{}_0r_i} .$$

Notons que le modèle de taux sous-jacent qui conduit à l'expression de u est extrêmement simpliste et que nous pourrions aussi bien choisir un modèle plus complexe sans compliquer réellement les calculs effectués par la suite. La seule différence serait l'obtention d'une expression différente pour u .

Il ne reste désormais plus qu'à déterminer la probabilité p de hausse des taux sur une période correspondant à ce modèle. Pour cela, on écrit que l'espérance du taux "réel" en $(i + 1)$ égale le taux "a priori" prévu en $n = 0$.

Donc :

$${}_0r_{i+1} = p \cdot u_i \cdot E(r_i) + (1-p) \cdot d_i \cdot E(r_i).$$

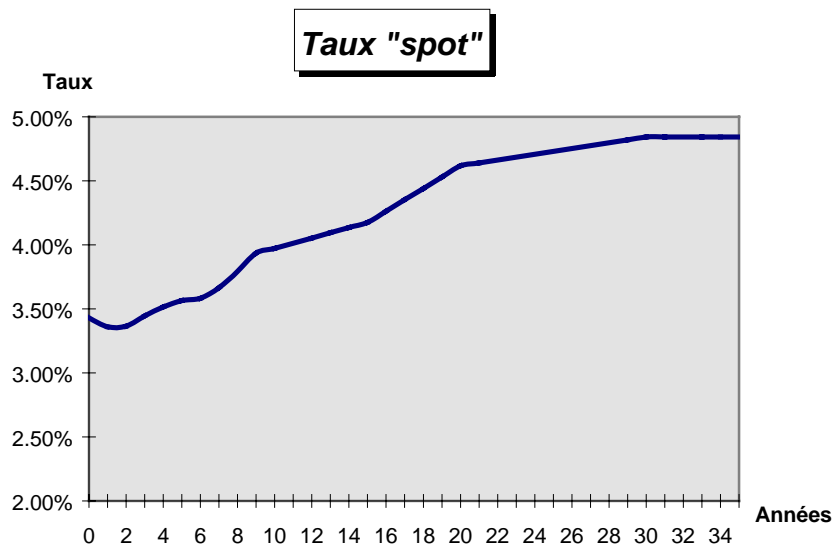
On démontre par récurrence que $E(r_i) = {}_0r_i$, on a donc :

$$p = \frac{1-d}{u-d}.$$

Ainsi, moyennant la donnée d'une structure des taux a priori et leur taux de rendement, on peut construire l'arbre binomial d'évolution.

Remarque : il est possible de simplifier la méthode décrite ci-dessus en appliquant un processus binomial multiplicatif non plus aux taux "forward" r_t mais directement aux taux au comptant R_t . Cette dernière méthode permet d'obtenir des formules explicites sur lesquelles nous reviendrons par la suite² mais elle est moins rigoureuse puisqu'elle s'appuie sur des taux de maturités différentes alors que la méthode binomiale s'applique pas à pas pour chacune des périodes considérées.

A titre d'illustration, voici un exemple de courbe de taux au comptant permettant la construction d'un arbre d'évolution :



² Paragraphe B. II. 1. 4.

II. LA RESOLUTION ANALYTIQUE DANS LE CADRE D'UN MODELE SIMPLIFIE

Afin d'obtenir des formules analytiques pour le calcul des deux premiers moments centrés de la valeur actuelle de l'engagement de l'employeur en présence de taux stochastiques, nous retiendrons le modèle binomial sur les taux au comptant³. Si cette approche n'est pas totalement rigoureuse, elle permet néanmoins de discuter le problème de la répartition du risque entre risque d'assurance et risque de taux.

On suppose donc que $R_{t+i} = \left(\prod_{s=1}^{t+i} (1+r_s) \right)^{\frac{1}{t+i}} - 1$ suit un processus binomial de sorte que :

$$R_{t+i+1} \begin{cases} u \cdot R_{t+i} & \text{avec la probabilité } p \\ d \cdot R_{t+i} & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases}$$

et la construction de l'arbre d'évolution des taux au comptant s'effectue pas par pas (année par année dans notre cas) en utilisant le fait que $u = \frac{1}{d} > 1$.

On remarque que $R_{t+i} = u^B \cdot d^{t+i-B} \cdot R_0$ où B suit une loi binomiale de paramètres $(t+i, p)$ et $R_0 = {}_0R_0 = r_0$ désigne le taux au comptant initial. Une hypothèse fondamentale pour la suite des calculs est de considérer les flux aléatoires F_{t+i} et les taux au comptant R_{t+i} comme indépendants.

On peut donc écrire l'engagement aléatoire actuel de l'employeur comme :

$$VA = \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{(1+R_{t+i})^{t+i}} \cdot F_{t+i}.$$

Par le théorème de l'espérance conditionnelle et par application de l'hypothèse d'indépendance entre les flux et les taux au comptant, on a :

$$\begin{aligned} VAP &= E(VA) \\ &= E(E(VA / R_{t+i}, i = 0, 1, \dots, \Omega)) \\ &= \sum_{i=0}^{\Omega} E\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{t+i}}\right) \cdot E(F_{t+i}) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{t+i}}\right) &= \sum_{k=0}^{t+i} \frac{1}{(1+u^k \cdot d^{t+i-k} \cdot R_0)^{t+i}} \cdot \Pr(B = k) \\ &= \sum_{k=0}^{t+i} C_{t+i}^k \cdot \frac{1}{(1+u^k \cdot d^{t+i-k} \cdot R_0)^{t+i}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{t+i-k} \end{aligned}$$

Et :

$$E(F_{t+i}) = p_{t+i} \cdot P_i(x, h, t)$$

³ Voir la remarque finale du paragraphe B. I. 3. 1.

Donc :

$$VAP = \sum_{i=0}^{\Omega} (p_{t+i} \cdot P_i(x, h, t) \cdot \sum_{k=0}^{t+i} C_{t+i}^k \cdot \frac{1}{(1+u^k \cdot d^{t+i-k} \cdot R_0)^{t+i}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{t+i-k}).$$

Pour calculer la variance de l'engagement de l'employeur, nous utilisons le théorème de la variance totale en conditionnant par les taux au comptant :

$$Var(VA) = \underbrace{Var(E(VA / R_{t+i}, i = 0, 1, \dots, \Omega))}_{\textcircled{1}} + \underbrace{E(Var(VA / R_{t+i}, i = 0, 1, \dots, \Omega))}_{\textcircled{2}}$$

Cette écriture permet de calculer la répartition des risques du passif social entre risque d'assurance (2nd terme) et risque de taux (1^{er} terme). On calcule séparément ces deux valeurs. Les démonstrations sont fournies en annexe ; nous nous contentons de reproduire ici les équations qui résument le mieux le cheminement des calculs.

② Le risque d'assurance :

$$E(Var(VA / R_{t+i}, i = 0, 1, \dots, \Omega)) = \sum_{i=0}^{\Omega} E\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{2(t+i)}}\right) \cdot p_{t+i} \cdot (1-p_{t+i}) \cdot P_i^2(x, h, t) \\ + 2 \cdot \sum_{i=0}^{\Omega} \sum_{j=i+1}^{\Omega} E\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{2(t+i+j)}}\right) \cdot p_{t+i} \cdot (1-p_{t+j}) \cdot P_i(x, h, t) \cdot P_j(x, h, t)$$

avec :

$$E\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{2(t+i)}}\right) = \sum_{k=0}^{t+i} C_{t+i}^k \cdot \frac{1}{(1+u^k \cdot d^{t+i-k} \cdot R_0)^{2(t+i)}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{t+i-k}$$

① Le risque de taux :

$$Var(E(VA / R_{t+i}, i = 0, 1, \dots, \Omega)) \\ = \sum_{i=0}^{\Omega} Var\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{t+i}}\right) \cdot E^2(F_{t+i}) \\ + 2 \cdot \sum_{i=0}^{\Omega} \sum_{j=i+1}^{\Omega} Cov\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{t+i}}, \frac{1}{(1+R_{t+j})^{t+j}}\right) \cdot E(F_{t+i}) \cdot E(F_{t+j})$$

L'expression analytique du risque de taux peut être déduite en évaluant successivement la variance du facteur d'escompte : $Var\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{t+i}}\right)$ et la covariance : $Cov\left(\frac{1}{(1+R_{t+i})^{t+i}}, \frac{1}{(1+R_{t+j})^{t+j}}\right)$.

Le modèle de taux simplifié considéré dans ce cas conduit donc à des expressions certes assez lourdes mais qui ont le mérite de s'expliquer et de permettre une application numérique relativement aisée.

III. LA RESOLUTION ANALYTIQUE DANS LE CADRE D'UN MODELE PLUS RIGOUREUX

Nous reprenons ici l'approche rigoureuse de l'évolution binomiale des taux "forward" et que nous avons décrite de manière complète dans un précédent paragraphe⁴. Dans ce cas cependant, il est plus difficile d'exprimer analytiquement la valeur des deux premiers moments centrés de VA ; nous utiliserons donc une méthode empirique dans laquelle, après avoir simulé n suites de taux "forward" suivant notre modèle, nous utiliserons les estimateurs classiques⁵ *Moyenne Empirique* et *Variance Empirique Non Biaisée*.

On note respectivement ces deux estimateurs \bar{X} et S^{*2} et on a :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n X_{\lambda} \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{\lambda=1}^n (X_{\lambda} - \bar{X})^2 .$$

L'objectif est donc ici de déterminer des estimateurs sans biais de l'espérance et de la variance de la valeur actuelle de l'engagement de l'assureur. Les simulations des suites de taux nécessaires sont faites en déroulant une fois pour toute l'arbre d'évolution des taux (on rappelle que cet arbre est centré sur une courbe des taux initiale : ${}_0r_i$ pour $i = 0$ à Ω) puis en simulant les n chemins (successions de hausses avec la probabilité p et de baisses avec la probabilité $1-p$) suivis par les taux. Un chemin est déterminé par Ω tirages aléatoires d'une loi de Bernoulli $B(p)$.

On notera $(r_0^{\lambda}, r_1^{\lambda}, \dots, r_{\Omega}^{\lambda})$, pour $\lambda = 1$ à n , une suite de taux "forward" simulée selon le modèle binomial.

En faisant apparaître les taux "forward", la valeur actuelle de l'engagement de l'employeur s'écrit :

$$VA = \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j)} \cdot F_{t+i} .$$

On calcule l'espérance de VA en appliquant le théorème de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} VAP &= E(E(VA / r_j, j = 1, \dots, \Omega)) \\ &= \sum_{i=0}^{\Omega} E\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j)}\right) \cdot E(F_{t+i}) \end{aligned}$$

⁴ Paragraphe B. I. 3. 1.

⁵ Voir par exemple *SAPORTA "Probabilités, Analyse des données et Statistiques"* p. 266

Si on pose $X_{i,\lambda} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j^\lambda)}$, on a alors la *Valeur Actuelle Probable Empirique* de l'engagement de

l'employeur :

$$\begin{aligned} \overline{VAP} &= \sum_{i=0}^{\Omega} \bar{X}_i \cdot E(F_{t+i}) \\ &= \sum_{i=0}^{\Omega} \left(\frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j^\lambda)} \right) \cdot p_{t+i} \cdot P_i(x, h, t) \end{aligned}$$

On peut calculer de même, la variance de *VA* par le théorème de la variance totale en conditionnant par les taux "forward"; la répartition du risque entre risque d'assurance et risque de taux apparaît alors naturellement :

$$\text{Var}(VA) = \underbrace{\text{Var}(E(VA / r_j, j = 1, \dots, \Omega))}_{\textcircled{1}} + \underbrace{E(\text{Var}(VA / r_j, j = 1, \dots, \Omega))}_{\textcircled{2}}$$

② Le risque d'assurance :

Le paragraphe B. II. 2. 2. ② nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Var}(VA / r_j, j = 1, \dots, \Omega) &= \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right)^2} \cdot p_{t+i} \cdot (1-p_{t+i}) \cdot P_i^2(x, h, t) \\ &+ 2 \cdot \sum_{i=0}^{\Omega} \sum_{j=i+1}^{\Omega} \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right) \cdot \left(\prod_{l'=1}^{t+j} (1+r_{l'})\right)} \cdot p_{t+i} \cdot (1-p_{t+j}) \cdot P_i(x, h, t) \cdot P_j(x, h, t) \end{aligned}$$

et on estime le risque d'assurance par :

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \text{Var}(VA / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega).$$

En fait, cela revient à estimer les espérances de :

$$\frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right) \cdot \left(\prod_{l'=1}^{t+j} (1+r_{l'})\right)}$$

respectivement par :

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l^\lambda)\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l^\lambda)\right) \cdot \left(\prod_{l'=1}^{t+j} (1+r_{l'}^\lambda)\right)}.$$

① Le risque de taux :

Comme nous l'avons écrit précédemment :

$$E(VA / r_j, j = 1, \dots, \Omega) = \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j)} \cdot p_{t+i} \cdot P_i(x, h, t).$$

Un estimateur sans biais du risque de taux est alors :

$$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\lambda=1}^n (E(VA / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega) - \overline{VAP})^2$$

Ainsi, au moyen d'estimateurs statistiques classiques, il est facile de proposer une estimation des deux premiers moments centrés de la valeur actuelle de l'engagement de l'employeur avec un modèle de taux binomial rigoureux.

PARTIE C. LE CAS DES MODELES EN TEMPS CONTINU : ALGORITHMES DE RESOLUTION

I. LA DESCRIPTION DU MODELE DE TAUX EN RACINE CARREE

Dans ce paragraphe, nous présentons les principales propriétés d'un modèle de taux en temps continu. A un instant $t \in \mathbb{R}$, on définit le processus instantané d'évolution par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dz_t$$

avec :

dr_t : variation instantanée du taux d'intérêt au cours de l'instant dt
 $\mu(r, t)$ et $\sigma(r, t)$: espérance et écart-type de dr_t par unité de temps
 dz_t : processus standard de Gauss-Wiener, $E(dz_t) = 0$ et $E(dz_t^2) = dt$.

Nous présentons, tout d'abord, une modélisation du taux d'actualisation par le processus dit d'ORSTEIN-UHLENBECK. Cependant, nous verrons que ce modèle génère des taux négatifs avec une probabilité non nulle. Nous décrivons donc, par la suite, une adaptation proposée par COX, INGERSOLL & ROSS⁶ et dénommée processus "en racine carrée".

⁶ Référence "A theory of the term structure of interest rates"

Le processus d'*ORSTEIN-UHLENBECK* vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a \cdot (r - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t$$

où a , r et σ sont des constantes positives à estimer telles que :

r : taux limite vers lequel converge r_t ,

a : vitesse de convergence,

σ : paramètre de diffusion.

On démontre qu'alors r_t est gaussien en posant :

$$X(r_t, t) = -(r - r_t) \cdot e^{at},$$

en appliquant le *lemme d'Itô* :

$$\begin{aligned} dX(r_t, t) &= -a \cdot (r - r_t) \cdot e^{at} \cdot dt + e^{at} \cdot dr_t \\ &= \sigma \cdot e^{at} \cdot dz_t \end{aligned}$$

et en intégrant entre 0 et t :

$$X(r_t, t) - X(r_0, 0) = \sigma \cdot \int_0^t e^{a(s-t)} \cdot dz_s.$$

soit :

$$r_t = r + (r_0 - r) \cdot e^{-at} + \sigma \cdot \int_0^t e^{a(s-t)} \cdot dz_s.$$

Or $\int_0^t e^{a(s-t)} \cdot dz_s$ appartient à l'espace gaussien $H[z]$ associé au processus gaussien $(z_t)_{t \in T}$,

donc r_t est lui-même gaussien dont l'espérance conditionnelle à r_0 est $r + (r_0 - r) \cdot e^{-at}$ et la variance conditionnelle à r_0 vaut $\sigma^2 \cdot \frac{(1 - e^{-2at})}{2 \cdot a}$.

Après avoir démontré le caractère gaussien du processus d'*ORSTEIN-UHLENBECK*, il est possible de simuler ce processus en utilisant pour cela la technique de simulation "classique" d'une loi normale $N(0,1)$. En effet, toute loi normale peut s'écrire comme une fonction de deux lois uniformes sur $[0;1]$ par le théorème suivant :

Si U_1 et U_2 de loi $U[0;1]$ alors N telle que $N = \sqrt{-2 \cdot \ln(U_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot U_2)$ est de loi $N(0,1)$.

Ainsi, pour simuler un processus d'*ORSTEIN-UHLENBECK*, il suffit d'écrire que :

$$r_t = E(r_t / r_0) + \sqrt{\text{Var}(r_t / r_0)} \cdot N$$

où N est de loi $N(0,1)$.

Cependant, une autre manière de simuler ce type de processus est de le "discrétiser" et de se ramener ainsi à un processus autorégressif. Comme dz_t est gaussienne $N(0, dt)$, alors on écrit :

$$dz_t = \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$$

où ε est de loi $N(0,1)$.

Alors :

$$\Delta r_t = a \cdot (r - r_t) + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon,$$

ou encore :

$$r_{t+1} = r_t + a \cdot (r - r_t) + \sigma \cdot \varepsilon.$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer précédemment, ce type de processus présente l'inconvénient de générer des taux négatifs. Pour y remédier, COX, INGERSOLL & ROSS proposent le processus "en racine carrée" dont l'équation différentielle stochastique est :

$$dr_t = a \cdot (r - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot dz_t.$$

Alors, on démontre que r_t suit une loi du χ^2 décentrée et que non seulement il ne peut pas être négatif mais, en outre, s'il atteint 0 il peut redevenir positif ultérieurement et sa variance augmente lorsqu'il augmente lui-même.

Afin de simuler ce taux, on reprendra l'approche récursive en écrivant :

$$\Delta r_t = a \cdot (r - r_t) + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot \Delta t \cdot \varepsilon,$$

ou encore :

$$r_{t+1} = r_t + a \cdot (r - r_t) + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot \varepsilon.$$

Ce modèle est donc une alternative au modèle binomial pour simuler une suite des taux "forward" retenus pour l'actualisation des prestations futures versées aux salariés de l'entreprise. Au cours de nos applications pratiques, nous pourrons donc comparer les résultats obtenus en appliquant l'un et l'autre de ces modèles.

Nous retiendrons alors les paramètres de référence suivants :

$$a = 0,2, \quad \sigma = 12\%, \quad r = 8\%, \quad r_0 = 6\%.$$

II. LES ALGORITHMES DE SIMULATION

Afin d'étudier la loi empirique de la variable aléatoire VA et de calculer les estimateurs de ses premiers moments centrés dans le cas général, il est nécessaire de procéder à des simulations des suites de taux sur les modèles présentés précédemment et des processus de flux aléatoires soumis aux risques démographiques. Pour ce faire, nous utilisons des techniques qui s'apparentent à celle de Monte-Carlo :

On notera $(r_0^\lambda, r_1^\lambda, \dots, r_\Omega^\lambda)$, pour $\lambda = 1$ à n , les suites de taux "forward" simulées selon les modèles binomial ou "racine carrée".

- ♦ Le modèle binomial :

A partir de l'arbre binomial calculé sur la courbe des taux initiale, on tire au hasard l'évolution des taux à la hausse ou à la baisse période par période. Cela revient donc à simuler une variable de *Bernoulli* de paramètre q la probabilité de baisse dans l'arbre binomial c'est-à-dire à tirer un nombre au hasard entre 0 et 1 que l'on notera ξ : si $\xi < q$, alors on emprunte le "chemin à la baisse" et si $\xi \geq q$, alors on emprunte le "chemin à la hausse".

- ♦ Le modèle "en racine carrée" :

Pour simuler ce processus de taux, on le "discrétise" en utilisant l'écriture récursive suivante :

$$r_{t+1} = r_t + a \cdot (r - r_t) + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot \varepsilon,$$

où ε est la réalisation d'une loi normale $N(0,1)$.

Il est possible de simuler ce processus en utilisant la technique de simulation "classique" d'une loi normale notée N . En effet, toute loi normale peut s'écrire comme une fonction de deux lois uniformes sur $[0;1]$ par le théorème suivant :

Si U_1 et U_2 de loi $U[0;1]$ alors N telle que $N = \sqrt{-2 \cdot \ln(U_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot U_2)$ est de loi $N(0,1)$.

La simulation d'un tel processus de taux se ramène donc à une simulation de type *Monte-Carlo* c'est-à-dire au tirage au sort de nombres entre 0 et 1.

- ♦ La simulation du processus de flux :

Le tirage consiste à simuler pour chaque salarié actif une variable de *Bernoulli* de paramètre $q_{x+h+i}^{(\tau)}$ qui prend la valeur 0 lors de la réalisation de l'événement "sortie de l'entreprise" et la valeur 1 sinon : on tire donc un nombre au hasard entre 0 et 1 que l'on notera ζ : si $\zeta < q_{x+h+i}^{(\tau)}$, alors l'individu sort de l'entreprise et tous les flux postérieurs sont nuls, si $\zeta \geq q_{x+h+i}^{(\tau)}$, alors l'individu reste dans l'entreprise pour encore au moins un an. On obtient, pour $\lambda = 1$ à n , les processus de flux simulés notés $(F_{t+i}^\lambda)_{i \in \mathbb{N}}$.

III. L'ESTIMATION DES MOMENTS DE VA ET L'ETUDE DE LA LOI EMPIRIQUE :

1. Les 2 premiers moments centrés de VA

Nous reprenons ici les approches décrites précédemment où les taux "forward" évoluent selon un processus binomial ou "racine carrée". Dans ce cas, il est difficile d'exprimer analytiquement la valeur des deux premiers moments centrés de VA ; nous utiliserons donc une méthode empirique dans laquelle, après avoir simulé n suites de taux "forward" suivant notre modèle, nous utiliserons les estimateurs classiques *Moyenne Empirique* et *Variance Empirique Non Biaisée*.

On note respectivement ces deux estimateurs \bar{X} et S^{*2} et on a :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n X_{\lambda} \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{\lambda=1}^n (X_{\lambda} - \bar{X})^2.$$

- ♦ L'approche individuelle :

En faisant apparaître les taux "forward", la valeur actuelle de l'engagement de le régime pour le salarié (k) s'écrit :

$$VA^k = \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j)} \cdot F_{t+i}^k.$$

On calcule alors l'estimateur de l'espérance de VA^k :

$$\overline{VAP}^k = \sum_{i=0}^{\Omega} \left(\frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j^{\lambda})} \right) \cdot p_{t+i}^k \cdot P_i^k(x^k, h^k, t^k)$$

On peut calculer de même, la variance de VA^k par le théorème de la variance totale en conditionnant par les taux "forward" ; la répartition du risque apparaît alors naturellement :

$$Var(VA^k) = \underbrace{Var(E(VA^k / r_j, j = 1, \dots, \Omega))}_{\textcircled{1}} + E(\underbrace{Var(VA^k / r_j, j = 1, \dots, \Omega)}_{\textcircled{2}})$$

- ② Le risque d'assurance :

On estime le risque d'assurance par :

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n Var(VA^k / r_j^{\lambda}, j = 1, \dots, \Omega).$$

En fait, cela revient à estimer les espérances de :

$$\frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right) \cdot \left(\prod_{l'=1}^{t+j} (1+r_{l'})\right)}$$

respectivement par :

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l^{\lambda})\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l^{\lambda})\right) \cdot \left(\prod_{l'=1}^{t+j} (1+r_{l'}^{\lambda})\right)}.$$

① Le risque de taux :

$$E(VA^k / r_j, j = 1, \dots, \Omega) = \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\prod_{j=1}^{t+i} (1+r_j)} \cdot p_{t+i}^k \cdot P_i^k(x^k, h^k, t^k).$$

Un estimateur sans biais du risque de taux est alors :

$$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\lambda=1}^n (E(VA^k / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega) - \overline{VAP^k})^2.$$

Ces formules sont écrites dans le cas individuel, l'approche collective en est une application directe.

♦ L'approche collective :

L'hypothèse fondamentale dans ce paragraphe est l'indépendance supposée entre les différentes têtes soumises au risque de mortalité. Cependant, il faut noter que les hypothèses portant sur le modèle de taux retenu pour l'actualisation des prestations probables s'appliquent pour chaque période à l'ensemble du groupe et que, par conséquent, on ne peut pas supposer l'indépendance complète entre chacun des individus et traiter l'approche collective comme une simple agrégation de l'approche individuelle.

En effet, s'il est vrai que, conditionnellement au modèle de taux, les différentes têtes sont indépendantes, en revanche elles sont soumises aux mêmes contraintes économiques.

Pour le calcul de la VAP , toutefois, le problème ne se pose pas :

$$VAP^{Coll} = \sum_{k=1}^{\Lambda} VAP^k.$$

En application du théorème de la variance totale, la variance s'écrit :

$$Var(VA^{Coll}) = E(Var(VA^{Coll} / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega)) + Var(E(VA^{Coll} / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega))$$

Le risque d'assurance :

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n \sum_{k=1}^{\Lambda} Var(VA^k / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega).$$

Le risque de taux :

On détermine $E(VA^{Coll} / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega)$ par la méthode utilisée pour VAP^{Coll} et on calcule le risque de taux par la formule :

$$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\lambda=1}^n (E(VA^{Coll} / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda=1}^n E(VA^{Coll} / r_j^\lambda, j = 1, \dots, \Omega))^2.$$

2. L'étude de la loi empirique de VA^{Coll}

L'objectif de cet article est de faire une description aussi précise que possible de la variable aléatoire notée VA . C'est pourquoi nous essayons non seulement de donner une méthodologie exploitable pour calculer la VAP et une mesure de la dispersion autour de cette VAP , mais aussi pour déterminer la loi de VA . L'intérêt et l'importance pratique d'obtenir la fonction de répartition notée F de cette variable aléatoire vient de ce qu'elle permet alors de calculer la probabilité de tout intervalle de IR : $P(a \leq VA < b) = F(b) - F(a)$ et d'obtenir des intervalles de confiance pour la valeur de l'engagement.

En pratique, les développements analytiques pour trouver a priori la loi de VA s'avèrent assez délicats à mettre en œuvre. En revanche, il est possible d'avoir une approche numérique du problème et de simuler un échantillon de cette valeur aléatoire afin de procéder ensuite à une adéquation avec une loi théorique dont on déterminera le ou les paramètres.

♦ L'approche individuelle :

La loi continue théorique de VA peut alors être obtenue par ajustement sur l'échantillon obtenu ci-dessus. Il faut toutefois remarquer que si l'individu sort de l'entreprise avant sa date de départ en retraite, alors la valeur actuelle de l'engagement de l'employeur est nulle. Il en résulte que la variable aléatoire VA n'est pas continue car elle possède une masse ponctuelle en 0 .

La loi de VA peut donc s'écrire :

$$\mu_{VA} = p^{(0)} \cdot \delta_0 + (1 - p^{(0)}) \cdot \mu_{VA \setminus (0)}$$

où :

$p^{(0)}$ est la probabilité de sortie avant l'âge de départ en retraite soit avec nos notations usuelles

$$p^{(0)} = {}_t q_{x+h}^{(\tau)}$$

δ_0 est la masse de Dirac en 0 ,

$\mu_{VA \setminus (0)}$ représente la partie continue de la loi de VA .

La partie continue de la loi est simulée par les techniques décrites ci-dessus, cela fait l'objet d'un programme réalisé en *Visual Basic* : celui-ci permet d'obtenir un échantillon composé de n observations. L'adéquation de cet échantillon à une loi continue est faite grâce au logiciel *Crystal Ball* (macro complémentaire d'Excel). Ce dernier permet l'ajustement des données sur les lois continues classiques, fournit les paramètres associés et réalise les tests statistiques du χ^2 , de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling. On trouvera une description détaillée de ces tests dans, par exemple, *SAPORTA "Probabilités, Analyse des données et Statistiques"*. Le principe est de choisir parmi ces trois tests celui qui servira de critère de classement dans l'ajustement.

♦ L'approche collective :

Il paraît clair que, comme dans le cas de l'approche individuelle, cette variable aléatoire est composée d'une partie discrète correspondant à une masse de Dirac au point 0 et d'une partie continue. Nous pouvons écrire :

$$\mu_{VA}^{Coll} = p^{Coll} \cdot \delta_0 + (1 - p^{Coll}) \cdot \mu_{VA \setminus (0)}^{Coll}$$

En revanche, la probabilité de sortie de tous les salariés avant leur âge de départ est bien inférieure dans le cas collectif que dans le cas individuel. En effet, avec nos notations, on a :

$$p^{Coll} = \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{\Theta} (VA^j = 0)\right) = \prod_{j=1}^{\Theta} \Pr(VA^j = 0) = \prod_{j=1}^{\Theta} p^{(0),j} .$$

En première approximation, si le nombre de salariés dans le groupe est "suffisant" (en pratique à partir d'une dizaine), on peut même considérer cette valeur comme nulle et donc que la loi de VA^{Coll} est purement continue.

Pour simuler la loi de la valeur actuelle collective de l'engagement de l'employeur au titre du régime d'entreprise, il n'est plus possible d'utiliser les collègues de salariés. En effet, l'évolution démographique du groupe (mortalité et turnover) doit être simulée individuellement.

Dans ce cas, le principe de simulation est strictement le même que dans l'approche individuelle avec, en plus, une sommation par tête. La formule utilisée en pratique pour la programmation des simulations correspond à celle indiquée ci-dessous :

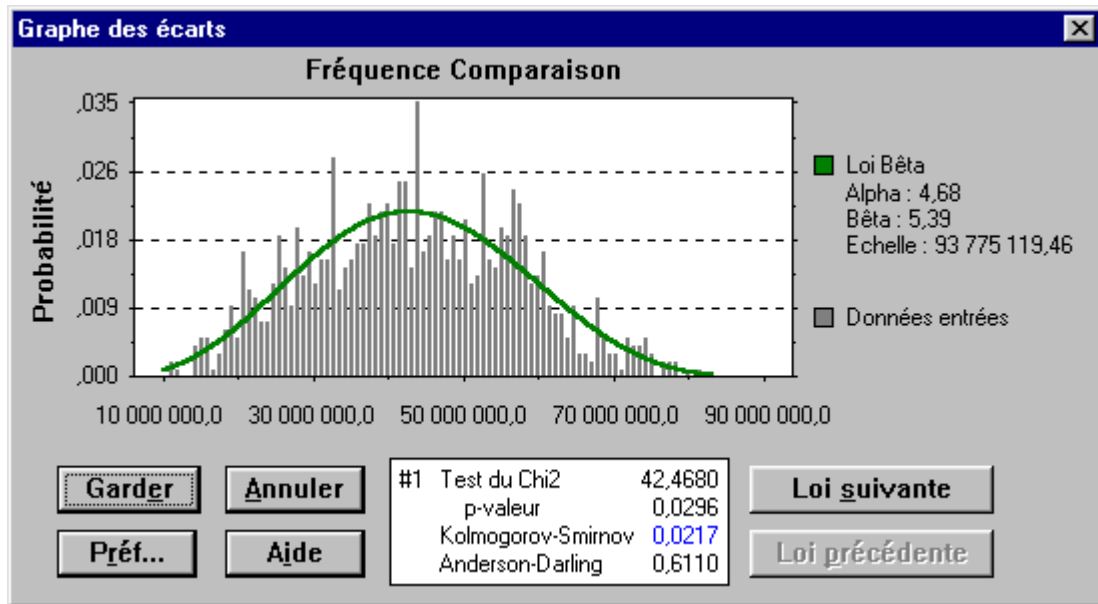
$$\begin{aligned} VA^{Coll} &= \sum_{i=1}^{\Theta} VA^i \\ &= \sum_{k=0}^{\Omega} (v^{t+k} \cdot \sum_{i=1}^{\Theta} F_{t+k}^i) . \end{aligned}$$

3. Les résultats obtenus sur un exemple

Pour les 1600 individus pris en compte, la probabilité que l'employeur n'ait à servir aucune prestation, c'est-à-dire que tous les salariés soient sortis avant leur âge de départ en retraite est considérée comme étant nulle. En effet, on peut estimer que :

$$\Pr(VA^{Coll} = 0) = 0 .$$

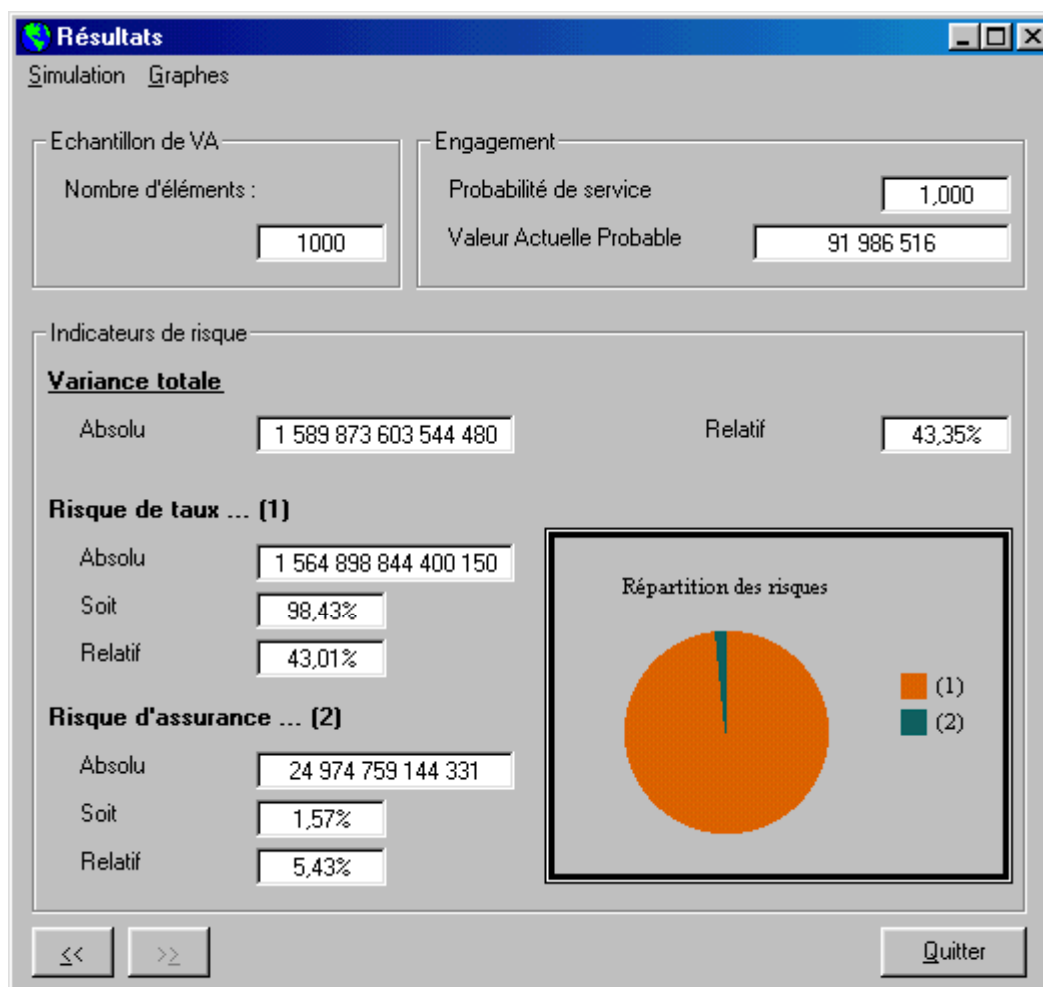
Le modèle de taux retenu sera le modèle binomial centré sur un courbe des taux initiale avec une volatilité de 11,5%. Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus à l'issue d'une simulation de 1000 itérations. Le meilleur ajustement aux lois continues classiques au sens du test de *Kolmogorov-Smirnov* obtenu grâce à *Crystal Ball* fournit la *loi Bêta de type II* suivante :



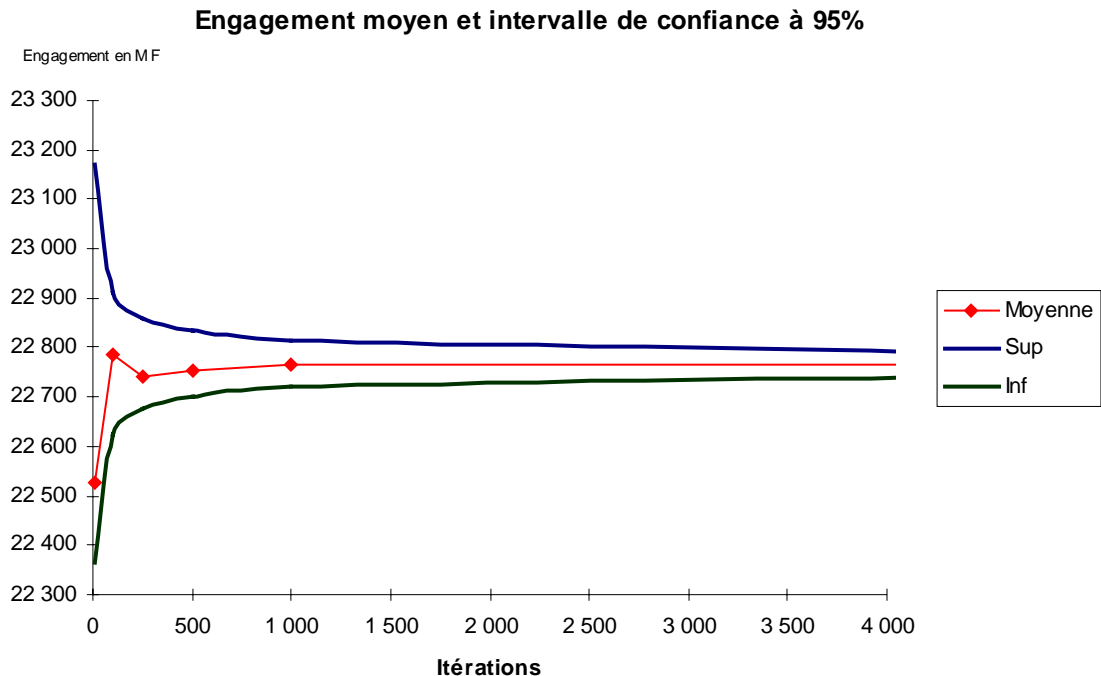
Dans l'approche collective, les indicateurs de risque prennent toute leur signification : on doit en effet vérifier que si, dans le cas individuel, le risque d'assurance possède la part contributive la plus importante dans la variance totale, en revanche, ce risque doit se mutualiser et, dans le cas collectif, la part du risque d'assurance doit diminuer lorsque le nombre d'individus composant le groupe augmente.

On doit également contrôler que le risque relatif total est inférieur à la somme des risques relatifs d'assurance et de taux (inégalité triangulaire).

Les résultats présentés ci-dessous, obtenus pour une simulation sur 1000 itérations, confirment bien ces différentes remarques a priori :



Dans une telle approche numérique, il convient également de s'interroger sur la sensibilité des résultats au nombre d'itérations réalisées. A titre d'illustration, nous présentons ci-dessous un intervalle de confiance à 95% pour l'engagement d'un régime additionnel. Nous obtenons, pour des nombres d'itérations allant de 10 à 5000, l'évolution suivante, un resserrement sensible du couloir de confiance avant 1000 itérations puis une vitesse de convergence beaucoup plus réduite après 1000 itérations :



CONCLUSION

Si la valeur actuelle probable de la charge de retraite future constitue la grandeur qui intéresse en priorité les dirigeants d'un régime de retraite puisqu'elle représente une estimation du montant des engagements pris, il convient de ne pas négliger son caractère fortement aléatoire.

En effet, si "l'approche *VAP*" répond de manière concise à une question importante, elle n'est pas suffisante pour gérer de manière prudente et réactive le régime. Les conditions démographiques, économiques et financières liées au service des prestations sont soumises à des événements fortement aléatoires sur une très longue période : l'estimateur de la valeur actuelle probable ne peut donc pas être considéré comme le seul critère de gestion du régime.

C'est pourquoi il est nécessaire de se doter d'autres moyens pour évaluer le degré de confiance à accorder à la *VAP*. L'écart type de la valeur actuelle des engagements permet ainsi de mesurer la dispersion de l'échantillon des valeurs actuelles autour de la moyenne. En outre, la variance présente l'avantage de se décomposer naturellement en risque d'investissement et risque d'assurance ce qui permet d'analyser l'incertitude liée aux deux principales sources d'aléa et de disposer d'indicateurs de risque pertinents. On remarque en particulier que si le seul risque démographique est la mortalité, l'intervalle de confiance qui peut-être construit est relativement étroit alors que dès qu'apparaît de la radiation (ou du turnover), le risque d'assurance augmente considérablement. On a également pu vérifier par nos simulations que le risque de taux, contrairement au risque démographique ne se mutualise pas.

Un axe possible de réflexion pour faire suite à cet article et au mémoire dont il est issu pourrait être de rapprocher ces problèmes de la théorie de l'assurance dynamique pour la solvabilité⁷. En effet, du point de vue du régime, la notion de valeur actuelle n'est peut-être pas la plus pertinente. Par contre, les dirigeants peuvent être intéressés à savoir s'ils pourront faire face au fil du temps à leurs engagements.

Le montant restant dans le fonds en fonction du temps peut être modélisé comme suit⁸ :

$$F(t) = f + c(t) - S(t), t \geq 0$$

où :

$f = VAP^{Coll}$ est le montant initial du fonds,

$c(t)$ représente les revenus financiers perçus au temps t ,

$S(t)$ représente la valeur qui quitte le fonds des actifs pour celui des retraités au temps t .

Ainsi, le fonds des actifs se vide par baisses successives au rythme des départs en retraite et croit progressivement entre chaque saut selon les bénéfices financiers réalisés.

Cependant, le caractère fortement aléatoire des engagements de retraite - illustré précédemment dans un contexte individuel - conduit à des "écarts actuariels". Il est donc à craindre que le niveau du fonds passe en dessous de 0 avant la sortie du dernier salarié du groupe et que l'employeur ait à apporter de nouvelles contributions au fonds pour faire face à ces engagements.

Il serait envisageable, par exemple, de connaître la probabilité du "temps de la ruine" c'est-à-dire d'une nouvelle contribution de l'employeur et de calculer l'espérance mathématique des contributions supplémentaires escomptées de l'employeur.

⁷ Voir par exemple GERBER sur le sujet (cours 3^{ème} année à l'I.S.F.A.)

⁸ Référence : "Actuarial Mathematics, Chapitre 13 Collective risk models over an extended period" BOWER, GERBER, HICKMAN, JONES & NESBITT, Society of Actuaries

© REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 - "Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks", **Gary Parker**, *Fellowship Credit, research paper, juin 1995*
- 2 - "Choix du système de retraite : quelques éléments économiques du débat", **Patrick Artus**, *Caisse des dépôts et consignations*
- 3 - "Actuarial Mathematics", **Bower, Gerber, Hickmann, Jones & Nesbitt**, *Society of Actuaries*
- 4 - "Les options sur taux d'intérêt : dynamique des taux et évaluation", **Jean-Claude Augros**, *Economica*
- 5 - "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims", **Ho & Lee**
- 6 - "Option pricing a simplified approach", **Cox, Ross & Rubinstein**
- 7 - "Retraite et Epargne", **Didier Blanchet**, *Documentation française 1998*
- 8 - "Projections démographiques : la population de la France à l'horizon 2050", **Quang Chi Dinh**, *INSEE Economie et Statistique*
- 9 - "Assurance vie et fonds de pension", **Jacques Le Pape & Guillaume Leroy**, *Lamy Assurance Française*
- 10 - "Les retraites en France : le rôle des régimes complémentaires", **Emmanuel Reynaud**, *Les études de la documentation française*
- 11 - "L'engagement de l'employeur dans le cadre d'un régime de retraite supplémentaire à prestations définies", **Fabrice Magnin**, *Mémoire de fin d'études ISFA 1998*
- 12 - "Probabilités, Analyse des données et Statistique", **Gilbert Saporta**, *Editions Technip*
- 13 - "Construction de tables à causes de sorties multiples", **Daniel Serant**, *Journée "Tables d'expérience" 11-10-1993*