

L'Algorithme du Bassin de Capture Appliqué à l'Évaluation d'Options

Dominique Pujal & Patrick Saint-Pierre

Centre de Recherche Viabilité, Jeux, Contrôle
Université Paris - Dauphine

Résumé

En abordant le problème de l'évaluation des options à l'aide des concepts de "capture de cible" et de "viabilité" de système contraint, en environnement incertain, nous obtenons une méthode numérique permettant d'évaluer des contrats, en particulier lorsqu'il n'est plus possible d'obtenir des formules explicites. Ces résultats s'appuient sur la Théorie de la Viabilité. Les travaux récents sur les jeux différentiels ont permis d'élargir cette approche au cas des systèmes dynamiques contraints avec incertitude "tychastique" et de faire le lien entre les méthodes probabilistes classiques et celles dérivées des jeux différentiels. Une fois réécrit le problème de l'évaluation des options sous la forme d'un problème de capture viable d'une cible en environnement incertain, on peut étendre les algorithmes numériques ensemblistes développés dans le cadre de la Théorie de la Viabilité. L'algorithme du bassin de capture permet alors d'obtenir non seulement les fonctions d'évaluation mais surtout de construire des stratégies de couverture garantie.

Abstract

We present the viability/capturability approach for studying the problem of dynamic valuation and management for replicating portfolio in the framework of "tychastic" control of dynamical games against Nature instead of stochastic control. This approach is founded on Viability Theory and recent results on differential games under tychastic uncertainty which link classical probabilistic methods to dynamical games allow to extend set oriented numerical methods like the Capture Basin Algorithm to "compute" the guaranteed viable-capture basin. This provides both the valuation function of the option and the underlying hedging strategy.

L'Algorithme du Bassin de Capture Appliqué à l'Evaluation d'Options

Dominique Pujal & Patrick Saint-Pierre*
Centre de Recherche Viabilité, Jeux, Contrôle
Université Paris - Dauphine

September 9, 2004

Plan

1	Introduction	4
2	Formalisation du problème de l'évaluation d'une option	5
2.1	Notations	5
2.1.1	le système dynamique sous-jacent au problème de couverture	5
2.1.2	La fonction de paiement	6
2.1.3	La contrainte d'évolution	6
2.1.4	L'objectif	7
2.1.5	Commentaire sur les différentes dynamiques des prix	7
3	Formalisation mathématique du problème de capture garantie	8
3.1	Bassins de capture garantie	9
3.1.1	Le système dynamique auxiliaire	10
3.1.2	Les contraintes et objectifs	11
3.1.3	Le bassin de capture garantie	11
3.1.4	La fonction d'évaluation	11
3.2	Formule de la fonction d'évaluation	13
4	Approximation de fonctions d'évaluation : l'Algorithme du Bassin de Capture	14
4.1	Dynamique discrète et discrétisation de l'incertitude	14
4.2	Approximation de la fonction d'évaluation	14
4.3	L'Algorithme du Bassin de Capture	15
4.4	Construction des feedbacks approchés p^n	16
4.4.1	Etude du cas linéaire	17
4.4.2	Cas général.	19

***Remerciements** : les auteurs tiennent à remercier le rapporteur anonyme pour ses remarques constructives et Jean-Pierre Aubin pour ses précieuses suggestions qui ont permis d'améliorer considérablement la présentation de ce papier.

5	Exemples d'évaluation garantie d'options	19
5.1	Données numériques	19
5.2	Evaluation d'option européenne	20
5.2.1	Evaluation d'option standard	20
5.2.2	Evaluation d'option européenne non standard	23
5.3	Evaluation d'option américaine	24
5.3.1	Evaluation garantie d'option américaine standard avec incertitude de type Cox, Ross & Rubinstein	24
5.3.2	Evaluation garantie d'option américaine non standard avec incertitude de type Cox, Ross & Rubinstein	24
6	Evaluation d'autres types d'options de contrats	24
6.1	Variations autour du Tychastique	24
6.1.1	Evaluation avec fonction de paiement non standard	26
6.1.2	Evaluation garantie tychastique à incertitude et taux variables	26

1 Introduction

Avec l'importance croissante des marchés et de leur volatilité, l'évaluation d'options a fait l'objet de nombreuses recherches. La grande majorité des modèles existant ont pour la plupart comme point de départ ou de référence, les modèles élaborés dans les années 70-80 soit en temps continu [19, Black & Scholes] [35, Merton], soit en temps discret, le modèle binomial [28, Cox, Ross & Rubinstein].

L'objet de ce travail est d'étudier le problème de l'évaluation des options sous un éclairage différent, fondé sur la mise en œuvre des concepts de "capture d'une cible" et de "viabilité" de système contraint, en environnement incertain, et de fournir une méthode numérique permettant d'évaluer des contrats, en particulier lorsqu'il n'est plus possible d'obtenir des formules explicites [37, Pujal], [38, Pujal & Saint-Pierre]. Ces résultats s'appuient sur la Théorie de la Viabilité élaborée à partir du début des années 1980 [10, Aubin], [11, Aubin (pour les applications économiques)]. Dans les années 1990, les travaux sur les jeux différentiels ont permis d'élargir cette approche au cas des systèmes dynamiques contraints avec incertitude "tychastique" ([39, Quincampoix], [21, 22, Cardaliaguet], [24, 25, 26, 23, Cardaliaguet, Quincampoix & Saint-Pierre]. Les travaux récents de ces dernières années ont fait le lien entre les méthodes probabilistes classiques et celles dérivées des jeux différentiels [15, 16, Bernhard], [4, Aubin & Doss].

Nous montrons comment, une fois réécrit le problème de l'évaluation des options sous la forme d'un problème de capture viable d'une cible en environnement incertain, on peut étendre les algorithmes numériques développés dans le cadre de la Théorie de la Viabilité afin d'obtenir non seulement les fonctions d'évaluation mais surtout de construire des stratégies de couverture garantie [40, Saint-Pierre].

Pour des options standards, nous observons la coïncidence des résultats avec ceux fournis par la méthode binômiale de Cox, Ross et Rubinstein et ceux de Black et Scholes obtenus par passage à la limite. De plus, lorsque la complexité des produits financiers rend inaccessible la mise en œuvre de formules analytiques, nous montrons comment "l'Algorithme du Bassin de Capture" présentée dans cet article permet de calculer des approximations de la fonction d'évaluation et de la stratégie de couverture. Soulignons que grâce aux technologies actuelles, la rapidité avec laquelle sont obtenus ces résultats rend la méthode efficace.

Cet article est organisé de la manière suivante : dans une première partie nous rappelons comment se formalise le problème de l'évaluation d'une option dans le contexte du contrôle tychastique et quels sont les liens entre système tychastique et système stochastique. Dans une seconde partie nous introduisons la formalisation mathématique permettant de mettre en oeuvre différentes techniques issues de la Théorie de la Viabilité, en particulier la caractérisation de l'épigraphe de la fonction d'évaluation comme bassin de capture viable garantie, et l'Algorithme du Bassin de Capture. Dans la troisième partie nous présentons différents exemples numériques illustrant les possibilités qu'offre la méthode pour évaluer des options non standards.

2 Formalisation du problème de l'évaluation d'une option

Une option est un contrat donnant le droit mais non l'obligation d'acheter (call) ou de vendre (put) une certaine quantité d'un actif sous-jacent (par exemple une action) à un horizon fixé T (option européenne) ou à n'importe quel instant avant T (option américaine) et à un prix fixé K dit prix d'exercice.

On veut déterminer, à la date initiale, la valeur de ce contrat, c'est-à-dire le prix que le vendeur doit demander à l'acheteur pour se garantir contre les variations du cours du sous-jacent. Un modèle d'évaluation de portefeuille de couverture consiste d'une part à évaluer le coût de cette couverture et d'autre part à déterminer les stratégies de constitution du portefeuille assurant le maintien de cette couverture jusqu'à l'échéance de l'option. Cette évaluation, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, est faite selon le principe classique de la duplication d'un actif conditionnel satisfaisant la condition naturelle d'autofinancement.

2.1 Notations

Soit un actif non risqué et un actif risqué de prix respectifs S_0 et S_1 . On peut généraliser le problème au cas de n actifs risqués mais, par souci de simplicité, nous nous restreindrons au cas d'un seul actif risqué.

On désigne par $S = (S_0, S_1) \in \mathbb{R}^2$ le vecteur des prix de ces actifs.

On représente le portefeuille à l'aide du vecteur $p := (p_0, p_1) \in P(S)$ correspondant au nombre des actifs. Pour tout S , l'ensemble $P(S) \subset \mathbb{R}^2$ est convexe fermé. Dans les exemples classiques des options européenne ou américaine, $P(S) := P$ est indépendant de S .

De l'évolution des prix $t \rightarrow S(t) = (S_0(t), S_1(t))$ des actifs et d'une évolution $t \rightarrow p(t)$ du portefeuille on déduit l'évolution du capital $t \rightarrow W_{p(\cdot)}(t)$ selon la règle suivante :

$$W_{p(\cdot)}(t) := p_0(t)S_0(t) + p_1(t)S_1(t)$$

Dans la suite on notera simplement $W(\cdot)$ l'évolution du capital.

On note T la durée de vie de l'option jusqu'à la date d'échéance.

2.1.1 le système dynamique sous-jacent au problème de couverture

Une approche réaliste des modèles mathématiques d'évaluation des portefeuilles exige l'introduction de l'incertitude dans la description de la dynamique gouvernant l'évolution des prix des actifs.

Jusqu'à maintenant, en Finance, l'évolution des cours était modélisée dans un environnement probabiliste fixé, identifié à un mouvement Brownien de particules accomplissant des marches aléatoires. Toutefois l'évolution des cours des actifs n'obéit pas nécessairement à une régularité statistique et, ainsi, à côté de tels modèles probabilistes, il est possible de construire d'autres modèles décrivant différemment l'incertitude. Pour cela on va supposer que l'ensemble dans

lequel les cours des actifs évoluent peut varier au cours du temps et dépendre de l'état $S(t)$ du système. Cet ensemble est décrit à l'aide de variables appelées “*tyches*” ou, en théorie du contrôle, perturbations (disturbances en anglais).

On suppose donc l'évolution du prix de l'actif non risqué gouvernée par une équation différentielle déterministe

$$S'_0(t) = S_0(t)\gamma_0(S_0(t))$$

et l'évolution du prix de l'actif risqué gouvernée par une équation différentielle tychastique, dépendant de tyches $v \in Q(S)$:

$$S'_1(t) = S_1(t)\gamma_1(S_1(t), v(t))$$

où γ_0 et γ_1 désignent les taux d'intérêts annuels des actifs non risqué et risqué.

L'évaluation d'un portefeuille de couverture respecte par essence la condition d'auto-financement :

$$\forall t \geq 0, \langle p'(t), S(t) \rangle = p'_0(t)S_0(t) + p'_1(t)S_1(t) = 0$$

et par conséquent l'évolution de la valeur du portefeuille est déterminée par l'équation différentielle

$$\begin{aligned} W'(t) &= \langle p(t), S'(t) \rangle \\ &= p_0(t)S_0(t)\gamma_0(S_0(t)) + p_1(t)S_1(t)\gamma_1(S_1(t), v(t)) \end{aligned}$$

d'où

$$W'(t) = W(t)\gamma_0(S(t)) - p_1(t)S_1(t)[\gamma_0(S_0(t)) - \gamma_1(S_1(t), v(t))]$$

Ainsi, pour une évolution arbitraire $t \rightarrow v(t)$ de l'incertitude et une évolution donnée $t \rightarrow p(t)$ du portefeuille, l'évolution des actifs et de la valeur du portefeuille qui duplique l'option s'écrit sous la forme du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} S'_0(t) &= S_0(t)\gamma_0(S_0(t)) \\ S'_1(t) &= S_1(t)\gamma_1(S_1(t), v(t)) \\ W'(t) &= W(t)\gamma_0(S_0(t)) - p_1(t)S_1(t)[\gamma_0(S_0(t)) - \gamma_1(S_1(t), v(t))] \end{cases} \quad (1)$$

2.1.2 La fonction de paiement

Une option est définie à l'aide d'une fonction de paiement final $\mathbf{U}$, appelée “payoff”. Par exemple, pour un call européen ou américain standard, cette fonction $\mathbf{U}$ est donnée par :

$$\mathbf{U}(S) = \mathbf{U}(S_0, S_1) = (S_1 - K)^+ = \begin{cases} S_1 - K & \text{si } S_1 \geq K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous donnerons des exemples de fonctions de paiement non standard.

2.1.3 La contrainte d'évolution

La gestion d'une option ou de tout actif conditionnel doit respecter à tout instant avant l'échéance certaines contraintes.

Par exemple, une option européenne n'étant exercée qu'à l'échéance, la contrainte imposée au portefeuille qui duplique l'option au cours de son évolution est que sa valeur soit toujours positive : $W(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$.

Une option américaine peut, elle, être exercée à tout moment avant son échéance, la valeur du portefeuille qui la duplique doit être toujours supérieure ou égale au paiement : $W(t) \geq (S_1(t) - K)^+, \forall t \in [0, T]$. On sait que dans ce cas les deux problèmes ont la même solution. On peut aussi considérer une variante où, par exemple, $W(t) \geq \max(\frac{S_1}{4}, (S_1 - K)^+), \forall t \in [0, T]$.

2.1.4 L'objectif

Nous formulons le problème d'évaluation d'un portefeuille qui duplique une option en terme de cible à atteindre à l'échéance : que ce soit pour une option européenne ou pour une option américaine, on veut que, à l'échéance T , on ait :

$$W(T) \geq U(S(T)).$$

2.1.5 Commentaire sur les différentes dynamiques des prix

Pour décrire l'évolution des prix des actifs la dynamique généralement utilisée est de type :

1. déterministe, dépendant ou non du temps, utilisant notamment des dynamiques obtenues par des méthodes d'extrapolation ou de prédiction de type chartiste,
2. incertaine tychastique conduisant à des jeux dynamiques (encore appelés jeux différentiels ou, dans le langage de l'automatique, contrôle robuste. On peut se référer par exemple à [36, Olsder] et à la bibliographie de cet article),
3. stochastique tels les modèles de Black et Scholes [19],
4. discrète tels les modèles de Cox, Ross et Rubinstein [28], ou l'approche de Zabzick [45],
5. déterministe ou incertaine avec mémoire (path-dependent dynamics, voir [7, Aubin-Haddad]),
6. impulsionnelle, permettant de prendre en compte des événements ou des clauses modifiant un contrat d'option (versement de dividendes, option à barrières par exemple, voir [?, Bonneuil & Saint-Pierre]).

L'objet principal de cet article est de mettre en oeuvre des algorithmes qui permettent de :

1. calculer numériquement la fonction d'évaluation en discrétisant le problème et en appliquant un algorithme dérivé de celui du Noyau de Viabilité (voir [40, Saint-Pierre]),
2. déterminer, à chaque instant, les valeurs numériques du portefeuille de couverture,

ceci dans un cadre très général intégrant différentes formes d'incertitude et dans des configurations beaucoup plus complexes.

Remarques

- Le modèle discret de Cox, Ross et Rubinstein correspond à un cas particulier de l'approche tychastique en temps discret. Lorsque le nombre de pas de temps tend vers l'infini, l'évaluation donnée par le modèle de Cox, Ross et Rubinstein converge vers la valeur "Black et Scholes" (voir [28, Cox, Ross & Rubinstein]). Cette situation correspond à un modèle tychastique où l'ensemble des tyches n'est pas borné.
- Lorsque l'incertitude est stochastique et que l'on veut formuler le problème d'évaluation en terme de bassin de capture on peut faire appel à la théorie du contrôle stochastique et plus particulièrement des "cibles stochastiques" comme dans [43, Soner & Touzi] dans le cas sans contrainte.
- L'approche d'une modélisation de l'évaluation d'option à l'aide des jeux dynamiques avec cible rejoint celle de Pierre Bernhard qui a introduit le contrôle robuste pour évaluer les options ([15, 16, 17, Bernhard]).

- Récemment un lien étroit entre les systèmes définis par des équations différentielles stochastiques et les systèmes tychastiques définis par des inclusions différentielles tychastiques a été établi grâce aux formules d'équivalences entre les intégrales stochastiques de Itô et Stratonovitch et le “Théorème du support” de Strook & Varadhan. Sous certaines hypothèses les problèmes de viabilité et de capturabilité stochastique sont équivalents à des problèmes d'invariance ou de viabilité tychastiques (voir par exemple [33, Doss], [4, Aubin & Doss]).
- C'est dans ce contexte d'invariance de systèmes tychastiques associés aux systèmes stochastiques que sont étudiés les questions de viabilité stochastique en Mathématiques de la Finance (voir [18, Björk], [44, 45, Zabczyk] ; voir également [29, 30, 31, 32, Da Prato & Frankowska]).

Une fois formalisé le problème de la prise en compte des contraintes et des objectifs ainsi que la modélisation de l'évolution du cours du sous-jacent, il s'agit maintenant de déterminer l'ensemble des états initiaux du système à partir desquels, quelque soit le tyche réalisé, l'évolution du portefeuille de couverture est assurée de vérifier les contraintes jusqu'au moment où la cible est atteinte.

3 Formalisation mathématique du problème de capture garantie

D'une façon générale, pour formaliser la contrainte on introduit une fonction $\mathbf{b} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$. On décrit alors la contrainte par la relation :

$$W \geq \mathbf{b}(t, S)$$

qui traduit le fait qu'à chaque instant la valeur du portefeuille doit rester supérieure à une certaine fonction de S .

De même, pour formaliser l'objectif on introduit une fonction $\mathbf{c} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$. L'objectif est atteint si à l'échéance la valeur du portefeuille vérifie :

$$W \geq \mathbf{c}(0, S)$$

L'intérêt de définir les fonctions étendues $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ est de permettre de traiter dans un même cadre, celui des bassins de capture viable garantie, les options américaine ou européenne ainsi que tout autre type de contrat conditionnel, comme nous le verrons plus loin.

Exemples de portefeuille de couverture

Le tableau suivant donne quelques exemples simples de problèmes de couverture d'option : Ces exemples seront traités numériquement plus loin.

Le problème d'évaluation d'une option consiste alors à chercher, pour toute durée de vie T et pour toute valeur initiale S des prix des actifs, la plus petite valeur $V(T, S)$ telle qu'il existe une stratégie de couverture pour laquelle, pour toute évolution de l'incertitude, la solution du système (1) vérifie les contraintes, les conditions initiale et finale.

Pour cela, nous allons “plonger” les problèmes d'évaluation d'option et de leur stratégie de couverture dans le cadre général des problèmes de cible avec contrainte en environnement

type d'option	$c(\tau, S)$	$b(\tau, S)$	observations
“call” européen	$(S - K)^+$	0	
“call” américain	$(S - K)^+$	$(S - K)^+$	
“call capped” européen	$\min[(S - K)^+, C]$	0	$K < C$
“call Asset or Nothing” européen	$\begin{cases} S & \text{si } S \geq K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	0	
“call” américain non standard	$\max[rS, (S - K)^+]$	$\max[rS, (S - K)^+]$	$0 \leq r < 1$
“call” digital	$\delta \text{Entier}(\frac{(S-K)^+}{\delta})$	0	
“call” complexe	$\min(\frac{((S_1-K)^+)^2}{K^{sup}-K}, K^{sup} - K)$	0	Incertitude dépendante du temps

Table 1:

incertain pour lesquels on va chercher à déterminer les bassins de capture garantie et viable pour des problèmes auxiliaires de contrôle tychastique.

En premier lieu nous donnons la définition du bassin de capture garantie. Nous introduisons ensuite la dynamique auxiliaire et nous définissons pour cette nouvelle dynamique la cible et les ensembles contraints. On montrera enfin que le bassin de capture garantie fournit précisément les réponses aux questions posées au paragraphe précédent.

3.1 Bassins de capture garantie

Considérons un système de contrôle tychastique

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), u(t), v(t)) \\ u(t) &\in P(x(t)) \\ v(t) &\in Q(x(t)) \end{cases}$$

où $f : X \times Y \times Z \rightarrow X$ décrit la dynamique gouvernant l'évolution de l'état x du système en fonction :

- d'une commande (contrôle, régulon, variable cybernétique) $u(t) \in P(x(t))$ à choisir par le gestionnaire (décideur, acteur),
- d'un tyche (perturbation, variable tychastique) $v(t) \in Q(x(t))$ qui évolue au cours du temps indépendamment du gestionnaire et qui traduit mathématiquement l'incertitude tychastique.

La correspondance $P : X \rightsquigarrow Y$ décrit l'ensemble de commandes possibles en fonction de l'état du système et la correspondance $Q : X \rightsquigarrow Z$ décrit l'ensemble dans lequel peut varier l'incertitude tychastique.

Définition 3.1 *On appelle rétroaction - ou feedback ou contrôle en boucle fermée - une application continue $\tilde{p} : X \rightarrow Y$ associant à tout état un contrôle $\tilde{p}(x) \in P(x)$ permettant de gouverner l'évolution tychastique de l'état suivant la dynamique :*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), \tilde{p}(x(t)), v(t)) \\ v(t) &\in Q(x(t)) \end{cases} \quad (2)$$

On introduit $K \subset X$ un ensemble de contraintes sur l'état, $C \subset K$ une cible et on définit le bassin de capture garantie :

Définition 3.2 On appelle Bassin de Capture Garantie de C viable dans K , noté $Capt_f(K, C)$, le sous-ensemble des états initiaux $x \in K$ tels qu'il existe une rétroaction $x \rightarrow \tilde{p}(x) \in P(x)$ telle que, pour tout tyche $t \rightarrow v(t)$, il existe une évolution $t \rightarrow x(t)$ solution du système différentiel (2) et un instant $t^* \geq 0$ pour lesquels

$$\begin{cases} x(t) \in K & \forall t \in [0, t^*] \\ x(t^*) \in C \end{cases}$$

On renvoie à [11, Aubin, Dynamic Economic Theory, Chap. 9] pour l'étude des bassins de capture et à [8, Aubin, Pujal & Saint-Pierre]) pour leurs propriétés dans le contexte de la finance.

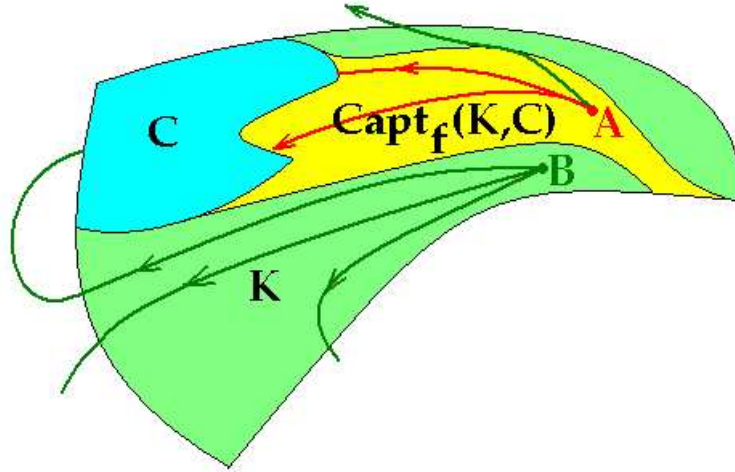


Figure 1: Schéma du problème de capture d'une cible avec contrainte. À partir de A, au moins une évolution atteint la cible C sans avoir quitté K. À partir de B, aucune évolution n'atteint la cible C sans avoir quitté K.

Cependant, dans le problème d'évaluation d'une option, la capture doit avoir lieu exactement à l'instant T alors que dans la définition du bassin de capture, celle-ci peut avoir lieu à n'importe quel instant $t \geq 0$. Pour cette raison on introduit formellement la variable annexe $\tau(t) = T - t$ contrainte à rester positive. Ceci revient à imposer que la capture ait lieu au moins avant l'instant T .

3.1.1 Le système dynamique auxiliaire

On étend le système dynamique (1) décrivant l'évolution des actifs et de la valeur du portefeuille de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tau'(t) &= -1 \\ S_0'(t) &= S_0(t)\gamma_0(S_0(t)) \\ S_1'(t) &= S_1(t)\gamma_1(S_1(t), v(t)) \\ W'(t) &= W(t)\gamma_0(S_0(t)) - p_1(t)S_1(t)[\gamma_0(S_0(t)) - \gamma_1(S_1(t), v(t))] \end{cases} \quad (3)$$

où $x = (\tau, S_0, S_1, W)$, $u(t) = p(t) \in P(x) = P(S_0, S_1)$, $v(t) \in Q(x) = Q(S_0, S_1)$ et

$$f(x, u, v) = (-1, S_0\gamma_0(S_0), S_1\gamma_1(S_1, v), \gamma_0(S_0) - p_1S_1[\gamma_0(S_0) - \gamma_1(S_1, v)]).$$

Remarquons que si l'état initial est $x = (T, S_0, S_1, W)$, alors $\tau(t) = T - t$ demeure positif tant que $t \in [0, T]$.

3.1.2 Les contraintes et objectifs

On considère deux fonctions $\mathbf{b} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et $\mathbf{c} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant :

$$\forall (t, S_0, S_1), \quad 0 \leq \mathbf{b}(t, S_0, S_1) \leq \mathbf{c}(t, S_0, S_1) \leq +\infty$$

et l'on pose

$$C := \mathcal{Epi}(\mathbf{c}) \subset K := \mathcal{Epi}(\mathbf{b})$$

Rappelons que les épigraphes de $\mathbf{b}$ et de $\mathbf{c}$ sont définis par :

$$\mathcal{Epi}(\mathbf{b}) := \{(t, S_0, S_1, W) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } W \geq \mathbf{b}(t, S_0, S_1)\}$$

$$\mathcal{Epi}(\mathbf{c}) := \{(t, S_0, S_1, W) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } W \geq \mathbf{c}(t, S_0, S_1)\}$$

3.1.3 Le bassin de capture garantie

Le bassin de capture garantie $Capt_f(\mathcal{Epi}(\mathbf{b}), \mathcal{Epi}(\mathbf{c}))$ est donc l'ensemble des conditions initiales (T, S_0, S_1, W) , où T est la durée de vie jusqu'à échéance, (S_0, S_1) les prix à l'instant initial des actifs risqué et non risqué et W le capital initial investi dans le portefeuille de couverture, à partir desquelles il existe une évolution $t \rightarrow (T - t, S_0(t), S_1(t), W(t))$ solution du système dynamique (3) et il existe $t^* \geq 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} i) & W(t) \geq \mathbf{b}(T - t, S_0(t), S_1(t)), \quad \forall t \in [0, t^*] \\ ii) & W(t^*) \geq \mathbf{c}(T - t^*, S(t^*)) \end{cases} \quad (4)$$

Lemme 3.1 Si la fonction c vérifie : $\forall t > 0, \quad \mathbf{c}(t, s_0, s_1) = +\infty$, alors $t^* = T$ et les conditions (4) deviennent :

$$\begin{cases} i) & W(t) \geq \mathbf{b}(T - t, S_0(t), S_1(t)), \quad \forall t \in [0, T] \\ ii) & W(T) \geq \mathbf{c}(0, S_0(T), S_1(T)) \end{cases} \quad (5)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} i) & (T - t, S_0(t), S_1(t), W(t)) \in \mathcal{Epi}(\mathbf{b}), \quad \forall t \in [0, T] \\ ii) & (0, S_0(T), S_1(T), W(T)) \in \mathcal{Epi}(\mathbf{c}) \end{cases} \quad (6)$$

Démonstration - Par définition de la fonction $\mathbf{c}$, si $t^* \neq T$ alors $W(t^*) = \infty$. Par conséquent tout portefeuille de couverture, qui duplique une option dont la durée de vie est T , ayant une valeur finie, atteint nécessairement la cible à l'instant $t^* = T$. $\square$

3.1.4 La fonction d'évaluation

On appelle *fonction d'évaluation* $V_{\mathbf{b}, \mathbf{c}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ la fonction définie par

$$V_{\mathbf{b}, \mathbf{c}}(T, S_0, S_1) := \inf\{W \mid (T, S_0, S_1, W) \in Capt_f(\mathcal{Epi}(\mathbf{b}), \mathcal{Epi}(\mathbf{c}))\}$$

et on appelle *stratégie de couverture* le feedback associé

$$p(T, S_0, S_1) := \tilde{p}(T, S_0, S_1, V_{\mathbf{b}, \mathbf{c}}(T, S_0, S_1))$$

La fonction d'évaluation donne la valeur du capital initial, parmi les capitaux initiaux qui permettent d'assurer à terme la couverture de l'option, qui est la moins chère. La stratégie de couverture donne la règle optimale qui permet de couvrir à terme le paiement.

Cette reformulation du problème d'évaluation d'option a l'avantage de pouvoir traiter les problèmes dont les paramètres, plus particulièrement les taux γ_0 et γ_1 et les ensembles P et Q où évoluent p_0 , p_1 et v , dépendent du temps. Cette question sera abordée à la fin de cet article.

Exemples

En prenant dans le cas des options européenne ou américaine :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{pour les options européennes} & : \mathbf{b}_{\mathbb{E}}(t, S) = 0 \\ \text{pour les options américaines} & : \mathbf{b}_{\mathbb{S}}(t, S) = \mathbf{U}(S) \end{array} \right\} \forall t \geq 0 \quad (7)$$

Par exemple, pour une option européenne ou pour une option américaine la fonction $\mathbf{c}$ est définie par :

$$\mathbf{c}_{\mathbb{E}}(t, S) = \begin{cases} \mathbf{U}(S) & \text{si } S_1 \geq 0 \text{ et } t = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Corollaire 3.1 *L'application $V_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ qui à tout couple (T, S) associe la valeur $V_{\mathbb{E}}(T, S)$ définie par :*

$$V_{\mathbb{E}}(T, S) := \inf\{W \mid (T, S, W) \in \text{Capt}_f(\mathcal{E}pi(\mathbf{b}_{\mathbb{E}}), \mathcal{E}pi(\mathbf{c}_{\mathbb{E}}))\} \quad (8)$$

est la fonction d'évaluation d'une option européenne de durée de vie T lorsque le cours des actifs est S .

De même, l'application $V_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ qui à tout couple (T, S) associe la valeur $V_{\mathbb{S}}(T, S)$ définie par :

$$V_{\mathbb{S}}(T, S) := \inf\{W \mid (T, S, W) \in \text{Capt}_f(\mathcal{E}pi(\mathbf{b}_{\mathbb{S}}), \mathcal{E}pi(\mathbf{c}_{\mathbb{E}}))\} \quad (9)$$

est la fonction d'évaluation d'une option américaine de durée de vie T lorsque le cours des actifs est S .

L'utilisation des concepts de viabilité et de capturabilité apportent alors dans le domaine de la finance de marché un éclairage novateur et prometteur déjà utilisé dans le cadre de systèmes stochastiques discrets dans [44, 45, Zabczyk] (pour les options européennes et américaines). Récemment, le même point de vue - introduit sous le nom de cibles stochastiques - a été adopté dans [42, 43, Soner & Touzi] dans le cadre de dynamiques stochastiques continues mais sans contrainte sur l'état.

Les fonctions d'évaluation d'options héritent donc des propriétés et des caractérisations des bassins de capture viables étudiés dans le cadre d'ensembles contraints K et de cibles $C \subset K$ généraux. On peut ainsi faire apparaître le problème de contrôle ou de jeu dynamique sous-jacent à la modélisation et sa fonction d'évaluation. On sait également démontrer que la fonction d'évaluation est solution d'une équation aux dérivées partielles ou d'une inéquation variationnelle (voir [14, Bensoussan & Lions J.-L.] par exemple), du type de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, en utilisant les caractérisations tangentielles des bassins de capture-viable. Nous renvoyons à [37, Pujal] et [38, Pujal & Saint-Pierre] pour une étude approfondie de ces questions, à [8, Aubin, Pujal & Saint-Pierre] pour l'étude dans le cas d'évaluation d'option en présence de coûts de transaction et à [41, Saint-Pierre] pour une étude des schémas numériques d'approximation des fonctions d'évaluation.

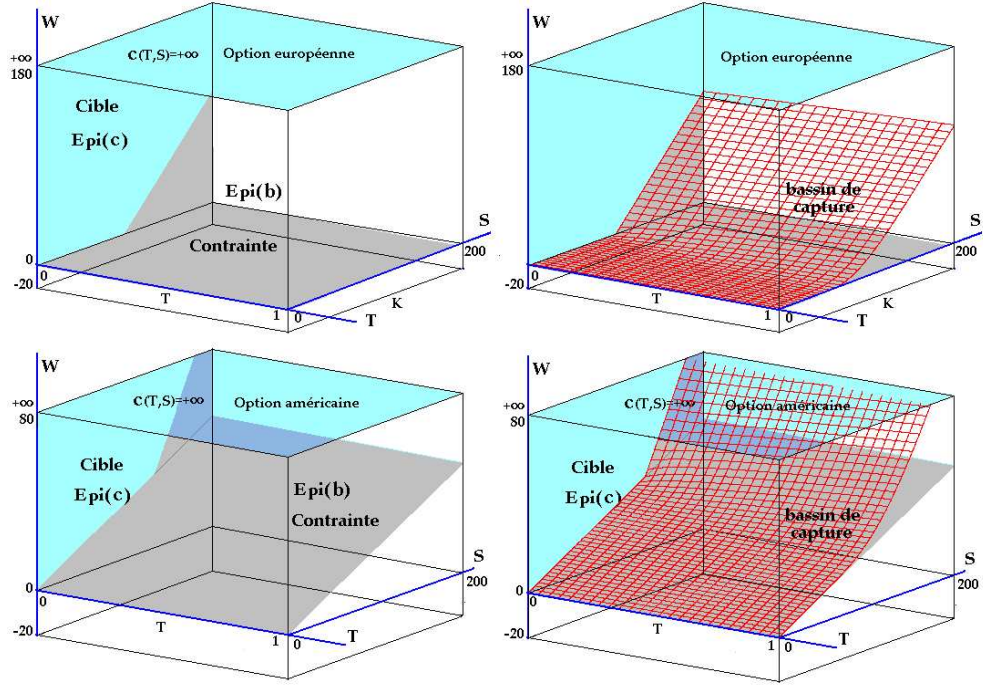


Figure 2: Schéma du problème de capture d'une cible avec contrainte et visualisation du bassin de capture associé à la fonction d'évaluation de l'option. En haut : option européenne standard ; en bas : option de type américain non standard avec contrainte de la forme $b(T, S) := S/4$.

3.2 Formule de la fonction d'évaluation

Dans ce paragraphe on donne une formule analytique fonctionnelle de la fonction d'évaluation des options décrites par les fonctions $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$.

On associe à la fonction d'objectif $\mathbf{c}$ la fonctionnelle

$$\begin{cases} J_{\mathbf{c}}(t, S; p(\cdot), v(\cdot)) := e^{-\int_0^t \gamma_0(\sigma, S_0(\sigma)) d\sigma} \mathbf{c}(T-t, S(t)) \\ + \int_0^t e^{-\int_0^\tau \gamma_0(\sigma, S_0(\sigma)) d\sigma} p_1(\tau) S_1(\tau) [\gamma_0(\tau, S_0(\tau)) - \gamma_1(\tau, S_1(\tau), v(\tau))] d\tau \end{cases}$$

et la fonctionnelle

$$\begin{cases} J_{\mathbf{b}}(t, S; p(\cdot), v(\cdot)) := \sup_{s \in [0, t]} e^{-\int_0^s \gamma_0(\sigma, S_0(\sigma)) d\sigma} \mathbf{b}(T-t, S(t)) \\ + \int_0^s e^{-\int_0^\tau \gamma_0(\sigma, S_0(\sigma)) d\sigma} p_1(\tau) S_1(\tau) [\gamma_0(\tau, S_0(\tau)) - \gamma_1(\tau, S_1(\tau), v(\tau))] d\tau \end{cases}$$

Posons

$$L_{\mathbf{b}}^{\mathbf{c}}(t, S; p(\cdot), v(\cdot)) := \max(J_{\mathbf{b}}(t, S; p(\cdot), v(\cdot)), J_{\mathbf{c}}(t, S; p(\cdot), v(\cdot)))$$

On démontre [37, Pujal] que

Théorème 3.2 *la fonction d'évaluation garantie $(T, S) \mapsto V(T, S)$ du portefeuille est égale à*

$$V(T, S) := \inf_{\tilde{p} \in \tilde{P}(S)} \sup_{v(\cdot) \in Q(S(\cdot))} \inf_{t \in [0, T]} L_{\mathbf{b}}^{\mathbf{c}}(t, S; \tilde{p}(T - \cdot, S(\cdot), V(\cdot, S(\cdot))), v(\cdot))$$

4 Approximation de fonctions d'évaluation : l'Algorithme du Bassin de Capture

Pour évaluer numériquement une option de maturité T , on introduit une division uniforme la période de temps $[0, T]$ en N intervalles de longueur $\rho = \frac{T}{N}$ et on cherche à construire une suite d'approximations de la fonction d'évaluation convergentes vers V lorsque N tend vers $+\infty$.

4.1 Dynamique discrète et discrétisation de l'incertitude

On définit un système contrôlé discret obtenu en approchant les dérivées $(\tau'(t), S_0'(t), S_1'(t)$ et $W'(t)$ par les différences finies $\frac{\tau(t+\rho)-\tau(t)}{\rho}$, $\frac{S_0(t+\rho)-S_0(t)}{\rho}$, $\frac{S_1(t+\rho)-S_1(t)}{\rho}$ et $\frac{W(t+\rho)-W(t)}{\rho}$.

Ce système discret (schéma de Newton) associé à la dynamique (3) s'écrit

$$\begin{cases} \tau^{n+1} &= \tau^n - \rho \\ S_0^{n+1} &= S_0^n(1 + \rho\gamma_0(S_0^n)) \\ S_1^{n+1} &= S_1^n(1 + \rho\gamma_1(S_1^n, v^n)) \\ W^{n+1} &= W^n(1 + \rho\gamma_0(S_0^n)) - \rho p_1^n S_1^n [\gamma_0(S_0^n) - \gamma_1(S_1^n, v^n)] \\ &p^n \in P_\rho(S^n) \text{ et } v^n \in Q_\rho(S^n) \end{cases} \quad (10)$$

où

- τ^n, S_0^n, S_1^n et W^n désignent les approximations de $\tau(n\rho), S_0(n\rho), S_1(n\rho)$ et $W(n\rho)$,
- $P_\rho(S) = (-\infty, 0] \times [0, 1]$ est l'ensemble dans lequel on choisit p^n
- et $Q_\rho(S^n) = [v_{m\rho}, v_{M\rho}]$ est l'intervalle dans lequel peut varier le tyche v^n .

On pose

$$g_\rho(\tau, S_0, S_1, W, p_1, v) := (\tau - \rho, S_0(1 + \rho\gamma_0(S_0)), S_1(1 + \rho\gamma_1(S_1, v)), W(1 + \rho\gamma_0(S_1)) - p_1 S_1 \rho [\gamma_0(S_0) - \gamma_1(S_1, v)]).$$

4.2 Approximation de la fonction d'évaluation

Pour déterminer le bassin de capture garantie associé au système (3) sous les contraintes et objectif (4) on détermine le bassin de capture garantie discret associé au système (10) sous les contraintes et objectif suivants

$$\begin{aligned} W^N &\geq \mathbf{c}(0, S^N) \\ \tau^N &\geq -\rho \\ W^n &\geq \mathbf{b}((N-n)\rho, S^n), \quad \forall n \leq N \end{aligned} \quad (11)$$

qui est l'ensemble des positions initiales (τ^0, S^0, W^0) pour lesquelles il existe une stratégie de couverture discrète $p^n \in P$ telle que, quelle que soit l'évolution discrète de l'incertitude $v^n \in [v_{m\rho}, v_{M\rho}]$, la suite (τ^n, S^n, W^n) déterminée à partir de (10) vérifie les conditions (11). On note cet ensemble $Capt_{g_\rho}(\mathcal{E}pi(\mathbf{b}), \mathcal{E}pi(\mathbf{c}))$.

On peut alors appliquer le Théorème de Convergence des noyaux de viabilité discrets étendu aux bassins de capture garantie discrets (voir [40], [25]) et l'on a

Théorème 4.1 *la suite des bassins de capture garantie discrets converge¹ vers le bassin de capture garantie du système initial :*

$$\text{Lim}_{\rho \rightarrow 0} Capt_{g_\rho}(\mathcal{E}pi(\mathbf{b}), \mathcal{E}pi(\mathbf{c})) = Capt_f(\mathcal{E}pi(\mathbf{b}), \mathcal{E}pi(\mathbf{c}))$$

¹il s'agit ici de la convergence d'ensemble au sens de Painlevé-Kuratowski.

On définit alors la fonction d'évaluation approchée V_ρ de la manière suivante :

$$\mathcal{E}pi(V_\rho) := \text{Capt}_{g_\rho}(\mathcal{E}pi(\mathbf{b}), \mathcal{E}pi(\mathbf{c}))$$

On fixe une fois pour toutes la condition initiale sur l'actif non risqué $S_0(0) = 1$. L'état initial du système est alors $(T, 1, S_1(0), W(0))$. Comme l'évolution de l'actif non risqué est entièrement déterminée par la connaissance du taux sans risque $S_0 \rightarrow \gamma_0(S_0)$ et que pour tout t , $W(t) = p_0(t)S_0(t) + p_1(t)S_1(t)$, la quantité $p_0(t)S_0(t)$ s'exprime en fonction de $W(t)$ et de $p_1(t)S_1(t)$. Il suffit donc de déterminer uniquement p_1 dans l'intervalle $[0, 1]$ puisque le vendeur d'un option peut toujours se couvrir en achetant l'actif lui-même, c'est-à-dire en choisissant $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$.

Enfin, l'ensemble des contrôles $P_\rho(S)$ ne dépend en général pas du pas de temps ρ . Par contre, sur chaque intervalle de temps de longueur ρ , le tyche v peut varier dans un certain intervalle et le choix en fonction de ρ des bornes inférieure et supérieure de cet intervalle d'incertitude est crucial. Il dépend de la nature de cette incertitude : par exemple

- $[v_{m\rho}, v_{M\rho}] = [e^{-\sigma\sqrt{\rho}} - 1, e^{\sigma\sqrt{\rho}} - 1]$ correspond à la méthode binômiale de Cox, Ross & Rubinstein où σ représente alors la volatilité.
- $[v_{m\rho}, v_{M\rho}] = \rho[v_m, v_M]$ correspond à la discrétisation du modèle tychastique : v_m et v_M représentent les bornes entre lesquelles varie l'incertitude tychastique. C'est le cas des jeux dynamiques contre la nature ou du contrôle robuste.
- $[v_{m\rho}, v_{M\rho}] = \rho^\beta \rho[v_m, v_M]$ correspond à un modèle discrétisé plus général.

Si $\beta = -\frac{1}{2}$, l'intervalle d'incertitude correspond (pratiquement) au modèle de Cox, Ross et Rubinstein lorsque $v_m = -\sigma$ et $v_M = \sigma$.

Si $\beta = 0$, il correspond au modèle tychastique.

Pour d'autres valeurs de β , il correspond à des modèles de Cox, Ross et Rubinstein fractionnaires qui s'apparentent par passage à la limite à des Browniens fractionnaires (voir § 6.1).

4.3 L'Algorithme du Bassin de Capture

On définit la fonction

$$V_\rho^0(t, S_0, S_1) = \begin{cases} \mathbf{b}(t, S_1) & \text{si } t \in]0, T] \\ \mathbf{c}(0, S_1) & \text{si } t \in]-\rho, 0] \end{cases}$$

et on pose $K_\rho^0 := \mathcal{E}pi(V_\rho^0)$. Pour déterminer le bassin de capture garantie discret on considère la suite des ensembles $K_\rho^1, K_\rho^2, \dots, K_\rho^n$ définie récursivement par

$$K_\rho^{n+1} = \left\{ (t, S_0, S_1, W) \in K_\rho^n \mid \begin{array}{l} \exists p_1 \in [0, 1], \forall v \in [v_{m\rho}, v_{M\rho}], \\ g_\rho(t, S_0, S_1, W, p_1, v) \in K_\rho^n \end{array} \right\} \quad (12)$$

où $n = N - \text{entier}(\frac{t}{\rho})$. On peut alors montrer [40], [25], [41] le résultat suivant :

Posons :

$$A^n(t, S, p_1, v) := \frac{V_\rho^n(t - \rho, S_0(1 + \rho\gamma_0(S_0)), S_1(1 + \rho\gamma_1(S_1, v))) - \rho p_1 S_1[\gamma_1(S_1, v) - \gamma_0(S_0)]}{1 + \rho\gamma_0(S_0)} \quad (13)$$

Proposition 4.1 *Pour ρ suffisamment petit pour que $1 + \rho\gamma_0(S_0) > 0$, il existe des fonctions V_ρ^n telles que $\mathcal{Epi}(V_\rho^n) = K_\rho^n$. Ces fonctions vérifient la propriété (constructive) suivante :*

$$V_\rho^{n+1}(t, S_0, S_1) := \max \left[V_\rho^n(t, S_0, S_1), \inf_{p_1 \in [0,1]} \sup_{v \in [v_{m\rho}, v_{M\rho}]} A^n(t, S_0, S_1, p_1, v) \right]$$

et la fonction d'évaluation garantie discrète est donnée par

$$V_\rho(t, S) = V_\rho^n(n\rho, S), \forall t \in [(n-1)\rho, n\rho]$$

4.4 Construction des feedbacks approchés p^n .

La gestion d'un portefeuille de couverture ne peut se faire à partir de la seule connaissance de la fonction d'évaluation $V(T, S)$. Elle nécessite de connaître la stratégie de couverture $(T, S) \rightarrow \tilde{p}(T, S)$. Pour cela nous montrons que l'on peut construire une suite de feedbacks approchés p^n correspondant à la stratégie optimale de couverture pour le problème d'évaluation discrète de l'option.

Proposition 4.2 *Supposons que pour tout S_1 et pour tout $t \in [0, T]$ on ait*

$$\gamma_1(S_1, v_m) - \gamma_0(S_0) < 0 < \gamma_1(S_1, v_M) - \gamma_0(S_0). \quad (14)$$

Supposons également que pour tout $t \in [-\rho, T]$, l'application $S_1 \rightarrow V_\rho^0(t, S_0, S_1)$ soit convexe et croissante et que, pour tout n , l'application $S_1 \rightarrow S_1\gamma_1(S_1, v)$ soit convexe.

Alors, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, les fonctions $S \rightarrow V_\rho^n(t, S_0, S_1)$ sont convexes, croissantes par rapport à S_1 et il existe une unique valeur p_1^n réalisant à chaque étape l'infimum en p_1 sur $[0, 1]$.

Démonstration — Par hypothèse, la propriété est vraie à l'étape 0. Supposons la propriété vraie à l'étape n . Montrons qu'elle l'est à l'étape $n+1$.

Soient t et S fixés. L'application $v \rightarrow A^n(t, S_0, S_1, p_1, v)$ est convexe en v . La borne supérieure en v est donc atteinte pour $v = v_m$ ou $v = v_M$. Donc chaque application $p_1 \rightarrow A^n(t, S_0, S_1, p_1, v)$ est affine. Par conséquent la recherche de l'infimum en p_1 revient à chercher l'infimum en p_1 de la fonction $\max[A^n(t, S_0, S_1, p_1, v_m), A^n(t, S_0, S_1, p_1, v_M)]$ qui est l'enveloppe supérieure de deux fonctions affines en p_1

$$\text{l'une de pente : } \rho \frac{S_1(\gamma_1(S_1, v_m) - \gamma_0(S_0))}{1 + \rho\gamma_0(S_0)}, \text{ et l'autre de pente : } \rho \frac{S_1(\gamma_1(S_1, v_M) - \gamma_0(S_0))}{1 + \rho\gamma_0(S_0)}.$$

D'après l'hypothèse (14), ces pentes sont de signes contraires. L'enveloppe supérieure étant convexe en p_1 , il existe alors un minimum unique $\bar{p}_1^n \in [0, 1]$. On a alors :

$$V_\rho^{n+1}(t, S_0, S_1) := \max \left(V_\rho^n(t, S_0, S_1), \sup_{v \in [v_m, v_M]} A^n(t, S_0, S_1, \bar{p}_1^n, v) \right)$$

Comme la fonction $S \rightarrow V_\rho^n(t, S_0, S_1)$ est convexe par hypothèse, il est facile de voir que toutes les fonctions $S \rightarrow A^n(t, S_0, S_1, \bar{p}_1^n, v)$ sont convexes. Par conséquent la fonction $S_1 \rightarrow V_\rho^{n+1}(t, S_0, S_1)$, enveloppe supérieure de fonctions convexes, est convexe. $\square$

Remarque : le cas d'une période Lorsque $\rho = 1$ et $T = 1$, c'est-à-dire lorsque l'on considère le cas où il n'y a qu'une période, la fonction $V_T^1(T, S_1)$ est déterminée par

$$V_T^1(S_1) = \max_{p_1 \in [0,1]} \left[(S_1 - K)^+, \frac{(S_1(1 + \gamma_1 + v_m) - K)^+ - p_1 S_1(\gamma_1 + v_m - \gamma_0)}{1 + \gamma_0}, \frac{(S_1(1 + \gamma_1 + v_M) - K)^+ - p_1 S_1(\gamma_1 + v_M - \gamma_0)}{1 + \gamma_0} \right]$$

Sous l'hypothèse (14), on obtient

$$\bar{p}_1 = \frac{(S_1(1 + \gamma_1 + v_M) - K)^+ - (S_1(1 + \gamma_1 + v_m) - K)^+}{S_1(v_M - v_m)}$$

$$\text{et } V_T^1(S_1) = \frac{(\gamma_0 - (\gamma_1 + v_m))(S_1(1 + \gamma_1 + v_M) - K)^+ + ((\gamma_1 + v_M) - \gamma_0)(S_1(1 + \gamma_1 + v_m) - K)^+}{(1 + \gamma_0)(v_M - v_m)}$$

On retrouve la formule d'évaluation binômiale obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation linéaire [44, Zabczyk].

4.4.1 Etude du cas linéaire

Dans ce paragraphe, nous étudions le cas particulier où le taux de l'actif risqué dépend linéairement de l'incertitude. Nous montrons qu'alors la fonction d'évaluation coïncide avec la valeur intrinsèque d'un call européen actualisé [34, Gibson].

Supposons $\mathbf{b} = 0$, $V^0(t, S_1) = (S_1 - K)^+$ et $\gamma_1(S_1, v) = \gamma_1 + v$. Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition précédente, la fonction $v \rightarrow (S_1(1 + \rho\gamma_1 + \rho v) - K)^+ - S_1\rho[\gamma_1 + v - \gamma_0]^+$ est continue, linéaire par morceaux et, sur la succession des intervalles où la fonction est linéaire, la pente prend les valeurs successives $\{0, \rho S_1, 0\}$ ou $\{0, -\rho S_1, 0\}$. En particulier le supremum est encore atteint pour les valeurs (non uniques) v_m et v_M .

On peut donc écrire :

$$V^1(\rho, S_1) = \max \left[(S_1 - K)^+, \frac{(S_1 - K + S_1\rho\gamma_1 + S_1\rho v_M)^+ - S_1\rho(\gamma_1 - \gamma_0 + v_M)}{1 + \rho\gamma_0}, \frac{(S_1 - K + S_1\rho\gamma_1 + S_1\rho v_m)^+}{1 + \rho\gamma_0} \right]$$

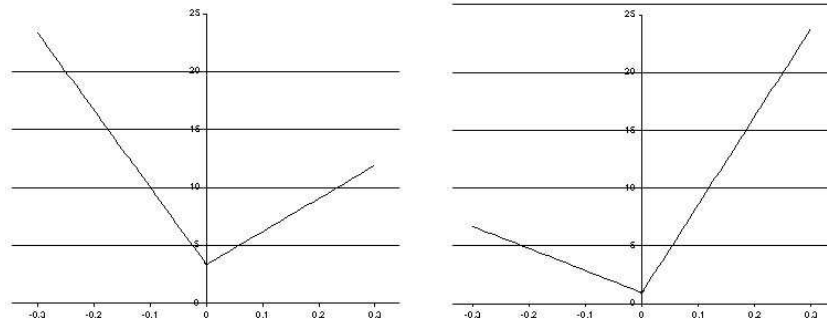


Figure 3: Graphe de l'application $v \rightarrow A^1(t, S, p_1, v)$ dans le cas linéaire. A gauche, $p_1 = 0.7$: le maximum est atteint pour $v = -0.3$. A droite, $p_1 = 0.2$: le maximum est atteint pour $v = +0.3$.

Par conséquent,

$$\text{si } S \leq K - S_1\rho\gamma_1 - S_1v_M, \text{ alors } V^1(\rho, S_1) = \max(0, S_1 - K) = 0$$

si $K - S_1\rho\gamma_1 - S_1\rho v_M \leq S \leq K - S_1\rho\gamma_1 - S_1\rho v_m$, alors

$$V^1(\rho, S_1) = \max(0, S_1 - K, \frac{S_1 - K + S_1\rho\gamma_0}{1 + \rho\gamma_0}) = [S_1 - \frac{K}{(1 + \rho\gamma_0)}]^+$$

si $K - S_1\rho\gamma_1 - S_1v_m \leq S$, alors

$$V^1(\rho, S_1) = \max(0, S_1 - K, \frac{S_1 - K + S_1\rho\gamma_0}{1 + \rho\gamma_0}, \frac{S_1 - K + S_1\rho\gamma_1 + S_1\rho v_m}{1 + \rho\gamma_0})$$

et puisque par hypothèse $\gamma_1 + v_m < \gamma_0$: $V^1(\rho, S_1) = [S_1 - \frac{K}{(1+\rho\gamma_0)}]^+$

On en déduit immédiatement qu'à l'étape N on a : $V^N(T, S_1) = [S_1 - \frac{K}{(1+\rho\gamma_0)^N}]^+$, c'est-à-dire la valeur intrinsèque d'un call européen actualisé.

La figure 4 illustre parfaitement le fait que la fonction d'évaluation d'une option européenne $V_\rho(t, S_1)$ est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines et, sur le tableau 3, on observe qu'effectivement $V_\rho(t, S_1)$ converge vers la valeur intrinsèque d'un call européen actualisé lorsque N tend vers l'infini.

Par exemple, pour $[v_m, v_M] = [-0.3, 0.3]$, $\gamma_0 = 0.05$, $\gamma_1 = 0.1$, $K = 100$ et $T = 1$ on obtient les valeurs suivantes :

valeur de S_1	Valeur de l'option pour $N = 2$	p_0	p_1
80	2.50	-18.06	0.2570
90	4.88	-35.21	0.4446
100	10.97	-52.99	0.6395
110	18.32	-70.91	0.8114
120	25.66	-88.83	0.9547

Table 2:

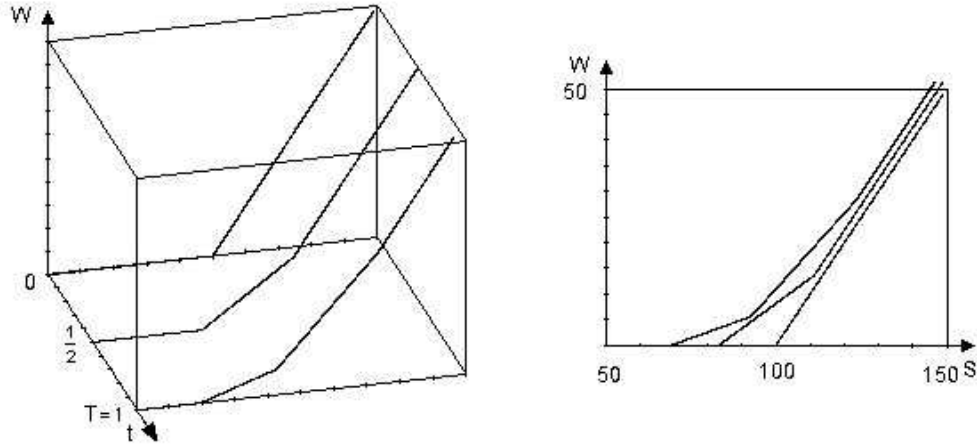


Figure 4: Evaluation sous incertitude tychastique d'option européenne : modèle discret avec $N=2$.

Le tableau 3, lorsque le nombre de périodes N évolue de 2 à 512, la valeur de l'option à échéance $T = 1$ lorsque le cours de l'actif sous-jacent est $S_1 = K$.

Nombre de périodes	Valeur de l'option	p_0	p_1
$N = 2$	10.97	-52.99	0.6395
$N = 4$	8.68	-59.39	0.6806
$N = 8$	6.93	-64.68	0.7161
$N = 16$	5.94	-71.33	0.7726
$N = 32$	5.32	-79.18	0.8449
$N = 512$	4.87	-95.01	0.9987

Table 3:

4.4.2 Cas général.

Les algorithmes que nous avons développés, déduits de l'approximation des bassins de capture et de leur caractérisation épigraphique, permettent de retrouver, dans le cadre classique des systèmes linéaires, les valeurs obtenues à partir du modèle binomial et leur limite lorsque ρ tend vers 0. Par contre, pour évaluer des produits financiers plus complexes où interfèrent à la fois des règles quantitatives et des règles qualitatives, ils permettent de donner rapidement des réponses numériques très précises à des questions qui ne peuvent recevoir de réponse sous forme analytique.

5 Exemples d'évaluation garantie d'options

La présentation des exemples qui suivent vise à illustrer ces différents points de vue. Elle est organisée en trois parties, la première traite le cas d'options de type européen, la seconde traite le cas d'options de type américain et la dernière explore divers cas non classiques où les taux, fourchette d'incertitude et objectifs sont variables ou discontinus.

Dans chacune des trois parties on observera les évaluations garantie d'options d'achat (call) d'un actif risqué dans un environnement incertain de type Cox, Ross & Rubinstein ou tychastique. Dans tous les exemples, l'évaluation des options a été obtenue en appliquant l'algorithme du bassin de capture "ABC".

5.1 Données numériques

Pour les options européennes et américaines, on supposera les taux annuels constants, ce qui permet d'éliminer la variable S_0 . Le système se réécrit :

$$\begin{cases} \tau^{n+1} &= \tau^n - \rho \\ S_1^{n+1} &= S_1^n(1 + \rho\gamma_1 + v^n) \\ W^{n+1} &= W^n(1 + \rho\gamma_0) + p_1^n S_1^n(\rho\gamma_1 - \rho\gamma_0 + v^n) \\ &p_1^n \in [0, 1] \text{ et } v^n \in [v_{m\rho}, v_{M\rho}] \end{cases}$$

et l'ensemble des contraintes est donné par $b(n\rho, S_1^n) \leq W^n \leq c(n\rho, S_1^n)$ et $n \leq N$ vérifiant $N\rho = T$.

Nous choisirons, sauf s'il est précisé des valeurs particulières, les paramètres financiers suivants :

- $\gamma_0 = 0.05$ et $\gamma_1 = 0.1$ les taux annuels des actifs sans risque et risqué,
- $T = 1$ et $K = 100$,

- $v_m = -\sigma$, $v_M = \sigma$ où $\sigma = 0.3$ correspond à l'évaluation annuelle de l'incertitude (l'écart type dans les modèles de type Cox, Ross & Rubinstein).

et les valeurs des paramètres de discrétisation suivantes :

- N : le nombre de périodes discrétisant l'intervalle de temps $[0, T]$,
- $\rho = \frac{T}{N}$ le pas de temps, durée de chaque période,
- $v_{m\rho} = \rho v_m$ et $v_{M\rho} = \rho v_M$ dans les exemples où l'incertain est tychastique,
- $v_{m\rho} = e^{-\sigma\sqrt{\rho}} - 1$ et $v_{M\rho} = e^{\sigma\sqrt{\rho}} - 1$ dans les exemples où l'incertain est de type Cox, Ross & Rubinstein.

Les figures qui suivent présentent dans la plupart des exemples la fonction d'évaluation minimale $(t, S_1) \rightarrow V(t, S_1)$ et la stratégie optimale $(t, S_1) \rightarrow p_1(t, S_1)$ de placement en actif risqué, représentée également par un pixel de couleur choisie dans une seconde palette et reportée sur le graphe de la fonction d'évaluation.



Figure 5: Echelle des valeurs de p_1 .

5.2 Evaluation d'option européenne

Dans ces trois premiers exemples, on suppose que la fourchette d'incertitude appliquée à chaque période de temps ρ est déterminée à partir d'un paramètre σ représentant la volatilité annuelle telle qu'elle apparaît dans le modèle binomial. Cet intervalle est de la forme $[e^{-\sigma\sqrt{\rho}} - 1, e^{\sigma\sqrt{\rho}} - 1]$. On observe dans le premier exemple que l'algorithme du bassin de capture redonne pratiquement les mêmes valeurs que celle obtenues par le modèle binomial de Cox, Ross & Rubinstein.

5.2.1 Evaluation d'option standard

L'évaluation d'options européennes est déterminée à partir de la dynamique discrète suivante :

$$\begin{aligned} \text{Pour le cas C.R.R. :} & \begin{cases} S_1^{n+1} = S_1^n(1 + \rho\gamma_1 + v^n) \\ W^{n+1} = W^n(1 + \rho\gamma_0) - p_1^n S_1^n[\rho\gamma_0 - \rho\gamma_1 - v^n] \\ p_1^n \in [0, 1] \text{ et } v^n \in [e^{-\sigma\sqrt{\rho}} - 1, e^{\sigma\sqrt{\rho}} - 1] \end{cases} \\ \text{Pour le cas tychastique :} & \begin{cases} S_1^{n+1} = S_1^n(1 + \rho\gamma_1 + v^n) \\ W^{n+1} = W^n(1 + \rho\gamma_0) - p_1^n S_1^n[\rho\gamma_0 - \rho\gamma_1 - v^n] \\ p_1^n \in [0, 1] \text{ et } v^n \in \rho[v_m, v_M] \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Exemple 5.1

$$\begin{aligned} \text{Fonction objectif :} & \quad c(t, S) = \begin{cases} (S_1 - K)^+ & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Contrainte :} & \quad b(t, S) = 0 \end{aligned}$$

Le tableau suivant indique les valeurs de la fonction d'évaluation pour une option de durée de vie égale à un an. Elles sont obtenues par l'algorithme du bassin de capture pour un nombre de pas de temps N égal à 512. Le taux sans risque est choisi $\gamma_0 = 5\%$, le prix d'exercice est $K = 100$. Les valeurs sont données pour différentes valeurs initiales S_1 de l'actif risqué choisies autour du prix d'exercice. L'évaluation avec une incertitude de type Cox, Ross et Rubinstein est calculée pour une volatilité $\sigma = 0.3$. L'évaluation avec une incertitude tychastique est calculée pour $Q(S) = [v_m, v_M] = [-5, 5]$

valeur de S_1	C.R.R. $\sigma = 0.3$	p_0	p_1	Tychastique $[v_m, v_M] = [-5, 5]$	p_1
80	4.60	-22.10	0.3353	2.42	0.2512
90	8.71	-34.94	0.4865	5.88	0.4449
100	14.28	-48.17	0.6245	11.29	0.6316
110	21.11	-59.94	0.7374	18.38	0.7787
120	28.93	-69.63	0.8227	26.69	0.8774

Table 4:

Sur la partie gauche de la figure 6 est représenté le graphe de la fonction d'évaluation de l'option $(T, S) \rightarrow V(T, S)$ avec, en superposition à l'aide d'une échelle colorimétrique, la stratégie de couverture $(T, S) \rightarrow p_1(T, S)$. Sur la partie droite on retrouve par projection dans le plan (S, W) la courbe classique d'évaluation d'une option.

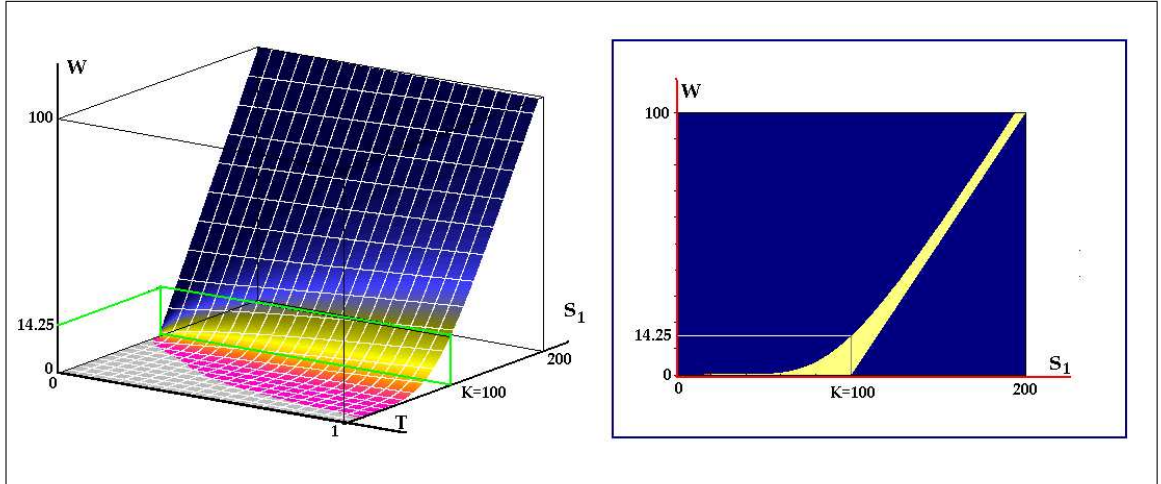


Figure 6: Fonction d'évaluation (gauche) $(T, S_1) \rightarrow V(T, S_1)$ et sa projection (droite) dans le plan (S_1, V) . Incertitude de type Cox-Rubinstein et option européenne. Exemple 5.1.

La partie gauche de la figure 7 représente le graphe de la stratégie de couverture $(T, S) \rightarrow p_1(T, S) \in [0, 1]$, c'est-à-dire le nombre d'actifs risqués composant le portefeuille qui duplique l'option. Ce nombre est compris entre 0 et 1. Sur la partie droite est représentée à l'aide de l'échelle colorimétrique la stratégie de couverture $(T, S) \rightarrow p_{\rho 1}(T, S)$.

Le tableau suivant permet de situer les résultats obtenus par l'algorithme du bassin de capture pour différentes échéances et ceux obtenus par la méthode binômiale de Cox, Ross & Rubinstein pour $N = 512$. Tous les calculs ont été effectués pour un taux sans risque $\gamma_0 = 5\%$, un prix d'exercice $K = 100$ et pour $S_1 = 100$. Pour le cas C,R & R, σ varie de 0.1 à 0.5. Pour le cas tychastique, v_M varie de 2 à 10.

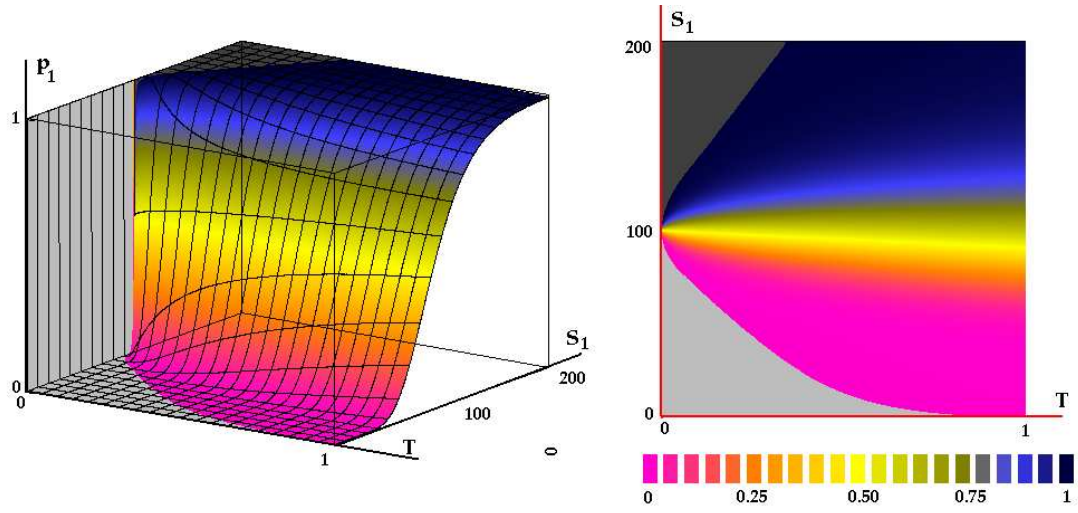


Figure 7: Le graphe de la fonction de couverture (gauche) $(T, S_1) \rightarrow p_1(T, S_1)$ de l'actif risqué. Représentation (droite) sur une échelle colorimétrique de cette fonction de couverture, dans le plan (S_1, T) . Exemple 5.1

T	σ	C,R & R	ABC 512	p_0	p_1	$[v_m, v_M]$	Tychastique	p_1
1	0.1	6.72	6.82	-64.06	0.7078	$[-2, 2]$	6.45	0.7268
0.5	0.1	4.15	4.21	-60.95	0.6507	$[-2, 2]$	3.92	0.6655
0.1	0.1	1.52	1.53	-55.47	0.5699	$[-2, 2]$	1.39	0.5765
1	0.2	10.45	10.46	-53.23	0.6368	$[-5, 5]$	11.29	0.6316
0.5	0.2	6.89	6.89	-52.91	0.5979	$[-5, 5]$	7.49	0.5940
0.1	0.2	2.77	2.79	-51.68	0.5446	$[-5, 5]$	3.04	0.5419
1	0.25	12.27	12.34	-50.41	0.6274	$[-7, 7]$	14.64	0.6242
0.5	0.25	8.22	8.26	-50.84	0.5910	$[-7, 7]$	9.92	0.5884
0.1	0.25	3.39	3.42	-50.72	0.5413	$[-7, 7]$	4.14	0.5397
1	0.3	14.23	14.23	-48.20	0.6242	$[-8, 8]$	16.32	0.6252
0.5	0.3	9.65	9.64	-49.24	0.5887	$[-8, 8]$	11.14	0.5891
0.1	0.3	4.03	4.04	-49.97	0.5401	$[-8, 8]$	4.70	0.5402
1	0.5	21.73	21.76	-41.69	0.6344	$[-10, 10]$	19.66	0.6305
0.5	0.5	15.09	15.12	-44.66	0.5977	$[-10, 10]$	13.57	0.5936
0.1	0.5	6.53	6.54	-47.87	0.5441	$[-10, 10]$	5.81	0.5422

Table 5:

5.2.2 Evaluation d'option européenne non standard

L'algorithme du bassin de capture permet d'évaluer de la même manière les options non standard.

Exemple 5.2 [Option "Capped"]

$$\begin{aligned} \text{Fonction objectif : } \mathbf{c}(t, S) &= \begin{cases} (S_1 - K)^+ & \text{si } t = 0 \text{ et } S \leq K + 50 \\ 50 & \text{si } t = 0 \text{ et } S > K + 50 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Contrainte : } \mathbf{b}(t, S) &= 0 \end{aligned}$$

Cette option consiste à limiter le paiement final lorsque le cours dépasse, à l'échéance, un certain seuil, c'est-à-dire lorsque l'option est très "en dedans" (voir la figure 5.2).

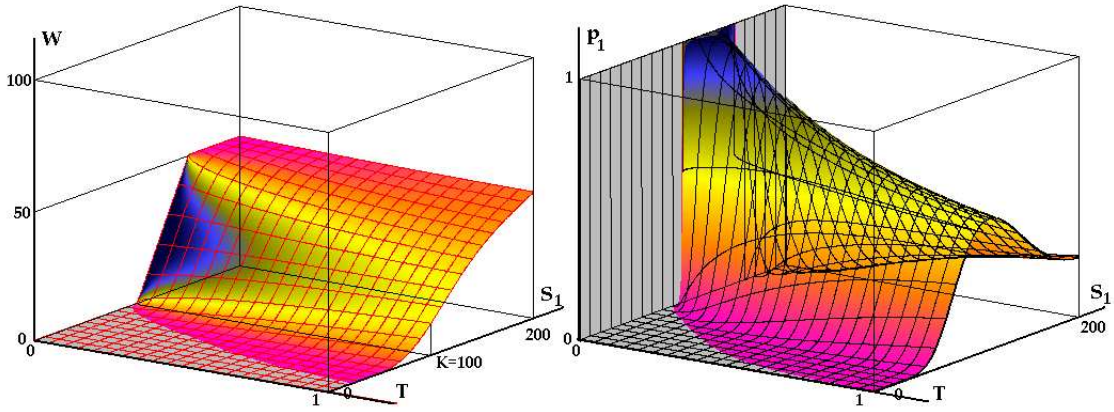


Figure 8: Fonction d'évaluation garantie d'option "capped" et p_1 optimal. Exemple 5.2.

Exemple 5.3 [Option "Asset or nothing" ou "bet option"]

$$\begin{aligned} \text{Fonction objectif : } \mathbf{c}(t, S) &= \begin{cases} S & \text{si } t = 0 \text{ et } S \geq K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Contrainte : } \mathbf{b}(t, S) &= 0 \end{aligned}$$

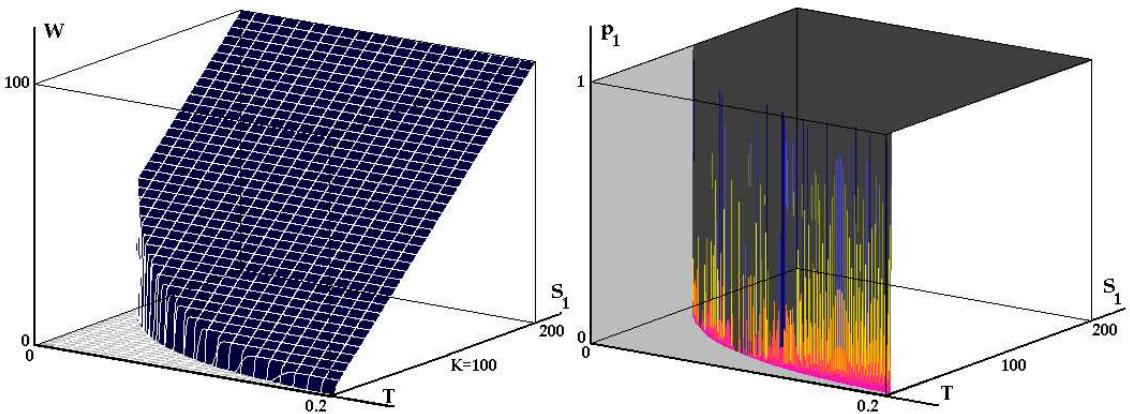


Figure 9: Fonction d'évaluation garantie d'option "Asset or Nothing" p_0 et p_1 optimaux. Exemple 5.3.

La particularité de cette option sur le plan mathématique est de générer une fonction d'évaluation garantie discontinue dont l'épigraphe est fermé, discontinuité prise en compte par la caractérisation en termes de bassin de capture.

D'autre part la convergence de la suite des évaluations discrètes, lorsque le nombre de périodes augmente, est beaucoup plus lente que pour les autres types d'option où la fonction est plus régulière. Comme le montre la figure 9, la fonction d'évaluation est discontinue le long d'une courbe du plan (T, S) .

5.3 Evaluation d'option américaine

On considère le problème d'évaluation d'options américaine avec incertitude de type Cox, Ross & Rubinstein dont la dynamique discrète est décrite comme précédemment par (15).

5.3.1 Evaluation garantie d'option américaine standard avec incertitude de type Cox, Ross & Rubinstein

Exemple 5.4

$$\begin{aligned} \text{Fonction objectif : } \quad \mathbf{c}(t, S) &= \begin{cases} (S_1 - K)^+ & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Contrainte : } \quad b(t, S) &= (S - K)^+ \end{aligned}$$

Comme le justifie la théorie, les valeurs de l'option à échéance d'un an obtenues par l'algorithme du bassin de capture sont quasiment identiques à celles obtenues dans les cas des options européennes présentées dans l'Exemple 5.1 car il y a absence de paiement de dividendes.

5.3.2 Evaluation garantie d'option américaine non standard avec incertitude de type Cox, Ross & Rubinstein

Pour illustrer la capacité de cette méthode pour évaluer une option avec contrainte autre que classique, on considère l'exemple suivant :

Exemple 5.5

$$\begin{aligned} \text{Fonction objectif : } \quad \mathbf{c}(t, S) &= \begin{cases} \max\left(\frac{S}{4}, (S_1 - K)^+\right) & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Contrainte : } \quad b(t, S) &= \frac{S}{4} \end{aligned}$$

La contrainte plancher $b(t, S) = \frac{S}{4}$ exprime le fait que l'acheteur peut à tout instant entre 0 et T exercer l'option et sera assuré de recevoir au moins 25% de la valeur de l'actif risqué.

6 Evaluation d'autres types d'options de contrats

6.1 Variations autour du Tychastique

La figure 11 montre pour $N = 512$ subdivisions de l'intervalle $[0, T]$ la variation de la valeur d'une option - ici une option européenne standard - en fonction du degré d'incertitude représentée par le paramètre β dans le choix de l'intervalle $Q_\rho(v) = \sigma\rho^\beta[-\rho, \rho]$, rappelant que pour $\beta = -\frac{1}{2}$, l'incertitude est du type Cox, Ross et Rubinstein et que pour $\beta = 0$, elle est du type tychastique.

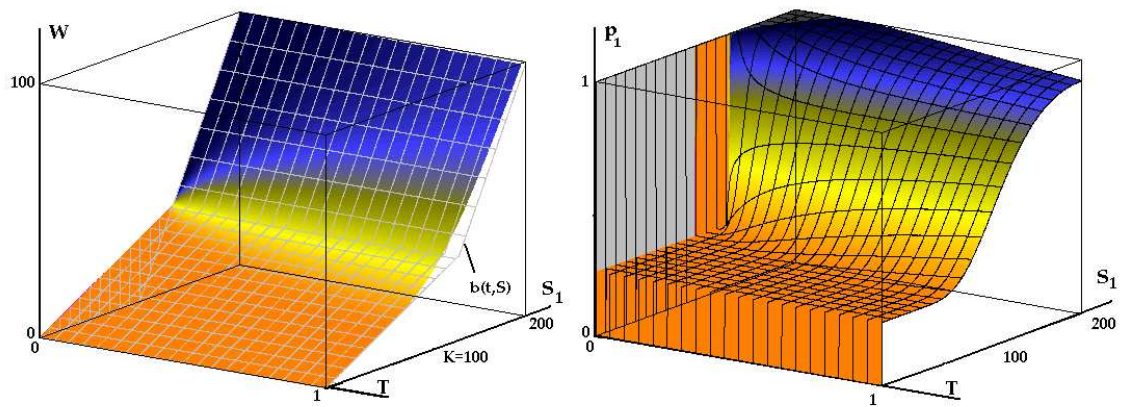


Figure 10: Fonction d'évaluation garantie sous incertitude de type Cox, Ross & Rubinstein d'option non standard et p_1 optimal. Exemple 5.5.

valeur de S_1	C.R.R. $\sigma = 0.3$	p_1	Tychastique $[v_m, v_M] = [-2, 2]$	p_1
80	20.64	0.3127	20.13	0.2684
90	24.04	0.3706	22.99	0.30661
100	28.11	0.4457	26.37	0.3760
110	32.98	0.5297	30.60	0.4733
120	38.70	0.6141	35.88	0.5835

Table 6:

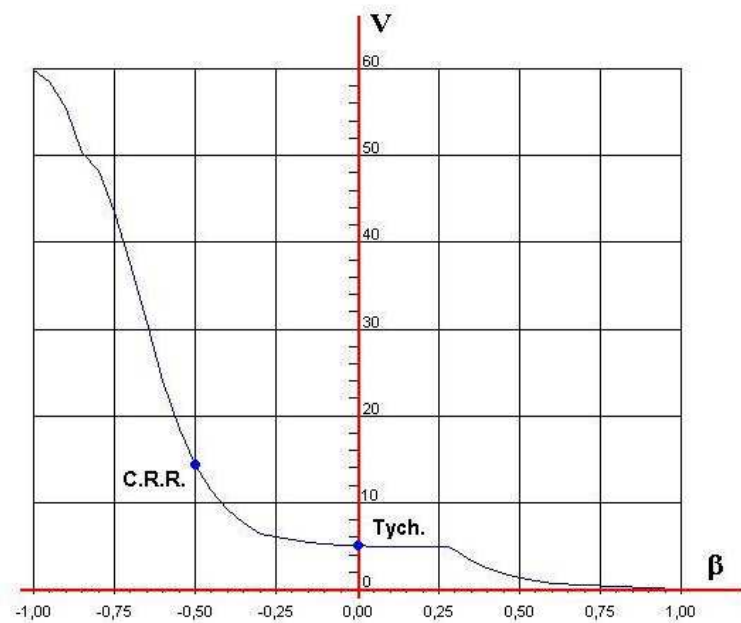


Figure 11: Variation de la valeur de la fonction d'évaluation garantie en fonction du degré d'incertitude.

Nous donnons différents résultats numériques d'évaluation d'options dans des situations où la fonction objectif ou bien les paramètres dépendent d'une façon non standard soit cours de l'actif risqué, soit de la durée de vie de l'option. Ces exemples ne correspondent à aucune modélisation connue de l'incertitude. Toutefois de telles situations pourraient se rencontrer dans le cas où l'incertitude à court terme et celle à long terme sont très différentes. Ces exemples permettent d'apprécier l'intérêt de l'approche des problèmes d'évaluation d'option par l'algorithme du bassin de capture.

6.1.1 Evaluation avec fonction de paiement non standard

On considère maintenant un modèle d'évaluation d'option non standard pour lequel la fonction objectif est tronquée et non linéaire par morceaux. Nous donnons deux exemples graphiques.

Exemple 6.1

$$\begin{aligned} \text{Fonction objectif : } c(t, S) &= \begin{cases} \min \left(\frac{((S_1 - K)^+)^2}{K^{sup} - K}, K^{sup} - K \right) & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Contrainte : } b(t, S) &= 0 \end{aligned}$$

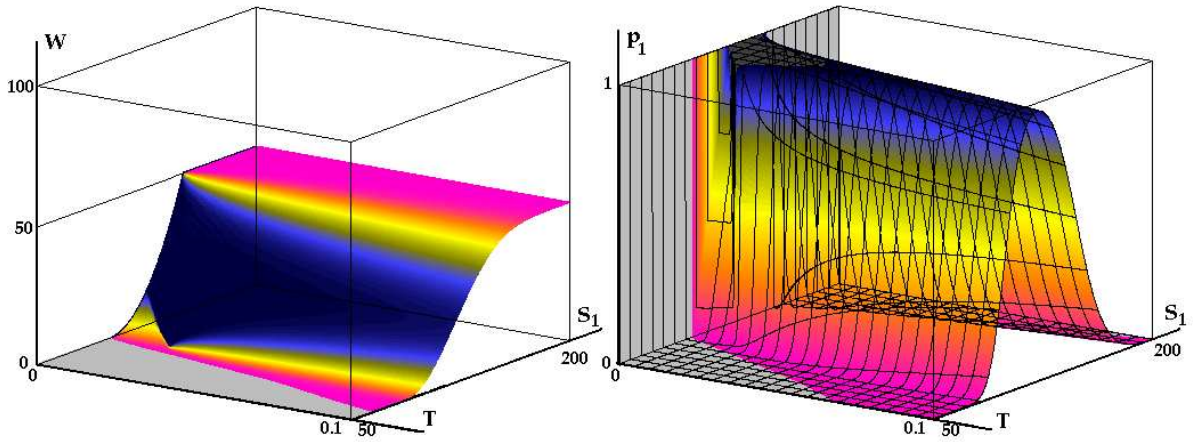


Figure 12: Fonction d'évaluation garantie sous incertitude de type Cox, Ross et Rubinstein d'option non standard, p_1 optimal. Exemple 6.1.

Le tableau suivant indique les valeurs de l'option à échéance d'un an obtenues par l'algorithme du bassin de capture pour $N = 32$. Les calculs ont été effectués pour $\sigma = 30\%$, $K = 100$ et $K^{sup} = 150$.

6.1.2 Evaluation garantie tychastique à incertitude et taux variables

Pour étudier des modèles d'évaluation d'option non standard pour lesquels les taux des actifs dépendent du temps et où la fourchette d'incertitude dépend de la valeur des actifs et du temps, on introduit une généralisation du système (3) de la forme :

$$(\tau'(t), S'(t), W'(t)) = \varphi(\tau(t), S(t), W(t), p_1(t), v(t))$$

valeur de S_1	C.R.R. $\sigma = 30\%$	p_1	<i>Tychastique</i> $[v_m, v_M] = [-2, 2]$	p_1
80	3.53	0.2736	4.21	0.2630
90	6.55	0.3786	7.11	0.3390
100	10.78	0.4656	10.37	0.3862
110	16.14	0.5149	14.66	0.4260
120	20.29	0.4999	20.76	0.4441

Table 7:

qui s'écrit :

$$\begin{cases} \tau'(t) &= -1 \\ S'_0(t) &= S_0(t)\gamma_0(T - \tau(t), S_0(t)) \\ S'_1(t) &= S_1(t)\gamma_1(T - \tau(t), S_1(t), v(t)) \\ W'(t) &= W(t)\gamma_0(T - \tau(t), S(t)) - \tilde{p}_1(T - \tau(t), S_1(t))S_1(t)(\gamma_0(T - \tau(t), S_0(t)) - \gamma_1(T - \tau(t), S_1(t), v(t))) \end{cases} \quad (16)$$

et comme précédemment on cherche des solutions $t \rightarrow (\tau(t), S(t), W(t))$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \tau(0) = T, \quad S(0) = S, \quad W(0) = W, & \text{(condition initiale)} \\ \forall t \in [0, T], \quad W(t) \geq \mathbf{b}(T - t, S(t)) & \text{(contrainte)} \\ \forall t \in [0, T], \quad \tau(t) \geq 0 & \text{(contrainte)} \\ W(T) \geq \mathbf{c}(0, S(T)) & \text{(objectif final)} \end{cases} \quad (17)$$

Exemple 6.2

Dans cet exemple on considère un autre type de dépendance des taux et d'incertitude. En particulier l'incertitude est supposée décroître en fonction du temps restant à courir jusqu'à l'échéance.

$$\begin{aligned} \text{Fonction objectif :} \quad \mathbf{c}(t, S) &= \begin{cases} \min \left(\frac{((S_1 - K)^+)^2}{K^{sup} - K}, K^{sup} - K \right) & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Contrainte :} \quad b(t, S) &= 0 \end{aligned}$$

On suppose γ_1 , v_m et v_M de la forme : $\gamma_1(T - t, S_1) = \frac{\sqrt{S_1}}{1000}$, $v_m = -0.3 \frac{1}{0.01+t^2}$ et $v_M = 0.3 \frac{1}{0.01+t^2}$.

References

- [1] AUBIN J.-P., BAYEN A., BONNEUIL N. & SAINT-PIERRE P.. *Viability, Control and Games, Regulation of Complex Evolutionary Systems Under Uncertainty and Viability Constraints* Springer-Verlag (to appear in 2005).
- [2] AUBIN J.-P. & DA PRATO G. *Stochastic Nagumo's Viability Theorem*, Stochastic Analysis and Applications, 1995, 13, 1-11;
- [3] AUBIN J.-P. & DA PRATO G. *The Viability Theorem for Stochastic Differential Inclusions*, Stochastic Analysis and Applications, 1998, 16, 1-15.
- [4] AUBIN J.-P. & DOSS H. *Characterization of Stochastic Viability of any Nonsmooth Set Involving its Generalized Contingent Curvature*, Stochastic Analysis and Applications, 2003, 25, 951-981.

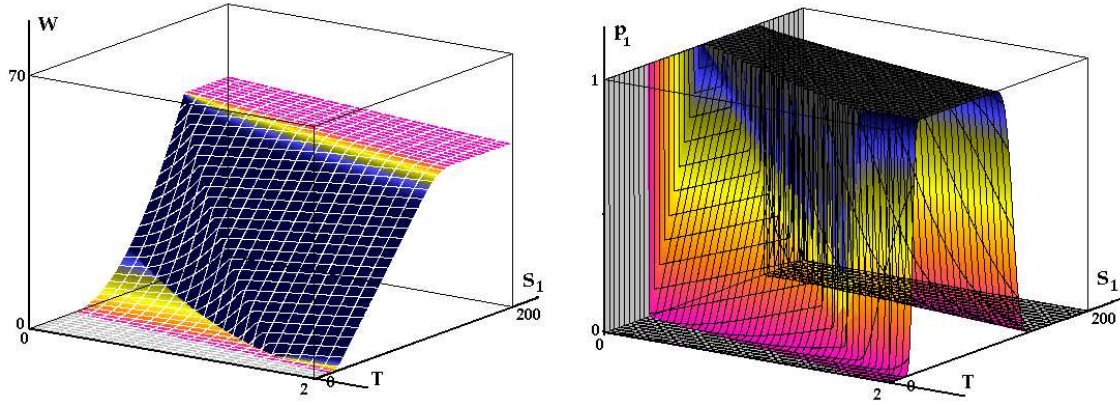


Figure 13: Fonction d'évaluation garantie sous incertitude tychastique d'option non standard et stratégie optimale : p_0 . Exemple 6.2.

- [5] AUBIN J.-P. & FRANKOWSKA H. SET-VALUED ANALYSIS, Birkhäuser, Boston, Basel, 1990.
- [6] AUBIN J.-P. & FRANKOWSKA H. *The Viability Kernel Algorithm for Computing Value Functions of Infinite Horizon Optimal Control Problems*, J.Math. Anal. Appl., 1996, 201, 555-576.
- [7] AUBIN J.-P. & HADDAD G. *History (Path) Dependent Optimal Control and Portfolio Valuation and Management*, J. Positivity, 2002.
- [8] AUBIN J.-P., PUJAL D. & SAINT-PIERRE P., *Dynamic Management of Portfolios with Transaction Costs under Tychastic Uncertainty*, Preprints di Matematica - 15, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2001.
- [9] AUBIN J.-P., *Slow and Heavy Solutions to Control Problems*, in NONLINEAR AND CONVEX ANALYSIS, Eds. B-L. Lin & Simons S., Proceedings in honor of Ky Fan, Lecture Notes in pure and applied mathematics, June 24-26, 1985,
- [10] AUBIN J.-P., (1991) VIABILITY THEORY Birkhäuser, Boston, Basel
- [11] AUBIN J.-P., (1997) DYNAMIC ECONOMIC THEORY: A VIABILITY APPROACH, Springer-Verlag, .
- [12] BASAR T. & OLSDER G.J., DYNAMIC NONCOOPERATIVE GAME THEORY. Academic Press, 1982.
- [13] BENSOUSSAN A., STOCHASTIC CONTROL BY FUNCTIONAL ANALYSIS METHODS, North-Holland, 1982.
- [14] BENSOUSSAN A. & LIONS J.-L., (1978) APPLICATIONS DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES EN CONTRÔLE STOCHASTIQUE, Dunod, .
- [15] BERNHARD P., *Une approche déterministe de l'évaluation des options*, in OPTIMAL CONTROL AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, IOS Press, 2000.
- [16] BERNHARD P., *Robust control approach to option pricing, including transaction costs*, Annals of Dynamic Games, 2001.
- [17] BERNHARD P., *An explicit viscosity solution of an Isaacs quasi variational inequality arising in option pricing*, preprint, 2003.
- [18] BJORK T., ARBITRAGE THEORY IN CONTINUOUS TIME, Oxford University Press, 1998.
- [19] BLACK F. & SCHOLES M., *The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency*, Journal of Finance, 1972, 27, 399-418.

- [20] BONNEUIL N. & SAINT-PIERRE P., *The Hybrid Guaranteed Capture Basin Algorithm in Economics*, Proceedings of Hybrid Systems: Computation and Control, Lecture Notes in Computer Science, LNCS 2993, Springer-Verlag, 2004, pp.187-202.
- [21] CARDALIAGUET P. *A differential game with two players and one target*, SIAM J. Control and Optimization, 1996, 34, 4, 1441-1460.
- [22] CARDALIAGUET P. *Viability and invariance for differential game with applications to Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*, in TOPOLOGY IN NONLINEAR ANALYSIS, 1998,
- [23] CARDALIAGUET P., QUINCAMPOIX M. & SAINT-PIERRE P., *Differential games with state constraints*, Cahiers de Mathématiques de la Décision. Université Paris IX Dauphine, 1995.
- [24] CARDALIAGUET P., QUINCAMPOIX M. & SAINT-PIERRE P., *Some algorithms for differential games with two players and one target*, M²AN, 1994, Vol. 28, N 4, 441-461.
- [25] CARDALIAGUET P., QUINCAMPOIX M. & SAINT-PIERRE P., *Contribution à l'étude des jeux différentiels quantitatifs et qualitatifs avec contrainte sur l'état*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 1995, 321, 1543-1548
- [26] CARDALIAGUET P., QUINCAMPOIX M. & SAINT-PIERRE P., *Set-valued numerical methods for optimal control and differential games*, In STOCHASTIC AND DIFFERENTIAL GAMES. THEORY AND NUMERICAL METHODS, Annals of the International Society of Dynamical Games, 1999, 177-247, Birkhäuser.
- [27] CARDALIAGUET P., QUINCAMPOIX M. & SAINT-PIERRE P., *Optimal times for constrained nonlinear control problems without local controllability*, Appl. Math. Opti., 1997, 36, 21-42
- [28] COX, ROSS J. & RUBINSTEIN M. OPTIONS MARKET, Prentice Hall, 1985.
- [29] DA PRATO & FRANKOWSKA, *A stochastic Filippov Theorem*, Stochastic Calculus, 1994, 12, 409-426
- [30] DA PRATO & FRANKOWSKA, *Stochastic viability for compact sets in terms of the distance function*, (to appear)
- [31] DA PRATO & FRANKOWSKA, *Invariant measure for a class of parabolic degenerate equations*, (to appear)
- [32] DA PRATO & FRANKOWSKA, *Invariance of stochastic control systems with deterministic arguments*, (submitted)
- [33] DOSS H., *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Calcul des Probabilités et Statistique, 1977, 23, 99-125-345
- [34] GIBSON R., L'ÉVALUATION DES OPTIONS, Presses Universitaires de France, 1993.
- [35] MERTON R.C., CONTINUOUS-TIME FINANCE, Blackwell, 1990.
- [36] OLSDER G.J., *Control-theoretic thoughts on option pricing*, preprint, 1999.
- [37] PUJAL D., *Évaluation et gestion dynamiques de portefeuilles*, Thèse, Université Paris IX-Dauphine, 2000.
- [38] PUJAL D. & SAINT-PIERRE *Dynamic Evaluation of Portofolios through Constrained Target Problem with Contingent Uncertainty*, preprint, 2001.
- [39] QUINCAMPOIX M., *Playable differentiable games*, J. Math. Anal. Appl., 1991, 194-211
- [40] SAINT-PIERRE P., *Approximation of the viability kernel*, Applied Mathematics & Optimisation, 1994, 29, 187-209.
- [41] SAINT-PIERRE P., *Viable Capture Basin for Studying Differential and Hybrid Games*, à paraître dans International Game Theory Review, World Scientific Publishing Company (2003)

- [42] SONER H.M. & TOUZI N., *Super-replication under Gamma constraints*, SIAM J. Control and Opt, 1998.
- [43] SONER H.M. & TOUZI N., *Stochastic target problems, dynamical programming and viscosity solutions*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2002, 41, 404-424.
- [44] ZABCZYK J., CHANCE AND DECISION: STOCHASTIC CONTROL IN DISCRETE TIME, Quaderni, Scuola Normale di Pisa, 1996.
- [45] ZABCZYK J., *Stochastic invariance and consistency of financial models*, preprint Scuola Normale di Pisa, 1999.

Liste des Figures

1	Schéma du problème de capture d'une cible avec contrainte. À partir de A , au moins une évolution atteint la cible C sans avoir quitté K . À partir de B , aucune évolution n'atteint la cible C sans avoir quitté K	10
2	Schéma du problème de capture d'une cible avec contrainte et visualisation du bassin de capture associé à la fonction d'évaluation de l'option. En haut : option européenne standard ; en bas : option de type américain non standard avec contrainte de la forme $b(T, S) := S/4$	13
3	Graphes de l'application $v \rightarrow A^1(t, S, p_1, v)$ dans le cas linéaire. À gauche, $p_1 = 0.7$: le maximum est atteint pour $v = -0.3$. À droite, $p_1 = 0.2$: le maximum est atteint pour $v = +0.3$	17
4	Évaluation sous incertitude tychastique d'option européenne : modèle discret avec $N=2$	18
5	Échelle des valeurs de p_1	20
6	Fonction d'évaluation (gauche) $(T, S_1) \rightarrow V(T, S_1)$ et sa projection (droite) dans le plan (S_1, V) . Incertitude de type Cox-Rubinstein et option européenne. Exemple 5.1.	21
7	Le graphe de la fonction de couverture (gauche) $(T, S_1) \rightarrow p_1(T, S_1)$ de l'actif risqué. Représentation (droite) sur une échelle colorimétrique de cette fonction de couverture, dans le plan (S_1, T) . Exemple 5.1	22
8	Fonction d'évaluation garantie d'option "capped" et p_1 optimal. Exemple 5.2.	23
9	Fonction d'évaluation garantie d'option "Asset or Nothing" p_0 et p_1 optimaux. Exemple 5.3. . .	23
10	Fonction d'évaluation garantie sous incertitude de type Cox, Ross & Rubinstein d'option non standard et p_1 optimal. Exemple 5.5.	25
11	Variation de la valeur de la fonction d'évaluation garantie en fonction du degré d'incertitude. . .	25
12	Fonction d'évaluation garantie sous incertitude de type Cox, Ross et Rubinstein d'option non standard, p_1 optimal. Exemple 6.1.	26
13	Fonction d'évaluation garantie sous incertitude tychastique d'option non standard et stratégie optimale : p_0 . Exemple 6.2.	28