

# La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?

Anisa Caja<sup>β</sup>

Frédéric Planchet\*

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

ISFA – Actuarial School <sup>γ</sup>

WINTER & Associés <sup>λ</sup>

## Résumé

Dans ce papier<sup>1</sup>, on propose une synthèse de la modélisation et de la mesure du prix de marché du risque dans la perspective de son utilisation dans les modèles actif / passif en assurance. Après un rappel de contexte, cette notion est introduite à partir des modèles s'appuyant sur des diffusions ; une attention particulière est portée à la littérature sur la forme du prix de marché du risque et à son estimation.

**MOTS-CLEFS** : Prime de risque, prix de marché du risque, déflateur, CAPM, APT, excès de rendement.

---

<sup>β</sup> Contact : ani\_caja@yahoo.com

\* Corresponding author. Contact : frederic.planchet@univ-lyon1.fr

<sup>γ</sup> Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 – France.

<sup>λ</sup> WINTER & Associés – 55 avenue René Cassin - 69009 Lyon – France.

<sup>1</sup> Version 1.1 du 11 décembre 2010.

## SOMMAIRE

1	INTRODUCTION .....	3
2	LE ROLE DU PRIX DE MARCHÉ DU RISQUE DANS LES MODELES .....	5
2.1	LE CADRE STANDARD .....	5
2.2	UNE EXTENSION DU CADRE AFFINE .....	7
2.3	LIEN AVEC LES DEFLATEURS .....	8
3	TYPLOGIE DES PRIMES DE RISQUE .....	10
3.1	RISQUES ASSOCIES AUX PRODUITS DE TAUX .....	10
3.2	RISQUES ASSOCIES AUX ACTIONS .....	11
4	APPROCHES ECONOMIQUES DES PRIMES DE RISQUE.....	11
4.1	LE CAPM .....	11
4.2	L'APT .....	12
4.3	LE C-CAPM .....	12
5	MODELISATION DIRECTE DU PRIX DE MARCHÉ DU RISQUE .....	13
5.1	UN CADRE MONO FACTORIEL GENERAL .....	14
5.2	UNE APPROCHE NON PARAMETRIQUE.....	16
5.3	APPLICATION NUMERIQUE .....	18
5.3.1	Estimation de la volatilité.....	19
5.3.2	Estimation de la dérive .....	20
5.3.3	Estimation du prix de marché du risque de taux .....	20
5.3.4	Application : construction de courbes de prix de ZC.....	23
6	CONCLUSION .....	24
7	BIBLIOGRAPHIE.....	25

# 1 INTRODUCTION

---

Dans le cadre du dispositif<sup>2</sup> Solvabilité 2, la modélisation de l'actif est utilisée pour obtenir deux informations de nature différente (cf. Planchet et al. [2009]) :

- estimer la distribution de la marge actif-passif à un horizon donné (un an) ;
- calculer des provisions dans une logique *market consistent*, notamment sur des portefeuilles d'épargne ou, plus généralement, sur les portefeuilles pour lesquels il existe un dispositif de participation aux bénéficiaires.

Au surplus, on peut noter que l'horizon de projection considéré dans un contexte assurantiel est en général un horizon de moyen terme de quelques années à quelques dizaines d'années en fonction des risques (cf. Derien [2010]).

La logique *market consistent* retenue par Solvabilité 2 pour la détermination du niveau des provisions implique que le niveau *best estimate* des provisions soit homogène à un prix, précisément le prix de la couverture financière qu'il est possible de mettre en œuvre dans le cas d'un passif couvrable (cf. Planchet [2009] pour le cas de l'assurance vie et Wüthrich et al. [2007] pour l'assurance non-vie). Depuis les travaux de Briys et de Varenne [1994], les techniques de calcul de provisions dans ce cadre ont fait l'objet d'une abondante littérature, que ce soit sur les méthodes de valorisation (cf. Grosen et Jorgensen [2000] pour un exemple typique) ou leurs conséquences en termes de mise en place de couvertures et de gestion des risques (cf. Frantz et al. [2003] ou plus récemment Nteukam et al. [2011]).

A ce cadre désormais classique, le dispositif imposé par Solvabilité 2 apporte un degré de complexité supplémentaire associé à la détermination d'un quantile de la distribution de la marge actif-passif. De ce fait, la description de l'actif risqué doit être effectuée à la fois d'un point de vue statistique et dans un cadre risque neutre (cf. Carr et al. [2002]). Le passage de l'un à l'autre de ces points de vue est possible en introduisant la notion de prix de marché du risque. Ainsi, la description complète de l'actif à modéliser se compose alors de deux éléments :

- la dynamique observable des facteurs de risque sous-jacent à l'actif risqué ;
- la structure du prix de marché du risque qui, ajoutée à la dynamique (historique) des facteurs de risque, permet de calculer le prix de l'actif.

Cette problématique fait l'objet de nombreuses publications, on pourra par exemple consulter Duffee et Stanton [2000] ou Zemmour [2002]. On peut noter que l'analyse du prix de marché du risque est *a priori* intimement liée à la nature du risque modélisé : risque de taux, de crédit, risque action, etc.

En pratique, la détermination du prix de marché du risque, inobservable, peut être effectuée en analysant la prime de risque, qui est par définition l'excès de rendement par rapport au taux sans risque offert par un support risqué. La littérature sur le sujet est abondante et on pourra consulter par exemple Mehra [2003], Balduzzi et Robotti [2001] ou encore Cochrane et Piazzesi [2005] et les références associées.

---

<sup>2</sup> Voir la Directive 2009/138/CE du 25/11/2009 (<http://register.consilium.europa.eu/pdf/fr/09/st03/st03643-re06.fr09.pdf>).

Toutefois, on peut noter que la démarche généralement privilégiée dans les modèles actif / passif d'assurance consiste à décrire la dynamique des composants du générateur de scénarios économique (sur le choix des composants du GSE, voir par exemple Faleh et al. [2010]) dans les deux univers, risque neutre et historique. La dynamique risque neutre est utilisée pour le calcul des provisions et la version historique pour calculer les quantiles de la distribution d'intérêt, en général la valeur nette de l'actif.

Cela s'avère en premier lieu pénalisant en termes de volume de calcul nécessaire pour obtenir les résultats ; en effet, les provisions ne pouvant être évaluées par des formules fermées, il est nécessaire de se tourner vers des techniques de simulation, ce qui conduit à la problématique maintenant classique des « simulations dans les simulations » (SdS) et implique la mise au point de techniques d'optimisation sophistiquées (*cf.* Devineau et Loisel [2009] pour une présentation de l'approche SdS et d'une technique d'optimisation possible).

En second lieu, et cela nous semble plus problématique, la nécessité de manipuler le modèle conjointement dans les deux univers conduit à contraindre fortement la forme du prix de marché du risque. En effet, afin de laisser invariante la structure de la diffusion lue sous l'une ou l'autre des probabilités<sup>3</sup>, on se trouve en pratique contraint de simplifier la forme possible du prix de marché du risque (souvent constant). Ce point est notamment développé dans Duffee et Stanton [2000], qui proposent, dans le cadre de la modélisation des taux d'intérêt, un modèle dans lequel cette contrainte est relâchée. Ces contraintes imposées à la forme du prix de marché du risque peuvent être justifiées dans une certaine mesure en finance de marché, au moins lorsque l'horizon de projection est court. Mais dès lors que celui-ci augmente et que les interactions avec le contexte macro-économique doivent être prises en compte, cela devient beaucoup plus discutable. On pourra notamment consulter Bernay [2008] pour une analyse des spécificités d'une vision à long terme.

Il apparaît donc que, dans le contexte des modèles actif / passif en assurance, une attention particulière doit être portée à la forme, complexe, du prix de marché du risque et qu'il convient alors de privilégier les modèles permettant une description explicite du prix de marché du risque, en d'autres termes les modèles intégrant une approche par déflateurs, comme l'illustrent les travaux pionniers de Smith [1996], Smith et Southall [2002] ou encore Descure et Borean [2006].

Dans le présent article, on revient donc dans un premier temps sur le rôle du prix de marché du risque dans le cadre des modèles de diffusion, puis on analyse le lien avec l'approche plus économique de la prime de risque telle qu'elle est introduite dans le CAPM et l'APT (*cf.* Ross [1976]) Enfin, on examine la question de l'estimation empirique des primes de risque dans la perspective de leur utilisation pour le calibrage d'un déflateur (*cf.* Sijlamassi et Ouaknine [2004] et Dastarac et Sauveplane [2010]). L'objectif poursuivi est de proposer une synthèse des approches permettant une prise en compte explicite du prix de marché du risque dans un modèle actif / passif utilisé en assurance.

---

<sup>3</sup> Classiquement, dans les modèles de taux à facteur, on impose ainsi une structure affine sous  $P$  et  $Q$ .

## 2 Le rôle du prix de marché du risque dans les modèles

---

On revient ici, à partir de la présentation classique des modèles de taux à facteur, sur la notion de prix de marché du risque et sur les formes qu'il est envisageable de donner à ce prix dans la perspective d'améliorer le cadre de détermination de la courbe des zéro-coupons.

### 2.1 Le cadre standard

On considère l'exemple simple d'un modèle de taux à un facteur supposé être le taux court, par exemple le modèle de Vasicek, dont la dynamique est la suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

En pratique cette dynamique peut être utilisée pour décrire l'évolution du taux court dans l'univers observable ou dans l'univers risque neutre. Dans ce dernier univers, les 3 paramètres  $(a, b, \sigma)$  suffisent à calculer le prix d'un zéro-coupon, alors que dans le premier cas, il convient d'ajouter un paramètre supplémentaire, le "prix de marché du risque" pour déterminer le prix du même zéro-coupon.

Le théorème de Girsanov fournit le moyen technique de passer de l'univers historique dans lequel ce qui nous intéresse est la détermination d'un quantile pour la distribution des pertes, et l'univers risque neutre, dans lequel des prix peuvent être données pour un certain actif. Ce passage d'un univers à l'autre est opéré en spécifiant un changement de probabilité. Formellement, le théorème de Girsanov dit que, si  $W_t$  est un mouvement brownien sous la probabilité  $P$  et  $F$  sa filtration naturelle et si  $X_t$  est un processus adapté à  $F$  et vérifiant la condition de Novikov, alors il existe une mesure  $Q$  équivalente à  $P$ , définie sur  $F_T$  par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^T X_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T X_t^2 dt\right)$$

telle que  $W_t = W_t - \int_0^t X_s ds$  soit un mouvement brownien sous  $Q$ .

En appliquant le théorème de Girsanov à des actifs financiers,  $P$  sera la probabilité historique et  $Q$  la probabilité équivalente à  $P$  utilisée pour donner un prix à l'actif. Cette probabilité  $Q$  doit être choisie de sorte que les prix actualisés des actifs soient une martingale afin d'assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage. Elle est appelée probabilité risque-neutre.

Comme il a été précisé ci-dessus, le passage entre les deux mesures se fait au moyen d'un processus  $X_t$  qui permet d'écrire la densité de Radon-Nykodym. Pour le passage de l'univers historique à l'univers risque-neutre, ce processus  $X_t$  s'interprète, au signe près, comme le prix de marché du risque, noté  $\lambda(t)$ . Remarquons cependant que dans le cas continu l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché implique l'existence d'une probabilité  $Q$  équivalente à  $P$ . La réciproque est vraie seulement dans le cas discret. En outre l'hypothèse de marché complet assure l'unicité de cette probabilité risque neutre, et donc l'unicité de la forme du prix de marché du risque.

Ce résultat permet de généraliser l'exemple introductif<sup>4</sup> en observant que la dynamique du facteur considéré pour expliquer la courbe des taux peut être considérée dans l'univers historique ou dans l'univers risque neutre :

$$dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t,$$

$$dx_t = (\mu(t, x_t) - \lambda(t) \times \sigma(t, x_t))dt + \sigma(t, x_t)dW_t^Q.$$

Dans certains modèles, en fonction de la forme de la prime de risque il se trouve que les deux dynamiques sont identiques à un changement de paramètre près. On peut incidemment remarquer que le raisonnement ci-dessus permet de retrouver le modèle de Black et Scholes en posant  $\lambda(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$  qui conduit à l'équation usuelle dans laquelle le rendement instantané du sous-jacent est remplacé par le taux sans risque dans l'univers risque-neutre, la volatilité étant inchangée.

Ainsi, en prenant l'exemple du modèle à un facteur de référence, le modèle de Vasicek (cf. Vasicek [1977]), qui propose de retenir la modélisation du taux court par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

on se trouve bien dans le cadre ci-dessus avec  $x_t = r_t$  et l'on trouve que sous  $Q$  cette équation devient :

$$dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma dW_t^Q,$$

avec  $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$ . Le processus définissant le taux court est donc un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous les deux probabilités, mais avec des paramètres différents. Il importe donc de préciser dans quel univers la dynamique est posée afin d'utiliser la formule de valorisation avec les paramètres pertinents. Ainsi, on obtient la formule classique pour le prix d'un zéro-coupon de maturité  $T$  en  $t < T$  :

$$P(t, T) = \exp \left\{ \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} (R_\infty - r_t) - (T-t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right\},$$

où  $R_\infty = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}$ ,  $\lambda$  étant le prix de marché du risque. Cette formule peut être lue de deux manières :

- une formule avec 4 paramètres, (les 3 de la diffusion plus la prime de risque) dans l'univers historique :  $(a, b, \sigma, \lambda)$  ;

- une formule avec 3 paramètres dans l'univers risque-neutre :  $(a_\lambda, b_\lambda, \sigma)$ .

On peut suivre le même raisonnement avec la modèle classique de Cox, Ingersoll et Ross :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t.$$

---

<sup>4</sup> La suite de cette section est adaptée de PLANCHET et al. [2009].

La prime de risque est déterminée à la fois par les conditions d'équilibre et par la fonction d'utilité. Ici elle dépend de la variable d'état (*cf.* Rebonato [1998]) :

$$\lambda(t, r) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r}.$$

Sous la probabilité risque neutre, la dynamique du taux court devient :

$$dr_t = a_\lambda (b_\lambda - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t^Q,$$

avec  $a_\lambda = a \times (1 + \lambda)$  et  $b_\lambda = \frac{b}{1 + \lambda}$ . L'équation est donc identique à celle de l'univers historique, comme dans le cas du modèle de Vasicek.

Ces deux exemples sont en fait des cas particuliers d'une approche plus générale de modèles factoriels dans laquelle les dynamiques des facteurs sont des processus affines (*cf.* Zemmour [2002]). Cette contrainte peut être relâchée en permettant un degré de liberté supplémentaire sur la forme de la prime de risque ; l'idée est alors de conserver la forme affine en probabilité risque neutre, du fait de sa simplicité pour l'obtention de formules fermées pour le prix des zéro-coupons, et de ne plus imposer cette contrainte dans l'univers historique (*cf.* Duffee et Stanton [2000]).

## 2.2 Une extension du cadre affine

Dans le cas des modèles affines, la dynamique risque-neutre des taux est spécifiée de telle façon à ce que le rendement d'une obligation soit une fonction affine de certaines variables d'état. Les primes de risque obtenues sous ces dynamiques sont des multiples de la volatilité des taux d'intérêt, et c'est pour cette raison que la dynamique des taux d'intérêt est affine à la fois en univers historique et risque-neutre. Cependant, d'après Duffee et Stanton [2000], ces formes ne sont pas assez flexibles pour expliquer les primes de risque observées sur les marchés.

L'idée de ces auteurs est alors de donner une forme de prime de risque assez générale et qui conduit à une dynamique des taux en univers historique qui est cette fois non-affine. La particularité de cette approche se situe donc dans le fait qu'ici on ne spécifie pas la dynamique historique affine pour ensuite trouver toujours une dynamique affine en univers risque-neutre, mais qu'on raisonne à l'inverse. Supposons que le taux d'intérêt instantané suive une dynamique de type CIR, donc affine, sous la probabilité risque-neutre :

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

Pour passer en probabilité historique, il faut donner la forme du prix de marché du risque  $\lambda_t$  et ensuite utiliser le déflateur :

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = -r_t dt - \lambda_t dW_t$$

On choisit alors la spécification du prix de marché du risque  $\lambda_t = \lambda_1 \sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t$ . L'avantage de ce prix de marché du risque est qu'il est composé de deux éléments qui peuvent changer de signe pour mieux s'adapter à la structure par terme des taux d'intérêts. Selon Duffee et Stanton [1999] dans les modèles affines en univers historique et risque-neutre, la forme du prix de marché du risque ne permet pas de tenir compte du fait que l'excès de rendement a

tendance à être positif si la pente de la courbe des rendements est plus grande qu'en moyenne et négatif sinon. La question est de savoir si cette forme plus générale est suffisamment flexible pour prendre en compte ce comportement. Sous la probabilité historique, la dynamique des taux est alors :

$$dr_t = (ab - ar_t + \lambda_1 \sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

En notant  $a^p = a - \lambda_2$ , la dynamique peut être réécrite comme ci-dessous :

$$dr_t = (ab + \lambda_1 \sqrt{r_t} - a^p r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

Le processus est stationnaire si  $a^p > 0$  ou si  $a^p = 0, \lambda_1 < 0$ . L'excès de rendement obligataire espéré, *i.e.* la prime de risque des obligations, est donné par :

$$e_{t,\tau} = -B(\tau) (\lambda_1 \sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t)$$

où  $-B(\tau) \approx \int_0^\tau \exp(-as) ds$  est l'exposition au risque de taux d'intérêt donnée par le modèle

CIR pour le prix d'une obligation.

Ce modèle, dont on espérait qu'il serait suffisamment flexible pour tenir compte du lien entre prix de marché du risque et pente de la courbe des rendements obligataires, n'est finalement pas en mesure de capturer la grandeur de ce lien. Par contre le signe de la relation est juste. Mais on peut retenir l'idée de spécifier la dynamique du facteur sous la probabilité risque-neutre en conservant un modèle relativement simple et de rechercher une forme fonctionnelle pour le prix de marché du risque qui permette de reconstruire la dynamique dans l'univers historique et ainsi d'expliquer la prime de risque observée.

### 2.3 Lien avec les déflateurs

L'approche d'évaluation de valeurs futures des actifs en univers historique et l'approche de détermination du prix actuel de ces actifs en univers risque-neutre peuvent être combinées par les *déflateurs*. Les déflateurs sont des facteurs d'actualisation stochastiques et ils sont utilisés comme une technique alternative au passage en probabilité risque-neutre. Une présentation détaillée dans un contexte d'assurance est proposée dans Dastarac et Sauveplane [2010]. En effet, il suffit d'avoir la dynamique en univers historique et ajouter à cela le déflateur pour donner un prix aux actifs. Cette approche permet une certaine cohérence entre les deux approches de recherche d'un quantile et de *pricing*, puisque les paramètres estimés sont les paramètres historiques et ensuite grâce aux déflateurs un prix peut être donné. Ce prix est bien entendu le même que celui obtenu en faisant le changement de probabilité de  $P$  à  $Q$ .

Les déflateurs permettent d'intégrer explicitement les primes de risque dans le processus de *pricing*, alors que par le passage en probabilité risque-neutre les primes de risque sont implicites dans le changement de mesure de probabilité. Regardons par exemple le cas d'un *pricing* d'action. La dynamique du prix d'action,  $S_t$ , en univers historique est donnée par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$



La dynamique en univers risque-neutre a une dérive égale au taux sans risque et sa volatilité est inchangée :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

En appliquant le lemme d'Itô à ces deux équations, la valeur espérée des actions aujourd'hui sera :

$$E^P(S_T \Pi_T) = E^P \left[ S_0 \exp \left( \left( r + \lambda \sigma - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \exp \left( -rT + \lambda W_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T \right) \right] = S_0$$

et

$$E^Q \left( \exp \left( -\int_0^T r_s ds \right) S_T \right) = E^Q \left[ S_0 \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \exp \left( -\int_0^T r_s ds \right) \right] = S_0$$

Si la valeur de l'action en  $T$ ,  $S_T$ , est actualisée au juste facteur, alors dans les deux cas la valeur espérée actualisée est égale à la valeur de l'action aujourd'hui,  $S_0$ . L'actualisation dans le cas de l'évaluation en univers risque-neutre se fait au taux sans risque, mais qu'en est-il pour l'actualisation de la valeur espérée calculée avec la mesure de probabilité historique ? Il faudrait dans ce cas ajuster le taux d'actualisation. D'après le théorème de Girsanov, en notant

$D_T$  le facteur d'actualisation  $\exp \left( -\int_0^T r_s ds \right)$  et  $\frac{dQ}{dP}$  la densité de Radon-Nykodym qui donne le changement de probabilité entre univers historique et univers risque neutre, on a la relation suivante :

$$E^P \left( S_T D_T \frac{dQ}{dP} \right) = E^Q (S_T D_T) = S_0$$

et donc  $\Pi_T = D_T \frac{dQ}{dP} = \exp \left( -\int_0^T r_s ds + \int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right)$  représente le déflateur. Comme il a été rappelé précédemment, le changement de probabilité est donc donné par :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left( -\int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right).$$

Cette définition du déflateur est cohérente avec celle donné précédemment en 2.2., *i.e.* :

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = -r_t dt - \lambda_t dW_t :$$

En appliquant la formule d'Itô et en intégrant on obtient bien :

$$\Pi_T = \exp \left( -\int_0^T r_s ds + \int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right)$$

On peut donc calculer le prix d'un actif tout en restant en univers historique, comme l'espérance de prix actualisé à l'aide du déflateur. L'espérance du déflateur est (si la prime de risque est constante) :

$$E^P(\Pi_T) = E^P\left(\exp\left(-\int_0^T r_s ds + \int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt\right)\right) = E^P\left(\exp\left(-rT - \lambda W_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T\right)\right)$$

Le prix de l'action est (en supposant que les taux et la prime de risque sont constants) :

$$\begin{aligned} E^P(S_T \Pi_T) &= E^P\left[S_0 \exp\left(\left(r + \lambda\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right) \exp\left(-rT + \lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\right)\right] \\ &= S_0 E^P\left[\exp\left(\lambda\sigma T - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\lambda^2 T + (\sigma - \lambda)W_T\right)\right] \\ &= S_0 \exp\left(\lambda\sigma T - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\right) E^P\left[\exp((\sigma - \lambda)W_T)\right] \\ &= S_0 \exp\left(\lambda\sigma T - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\right) \exp\left(\frac{(\sigma - \lambda)^2}{2} T\right) \\ &= S_0 \end{aligned}$$

Donc si on cherche à donner un prix à un actif, on peut utiliser la dynamique en univers historique. Cependant, dans ce cas, outre les paramètres de la dynamique historique, il faudra estimer en plus le prix de marché du risque.

### 3 Typologie des primes de risque

---

La prime de risque sert à compenser la perte de rentabilité qui peut se produire à cause d'un facteur de risque sous-jacent. Elle contient de l'information sur le prix de marché du risque du facteur, qui est quand à lui généralement inobservable. Mais les facteurs de risque ne sont pas les mêmes pour tous les actifs, donc à chaque fois la prime de risque peut être analysée différemment.

#### 3.1 Risques associés aux produits de taux

Dans le cas des obligations, il y a au moins quatre facteurs de risque et les primes respectives :

- Le risque de taux, qui est le risque de voir les facteurs de risque déterminant la forme de la courbe (typiquement le taux court dans un modèle mono factoriel) changer au cours du temps. C'est le risque le plus important auquel un produit de taux est soumis. Un produit de taux appelé *sans risque* est supposé soumis à ce seul risque.
- le risque de crédit et la prime de crédit, qui va compenser pour le risque de défaut de paiement du nominal à la maturité.
- le risque de liquidité et la prime de liquidité qui compense pour le risque associé à l'incapacité du marché à permettre de vendre l'obligation.
- le risque de corrélation et la prime de corrélation qui tient compte du fait que plusieurs émetteurs peuvent faire défaut au même temps, donc d'une certaine façon du risque de marché.

### 3.2 Risques associés aux actions

Concernant la prime de risque d'une action, elle peut être décomposée en :

- prime de risque sur l'augmentation des dividendes,
- prime de risque sur le taux de change,
- le ratio dividendes/prix.

Le fait que les facteurs de risques diffèrent d'un actif à l'autre fait que la méthode d'estimation des primes de risque doit être adaptée en fonction de l'actif. On peut aussi distinguer les produits dérivés qui ont comme sous-jacent un actif qui est disponible sur le marché, comme c'est le cas d'une option sur une action, et d'autres pour lesquels le sous-jacent n'est pas un titre négociable sur le marché, comme les produits indicés sur l'inflation ou encore les obligations.

## 4 Approches économiques des primes de risque

---

Pour les produits dérivés actions, grâce au modèle de sous-jacent, on peut écrire l'équation de Black-Scholes et faire du *delta hedging* de sorte qu'on élimine le risque dans le portefeuille. Par contre si le sous-jacent n'est pas négociable sur un marché, comme c'est le cas des obligations, le risque ne peut pas être éliminé. C'est pour cela qu'il est important de savoir comment donner un prix à ce risque.

Différentes théories ont été proposées pour expliquer le niveau des prix espérés sur les marchés et donc de manière équivalente les primes de risque.

### 4.1 Le CAPM

La plus ancienne est le CAPM, qui est un modèle qui suppose une relation linéaire entre les rendements d'un actif et le prix de marché du risque :

$$E(R_j) = R_f + \beta_j (E(R_M) - R_f)$$

où  $E(R_j)$  est le rendement espéré de l'actif,  $R_f$  est le taux sans risque,  $\beta_j$  est le coefficient beta de l'actif  $j$  et  $E(R_M)$  est le rendement espéré du marché.

Dans ce modèle  $R_M - R_f$  est la prime de risque du marché et  $E(R_j) - R_f$  est la prime de risque de l'actif  $j$  et  $\beta_j$  est le lien entre les deux. L'hypothèse du CAPM consiste à dire que

$\beta_j = \frac{\text{cov}(R_j, R_M)}{\text{var}(R_M)}$  mesure le risque systémique auquel l'actif est exposé. On peut réécrire

l'équation du CAPM en fonction des primes de risque :

$$E(R_j) - R_f = \beta_j (E(R_M) - R_f).$$

Donc la prime de risque d'un actif est proportionnelle à la prime de risque du marché et le coefficient de proportionnalité est la part de risque systémique dans de risque total de l'actif.

Cette théorie a été invalidée par de nombreux travaux empiriques, mais reste un cadre de réflexion intéressant de par sa simplicité.

## 4.2 L'APT

L'APT (*Arbitrage Pricing Theory*) de Ross [1976] propose une approche plus élaborée, dans laquelle le rendement espéré de l'actif est donné par la formule :

$$E(R_j) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \beta_{ij} F_i$$

où  $\alpha_0$  est un terme constant sans une signification particulière,  $F_i$  est un facteur non-spécifié et  $\beta_{ij}$  la sensibilité du rendement de l'actif  $j$  par rapport au facteur  $F_i$ .

Les facteurs  $F_i$  peuvent être multiples, comme l'inflation, le taux d'intérêt, la croissance économique, et non seulement la prime de risque du marché comme c'était le cas pour le CAPM. Cependant ces facteurs ne sont pas spécifiés et ils peuvent être différents suivant les actifs.

## 4.3 Le C-CAPM

Mehra [2003] met en évidence que les primes de risques des actions sont beaucoup plus élevées que celles que la théorie économique prédit. En effet les rendements réels du marché des actions américain est autour de 7-8 % et les taux des obligations sans risque se situe autour de 1 %. La prime de risque est donc de 6-7 % alors que d'après la théorie économique elle devrait être de 1 %.

Les agents économiques font des choix de placements ou de consommations en se basant sur le principe suivant. Si aujourd'hui un agent achète une action à un certain prix, c'est parce que la perte d'utilité due à la renonciation à une consommation équivalente, sera égale au gain d'utilité grâce au rendement supplémentaire qu'on aura en vendant l'action la période suivante. C'est ainsi que les prix d'une action est fixé. Il faut donc différencier la quantité de consommation de l'utilité retirée de cette consommation.

L'utilité marginale est décroissante par rapport à la consommation. Cela implique qu'une quantité de consommation supplémentaire va augmenter plus notre utilité en période de crise qu'en période de croissance. Donc les actions qui ont un bon rendement en période de crise ont un prix plus élevé que celles qui ont un bon rendement en période de croissance. Donc pour l'inciter à garder une telle action en temps de croissance il faut qu'on donne *une prime* au détenteur de l'action.

En outre, les agents économiques préfèrent lisser la consommation sur différentes périodes, donc ne pas avoir de niveaux de consommation différents suivant les périodes. Si une action, par son rendement, a comme conséquence de lisser la consommation alors elle sera apprécié et donc la prime de risque qu'il faut pour la garder sera inférieure par rapport à une autre qui augmente l'inégalité entre les périodes.

Le modèle est construit de la manière suivante. On considère un seul agent de l'économie avec une fonction d'utilité de type CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*) :

$$U_t(c_t, \alpha) = \frac{c_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, 0 < \alpha < \infty$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'aversion au risque, donc aussi un coefficient de convexité de la fonction d'utilité. Soit  $p_t$  le prix d'une action et  $y_t$  les dividendes. Le choix inter temporel d'un investisseur en  $t$  s'écrit :

$$p_t U'(c_t) = \beta E_t((p_{t+1} + y_{t+1}) U'(c_{t+1}))$$

avec  $\beta$  le coefficient d'actualisation. Le rendement de l'action est  $\frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t} = R_{e,t+1}$ .

L'équation ci-dessus on peut s'écrire :

$$E_t \left( \beta \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} r_{e,t+1} \right) = 1.$$

On peut réécrire la même équation, mais cette fois-ci pour une obligation sans risque de rendement  $r_f$ .

$$E_t \left( \beta \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} r_{f,t+1} \right) = 1$$

On définit le déflateur  $q_t$  en fonction des utilités par la formule :

$$\beta \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} = q_{t+1}$$

L'équation ci-dessus peut-être réécrite pour donner une définition des primes de risque :

$$E_t(R_{e,t+1}) - R_{e,t+1} = -\mathbf{cov} \left( \frac{U'(c_{t+1})}{E_t(U'(c_{t+1}))}, R_{e,t+1} \right) = \lambda_{t+1}$$

En faisant des hypothèses sur la loi des rendements, on obtient  $r_f = 0,127$  et  $E(r_e) = 0,141$  soit une prime de risque  $\lambda = 1,4\%$  soit beaucoup moins élevée que celle observée.

## 5 Modélisation directe du prix de marché du risque

---

Les modèles explicatifs présentés ci-dessus ne sont pas satisfaisants au sens où ils conduisent à des valeurs théoriques sensiblement différentes des valeurs observées sur les marchés. Ils ont le mérite de fournir un cadre cohérent pour comprendre les mécanismes de base à l'œuvre dans le lien entre le prix de marché du risque et la prime de risque.

On présente ici deux approches empiriques s'appuyant directement sur la description de la forme du prix de marché du risque pour en proposer une estimation.

Le premier modèle proposée par Ahmad et Wilmott [2006] généralise un modèle descriptif à un facteur (l'extension à plusieurs facteurs de risque ne pose pas de difficulté) pour le risque de taux dans un cadre paramétrique. Le second modèle est proposé dans Stanton [1997] et décrit, dans le même cadre, une approche entièrement non paramétrique.

## 5.1 Un cadre mono factoriel général

On suppose donc que le prix  $P(r,t)$  d'une obligation de maturité  $T$  est déterminé dans le cadre d'un modèle mono-factoriel de type :

$$dr_t = u(r_t)dt + w(r_t)dW_t$$

On montre alors classiquement qu'il est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0$$

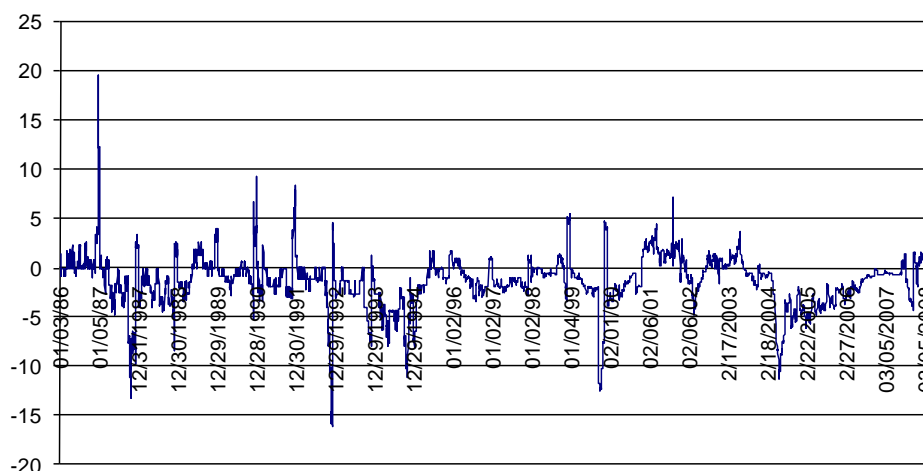
Avec  $\lambda$  le prix de marché du risque. Après avoir estimé la dérive  $u(r_t)$  et la volatilité  $w(r_t)$ , il ne nous reste plus qu'à estimer le prix de marché du risque  $\lambda$ . Cependant il n'y a pas d'informations sur le prix du risque dans le processus des taux, donc il faudrait regarder les prix des dérivés de taux pour voir comment le marché évalue ce risque. La manière la plus simple de faire cela est de regarder à la courbe des rendements, car les obligations sont des produits dérivés de taux particuliers. Si on ajoute la condition finale pour un zéro-coupon (ZC),  $P(r,T)=1$ , alors on peut trouver après quelques calculs (cf. Ahmad et Wilmott [2006]) le développement de Taylor au voisinage de la maturité  $T$  :

$$P(r,t) \approx 1 - r(T-t) + \frac{1}{2}(T-t)^2(r^2 - u + \lambda w) + \dots \text{ si } t \rightarrow T$$

On obtient :

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u - \lambda w) + \dots \text{ si } t \rightarrow T$$

qui est une approximation d'ordre 2 de la courbe des rendements (*yield curve*) au voisinage de la maturité du zéro-coupon. La pente de la courbe est  $\frac{1}{2}(u - \lambda w)$ . On peut utiliser ce résultat ainsi que des séries temporelles pour déterminer empiriquement le prix du risque  $\lambda$ . Ainsi la série obtenue a typiquement l'allure suivante :



On observe que le prix de marché du risque est la plupart du temps négatif. Cela vient du fait que le risque d'une obligation est proportionnel à la sensibilité du prix de l'obligation aux

variations de taux, et on a  $\frac{\partial P}{\partial r} < 0$  pour un zéro-coupon. On note également que le prix de marché du risque n'est pas constant et semble avoir une évolution très erratique. Pour rendre compte de ce phénomène, Ahmad et Wilmott [2006], proposent un modèle stochastique :

$$d\lambda_t = p(\lambda_t)dt + q(\lambda_t)dW_t^1$$

On peut ensuite procéder à l'estimation de la dérive et de la volatilité de ce processus comme pour le processus de taux. Cependant, maintenant qu'on a modélisé le prix de marché du risque de taux comme un processus stochastique, il convient de définir le prix de marché associé à cette nouvelle source de risque pour pouvoir calculer des prix d'obligations. Plusieurs hypothèses peuvent être émises à propos du *prix de marché du risque de prix de marché du risque*. Il peut être supposé égal à zéro, constant, dépendre du temps ou être égal au prix de marché du risque de taux calculé précédemment :

- Dire que le prix de marché du risque du prix de marché de risque est nul est une hypothèse simplificatrice qui s'imposerait par le fait qu'il est difficile d'arriver à l'estimer.
- Supposer que le prix de marché du risque est constant revient à dire que les marchés évaluent le risque lié au prix de marché du risque toujours de la même façon. Ceci on aurait pu le penser pour le prix de marché du risque de taux, et c'est d'ailleurs cette hypothèse qu'on utilise très souvent pour faciliter les calculs. Toutefois on a vu que le prix de marché du risque qu'on suppose constant est en fait très erratique et peut être modélisé comme un processus stochastique. Donc sans doute le prix de marché du risque du prix de marché du risque n'est pas constant non plus.
- Le prix de marché du risque du prix de marché du risque peut aussi être supposé comme étant une fonction du temps. Ensuite il faudrait faire un calibrage de cette fonction à partir d'un historique.
- Le prix de marché du risque est le même pour tous les risques. Donc le prix de marché du risque du prix de marché du risque est égal au prix de marché du risque  $\lambda$  estimé précédemment. C'est l'hypothèse retenue dans Ahmad et Wilmott [2006], que nous retiendrons ici également.

Alors, le processus du prix de marché du risque sous la probabilité risque-neutre s'écrit :

$$d\lambda = (p(r) + \lambda q(r))dt + q(r)dW_t^2$$

Le processus de taux suit quant à lui la dynamique suivante en univers risque-neutre :

$$dr = (u(r) - \lambda w(r))dt + w(r)dW_t$$

Le prix d'une obligation est alors solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + pwq \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \lambda} + \frac{1}{2}q^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial P}{\partial r} + (p + \lambda q) \frac{\partial P}{\partial \lambda} - rP = 0$$

Ce modèle est calibré à la section 5.3.

## 5.2 Une Approche non paramétrique

Dans le modèle présenté ci-dessus on utilise pour l'estimation du modèle un cadre paramétrique en spécifiant de formes simples pour la dérive et la volatilité. Stanton [1997] propose une approche non-paramétrique pour l'estimation du prix de marché du risque de taux. On reste dans un cadre du modèle de taux mono-factoriel de type :

$$dr_t = u(r_t)dt + w(r_t)dW_t$$

Le prix d'un ZC est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (u - \lambda(r)w) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0$$

Le prix de marché du risque de taux est lié à l'excès de rendement d'un ZC et l'idée est alors d'utiliser le prix pour estimer le prix de marché du risque de taux  $\lambda$  qui est quant à lui inobservable. On définit pour cela, deux ZC étant arbitrairement fixés, la fonction d'excès de rendement du ZC 1 par rapport au ZC 2 entre  $t$  et  $t + \delta$  :

$$\begin{aligned} f(r_{t+\delta}, t + \delta) &= \frac{P^1(r_{t+\delta}, t + \delta)}{P^1(r_t, t)} - \frac{P^2(r_{t+\delta}, t + \delta)}{P^2(r_t, t)} \\ &= R_{t,t+\delta}^1 - R_{t,t+\delta}^2 \end{aligned}$$

Le générateur infinitésimal de la fonction  $f$  est défini par l'équation :

$$Lf(r_t, t) = \frac{1}{P^1(r_t, t)} \left( \frac{\partial P^1}{\partial t} + u \frac{\partial P^1}{\partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 P^1}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{P^2(r_t, t)} \left( \frac{\partial P^2}{\partial t} + u \frac{\partial P^2}{\partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 P^2}{\partial r^2} \right).$$

En utilisant le fait que  $\frac{\partial P^i}{\partial t} + u \frac{\partial P^i}{\partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 P^i}{\partial r^2} = rP^i + \lambda(r)w \frac{\partial P^i}{\partial r}$ , l'équation ci-dessus se réécrit alors :

$$Lf(r_t, t) = \lambda(r_t)w(r_t) \left( \frac{\frac{\partial P^1}{\partial r}}{P^1} - \frac{\frac{\partial P^2}{\partial r}}{P^2} \right).$$

On en déduit que  $Lf(r_t, t) = \lambda(r_t)(w^1(r_t) - w^2(r_t))$  où  $w^i(r_t) = \frac{\frac{\partial P^i}{\partial r}}{P^i} w(r_t)$ , pour  $i=1,2$ , est la volatilité instantanée du ZC  $i$ . L'espérance conditionnelle de la fonction  $f$  par rapport à la filtration naturelle du brownien  $W_t$  peut s'écrire comme une série de Taylor (cf. Hille et Philipps [1957]):

$$E_t(f(r_{t+\delta}, t + \delta)) = f(r_t, t) + Lf(r_t, t)\delta + \frac{1}{2}L^2 f(r_t, t)\delta^2 + \dots + \frac{1}{n!}L^n f(r_t, t)\delta^n + O(\delta^{n+1})$$

puis



$$\begin{aligned}
Lf(r_t, t) &= \frac{1}{\delta} \left[ E_t(f(r_{t+\delta}, t+\delta)) - f(r_t, t) - \frac{1}{2} L^2 f(r_t, t) \delta^2 - \dots - \frac{1}{n!} L^n f(r_t, t) \delta^n - O(\delta^{n+1}) \right] \\
&= \frac{1}{\delta} \left[ E_t(R_{t,t+\delta}^1 - R_{t,t+\delta}^2) - f(r_t, t) - \frac{1}{2} L^2 f(r_t, t) \delta^2 - \dots - \frac{1}{n!} L^n f(r_t, t) \delta^n - O(\delta^{n+1}) \right]
\end{aligned}$$

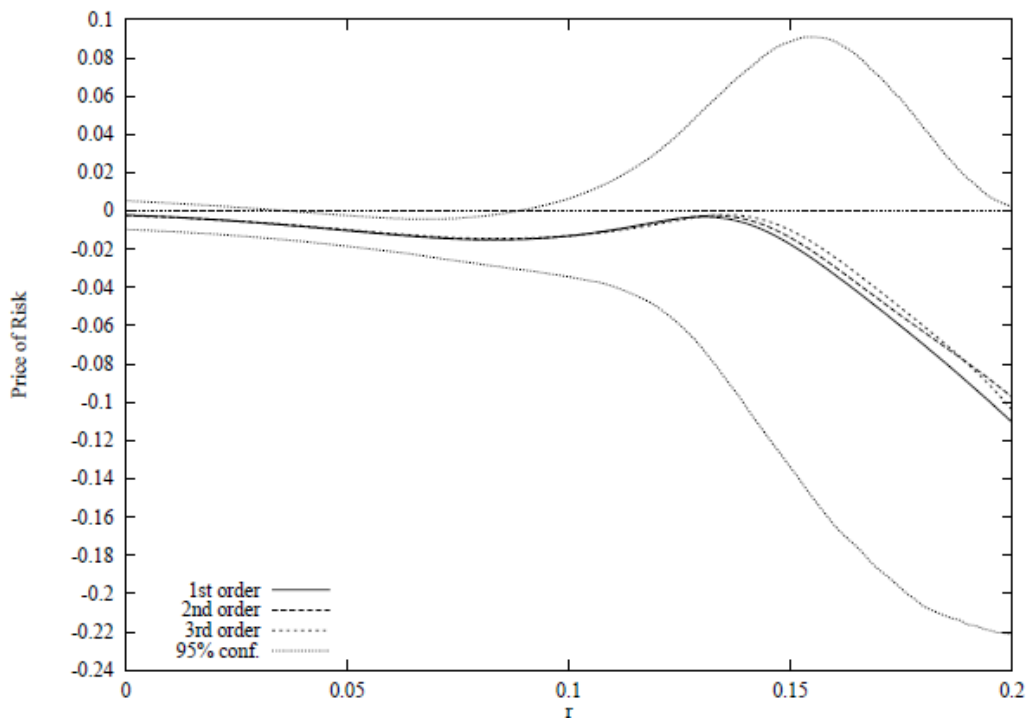
On en déduit finalement une approximation du prix de marché du risque de taux par la formule :

$$\lambda(r_t) = \frac{1}{\delta(w^1(r_t) - w^2(r_t))} \left[ E_t(R_{t,t+\delta}^1 - R_{t,t+\delta}^2) - f(r_t, t) - \frac{1}{2} L^2 f(r_t, t) \delta^2 - \dots - \frac{1}{n!} L^n f(r_t, t) \delta^n - O(\delta^{n+1}) \right]$$

L'approximation de premier ordre du prix de marché du risque est :

$$\lambda(r_t) = \frac{1}{\delta(w^1(r_t) - w^2(r_t))} \left[ E_t(R_{t,t+\delta}^1 - R_{t,t+\delta}^2) - (R_{t,t+\delta}^1 - R_{t,t+\delta}^2) - O(\delta) \right]$$

Cette expression peut alors être utilisée pour estimer  $\lambda$ . Les données utilisées dans Stanton [1997] sont les rendements des bons du Trésor américains à 3 mois et 6 mois, entre 1965 et 1995. Ces rendements sont convertis en rendements annuels. Le bon à 3 mois est choisi comme ZC 1 et celui à 6 mois comme ZC 2. Le prix de marché du risque,  $\lambda(r_t)$ , est alors estimé avec la formule ci-dessus comme fonction du taux  $r_t$ . La prime de risque correspondante,  $\lambda(r_t)w(r_t)$ , est donnée dans la figure ci-dessous :



On voit que la prime de risque et donc l'estimation du prix de marché du risque donne des valeurs négatives, mais aussi que qu'il serait raisonnable de penser que le prix de marché peut aussi être négatif, d'après l'intervalle de confiance à 95 % (10 000 itérations avec l'algorithme

de Kunsch [1989]). Ceci est en accord avec ce qu'on a vu lors de l'estimation par une approche paramétrique. Plus le taux augmente plus le prix du risque baisse vite.

Plus le taux est grand plus l'intervalle de confiance est large et ceci vient du fait que pour les taux grands il n'y a pas beaucoup d'observations. Ceci montre aussi dans une approche non-paramétrique il faut une masse de données importante pour que les estimations soit fiables.

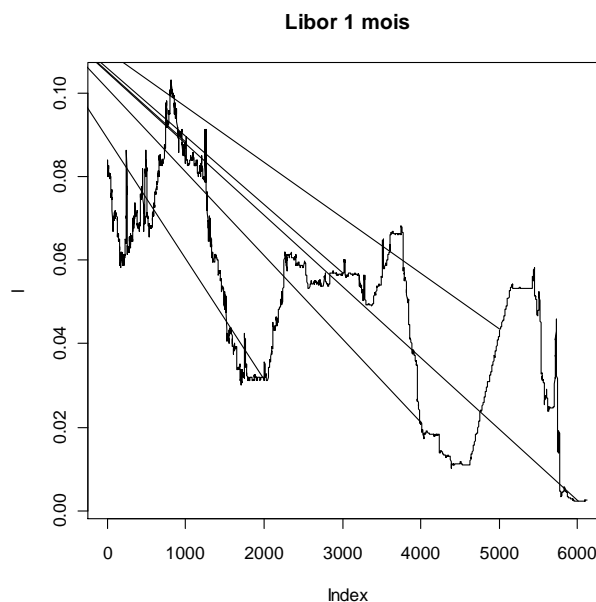
L'utilisation du prix de risque pour donner un prix à des ZC a, comme il était attendu, un impact sensible sur les prix, surtout pour les maturités de plus de 2 ans. Les résultats obtenus par Stanton [1997] sont les suivants :

Maturity	$r$	Value of Bond	
		Zero Price of Risk	Estimated Price of Risk
1 year	1%	0.9885	0.9870
	5%	0.9500	0.9456
2 years	1%	0.9737	0.9668
	5%	0.9001	0.8817
3 years	1%	0.9558	0.9390
	5%	0.8509	0.8115

On observe que la différence entre les deux prix est plus grande si  $r = 5\%$  par rapport à  $1\%$ .

### 5.3 Application numérique

Nous proposons ici de mettre en œuvre l'approche décrite à la section 5.1 pour estimer le prix de marché du risque et donner des prix de ZC. Les données utilisées pour approcher le taux instantané sans risque sont des séries de taux LIBOR 1 mois entre janvier 1986 et avril 2010.



L'estimation est réalisée en trois étapes : estimation de la volatilité en faisant l'hypothèse d'une fonction puissance du facteur, puis utilisation de la distribution d'équilibre du facteur pour estimer la forme de la dérive et enfin modélisation du prix de marché du risque, lui-même considéré comme aléatoire et dont la dynamique est régie par une équation différentielle stochastique.

### 5.3.1 Estimation de la volatilité

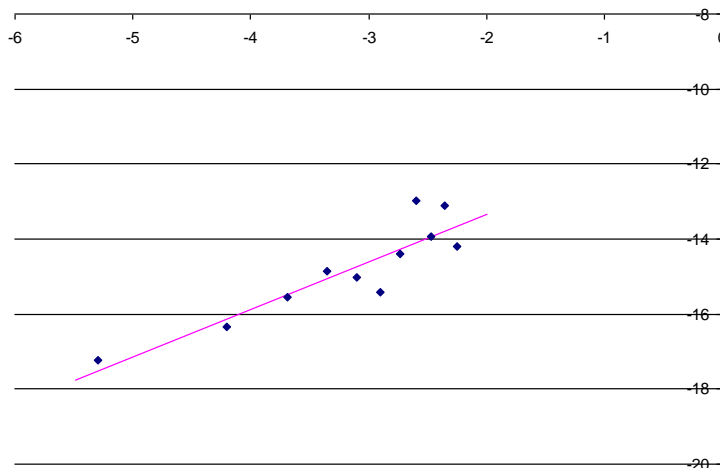
On détermine les variations journalières du taux,  $\delta r$ . On divise le segment où le taux  $r$  prend ses valeurs, c'est-à-dire  $[0,11]$  en 11 segments de même longueur  $s_i \in \{[0 ; 0,01], [0,01 ; 0,02], \dots, [0,08 ; 0,09], [0,10 ; 0,11]\}$ . Ensuite chacun des  $\delta r = r_1 - r_2$ , où  $r_1$  et  $r_2$  désignent les taux aux dates  $t_1$  et  $t_2$  respectivement telles que  $t_1 < t_2$ , est attribué à un segment  $s_i$ , si  $r_1 \in s_i$ . Ensuite on fait les moyennes des carrés des  $\delta r$  attribués à chacun des segments  $E((\delta r)^2)$ . Il y a un lien direct entre cette quantité et la volatilité des taux :

$$E((\delta r)^2) = w(r)^2 \delta t$$

Si on suppose que la volatilité est une fonction puissance de  $r$ , de la forme  $w(r) = \nu r^\beta$  alors on a  $E((\delta r)^2) = \nu^2 r^{2\beta} \delta t$ . Il faut donc estimer les paramètres  $\nu$  et  $\beta$ . Pour faire cela on effectue une régression linéaire des log des moyennes  $E((\delta r)^2)$  de chaque classe de  $r$  sur le log des milieux des segments  $s_i$ .

$$\ln E((\delta r)^2) = 2 \ln \nu + \ln \delta t + 2\beta \ln r$$

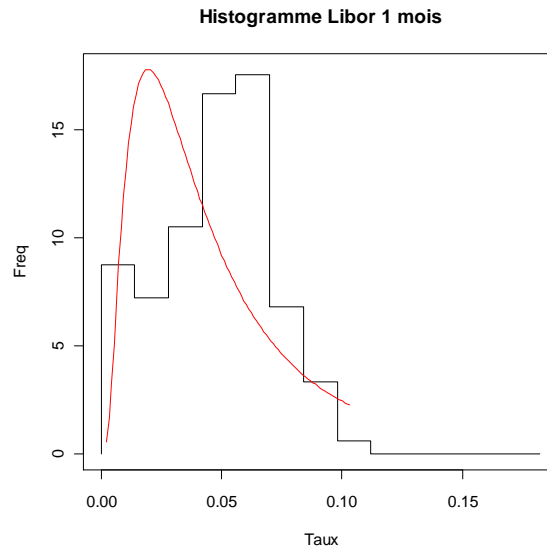
Si on représente sur un graphique les points ayant comme abscisse les log des valeurs milieu des segments  $s_i$  et comme ordonnée les log des moyennes  $\ln E((\delta r)^2)$  faites sur chaque classe respectivement alors on obtient le nuage de points suivant :



La droite qui s'ajuste le mieux à ce nuage de points est représentée sur le graphique. C'est la droite de pente 1,27 et d'ordonnée à l'origine -10,8. Sachant que  $\text{pente} = 2\beta$ ,  $\beta = 0,6327$  et  $\text{ordonnée} = 2 \ln \nu + \ln \delta t$ ,  $\nu = 0,0724$  avec  $\delta t = \frac{1}{257}$ , on a finalement  $w(r) = 0,087 \times r^{0,63}$ .

### 5.3.2 Estimation de la dérive

Une estimation directe de la dérive est délicate, aussi utilise-t-on ici la distribution d'équilibre de  $r$ ,  $p_\infty$ .



L'histogramme des taux rappelle la forme d'une loi log normale, donc on fait un ajustement avec une loi log normale de paramètres : moyenne  $\ln \bar{r} = -3,2632$  et écart-type  $a = 0,8199$ . On a alors :

$$p_\infty = \frac{1}{ar\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right)$$

On peut alors donner la formule de la tendance :

$$u(r) = v^2 r^{2\beta-1} \left( \beta - 0.5 - \frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) \right)$$

### 5.3.3 Estimation du prix de marché du risque de taux

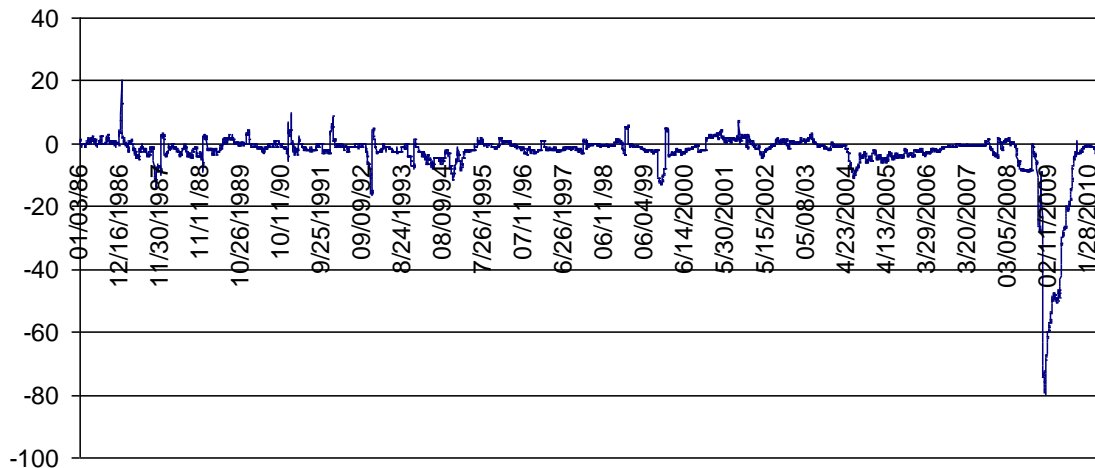
En suivant ce qui a été présenté dans le paragraphe 5.1., on va estimer le prix de marché du risque en utilisant la relation :

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u - \lambda w) + \dots \text{ si } t \rightarrow T$$

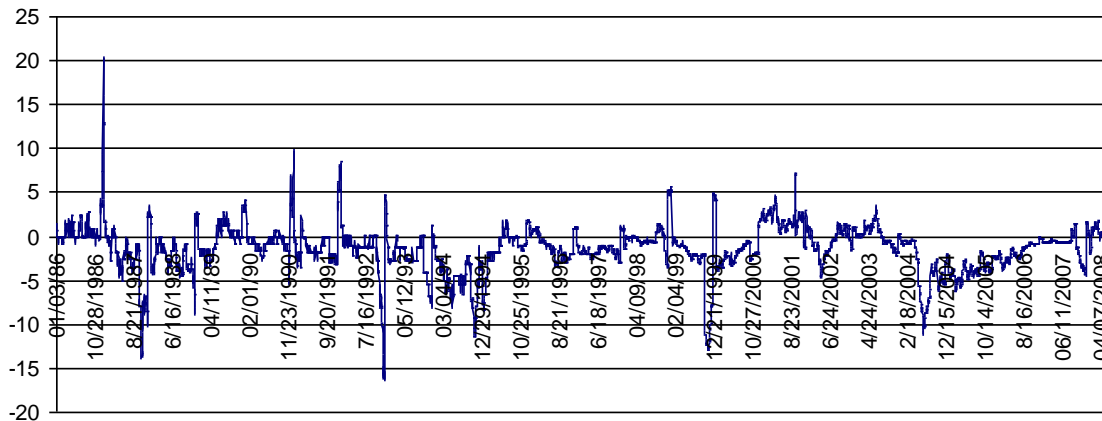
Ceci est donc vrai pour des obligations qui s'approchent de la maturité. On peut alors considérer que  $r$  est le taux à 1 mois et  $-\frac{\ln P}{T-t}$  le rendement d'une obligation à 3 mois. On peut alors trouver le prix de marché du risque par l'équation :

$$\lambda_t = \frac{2(R_t^1 - R_t^{1,3})}{\frac{1}{6}w} + \frac{u}{w}$$

où  $R_t^1$  est le rendement en  $t$  d'un ZC de maturité 1 mois (donc le taux à 1 mois) et  $R_t^{1,3}$  celui d'un ZC de maturité 2 mois dans un mois (donc le taux *forward* à 2 mois dans un mois). On obtient ainsi le processus suivant, de 1986 à 2010 :



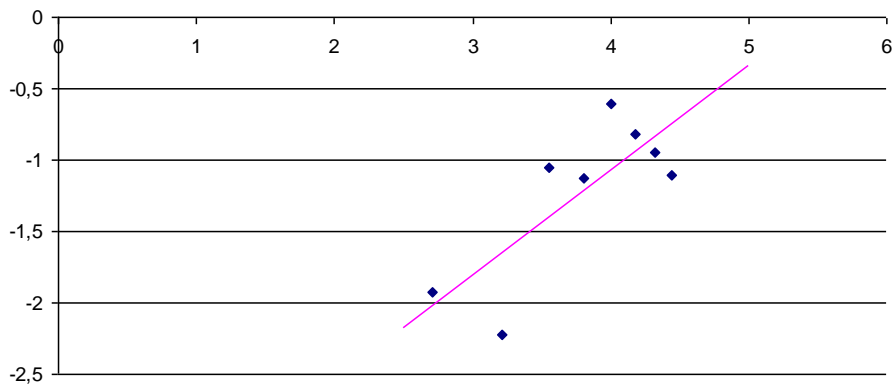
En limitant à la période 1986-2008 on élimine la période de crise actuelle caractérisée par un prix de marché du risque très fortement négatif, ce qui conduit au graphique suivant :



On observe que le prix de marché du risque est le plus souvent négatif, ce qui est théoriquement justifié. Il est aussi très volatile et parfois le prix de marché du risque atteint des pics très bas surtout entre 2009 et 2010. En tout état de cause, on note à la lumière de ces graphes que l'hypothèse de prix de marché du risque régulier ou constant n'est pas réaliste et doit être relâchée. On est alors conduit à le supposer régié par un processus de diffusion.

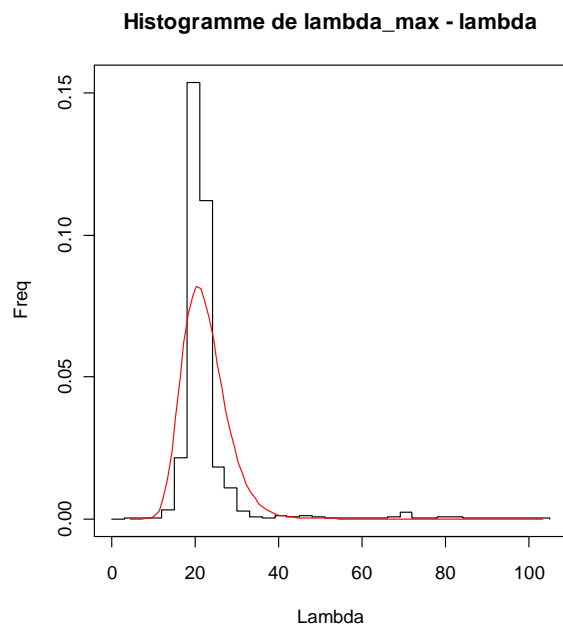
### 5.3.3.1 Estimation de la volatilité du prix de marché du risque

On applique le même procédé que celui décrit en 5.1 mais cette fois-ci au processus  $\lambda_{\max} - \lambda$ . On obtient le nuage de points suivant :



Par la méthode des moindres carrés on obtient la droite qui s'ajuste le mieux à ce nuage de points. C'est la droite de pente 0,5968 et d'ordonnée à l'origine -3,4732. Sachant que  $\text{pente} = 2\beta$ ,  $m = 0,2984$  et  $\text{ordonnée} = 2\ln l + \ln \delta t$ ,  $l = 2,8234$  avec  $\delta t = \frac{1}{257}$ , on a finalement  $q(\lambda) = 2,82 \times (\lambda_{\max} - \lambda)^{0,3}$ . Pour estimer la volatilité nous n'avons pas tenu compte des deux classes extrêmes et nous avons majoré la variation de  $\lambda_{\max} - \lambda$  d'un jour à l'autre par 1. Ceci a été fait dans un but de stabilisation de l'estimation des paramètres de la variance.

### 5.3.3.2 Estimation de la dérive du prix de marché du risque



On ajuste une loi log normale à la densité de  $(\lambda_{\max} - \lambda)$ , où  $\lambda_{\max} = 20,43$ . On choisit ce processus et pas  $\lambda$  parce que ce dernier prend des valeurs négatives qui ne peuvent pas être considérés comme quantiles d'une loi log normale. L'ajustement est fait par la loi log normale de paramètres : moyenne  $\ln(\bar{\lambda}) = 3,1149$  et écart-type  $c = 0,2217$ . La densité d'équilibre de  $(\lambda_{\max} - \lambda)$  s'écrit alors :

$$p_{\infty}(\lambda) = \frac{1}{c(\lambda_{\max} - \lambda)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda}{\lambda}\right)^2\right)$$

La tendance est alors une fonction de  $(\lambda_{\max} - \lambda)$  et est donnée par l'expression :

$$p(\lambda) = l^2 (\lambda_{\max} - \lambda)^{2m-1} \left(-m + 0,5 + \frac{1}{2c^2} \ln\left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda}{\lambda}\right)\right)$$

### 5.3.4 Application : construction de courbes de prix de ZC

Une fois estimés les paramètres de la distribution du taux et ceux de la distribution du prix de marché du risque, on peut procéder à la construction de la courbe de taux. Pour cela nous allons procéder par simulation en utilisant les deux diffusions suivantes pour simuler le processus de taux en univers risque neutre:

$$dr_t = (u_t - \lambda_t w_t) dt + w_t dW_t$$

$$d\lambda_t = (p_t + \lambda_t q_t) dt + q_t dW_t^2$$

On suppose que les deux browniens  $W_t$  et  $W_t^2$  sont indépendants, ce qui revient à dire que les sources de risque du taux et du prix de marché du risque sont différentes et non corrélées. Une fois simulé le processus de taux  $r_t$  en risque neutre, le prix d'une obligation ZC peut être calculé par la formule :

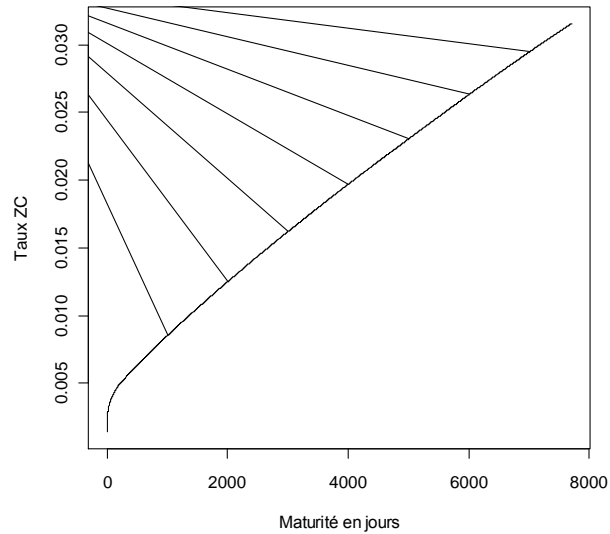
$$P(t, T) = E_t \left[ \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \right]$$

En pratique, la formule ci-dessus est discrétisée et le prix du ZC approché par simulation, en utilisant :

$$P_K(t, T) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \exp\left(-\sum_{i=1}^n r_k(t_i)\right)$$

avec  $t = t_1 < \dots < t_n = T$  une discrétisation de  $[t, T]$  et  $(r_k(t_i), 1 \leq i \leq n)$  une réalisation d'une trajectoire du taux court. Afin d'avoir la courbe des taux aujourd'hui, il nous faut les prix de ZC de différentes maturités aujourd'hui, donc  $P(0, T), T = 1, \dots, M$ . Ensuite, une fois qu'on a les prix ZC, pour calculer les taux ZC,  $R^{t, T}$  et on peut utiliser la relation  $P(t, T) = \exp(-(T-t)R^{t, T})$  ou, de manière équivalente,  $R^{t, T} = -\frac{\ln(P(t, T))}{(T-t)}$ .

La courbe de taux obtenue pour des maturités jusqu'à 30 ans est représentée dans le graphe ci-dessous :



On voit que la courbe de taux a une allure concave sur l'horizon de 30 ans. Par exemple le taux à 30 ans est de 3,15 %. Il faudrait souligner le fait que l'estimation des paramètres du processus de taux et du prix de marché du risque sont très sensibles à l'historique utilisé, ceci est surtout vrai pour les paramètres de la volatilité.

## 6 Conclusion

---

Dans une situation où il faut considérer conjointement la détermination de la distribution observable et les prix, une attention particulière doit être portée à la prime de risque ou au prix de marché du risque et à son évolution dans le temps.

D'un point de vue technique le recours aux déflateurs permet d'intégrer cette information de manière rigoureuse dans le processus en s'obligeant à spécifier les prix de marché des sources de risque.

D'un point de vue pratique, l'estimation du prix de marché du risque peut être effectuée dans le cadre relativement général d'un processus d'Itô, ce qui permet d'intégrer dans le modèle l'instabilité de ce facteur sans imposer les hypothèses contraignantes souvent effectuées. En contrepartie, le prix des zéro-coupon doit être déterminé numériquement par des techniques numériques de type Monte-Carlo.

Les travaux de Dastarac et Sauveplane [2010] montrent que les choix effectués pour la modélisation du prix de marché du risque ont des conséquences importantes pour l'estimation des valeurs *best estimate* des contrats d'assurance-vie en Euros.

Dans ce contexte, une réflexion sur ce point doit être menée lors de la mise en place d'un générateur de scénarios économiques et intégrer au modèle une description explicite des prix de marché du risque prenant en compte leur importante instabilité est un élément important de la qualité des projections effectuées sur l'horizon de calcul de 10 à 30 ans rencontré dans les problématiques d'assurance, tout particulièrement pour le calcul des *best estimate* des contrats d'épargne.

Remerciements : les auteurs tiennent à remercier le Pr. M. Boyer pour ces remarques qui ont contribué à l'amélioration de ce travail.



## 7 Bibliographie

---

- Ahmad R.; Wilmott P. [2006] « The Market Price of Interest-rate Risk: Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets », *Wilmott magazine*.
- Balduzzi P.; Robotti C. [2001] « Minimum-Variance Kernels, Economic Risk Premia and Tests of Multi-beta Models », Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper, n°2001-24.
- Bernay A. [2008] « Does Equity Risk Decrease in the Long Run? Some Evidence From French Secular Data », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 8, n°16, pp. 88-106.
- Briys, E., de Varenne F. [1994] « Life Insurance in a Contingent Claim Framework: Pricing and Regulatory Implications » *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 19(1), 53–72.
- Carr P., Geman H., Madan D.B., Yor M. [2002] « The fine structure of asset returns: an empirical investigation », *Journal of business*, vol. 75, n°2.
- Cochrane J.H.; Piazzesi M. [2005] « Bond Risk Premia », *The American Economic Review*
- Dastarac H., Sauveplane P. [2010] « Les déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ? », Mémoire d'actuariat, ENSAE.
- Descure C., Borean C. [2006] « Gestion actif-passif et solvabilité », *Proceedings of the 28th international congress of actuaries*.
- Derien A. [2010] « L'horizon temporel dans Solvabilité 2 », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 10, n°19, pp. 43-62.
- Devineau L., Loisel S. [2009] « Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des 'simulations dans les simulations' pour le calcul du capital économique Solvabilité II », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°17.
- Devolder P. [2001] « les univers virtuels de la finance », *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. n°1.
- Duffee G.R.; Stanton R.H. [2000] « EMM Estimation of Affine and Nonaffine Term Structure Models », Working Paper, Haas School of Business.
- Faleh A., Planchet F., Rullière D. [2010] « Les générateurs de scénarios économiques : de la conception à la mesure de la qualité », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 78 (1/2).
- Frantz C., Chenut X., Walhin J.F. [2003] « Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee », *Proceedings of the 13th AFIR Colloquium*.
- Grosen A., Jorgensen P.L. [2000] « Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies », *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, pp. 37-57.
- Hille E., Phillips R.S. [1957] *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society, Providence, RI.
- Künsch H. R. [1989] « The jackknife and the bootstrap for general stationary observations », *Annals of Statistics* 17, 1217{1241.
- Mehra R. [2003] « The Equity Premium: Why Is It a Puzzle? », *Financial Analysts Journal*
- Nteukam T. O., Planchet F., Théron P.E. [2011] « Optimal strategies of hedging portfolio of unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee », *Insurance: Mathematics and Economics*, Volume 48, Issue 2, pp. 161-175.
- Planchet F. [2009] « Provisionnement et couverture des garanties financières : deux notions indissociables. », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°138 du 01/07/2009.
- Planchet F., Théron P.E., Kamega A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*, Paris : Economica.
- Ross S. [1976] « The arbitrage theory of capital asset pricing », *Journal of Economic Theory* 13, 341-360.
- Sijlamassi M., Ouaknine Y. [2004] « Valorisation par les déflateurs stochastiques », Mémoire d'actuariat, ENSAE.

Smith A.D. [1996] « How Actuaries Can Use Financial Economics. », *British Actuarial Journal*, Vol. 2, n°5, pp. 1057-1193(137).

Smith A.D., Southall F.E. [2001] « A Stochastic Asset Model for Fair Values in Pensions and Insurance », CAS Convention.

Stanton R. [1997] « A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk », *Journal of Finance* 52: 1973-2002.

Torosantussi L.; Ubaldi A.; Bernaschi M. [2002] « Empirical evaluation of the market price of risk using the CIR model », *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.

Wüthrich M.V., Bühlmann H., Furrer H. [2007] *Market consistent actuarial valuation*, EAA Lecture Notes, Springer.

Zemmour J. [2002] « Un modèle d'équilibre partiel d'arbitrage multifactoriel : l'écueil des primes de risque des facteurs », CNRS, Working Paper.