# UN MODELE DE HO & LEE GENERALISE

Marc Bonnassieux - Vincent Brunel


## Resume

Le premier modèle de valorisation d'options de taux intégrant toute l'information de la structure des taux est celui de Ho & Lee (1986). Ce modèle présente comme principal inconvénient de prendre en compte des taux de volatilité constante.

La seconde étape est dûe à Heath, Jarrow & Morton qui proposent en 1987 une démarche différente pour valoriser les options de taux. Ils se basent sur des processus simulant les taux à terme et bâtissent un modèle englobant celui de Ho & Lee.

Notre article présente trois parties. Premièrement, nous proposons une extension des travaux de Ho & Lee sous forme d'un **modèle plus général** permettant de simuler des volatilités de taux non constantes.

Deuxièmement, nous explicitons le modèle de Heath Jarrow & Morton, ainsi que les relations fonctionnelles entre les trois modèles (Ho & Lee, Heath Jarrow & Morton, le nôtre). Nous voyons en quoi que Heath Jarrow & Morton construisent un cadre plus vaste que Ho & Lee, mais qui n'est pas programmable dans le cas général.

Troisièmement, nous montrons que si l'on ajoute au modèle de Heath Jarrow & Morton la condition de programmabilité, nous retrouvons un **modèle équivalent** à celui que nous proposons. Notre approche est toutefois plus simple: comme Ho & Lee, nous modélisons directement l'évolution des prix zéro-coupon sans passer par les taux à terme.



## Abstract

The pioneering valuation model for interest-rate options, integrating all the components of the yield curve, was that of Ho & Lee in 1986. The model's main drawback is that it assumes constant volatility of interest rates.

The second model was that of Heath, Jarrow & Morton in 1987, who adopted a different approach to valuing interest-rate options. They built a model, encompassing that of Ho & Lee, but which also simulates forward interest-rate processes.

Our article is in three parts. First of all we suggest broadening the Ho & Lee model to be more extensive, and including different volatilities in interest rates.

In the second part, we explain the Heath, Jarrow & Morton model as well as the functional relationships between the three models (Ho & Lee, Heath, Jarrow & Morton and our own). We will then see that the Heath Jarrow & Morton model is far more comprehensive than that of Ho & Lee, but is generally not programable.

Finally we show that if one adds the condition of programability to Heath, Jarrow & Morton, we will have a model similar to the one we are proposing. However our approach is far simpler: like Ho & Lee we have constructed a model based on changes in prices of zero-coupon bonds, thereby avoiding the use of forward interest rates.

## 1. INTRODUCTION

Les travaux de Ho & Lee (1986) marquent une avancée certaine dans le domaine des modèles de valorisation des options de taux.

Les hypothèses de leur modèle sont plus cohérentes avec le comportement des marchés obligataires que celles des modèles précédents (convergence du prix du sous-jacent obligataire vers le prix de remboursement, ... ). Sa mise en oeuvre est simple. Il prend en compte les phénomènes discrets (coupons,... ). Il présente par contre l'inconvénient de modéliser des taux ayant tous la même volatilité.

Dans un premier temps, nous avons cherché à étendre le cadre du modèle de Ho & Lee. La voie d'approfondissement proposée est la mise en oeuvre de fonctions de perturbations variables, dépendant à la fois du temps.

Nous débouchons sur un modèle dont nous précisons, comme dans le modèle original de Ho & Lee, la loi du processus des prix et celle des taux, ainsi que le procédé pour valoriser des options sur taux.

Ce modèle, implantable informatiquement, **prend en compte des volatilités des taux non constantes**.

Dans un deuxième temps, nous présentons le modèle de Heath Jarrow & Morton Puis nous exposons une restriction de type "indépendance du chemin suivi" sur le modèle pour montrer que l'on obtient le même modèle que le nôtre, mais construit à partir des taux forward et non des zéro-coupons. Nous explicitons la correspondance entre les deux approches.

Plus précisément, nous développons les trois points suivants:

1°- **Le lien entre les trois modèles (Ho & Lee et Heath, Jarrow & Morton, le nôtre).**

Les trois modèles sont transposés dans notre mémoire avec *les mêmes notations*, et nous précisons en quoi le modèle de Heath, Jarrow & Morton se situe dans *un cadre plus général* que celui de

Ho & Lee. Nous établissons les relations entre les paramètres des modèles (ce qui permet par exemple de programmer simultanément les deux modèles dans un but de comparaison). Ces paramètres sont respectivement pour les modèles de Ho & Lee, Ho & Lee généralisé et Heath, Jarrow & Morton:

- une volatilité de taux constante $\sigma$,
- une courbe $\sigma(T)$ permettant d'avoir des volatilités différentes pour des maturités différentes,
- une surface $\sigma(t,T)$ permettant d'avoir des volatilités différentes pour des maturités et des dates différentes.

2°- **La comparaison des méthodologies.**
Contrairement au modèle de Ho & Lee qui construit directement un treillis d'évolution de la courbe des prix zéro coupon dans son ensemble, Heath, Jarrow & Morton modélisent l'évolution des taux en trois temps: a) ils considèrent la courbe des prix zéro coupon d'aujourd'hui et en déduisent les taux terme-terme, b) ils construisent des treillis binomiaux sur les taux terme-terme, c) ils reconstituent les prix zéro coupon à partir des taux terme-terme. La démarche n'est pas foncièrement différente mais nécessite de construire d'autant plus d'arbres que l'on discrétise finement.

3°- **Equivalence entre notre approche (Ho & Lee généralisé) et le modèle programmable de Heath, Jarrow & Morton.**
Dans le cas général, le modèle que propose Heath, Jarrow & Morton n'est pas programmable de façon réaliste, car les arbres de taux sont de complexité exponentielle. Si l'on ajoute au modèle initial une condition de programmabilité, nous définissons ce que nous appellerons le cadre "Heath, Jarrow & Morton restreint". Nous montrons alors que le modèle de Heath, Jarrow & Morton restreint est équivalent à *l'extension de Ho & Lee que nous proposons*. Notre approche est toutefois plus simple: comme Ho & Lee, nous modélisons directement l'évolution des prix zéro coupon sans passer par les taux à terme.

## 2. Un modele de Ho & Lee Generalise

### *a - Principe et notations*

Les hypothèses de base sont celles du cadre de Ho & Lee.

De façon identique au modèle original de Ho et Lee, il est défini la même fonction d'actualisation $P_i(t,T)$.

$P_i(t,T)$ peut être également vu sous l'angle du prix d'une obligation zéro-coupon, de maturité $T-t$.

Rappelons que $P(t,T) = e^{-(T-t)r(t,T)}$, où $r(t,T)$ représente le taux continu zéro coupon équivalent sur la période $[t,T]$.

De la même façon que Ho & Lee, on construit un treillis de fonctions $P_i(t,T)$.

Par contre, l'évolution dans le treillis se fait à partir de fonctions de perturbations non identiques sur tout le treillis, c'est -à-dire que celles-ci peuvent dépendre du temps $t$.

On pose:

(1) – Définition des fonctions de pertubation (Ho & Lee généralisé):

$$P_{i+1}(t,T) = \frac{P_i(t-1,T)}{P_i(t-1,t)} h(t,T-t)$$

$$P_i(t,T) = \frac{P_i(t-1,T)}{P_i(t-1,t)} h^*(t,T-t)$$

Nous reprenons maintenant les deux contraintes classiques des modèles de pricing financiers dans le cadre du modèle généralisé:

- la courbe des taux résultant d'un mouvement haut suivi d'un mouvement bas est la même que celle résultant d'un mouvement bas puis haut,
- il y a absence d'opportunité d'arbitrage.

***b - Indépendance du chemin suivi***

Nous refaisons le même calcul que Ho & Lee, soit la valeur de $P_{i+1}(t+1,T+1)$ de deux manières (mouvement haut puis mouvement bas ou mouvement bas puis mouvement haut) et en utilisant les relations (1), on aboutit à la relation:

(2) "Up Down = Down Up " (Ho & Lee généralisé)

$$h(t,T-t+1)h^*(t+1,T-t)h^*(t,1) = h^*(t,T-t+1)h(t+1,T-t)h(t,1)$$

***Remarque:*** dans le modèle de Ho & Lee initial, la relation ci-dessus s'écrit simplement:

$$h(T-t+1)h^*(T-t)h^*(1) = h^*(T-t+1)h(T-t)h(1)$$

### *c - Absence d'opportunité d'arbitrage*

Nous procédons de la même façon que dans le cadre Ho & Lee, en reprenant la démarche pas à pas pour bien appréhender la transposition de cette condition au cadre étendu.

Nous constituons un portefeuille avec un zéro coupon d'échéance $T$ et $\alpha$ zéro coupon d'échéance $T'$. Nous choisissons $\alpha$ de sorte que la valeur du portefeuille soit la même dans l'état haut et l'état bas. Comme le portefeuille ainsi obtenu est sans risque et qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, il doit rapporter le taux sans risque. On obtient alors une relation similaire à celle obtenue par Ho & Lee, en adjoignant la date $t$:

$$\frac{1 - h^*(t, T-t)}{h(t, T-t) - h^*(t, T-t)} = \frac{1 - h^*(t, T'-t)}{h(t, T'-t) - h^*(t, T'-t)}$$

ceci, quelles que soient les valeurs de $t, T, T'$.

Comme dans le cadre Ho & Lee, on note $\pi(t)$ cette valeur. $\pi(t)$ est appelée probabilité d'arbitrage du modèle. Elle peut être différente ou non de la probabilité réelle de changement d'état. Remarquons le fait important que $\pi(t)$ **est indépendante** de $T - t$, c'est à dire de la maturité des zéro-coupons et donc plus généralement **de n'importe quel instrument financier**.

Imposons maintenant une condition de façon à réduire le champs d'investigation,à savoir que les probabilités ne dépendent pas du temps $t$.

On a alors:

(3) Absence d'opportunité d'arbitrage (Ho & Lee généralisé):

$$\pi h(t, T-t) + (1-\pi) h^*(t, T-t) = 1$$

$$\text{pour tout } t, T-t$$

***Remarque:*** Ho & Lee obtiennent la relation:

$$\pi h(T-t) + (1-\pi) h^*(T-t) = 1$$

### *d - Calcul des fonctions de perturbation*

Nous procédons en combinant la relation (2) (up-down = down-up) et (3) (Absence d'opportunité d'arbitrage), on obtient une équation de récurrence sur les fonctions de perturbations:

$$\frac{1}{h(t+1,T-t)} - \pi = (1-\pi)\frac{\dfrac{1}{h(t,T-t+1)} - \pi}{\dfrac{1}{h(t,1)} - \pi} \qquad \text{pour tous} \quad t,T$$

Cette relation nous donne après calcul une expression des fonctions de perturbations:

(4) Expression des fonctions pertubatrices (Ho & Lee généralisé):

$$h(t,T-t) = \frac{1}{\pi + (1-\pi).\dfrac{\delta(T)}{\delta(t)}}$$

$$h^*(t,T-t) = \frac{\dfrac{\delta(T)}{\delta(t)}}{\pi + (1-\pi).\dfrac{\delta(T)}{\delta(t)}}$$

***Remarque:*** On retrouve Ho et Lee en donnant $\delta(T) = \delta^T$. Là encore, $\delta(T)$ s'interprète comme un facteur de volatilité, qui, contrairement au cadre Ho et Lee, n'est pas forcément une fonction exponentielle.

Il nous reste donc à préciser la fonction des facteurs de volatilité $\delta(T)$. Nous allons pour cela déterminer le processus des taux.

### *e - Le processus des taux zéro-coupon*

D'après la relation (1) , la valeur de l'obligation à l'état $i$ et la date $t$ est:

$$P_i(t,T) = \frac{P_0(0,T)}{P_0(0,T-t)} \frac{h^*(0,T-1)h^*(t-1,T-t)}{h^*(0,t-1)h^*(t-1,0)} \left[\frac{\delta(t-1)}{\delta(T-1)}\right]^i$$

où la seule partie aléatoire est l'état $i$. Le logarithme des prix suit donc un processus binomial.

Dans notre modèle de Ho & Lee généralisé, **l'écart des taux** $r(t,T)$ **entre deux branches est** $\frac{1}{T-t}.\log\left[\frac{\delta(T)}{\delta(t)}\right]$ **et ne dépend pas de l'état (du noeud)** $i$**, mais peut dépendre de la maturité** $T-t$**.**

L'expression analytique de la loi binomiale suivi par le taux est donc:

(5) Loi non conditionnelle des taux (Ho & Lee généralisé):

$$r_0(t,T) = f(t,T) + i.\log\left(\left[\frac{\delta(T-1)}{\delta(t-1)}\right]\frac{1}{T-t}\right)$$

- $i$ est l'état atteint à la date
- $i$ est une variable aléatoire, et suit une binomiale $B(t,\pi)$
- $f(t,T)$ est une fonction déterministe

***f* - *La volatilité des taux en fonction du facteur de volatilité* $\delta(T)$**

La variance du taux spot, vue à l'origine, est:

(6) Variance des taux zéro-coupon sur $[0,t]$ non annualisée (Ho & Lee généralisé):

$$\mathrm{Var}_0 r(t,T) = t\pi.(1-\pi).\left[\log\left(\left[\frac{\delta(T-1)}{\delta(t-1)}\right]^{\frac{1}{T-t}}\right)\right]^2 \quad \text{pour tout } t,T$$

On voit dans cette expression que si l'on prend pour $\delta(T)$ une forme autre qu'exponentielle (le cas Ho & Lee), on voit que la variance $\mathrm{Var}_0 r(t,T)$ n'est pas constante.

Le modèle de Ho et Lee généralisé que nous présentons nous permet donc **la prise en compte de volatilité non constante**, contrairement à l'approche originale.

***g* - *Paramétrage de la pyramide de volatilité***

Ce modèle, entièrement décrit par la donnée de la probabilité implicite $\pi$ et d'une fonction $\delta(T)$, sera donc paramétré par **l'observation des volatilités des taux spot du moment.**

Il suffit pour cela d'inverser la relation (6), pour $t=1$, c'est à dire en considérant la volatilité des taux entre aujourd'hui et demain. On obtient alors l'expression des facteurs de volatilité $\delta(T)$.

#### *h - La méthode de valorisation des options sur taux*

La mise en place de programmes d'évaluation est identique à la démarche déjà utilisée pour le modèle de Ho et Lee:

- on spécifie le treillis d'évolution des taux,
- on valorise le sous-jacent en chaque noeud du treillis à l'aide de la courbe de taux zéro-coupon,
- on évalue l'actif conditionnel de façon récursive (procédé classique des modèles d'évaluation en temps discret).

## 3. LA MODELISATION DE HEATH-JARROW-MORTON

### 3.1. LE MODÈLE ORIGINAL

Nous avons simplifié la notation relative à la discrétisation temporelle: HJM note $\Delta$ l'unité élémentaire de temps que nous avons pour notre part prise égale à 1.

#### *a - Notations*

- Hypothèses

Les hypothèses de base du modèle sont celles du cadre Ho & Lee (marché sans frottement, ... ).

- Le prix zéro-coupon

De le même façon que pour le modèle de Ho & Lee, on nomme $P(t,T)$ le prix payé à la date $t$ pour recevoir 1F à la date $T$. On a $P(T,T) = 1$ et $P(t,T) > 0$ pour tous $0 \leq t \leq T$.

- Le taux à terme

A la date $t$, le taux futur courant sur la période $[T, T+1]$ est noté $f(t,T)$. C'est ce taux dont nous allons modéliser l'évolution.

Ce taux s'exprime:

(1) Définition du taux à terme instantané (modèle de HJM):

$$f(t,T) = -\mathrm{Log}\frac{P(t,T+1)}{P(t,T)}$$

**L'idée est de modéliser l'évolution de ce taux $f$, puis de repasser au prix (et donc aussi au taux zéro-coupon).** On retrouve les prix sur $[t,T]$ par la relation:

(2) Expression des prix zéro-coupon en fonction des taux à terme (modèle de HJM):

$$P(t,T) = \exp\left(-\sum_{j=t}^{T-1} f(t,j)\right)$$

Le processus des taux forward subissant un choc binomial est défini par:

(3) Processus de diffusion des taux à terme (modèle de HJM):

$$f(t+1,T) = f(t,T) + a(t).u(t,T) + (1-a(t)).v(t,T)$$

$a(t) \in \{0,1\}$ est la variable aléatoire
$u(t,T)$ est l'amplitude à la hausse du choc
$v(t,T)$ est l'amplitude à la baisse du choc

On note de plus:

- $q(t) =$ prob $[a(t) = 0]$ (probabilité de hausse)
- $1 - q(t) =$ prob $[a(t) = 1]$ (probabilité de baisse)
- $u$ et $v$ sont des fonctions déterministes quelconques

On a donc à la date $t$ sur le treillis des taux forward les deux possibilités d'évolution suivantes:

$$f(t,T) \begin{cases} \nearrow f\text{haut}(t+1,T) = f(t,T) + u(t,T) & \text{probabilité } 1-q(t) \\ \searrow f\text{bas}(t+1,T) = f(t,T) + v(t,T) & \text{probabilité } q(t) \end{cases}$$

$f$ représente le taux courant sur $[T, T+1]$ et on modélise son évolution quand $t$ varie.

On note que la variable aléatoire $a(t)$ dépend du temps $t$ mais pas de la nature des actifs, entre autre ne dépend pas de l'échéance $T$. Ceci correspond à l'idée que les évolutions entre états de la nature ne dépendent pas des actifs. Par contre les amplitudes $u$ et $v$ peuvent dépendre de la nature de l'actif et donc de l'échéance $T$. On retrouve cette notion dans notre modèle où l'amplitude du choc sur les prix zéro-coupon est de la forme $\delta(T)/\delta(t)$.

L'évolution sur $[0,t]$ du taux forward à la date $t$ est alors donné par:

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{s=1}^{t} \Big[a(s)u(s,T) + (1-a(s))v(s,T))\Big].$$

Nous allons maintenant donner une relation sur les amplitudes des mouvements déduite de la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage.

### *b - L'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A.)*

On montre que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une mesure de probabilité $\{\pi(t); 1-\pi(t)\}$ telle que:

(4) Absence d'opportunité d'arbitrage (modèle de HJM):

$$\pi(t)\exp\left[-\sum_{s=t}^{T-1} v(t,s)\right] + (1-\pi(t))\exp\left[-\sum_{s=t}^{T-1} u(t,s)\right] = 1$$

Notons qu'en général, cette mesure de probabilité n'est pas unique.

### *c - Spécification de la volatilité des taux à terme*

A ce stade les paramètres du modèle $\{\pi(t), u(t,T), v(t,T)\}$ ne sont pas suffisamment contraints pour exprimer totalement le processus des prix. Une caractérisation supplémentaire est **la spécification des volatilités des taux forward**.

Si on note $\sigma(t,T)$ cette volatilité, elle est définie par:

(5) Spécification de la volatilité des taux à terme (modèle de HJM):

$$\sigma^2(t,T) = \mathrm{var}_{t-1}\Big[f(t,T) - f(t-1,T)\Big] = q(t)(1-q(t))\Big[u(t,T) - v(t,T)\Big]^2$$

pour tout $t, T$

Il est à noter que $\sigma^2(t,T)$ **est la variance conditionnelle sur la période** $[t, t+1]$ **du taux** $f(t,T)$ **qui court sur** $[T, T+1]$**. Ce n'est pas la variance du taux** $r(t,T)$**.** Les notations fonctionnelles $\sigma(t,T)$ et $P(t,T)$ ne correspondent donc pas aux mêmes taux.

### *d - Le processus des taux à terme*

En reprenant l'expression du taux forward, l'A.O.A. et la spécification de la volatilité, HJM débouchent sur la relation suivante qui donne l'expression définitive des taux forward:

(6) Expression des taux à terme (modèle de HJM):

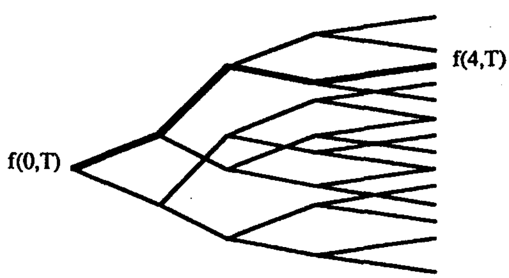
$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{j=1}^{t} a(j) \frac{\sigma(j,T)}{\sqrt{q(t)(1-q(t))}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{t} \ln \left\{ 1 + \pi(t) \left[ \exp \left( \sum_{i=j}^{T} \frac{\sigma(j,i)}{\sqrt{q(j)(1-q(j))}} \right) \right] \right\}$$
$$- \sum_{j=1}^{t} \ln \left\{ 1 + \pi(t) \left[ \exp \left( \sum_{i=j}^{T-1} \frac{\sigma(j,i)}{\sqrt{q(j)(1-q(j))}} \right) \right] \right\}$$

- $a(t)$ est la variable aléatoire; $a(t) \in \{0,1\}$
- $\pi(t)$, $q(t)$ et $\sigma(t,T)$ sont les paramètres du modèle

Donnons un exemple de réalisation du taux forward:

Supposons un chemin suivi sur quatre périodes: 2 “haut”, 1 “bas”, 1 “haut” successivement.

Le déplacement dans l'arbre sera le suivant:




La valeur de $f(4,T)$ sera obtenu en prenant:

$a(1) = 1,$
$a(2) = 1,$
$a(3) = 0,$
$a(4) = 1.$

dans l'expression ci-dessus.

*e - **La programmation du modèle***

Les arbres des taux à terme que nous avons construit présentent $2^t$ branches à la date $t$.

Pour pouvoir faire du modèle de HJM un outil opérationnel, nous allons restreindre l'ensemble des processus de diffusion en ajoutant la condition d'indépendance du chemin suivi. Nous démontrons ensuite que cette restriction ramène le modèle au nôtre.

### 3.2. Le modèle avec condition de programmabilité: Heath, Jarrow et Morton restreint

Nous ajoutons la condition d'indépendance de chemin suivi, condition suffisante de la programmabilité du modèle, qui aboutit à ce que nous nommerons "modèle de Heath, Jarrow et Morton restreint".

Cette condition peut se schématiser par:

$$f(t,T) \begin{array}{l} \nearrow f(t,T)+u(t,T) \searrow f(t,T)+u(t,T)+v(t+1,T) \\ \searrow f(t,T)+v(t,T) \nearrow f(t,T)+v(t,T)+u(t+1,T) \end{array}$$

On a l'égalité entre les deux termes de droite si et seulement si:

$$u(t,T)+v(t+1,T)=v(t,T)+u(t+1,T)$$

soit:

$$u(t+1,T)-v(t+1,T)=u(t,T)-v(t,T)\,, \qquad \text{ceci} \quad \forall\, t,T\,.$$

La condition d'indépendance de chemin suivi oblige donc à ce que **l'amplitude des sauts ne dépende pas du temps $t$, mais seulement de l'échéance $T$.**

La condition d'indépendance de chemin suivi donne alors:

(7) Condition d'indépendance de chemin suivi (modèle de HJM/r):

$$\sigma^2(t,T)=\sigma^2(t+1,T)\,,\forall\, t,T$$

$\iff \sigma(t,T)\equiv\sigma(.,T)\,,\forall\, T$
$\iff$ La volatilité des taux à terme ne dépend pas de $t$

## 4. Equivalence entre le modèle de Heath, Jarrow et Morton restreint et nôtre modèle

Tout d'abord, nous montrons que ces modèles sont totalement équivalents. Puis nous donnons les formules permettant d'effectuer la correspondance des paramètres de ces modèles. Enfin nous expliquons en quoi la différence entre ces deux modèles est essentiellement méthodologique.

### *a - Correspondance entre les fonctions de perturbation et les amplitudes de saut*

On se place dans le treillis d'évolution des taux de notre modèle. L'évolution des prix sur deux branches du treillis est représentée par:

$$P(t,T) \left\langle \begin{array}{ll} P\text{haut}(t+1,T) = \dfrac{P(t,T)}{P(t,t+1)} h(t,T-t) & \text{probabilité } q \\ P\text{bas}(t+1,T) = \dfrac{P(t,T)}{P(t,t+1)} h^*(t,T-t) & \text{probabilité } 1-q \end{array} \right.$$

Or dans le modèle de HJM on a:

$$P(t+1,T).\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} = \exp\left[-a(t)\sum_{s=t}^{T-1} u(t,s) - (1-a(t))\sum_{s=t}^{T-1} v(t,s)\right]$$

- $a(t) = 1$ correspond à un mouvement "haut" sur les taux, c'est-à-dire un mouvement "bas" sur les prix ce qui correspond à multiplier le prix par $h^*(t,T-t)$.
- $a(t) = 0$ correspond à un mouvement "bas" sur les taux, c'est-à-dire un mouvement "haut" sur les prix ce qui correspond à multiplier le prix par $h(t,T-t)$.

On a alors:

(1) Correspondance fonctions de perturbation - amplitudes de saut

$$h(t,T-t) = \exp\left(-\sum_{s=t}^{T-1} v(t,s)\right)$$

$$h^*(t,T-t) = \exp\left(-\sum_{s=t}^{T-1} u(t,s)\right)$$

***b - Correspondance de la relation d'indépendance du chemin suivi sur les prix et sur les taux***

La relation d'indépendance de chemin suivi dans notre modèle est une relation sur les prix. Celle du modèle de HJM/r est une relation sur les taux. Nous démontrons ici leur équivalence.

Dans notre modèle, cette relation est donnée par:

$$h(t,T-t+1)h^*(t+1,T-t)h^*(t,1) = h^*(t,T-t+1)h(t+1,T-t)h(t,1)\,.$$

En utilisant la correspondance "fonctions de perturbation - amplitude de saut" obtenue ci-dessus, on déduit:

$$\sum_{s=t}^{T-1} u(t+1,T) - v(t+1,T) = \sum_{s=t}^{T-1} u(t,T) - v(t,T)\,, \qquad \text{ceci} \quad \forall\, t,T\,.$$

En prenant cette égalité pour $T = t+1$, puis $T = t+2$ etc, on obtient par récurrence:

$$u(t+1,T) - v(t+1,T) = u(t,T) - v(t,T)\,, \quad \text{ceci} \quad \forall\, t,T\,.$$

Nous retrouvons la relation que nous avons utilisée sur les taux à terme pour restreindre le modèle de HJM.

La condition d'indépendance de chemin suivi sur les prix dans notre modèle est la même que la condition d'indépendance de chemin suivi sur les taux dans le modèle de Heath, Jarrow & Morton restreint.

Ces deux conditions sont implicitement des restrictions sur le choix des volatilités:
- Pour notre modèle: la volatilité du taux zéro-coupon $r(t,T)$ est la moyenne des volatilités des taux forward court terme courant sur la période $[t,T]$
- Pour le modèle de Heath, Jarrow & Morton: la volatilité des taux forward ne dépend pas du temps.

Ces deux restrictions sont donc équivalentes.

***c - Correspondance facteurs de volatilité - volatilité des taux à terme***

La relation qui suit est une relation importante puisqu'elle porte sur les **paramètres à fixer dans chaque modèle.**

L'unique solution de la correspondance fonctionnelle est:

(2) Correspondance facteur de volatilité - volatilité des taux forwards

$$\delta(T) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{q(1-q)}}\sum_{s=0}^{T-1}\sigma(s)\right), \quad \forall\, T \geq 1, \quad \text{avec} \quad \delta(0) = 1$$

Ainsi, cette relation permet, pour l'utilisateur qui programmerait en parallèle les deux modèles, de calibrer ces paramètres dans l'optique d'un ou l'autre des deux modèles.

***Remarque:*** Dans l'expression ci-dessus, si on prend $\sigma(s) \equiv \sigma = \text{cte}$, on retrouve l'expression du facteur de volatilité $\delta(T) = \delta^T$ qui est le cas Ho & Lee simple en prenant $\delta = \exp\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{q(1-q)}}\right)$.

***d - Approche synoptique des méthodologies des modèles***

On peut maintenant donner la différence de méthodologie entre le modèle de HJM et le nôtre. Voyons de quelle manière est traitée l'évolution du prix zéro coupon $P(t,T)$ dans chacun des deux modèles.

*pour HJM:*

1° – On décompose le taux zéro coupon $r(t,T)$ en taux forward sur la période: $f(t,t+1), f(t,t+2)\ldots f(t,T)$

2° – On modélise l'évolution de chaque taux forward $f$. Ils deviennent à l'étape suivante $f(t+1,t+2), f(t+1,t+3)\ldots f(t+1,T)$.

3° – On recompose le taux zéro coupon $r(t+1,T)$ à l'aide des taux forward obtenus par:

$$r(t+1,T) = f(t+1,t+2) + f(t+1,t+3) + \ldots + f(t+1,T)$$

et on en déduit le prix zéro coupon $P(t+1,T)$.

*pour notre modèle:*

On applique directement au prix zéro coupon $P(t,T)$ une perturbation, $h$ ou $h^*$, qui contient globalement soit tous les mouvements "haut" des forward $\left(h = \exp\left[-\sum u\right]\right)$, soit tous les mouvements "bas" des forward $\left(h^* = \exp\left[-\sum v\right]\right)$.

**Résumé sur le modèle de Ho & Lee**

Le modèle de Ho & Lee est un modèle exogène décrivant l'évolution de la courbe des taux.

Il permet d'évaluer des actifs optionnels sur taux, de complexité importante. Le caractère discret du modèle permet d'intégrer des phénomènes ponctuels dans le temps affectant les taux (options américaines, ...,).

La courbe des taux initiale est une donnée du modèle.
Les paramètres du modèle sont $\pi$ et un facteur de volatilité $\delta$.

Les limitations du modèle sont:
- Il peut apparaître des taux négatifs.
- Tous les taux sont parfaitement corrélés.
- Tous les taux zéro coupon ont même volatilité.

**Résumé sur notre modèle**

Notre modèle est un modèle exogène décrivant l'évolution de la courbe des taux.

Il permet d'évaluer des actifs optionnels sur taux, de complexité importante. Le caractère discret du modèle permet d'intégrer des phénomènes ponctuels dans le temps affectant les taux (options américaines, ...,).

La courbe des taux initiale est une donnée du modèle.

Les paramètres du modèle sont $\pi$ et une fonction $\delta(T), T$ étant la maturité d'un zéro coupon.

Les taux zéro coupon modélisés n'ont pas tous même volatilité.

Les limitations du modèle sont:
- Il peut apparaître des taux négatifs.
- Tous les taux sont parfaitement corrélés.

**Résumé sur le modèle de Heath, Jarrow & Morton**

Le modèle de Heath, Jarrow & Morton est un modèle exogène décrivant l'évolution de la courbe des taux.

HJM modélise l'évolution des taux à terme en supposant qu'ils évoluent selon des treillis binomiaux.

La courbe des taux initiale est une donnée du modèle.

Les paramètres du modèle sont:
- la probabilité $\pi$
- les volatilités des taux forward court terme $\sigma(t, T)$.

Les limitations du modèle sont:
- Il peut apparaître des taux négatifs.
- Tous les taux sont parfaitement corrélés (pour un seul brownien).
- Les treillis sont de complexité exponentielle.

**Le modèle n'est donc pas programmable de façon réaliste.**

**Résumé sur le modèle de Heath, Jarrow & Morton restreint**

Le modèle de Heath, Jarrow & Morton restreint est un modèle exogène décrivant l'évolution de la courbe des taux.

HJM restreint modélise l'évolution des taux à terme en supposant qu'ils évoluent selon des treillis binomiaux.

La condition de programmabilité implique que la volatilité des taux forward court terme ne dépend pas du temps $t$, mais seulement du terme $T : \sigma(t, T) \equiv \sigma(., T)$.

**Le modèle de HJM restreint est équivalent à notre modèle.**

La courbe des taux initiale est une donnée du modèle.

Les paramètres du modèle sont:
- la probabilité $\pi$
- les volatilités des taux forward court terme $\sigma(T)$.

Les limitations du modèle sont:
- Il peut apparaître des taux négatifs.
- Tous les taux sont parfaitement corrélés.

## 5. Conclusion

Les modèles à structure de taux exogène (Ho & Lee, Heath, Jarrow & Morton), permettent d'éviter le problème de l'estimation de la prime de risque par la prise en compte de toute la structure des taux. Le modèle de Ho & Lee, aisément programmable, présente l'inconvénient de ne simuler que des taux de volatilité constant. Le modèle de Heath, Jarrow & Morton, intégrant une information très fine sur la volatilité des taux, présente l'inconvénient d'être de complexité algorithmique exponentielle. Notre modèle se situe, du point de vue de sa sophistication, entre les deux modèles ci dessus: il intègre une pyramide de volatilité des taux et a la même complexité algorithmique que le modèle de Ho & Lee. Il est le modèle le plus complet, du point de vue de la volatilité des taux, qui soit de complexité linéaire.

L'intérêt de ce modèle est de permettre la mise en oeuvre pratique de produits optionnels sur taux de plus en plus complexes: options sur taux, options sur options, obligation avec coupon réinvestissable, obligations zéro-coupon à remboursement anticipé, etc. tant du point de vue de la valorisation que du point de vue de l'analyse de risque.

## Bibliographie

— Ouvrages et These —

(1) J. Hull, *Options Futures and other derivative securities.*

(2) R. Bouzouba et K. Safir, *La structure par terme des taux d'intérêt*, Rapport à l'école Polytechnique 1991.

(3) T.S.Y. Ho et S.B.Lee, *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*, Journal of Finance. Décembre 1986.

(4) D. Heath, R. Jarrow et K. Morton, *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology*, Unpublished paper, 1987.

(5) D. Heath, R. Jarrow et K. Morton, *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation*, Journal of Financial and Quantitatif Analysis, 1990.