

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t; \infty} [(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

AJOUT DE CHOCS À UN MODÈLE DE MORTALITÉ PROSPECTIVE

Version 1.2 du 31/12/2023

Guillaume Gautier de La Plaine¹ Frédéric Planchet²

ISFA - Laboratoire SAF^β

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

RÉSUMÉ

Ce travail propose un modèle simple pour prendre en compte la volatilité annuelle du niveau de mortalité observé à l'échelle d'un pays comme la France dans la construction de tables de mortalité prospectives. En affectant d'un facteur de fragilité une fonction de hasard de base, on généralise le modèle de Lee-Carter. L'impact sur les espérances de vie prospectives et sur le besoin en capital dans le contexte d'un régime de rentes viagères est analysé en détails.

| | |
|--|-----------|
| 1. INTRODUCTION | 1 |
| 2. PROPOSITION D'UN MODÈLE STOCHASTIQUE DE MORTALITÉ | 3 |
| a. Spécification | 3 |
| b. Détermination de la log-vraisemblance..... | 3 |
| c. Estimation des paramètres | 5 |
| d. Calcul des espérances de vie résiduelles prospectives..... | 6 |
| 3. APPLICATION NUMÉRIQUE | 7 |
| a. Ajustement du modèle | 7 |
| b. Forces de mortalité projetées | 9 |
| c. Estimation des espérances de vie résiduelles prospectives..... | 12 |
| d. Sensibilité au paramètre de fragilité..... | 15 |
| e. Conséquences sur le besoin en capital d'un régime de rentes | 16 |
| 4. CONCLUSION ET DISCUSSION | 17 |
| 5. RÉFÉRENCES | 18 |
| 6. ANNEXES | 20 |

1. Introduction

La construction de projections d'espérances de vie fait l'objet de nombreux travaux depuis l'article fondateur de Lee et Carter (LEE et CARTER [1992]).

Dans la perspective d'extrapoler dans le futur les tendances observées dans le passé, la majorité des approches proposées se basent sur une « surface de mortalité », mesurant

¹ Guillaume Gautier de La Plaine, actuaire, est consultant chez PRIM'ACT.

² Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé chez PRIM'ACT. Contact : frederic@planchet.net.

^β Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA), Laboratoire SAF EA2429, F-69366, LYON, France.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t;\infty} [(T_x)]$$

les forces de mortalité par âge et année du moment, qu'il s'agit donc d'extrapoler dans la dimension temporelle.

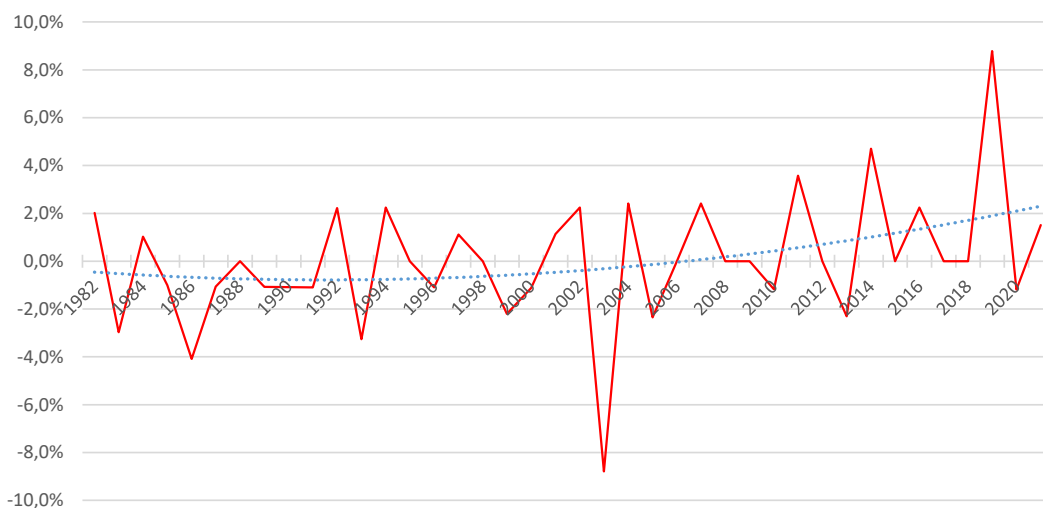
Les modèles inspirés par Lee et Carter commencent par réduire la dimension en réalisant un ACP puis en extrapolant une ou deux séries temporelles associées à la projection sur les axes principaux.

Bongaarts (BONGAARTS [2004]) a proposé une démarche différente basée sur des ajustements paramétriques par année du moment et de l'extrapolation des coefficients estimés chaque année.

Dans BONGAARTS [2004], l'auteur utilise toutefois une représentation paramétrique assez frustrante (modèle de Thatcher) qui ne permet pas d'englober tous les âges. De plus, il limite son extrapolation à 2 paramètres sur 3 en les traitant de manière indépendante, ce qui est une approximation discutable.

Les modèles de ce type projettent des séries $t \rightarrow \mu(x, t)$ régulières. Pourtant, lorsque l'on examine les variations annuelles du taux de mortalité en France par exemple, on observe une volatilité assez forte :

Fig. 1 : Variation annuelle du taux de mortalité



Les modèles classiques ci-dessus ne peuvent pas rendre compte de ces variations de court terme. Des propositions d'approches ont été formulées par exemple dans GUETTE [2010] ou CURRIE et al. [2003], mais avec un objectif un peu différent, ces travaux se proposant de modéliser des catastrophes comme des guerres ou des épidémies. Plus récemment, une approche utilisant des modèles à changement de régime a été proposée dans ROBBEN et ANTONIO [2023].

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} [(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

Notre propos ici n'est pas de modéliser des catastrophes, mais d'intégrer la volatilité ci-dessus dans la modélisation pour fournir une évaluation plus précise des espérances de vie résiduelles lorsque l'on dispose d'une estimation sans biais des taux de mortalité.

On propose donc ici une approche spécifique avec pour objectif de rendre compte de cette volatilité de court terme et de mesurer son impact dans l'anticipation des espérances de vie résiduelles prospectives.

2. Proposition d'un modèle stochastique de mortalité

On s'inspire ici des modèles de fragilité proposés par Vaupel et ses co-auteurs (VAUPEL et al. [1979]), en affectant une fonction de hasard de base régulière d'un choc ne dépendant que du temps, dans le cadre d'une hypothèse de hasards proportionnels.

On décrit ci-après la spécification proposée, puis une méthode d'estimation des paramètres dans le cadre d'un maximum de vraisemblance conditionnel.

a. Spécification

On considère la spécification suivante de la fonction de hasard de l'année du moment t :

$$\mu(x, t) = Z_t \times \mu_0(x, t)$$

avec la forme semi-paramétrique de la fonction de hasard de base $\ln \mu_0(x, t) = \alpha_x + \beta_x k_t$.

On fait l'hypothèse que les chocs sont en moyenne centrés, soit $E(Z_t) = 1$ et on impose les conditions d'identifiabilité classiques pour la fonction de hasard de base (cf. BROUHNS et al. [2002]) :

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x = 1 \text{ et } \sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0.$$

Il s'agit d'estimer les paramètres de Z_t et la matrice (α, β, k) , puis d'extrapoler ensuite la série temporelle $t \rightarrow k(t)$.

b. Détermination de la log-vraisemblance

Pour l'estimation par maximum de vraisemblance, on sait que tout se passe comme si le nombre de décès observés suivait une loi de Poisson,

$$D_{x,t} \sim P(E_{x,t} \times \mu(x, t)),$$

ce qui conduit à l'expression suivante de la vraisemblance conditionnelle pour une

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

observation, en notant $\lambda = E_{x,t} \times \mu_0(x,t)$:

$$P(D = d | Z) = e^{-\lambda Z} \frac{\lambda^d}{d!} Z^d.$$

La vraisemblance s'en déduit aisément :

$$P(D = d) = E_Z [P(D = d | Z)] = \int e^{-\lambda z} z^d \frac{\lambda^d}{d!} dF_Z(z).$$

On fait alors le choix d'une loi Gamma de paramètres a et b pour la distribution de Z , soit

$$f_Z(z) = z^{a-1} \frac{b^a e^{-bz}}{\Gamma(a)}, \text{ ce qui conduit à } P(D = d) = \frac{\lambda^d}{d!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+b)z} z^{d+a-1} dz. \text{ À l'aide du}$$

changement de variable $u = (\lambda+b)z$, on obtient l'expression suivante de la vraisemblance pour une observation

$$P(D = d) = \frac{\lambda^d}{d!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{(\lambda+b)^{d+a}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{d+a-1} dz = \frac{\lambda^d}{d!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{(\lambda+b)^{d+a}} \Gamma(d+a),$$

ce qui donne en passant à la log-vraisemblance

$$\ln P(D = d) = f(a,b) + d \ln(\lambda) - (d+a) \ln(\lambda+b),$$

$$\text{avec } f(a,b) = \ln \left(b^a \frac{\Gamma(d+a)}{\Gamma(d+1)\Gamma(a)} \right).$$

En fonction des paramètres (α, β, k) et conditionnellement à (a,b) , la log-vraisemblance

pour une observations est de la forme $l(\alpha, \beta, k) = \ln P(D = d)$ avec

$\lambda = E_{x,t} \times \mu_0(x,t) = E_{x,t} \times e^{\alpha_x + \beta_x k_t}$. La log-vraisemblance a donc, conditionnellement à (a,b)

l'allure suivante (à une constante additive près) :

$$\ln L = \sum_{x=x_m}^{x_M} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln P(D_{x,t} = d_{x,t} | a,b) = \sum_{x=x_m}^{x_M} \sum_{t=t_m}^{t_M} [d_{x,t} \ln(\lambda_{x,t}) - (d_{x,t} + a) \ln(\lambda_{x,t} + b)].$$

Il s'agit alors de la maximiser en (α, β, k) sous la contrainte que $\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x = 1$ et $\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

c. Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres peut être réalisée en deux temps : dans une première étape, on estime le paramètre de la fragilité, puis, dans une seconde étape, on maximise en (α, β, k) la log-vraisemblance ci-dessus.

La condition $E(Z_t) = 1$ implique $a = b$. On a par ailleurs $V(Z_t) = \frac{a}{b^2} = \frac{1}{a}$, donc le paramètre de contrôle de la perturbation Z_t est l'inverse de la variance $a = \sigma_Z^{-2}$. L'estimation directe de ce paramètre peut être effectuée de la manière suivante en observant que les intensités annuelles moyennes de sortie sont de la forme

$$\bar{\mu}(t) = Z_t \times \bar{\mu}_0(t) \text{ avec } \bar{\mu}_0(t) = \frac{\sum_{x=x_m}^{x_M} E_{x,t} \mu_0(x,t)}{\sum_{x=x_m}^{x_M} E_{x,t}}$$

d'où l'on tire $E(\bar{\mu}(t)) = \bar{\mu}_0(t)$, $V(\bar{\mu}(t)) = V(Z_t) \bar{\mu}_0^2(t)$ puis $V(Z_t) = \frac{V(\bar{\mu}(t))}{E(\bar{\mu}(t))^2}$. La

variance de Z_t est donc égale au carré du coefficient de variation de $\bar{\mu}(t)$: $\sigma(Z_t) = cv(\bar{\mu}(t))$. Il est alors direct de proposer comme estimateur

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \left(\hat{\mu}(t) - \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{\mu}(t) \right)^2}{\left(\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{\mu}(t) \right)^2}$$

Avec comme estimateur $\hat{\mu}(t) = \frac{\sum_{x=x_m}^{x_M} E_{x,t} \hat{\mu}(x,t)}{\sum_{x=x_m}^{x_M} E_{x,t}}$ et $\hat{\mu}(x,t) = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$ l'estimateur de Hoem de

la fonction de hasard.

Une fois le paramètre de fragilité estimé, on cherche à maximiser la log-vraisemblance exprimée précédemment. Les dérivées partielles de la log-vraisemblance pour une observation sont les suivantes :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln P(D=d) = d \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial p} - (d+a) \frac{1}{\lambda+b} \frac{\partial \lambda}{\partial p} = \left(\frac{d}{\lambda} - \frac{d+a}{\lambda+b} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial p},$$

avec p l'un des paramètres (α, β, k) . On a par ailleurs $\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \lambda$, $\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = k\lambda$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial k} = \beta\lambda$.

Finalement, il reste à estimer (α, β, k) , qui est solution des conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \ln L = \sum_{t=t_m}^{t_M} \left(\frac{d}{\lambda_{x,t}} - \frac{d+a}{\lambda_{x,t}+b} \right) \lambda_{x,t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_x} \ln L = \sum_{t=t_m}^{t_M} \left(\frac{d}{\lambda_{x,t}} - \frac{d+a}{\lambda_{x,t}+b} \right) k_t \lambda_{x,t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k_t} \ln L = \sum_{x=x_m}^{x_M} \left(\frac{d}{\lambda_{x,t}} - \frac{d+a}{\lambda_{x,t}+b} \right) \beta_x \lambda_{x,t} = 0$$

Ce système est non linéaire.

d. Calcul des espérances de vie résiduelles prospectives

Dans le modèle proposé, le calcul de l'espérance de vie prospective

$$e(x,t) = E(e(x,t|Z)) = \sum_{i \geq 0} \prod_{j=0}^i E[\exp(-\mu_{x+j,t+j})]$$

se met sous la forme

$$e(x,t) = \sum_{i \geq 0} \prod_{j=0}^i \left(\frac{b}{b + \mu_0(x+j,t+j)} \right)^a$$

car la transformée de Laplace d'une loi Gamma s'écrit $E(e^{-xZ_t}) = \left(\frac{b}{b+x} \right)^a$. Comme

$E(e^{-\mu(x,t)}) = E(e^{-Z_t \times \mu_0(x,t)})$, on en déduit que :

$$E(e^{-\mu(x,t)}) = E(e^{-Z_t \times \mu_0(x,t)}) = \left(\frac{b}{b + \mu_0(x,t)} \right)^a.$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

On peut remarquer que, lorsque $b = a \rightarrow +\infty$, $E(e^{-\mu(x,t)}) \rightarrow e^{-\mu_0(x,t)}$ et on retrouve alors la

formule classique $e(x,t) = \sum_{i \geq 0} \prod_{j=0}^i \exp(-\mu_0(x+j, t+j))$.

3. Application numérique

On utilise les données pour la France métropolitaine sur la période 2000-2020, pour les âges de 0 à 105 ans inclus, issues de l'étude AGALVA et BLANPAIN [2021]. L'ensemble du calibrage a été fait sous R.

Les analyses prospectives sont ensuite faites sur toute la plage d'âges et pour les années allant de 2021 à 2060.

a. Ajustement du modèle

L'ensemble des étapes sont successivement abordées dans les sous-sections suivantes. Tout au long de l'étude, l'ensemble des résultats obtenus sont comparés aux résultats donnés par un modèle de Lee-Carter calibré sur les mêmes données.

Estimation des paramètres de la loi Gamma

L'estimation du couple de paramètres (a, b) a été faite avec les données brutes et on trouve $\sigma_z^2 = 4,3\%$, soit $a = b = 550$.

Estimation des paramètres du modèle

Le calibrage de (α, β, k) sous contraintes a ensuite été fait à l'aide du package³ *Rsolnp*, et plus particulièrement de la fonction *solnp* (voir GHALANOS ET THEUSSL [2015]). Afin de mener à bien ce calibrage, il a été choisi de fournir comme paramètres initiaux les résultats d'un modèle de Lee-Carter, calibré à l'aide de la fonction *lca* du package⁴ *demography* (cf. HYNDMAN [2023]). L'ensemble de ces coefficients sont retranscrits en annexe.

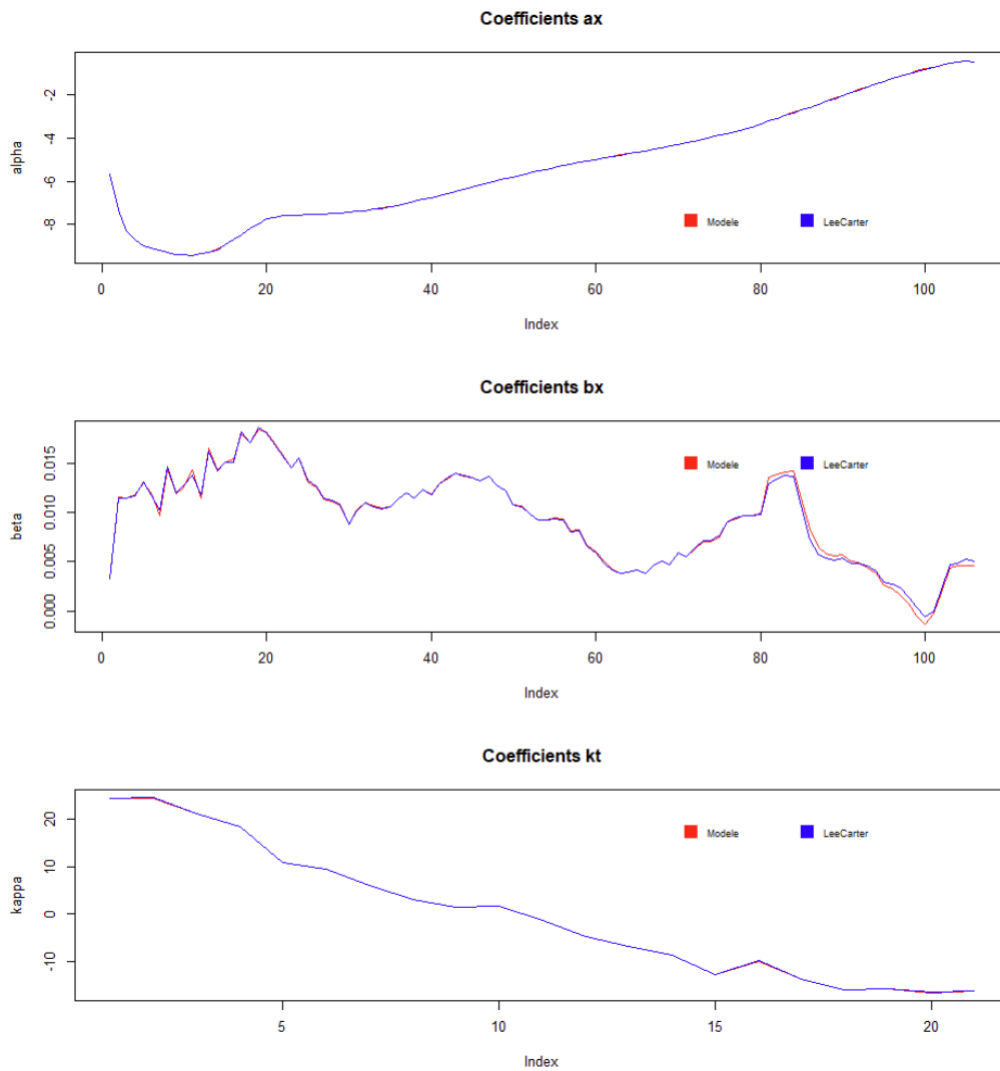
Comme l'illustre la figure suivante, ceci mène à des coefficients (α, β, k) très proches de ceux du modèle de Lee-Carter de référence :

³ <https://cran.r-project.org/web/packages/Rsolnp/index.html>.

⁴ <https://cran.r-project.org/web/packages/demography/index.html>.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty} [(T_x)]$$

Fig. 2 : Comparaison des différents coefficients à ceux d'un modèle de Lee-Carter



On observe que le paramètre temporel présente une vitesse de décroissance ralentie à partir de la 18^{ème} année de la période d'observation.

Extrapolation des coefficients temporels

Que ce soit dans le modèle étudié ici ou dans le modèle de Lee-Carter utilisé comme référence, la projection des coefficients $(k_t)_t$ pour t au-delà de la plage de calibration a été faite par régression linéaire, en ajustant l'équation suivante aux paramètres calibrés :

$$k_t = m \times t + p$$

Dans chacun des deux cas de figure, on trouve les coefficients présentés dans le tableau suivant :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty} [(T_x)]$$

Tab. 1 : Résultats du prolongement des coefficients temporels k

| | m | p |
|-----------------------------------|-------|---------|
| Modèle étudié | -2,19 | 4401,98 |
| Modèle de Lee-Carter de référence | -2,19 | 4402,33 |

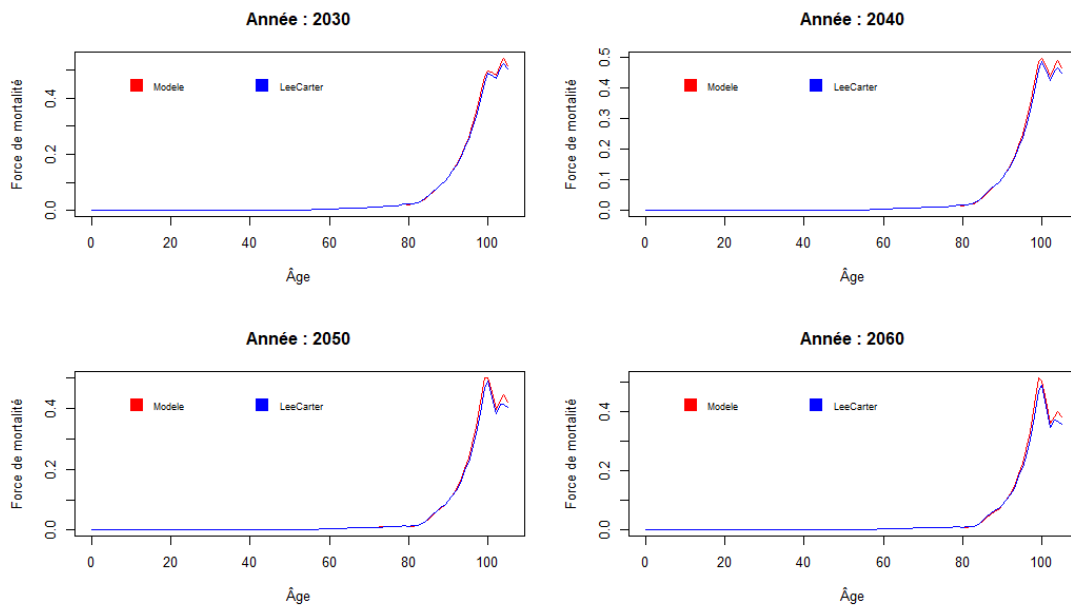
Les résultats sont logiquement très proches dans les deux cas.

b. Forces de mortalité projetées

On compare ici les forces de mortalités projetées avec ou sans chocs intégrés au modèle, en fonction de l'âge, puis de l'année.

Dans un premier temps, nous regardons l'évolution de la force de mortalité en fonction de l'âge, pour quelques années fixées :

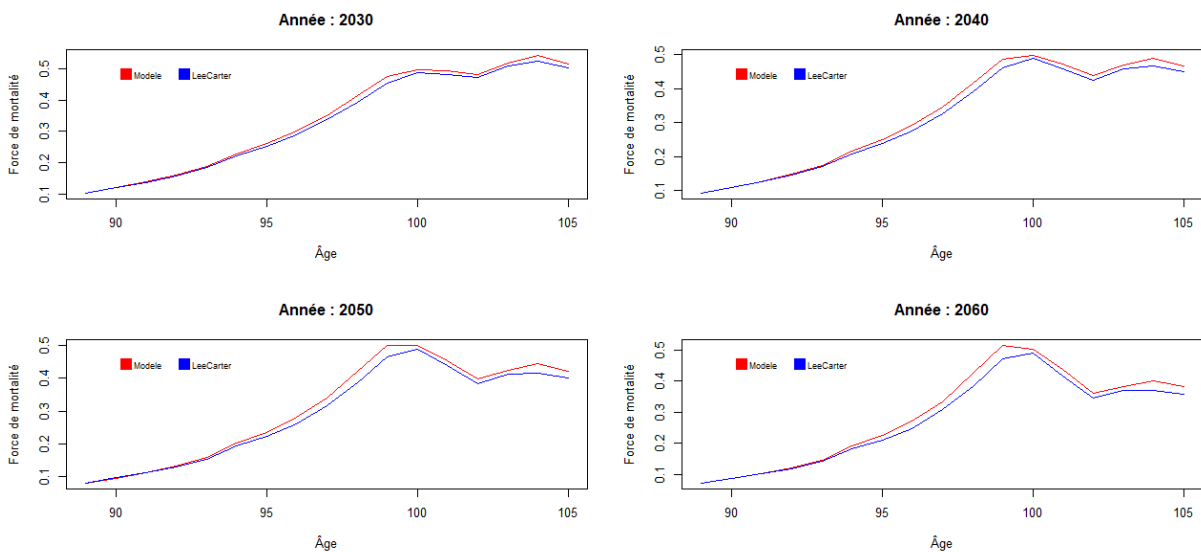
Fig. 3 : Évolution des forces de mortalité par âge



Les forces de mortalité des deux modèles sont très proches, hormis sur les âges les plus élevés, où le modèle avec chocs a tendance à prédire des forces de mortalité plus élevées. Un agrandissement sur la plage d'âges [90 ; 105] permet de mieux constater ceci :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty} (T_x)$$

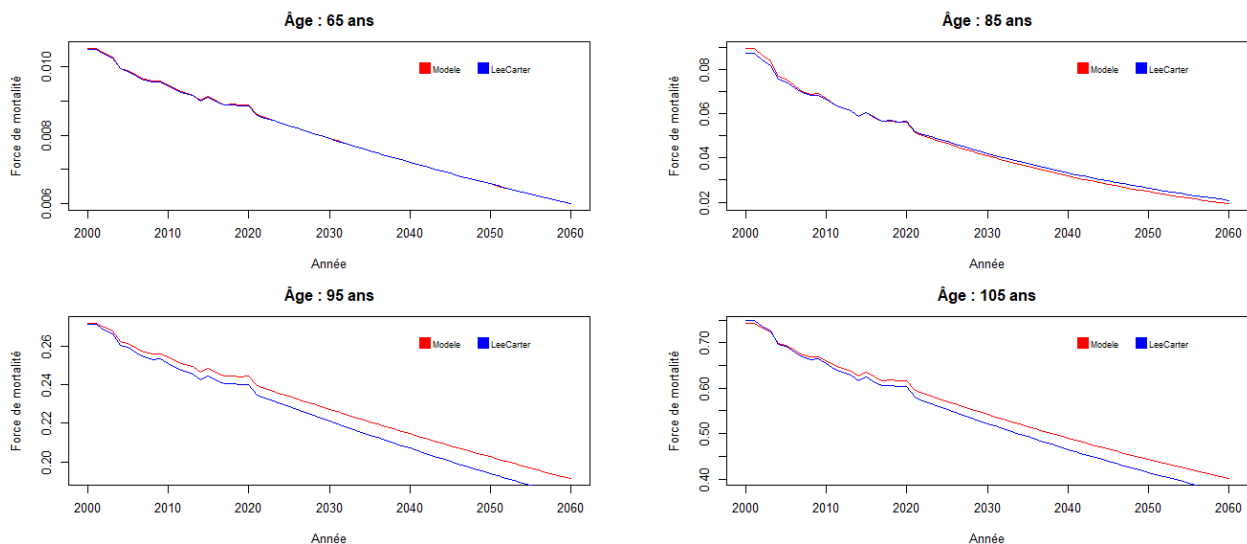
Fig. 4 : Évolution des forces de mortalité par âge de 90 à 105 ans



L'écart relatif maximal sur l'ensemble de la plage prospective est de 3,6 % à l'âge de 80 ans pour l'année 2060.

On fait maintenant une comparaison des forces de mortalité des deux modèles tout au long de la période d'analyse prospective, pour quelques âges choisis.

Fig. 5 : Évolution des forces de mortalité par année pour quelques âges choisis



On retrouve dans l'ensemble le même constat que précédemment, le modèle de mortalité étudié a tendance à prédire des forces de mortalités plus importantes que le modèle de Lee-Carter de référence sur les âges élevés, et l'écart augmente au fil du temps.

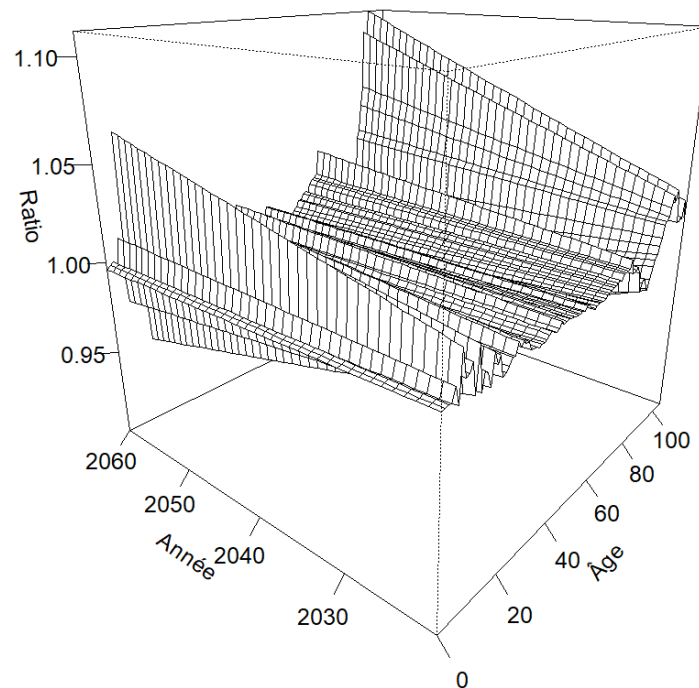
$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} [(T_x)]$$

Avant de calculer les espérances de vie résiduelles prospectives, il est intéressant de regarder quel est l'impact global sur les forces de mortalités. À cette fin, on calcule le ratio suivant :

$$r(x, t) = \frac{\mu(x, t)}{\mu_{LC}(x, t)}$$

avec $\mu_{LC}(x, t)$ la force de mortalité issue du modèle de Lee-Carter de référence et $\mu(x, t)$ celle issue du modèle étudié. Ce ratio est représenté sur la figure suivante :

Fig. 6: Ratio des forces de mortalité sur toute la plage d'âge et toute la période d'analyses prospectives (2021-2060)



La valeur moyenne de ce ratio, tous âges et années confondus est de 100 %, ce qui se traduit de ce point de vue une équivalence du modèle étudié avec le modèle de Lee-Carter.

L'impact de l'introduction des chocs sur l'ajustement est donc négligeable lorsqu'il est apprécié de manière très globale. Toutefois, l'écart croît dans le temps et conduit les deux modèles à diverger à moyen terme et aux âges élevés.

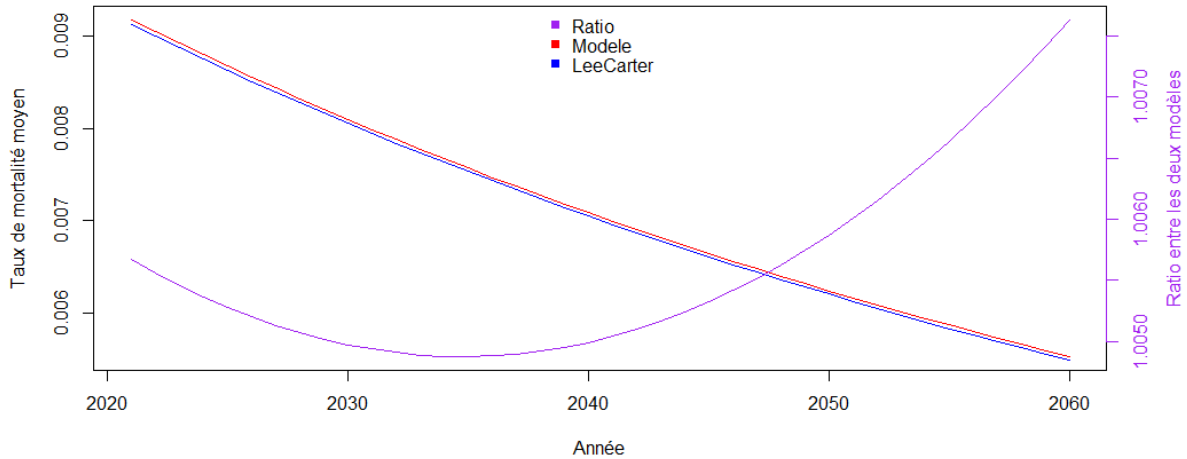
En se limitant aux âges supérieurs à 65 ans, on obtient une moyenne pondérée égale à 99,8 %.

De plus, le taux moyen de mortalité de la population, calculé sur la base de l'exposition au

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

risque en 2020, évolue de la manière suivante :

Fig. 7: Taux de mortalité moyen par année, tous âges confondus, de 2021 à 2060



On constate que le modèle étudié est en moyenne plus pessimiste que le modèle de Lee-Carter sur l'amélioration de la mortalité dans la mortalité future.

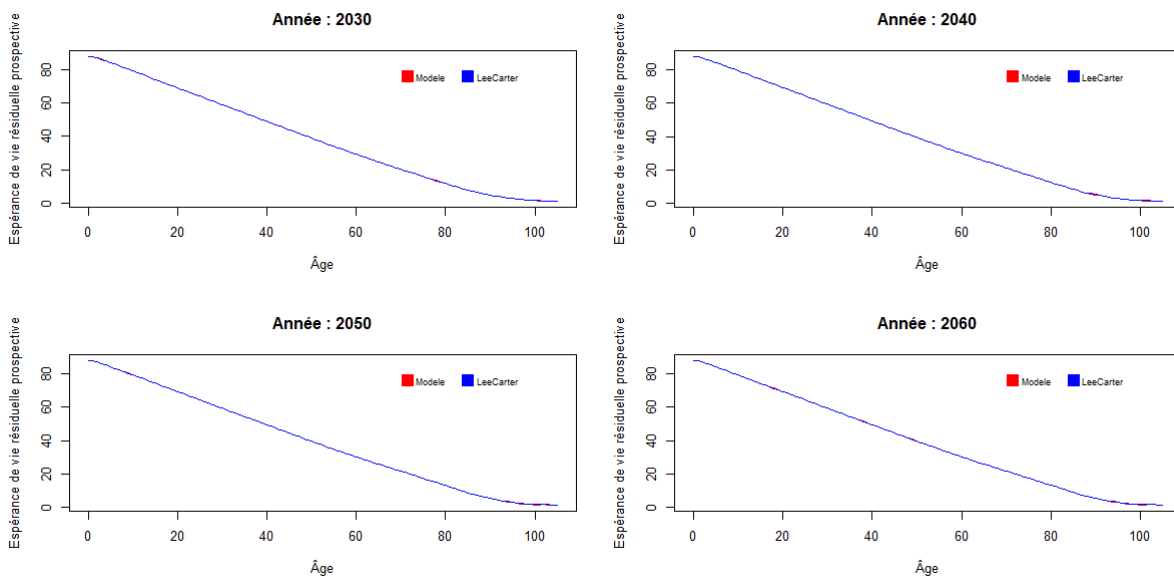
c. Estimation des espérances de vie résiduelles prospectives

Il est ensuite possible de regarder les conséquences du modèle de mortalité étudié sur les espérances de vie résiduelles prospectives, d'abord par âge variable pour quelques années fixées, puis par année variable pour quelques âges fixés.

Comme montré sur la figure suivante, il apparaît que le modèle de mortalité étudié ne change pas grandement les espérances de vies résiduelles prospectives par rapport au modèle de mortalité de référence, hormis éventuellement sur les âges élevés :

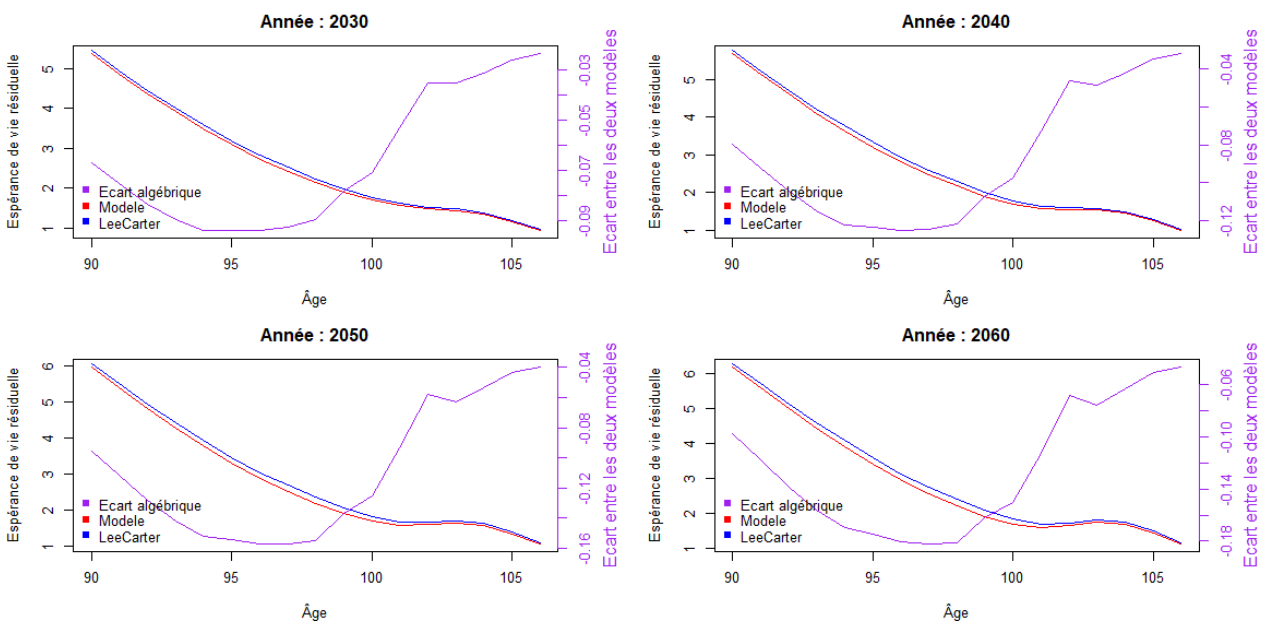
$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty[}(T_x)$$

Fig. 8 : Évolution des espérances de vie résiduelles prospectives par âge



Un agrandissement de ces graphiques sur les âges élevés est proposé ci-dessous, avec pour chaque année l'écart algébrique entre les deux modèles :

Fig. 9 : Évolution des espérances de vie résiduelles prospectives de 90 à 105 ans

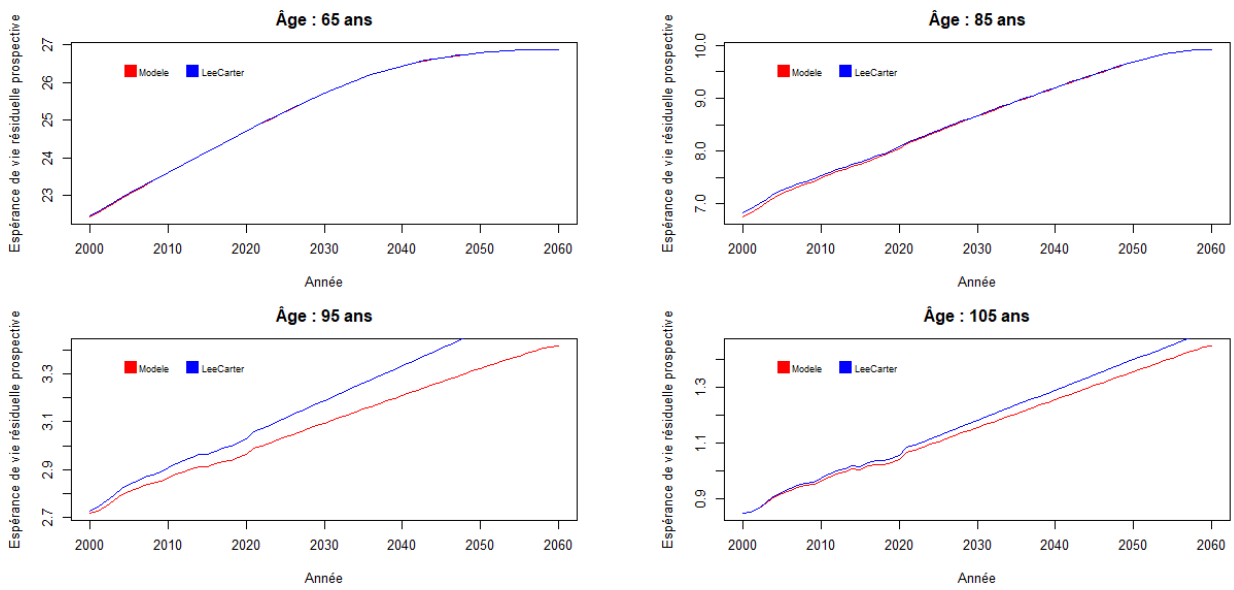


Il est par ailleurs constaté que le maximum de l'écart absolu entre les deux modèles se trouve à l'âge 96 ans pour l'année 2060, et vaut 0,18, ce qui représente environ 65 jours.

Dans cette analyse, on retrouve le constat de la section précédente : c'est sur les âges élevés que la différence avec le modèle de Lee-Carter de référence se fait principalement.

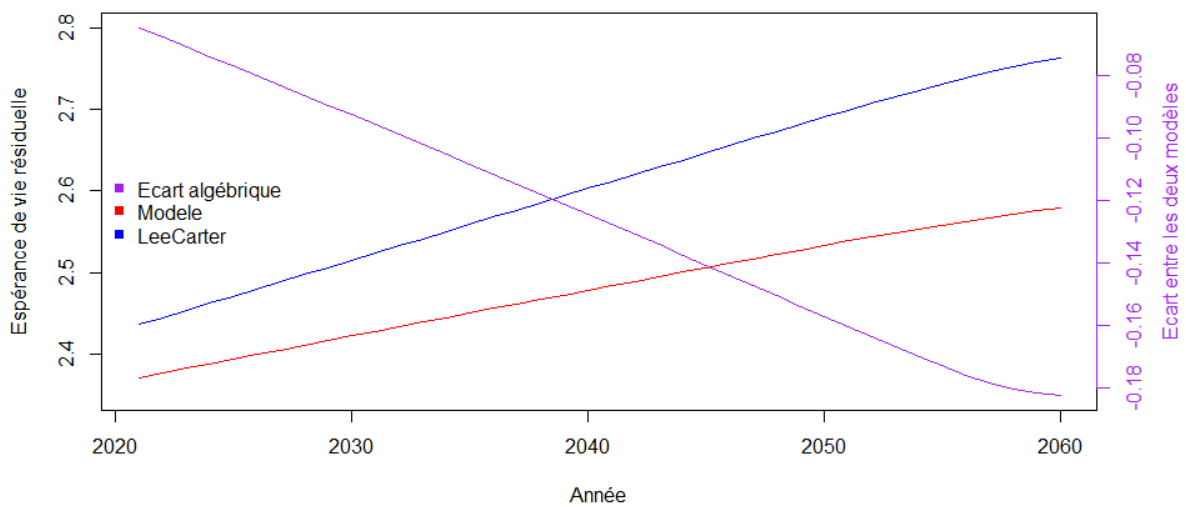
$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty} [(T_x)]$$

Fig. 10 : Évolution des espérances de vie résiduelles prospectives par année



Ci-dessous un agrandissement pour l'âge 96 ans avec en plus la différence algébrique entre les deux modèles :

Fig. 11 : Évolution des espérances de vie résiduelles prospectives par année à 96 ans



$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

d. Sensibilité au paramètre de fragilité

La volatilité de la fragilité est estimée à 4,3 % ; toutefois, sur une période plus longue, ce paramètre peut être plus élevé, par exemple⁵ de 1982 à 2022, il ressort à 5,5 %.

Avec ce niveau de volatilité, on note que $P(Z_t \geq 1,09) \approx 5\%$; 9 % étant le taux de surmortalité⁶ de l'année 2020, on peut en déduire que la probabilité d'observer une surmortalité à ce niveau est de l'ordre de 5 %. De plus, $Var_{90,5\%}(Z_t) \approx 1,15$, ce qui correspond au choc de mortalité pour le module de risque « mortalité » du règlement délégué.

Sur la base de la table centrale $\mu_0(x, t)$ ajustée ci-dessus, on recalcule les espérances de vie résiduelles prospectives associées à un coefficient de volatilité de 5,5 % en utilisant

$$e(x, t) = \sum_{i \geq 0} \prod_{j=0}^i \left(\frac{\sigma^{-2}}{\sigma^{-2} + \mu_0(x+j, t+j)} \right)^{\sigma^{-2}},$$

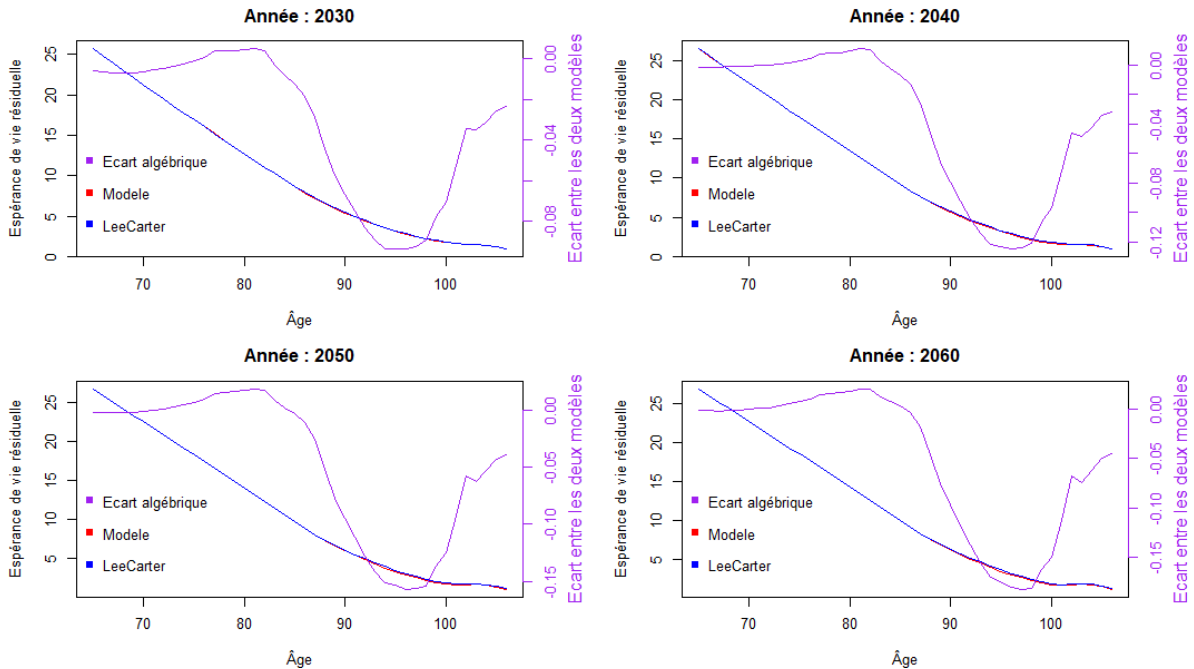
ce qui conduit aux résultats suivants :

⁵ [https://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/39B54166464089AFC12572B0003D88C2/\\$FILE/20230921_FP.pdf?OpenElement](https://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/39B54166464089AFC12572B0003D88C2/$FILE/20230921_FP.pdf?OpenElement)

⁶ <https://actudactuaire.typepad.com/laboratoire/2021/03/mortalit%C3%A9-en-france-en-2020-suite.html>.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty} [(T_x)]$$

Fig. 12 : Évolution des espérances de vie résiduelles prospectives de 65 à 105 ans pour quelques années choisies, avec un nouveau coefficient de volatilité



On ne constate pas d'écart significatif entre les deux modèles avec ce nouveau paramétrage de volatilité.

e. Conséquences sur le besoin en capital d'un régime de rentes

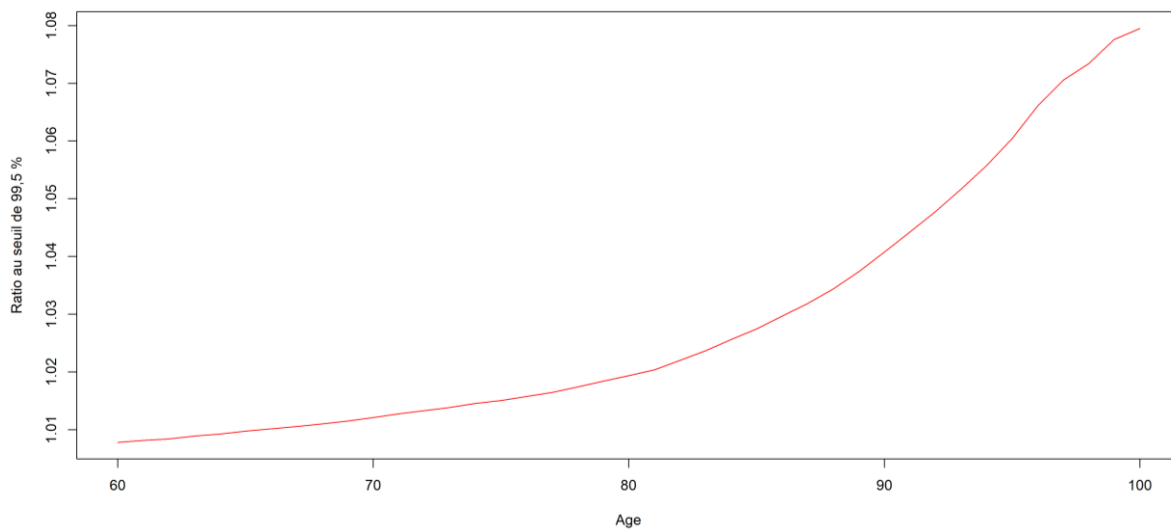
La présence du facteur de fragilité n'a donc pas d'impact matériel sur les indicateurs de tendance centrale (forces de mortalité, espérances de vie résiduelles, etc.).

Toutefois, le caractère aléatoire de la loi de mortalité d'une année donnée a des conséquences sur l'évaluation du besoin en capital pour se prémunir contre les déviations adverses de la mortalité. Dans le contexte particulier d'un régime de rentes viagères, on est donc amené, en suivant une logique analogue à celle de la norme Solvabilité 2, à considérer le quantile à 99,5 % de la distribution des espérances de vie résiduelles induite par la fragilité. On obtient ainsi, pour chaque âge de 60 à 100 ans les résultats suivants pour le ratio entre ce quantile et l'espérance :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t;\infty}[(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

Fig. 13 : Ratio entre le quantile à 99,5 % et l'espérance (SCR)



En pondérant par la structure par âges de la population française, on trouve un ratio moyen de 101,3 % environ.

Le règlement délégué⁷ impose de son côté pour le calcul du SCR associé au risque de longévité un abattement de 20 % sur les taux de décès (cf. l'art. 138 du règlement délégué UE n°2015/35), ce qui conduit à un besoin en capital égal à 10 % de l'espérance.

On en déduit que la volatilité observée sur les taux de décès annuels explique donc environ 12 % du SCR de longévité.

4. Conclusion et discussion

L'utilisation d'un modèle de fragilité Gamma permet de rendre compte correctement des variations annuelles du niveau de mortalité constatées à l'échelle de la France entière.

Intégrer ces variations dans l'ajustement d'un modèle prospectif de type log-Poisson ne pose pas de difficulté majeure et une estimation des paramètres en deux étapes permet d'utiliser les algorithmes classiques de maximisation de la vraisemblance.

Les résultats obtenus montrent que l'impact de cette volatilité additionnelle est négligeable sur les indicateurs de tendance centrale.

En revanche, on constate un impact matériel sur le besoin en capital associé au risque de longévité, un peu moins de 15 % de ce besoin étant induit par la présence de cette volatilité. Le complément est associé à l'incertitude sur la tendance d'évolution des taux de décès.

⁷ Règlement délégué UE n°2015/35 : <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/?uri=CELEX:32015R0035>.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t;\infty} [(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

Ainsi, si le principal aléa associé à la construction d'une table de mortalité prospective reste l'incertitude attachée à la détermination de la tendance (voir JUILLARD et al. [2008] et JUILLARD et PLANCHET [2006] pour des analyses détaillées sur ce point), la prise en compte de ces fluctuations de court terme du niveau de mortalité permet une meilleure compréhension des déterminants du risque de longévité.

5. Références

- AGALVA E., BLANPAIN N. [2021] [Projections de population 2021-2070](#), Insee Résultats.
- BONGAARTS J. [2004] “[Long-range trends in adults mortality : Models and projection methods](#)”, Population Council .
- BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] [A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables](#), *Insurance, Mathematic and Economics*, vol. 31.
- CURRIE I.; DURBAN M. ; EILERS P. [2003] [Using P-splines to extrapolate two-dimensional Poisson data](#), Proceedings of 18th International Workshop on Statistical Modelling, Leuven, Belgium.
- DEBONNEUIL E. [2015] [Modèle paramétrique de mortalité en fonction de l'âge, pour des applications à des portefeuilles de retraite](#), Mémoire d'actuaire, ISFA.
- GUILBAUD C. [2018] [Nouveaux modèles d'analyse et de projection de la mortalité, application à la population française](#), Mémoire d'actuaire, Dauphine.
- GUETTE V. [2010] [La prise en compte des catastrophes dans la modélisation de la mortalité](#), Mémoire d'actuaire, ISFA.
- JUILLARD M., PLANCHET F., THÉRON P.E. [2008] « [Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 76 (3).
- JUILLARD M., PLANCHET F. [2006] « [Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité – application à un régime de rentes](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 75 (3).
- LEE R. D., CARTER L. [1992] “Modeling and forecasting us mortality”, *Journal of the American statistical association* 87(419), 659{671.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2011] [Modélisation statistique des phénomènes de durée – applications actuarielles](#), Paris : Economica.
- ROBBEN J., ANTONIO K. [2023] [Catastrophe risk in a stochastic multi-population mortality model](#), Document de travail, arXiv:2306.15271.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} [(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

THATCHER A.R. [1999] [The Long-term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age](#), *Journal of the Royal Statistical Society*, 162, Part 1: 5-43.

VAUPEL J. W., MANTON K., STALLARD E. [1979] « The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality », *Demography*, 16, p. 439-454.

GHALANOS A., THEUSSL S. [2015] « Rsolnp : General Non-Linear Optimization », <https://cran.r-project.org/package=Rsolnp>

HYNDMAN R. [2023] « demography: Forecasting Mortality, Fertility, Migration and Population Data », <https://cran.r-project.org/package=demography>

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty}[(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

6. Annexes

Tab. 2 : Coefficients des modèles calibrés (1/3)

| Alpha | | | | | | | | |
|-------|---------------|------------------------|-----|---------------|------------------------|-----|---------------|------------------------|
| Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence | Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence | Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence |
| 0 | -5,6542 | -5,6553 | 36 | -7,0173 | -7,0186 | 72 | -4,0422 | -4,0456 |
| 1 | -7,3447 | -7,3457 | 37 | -6,9390 | -6,9396 | 73 | -3,9592 | -3,9625 |
| 2 | -8,2790 | -8,2804 | 38 | -6,8474 | -6,8480 | 74 | -3,8668 | -3,8713 |
| 3 | -8,6679 | -8,6695 | 39 | -6,7630 | -6,7633 | 75 | -3,7867 | -3,7882 |
| 4 | -8,9672 | -8,9721 | 40 | -6,6729 | -6,6733 | 76 | -3,6851 | -3,6862 |
| 5 | -9,0765 | -9,0803 | 41 | -6,5862 | -6,5867 | 77 | -3,5790 | -3,5803 |
| 6 | -9,1958 | -9,2028 | 42 | -6,4878 | -6,4880 | 78 | -3,4774 | -3,4791 |
| 7 | -9,2892 | -9,2924 | 43 | -6,3872 | -6,3877 | 79 | -3,3674 | -3,3679 |
| 8 | -9,4087 | -9,4124 | 44 | -6,2849 | -6,2854 | 80 | -3,2163 | -3,2216 |
| 9 | -9,3935 | -9,4009 | 45 | -6,1800 | -6,1803 | 81 | -3,0838 | -3,0881 |
| 10 | -9,4223 | -9,4329 | 46 | -6,0917 | -6,0922 | 82 | -2,9510 | -2,9556 |
| 11 | -9,3577 | -9,3662 | 47 | -5,9813 | -5,9817 | 83 | -2,8178 | -2,8236 |
| 12 | -9,2768 | -9,2809 | 48 | -5,8840 | -5,8845 | 84 | -2,6937 | -2,7014 |
| 13 | -9,1674 | -9,1742 | 49 | -5,7947 | -5,7952 | 85 | -2,5725 | -2,5850 |
| 14 | -8,9411 | -8,9443 | 50 | -5,7068 | -5,7077 | 86 | -2,4381 | -2,4498 |
| 15 | -8,6907 | -8,6949 | 51 | -5,6157 | -5,6166 | 87 | -2,3015 | -2,3126 |
| 16 | -8,4690 | -8,4721 | 52 | -5,5399 | -5,5411 | 88 | -2,1619 | -2,1733 |
| 17 | -8,2022 | -8,2047 | 53 | -5,4596 | -5,4605 | 89 | -2,0266 | -2,0390 |
| 18 | -7,9805 | -7,9814 | 54 | -5,3712 | -5,3722 | 90 | -1,8871 | -1,9001 |
| 19 | -7,7424 | -7,7441 | 55 | -5,2853 | -5,2866 | 91 | -1,7522 | -1,7651 |
| 20 | -7,6642 | -7,6654 | 56 | -5,2062 | -5,2078 | 92 | -1,6216 | -1,6351 |
| 21 | -7,6042 | -7,6051 | 57 | -5,1270 | -5,1289 | 93 | -1,4936 | -1,5072 |
| 22 | -7,5935 | -7,5952 | 58 | -5,0598 | -5,0611 | 94 | -1,3657 | -1,3777 |
| 23 | -7,5824 | -7,5837 | 59 | -4,9902 | -4,9925 | 95 | -1,2453 | -1,2594 |
| 24 | -7,5520 | -7,5540 | 60 | -4,9156 | -4,9178 | 96 | -1,1239 | -1,1367 |
| 25 | -7,5513 | -7,5531 | 61 | -4,8551 | -4,8570 | 97 | -1,0154 | -1,0262 |
| 26 | -7,5195 | -7,5211 | 62 | -4,7853 | -4,7877 | 98 | -0,9056 | -0,9177 |
| 27 | -7,4982 | -7,4995 | 63 | -4,7165 | -4,7182 | 99 | -0,8059 | -0,8166 |
| 28 | -7,4795 | -7,4816 | 64 | -4,6552 | -4,6571 | 100 | -0,7093 | -0,7208 |
| 29 | -7,4393 | -7,4409 | 65 | -4,5875 | -4,5894 | 101 | -0,6286 | -0,6345 |
| 30 | -7,3880 | -7,3899 | 66 | -4,5141 | -4,5163 | 102 | -0,5389 | -0,5481 |
| 31 | -7,3594 | -7,3607 | 67 | -4,4558 | -4,4580 | 103 | -0,4581 | -0,4679 |
| 32 | -7,3008 | -7,3012 | 68 | -4,3774 | -4,3802 | 104 | -0,4095 | -0,4185 |
| 33 | -7,2536 | -7,2544 | 69 | -4,2982 | -4,3005 | 105 | -0,4625 | -0,4652 |
| 34 | -7,1764 | -7,1771 | 70 | -4,2170 | -4,2209 | | | |
| 35 | -7,1106 | -7,1110 | 71 | -4,1381 | -4,1415 | | | |

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty}[(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

Tab. 3 : Coefficients des modèles calibrés (2/3)

| Beta | | | | | | | | |
|------|---------------|------------------------|-----|---------------|------------------------|-----|---------------|------------------------|
| Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence | Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence | Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence |
| 0 | 0,0033 | 0,0033 | 36 | 0,0120 | 0,0120 | 72 | 0,0070 | 0,0071 |
| 1 | 0,0115 | 0,0115 | 37 | 0,0115 | 0,0115 | 73 | 0,0070 | 0,0071 |
| 2 | 0,0114 | 0,0114 | 38 | 0,0123 | 0,0123 | 74 | 0,0075 | 0,0077 |
| 3 | 0,0118 | 0,0117 | 39 | 0,0119 | 0,0118 | 75 | 0,0090 | 0,0091 |
| 4 | 0,0130 | 0,0131 | 40 | 0,0129 | 0,0129 | 76 | 0,0094 | 0,0094 |
| 5 | 0,0121 | 0,0118 | 41 | 0,0134 | 0,0135 | 77 | 0,0097 | 0,0097 |
| 6 | 0,0097 | 0,0102 | 42 | 0,0140 | 0,0140 | 78 | 0,0096 | 0,0097 |
| 7 | 0,0145 | 0,0146 | 43 | 0,0137 | 0,0137 | 79 | 0,0099 | 0,0098 |
| 8 | 0,0119 | 0,0121 | 44 | 0,0135 | 0,0136 | 80 | 0,0136 | 0,0129 |
| 9 | 0,0126 | 0,0127 | 45 | 0,0132 | 0,0133 | 81 | 0,0139 | 0,0134 |
| 10 | 0,0144 | 0,0138 | 46 | 0,0136 | 0,0137 | 82 | 0,0141 | 0,0137 |
| 11 | 0,0114 | 0,0118 | 47 | 0,0128 | 0,0127 | 83 | 0,0142 | 0,0137 |
| 12 | 0,0165 | 0,0162 | 48 | 0,0122 | 0,0122 | 84 | 0,0115 | 0,0107 |
| 13 | 0,0143 | 0,0142 | 49 | 0,0108 | 0,0108 | 85 | 0,0083 | 0,0073 |
| 14 | 0,0151 | 0,0151 | 50 | 0,0106 | 0,0106 | 86 | 0,0065 | 0,0057 |
| 15 | 0,0155 | 0,0151 | 51 | 0,0099 | 0,0099 | 87 | 0,0059 | 0,0054 |
| 16 | 0,0180 | 0,0182 | 52 | 0,0093 | 0,0093 | 88 | 0,0056 | 0,0052 |
| 17 | 0,0171 | 0,0171 | 53 | 0,0093 | 0,0093 | 89 | 0,0057 | 0,0054 |
| 18 | 0,0185 | 0,0187 | 54 | 0,0095 | 0,0094 | 90 | 0,0051 | 0,0049 |
| 19 | 0,0183 | 0,0180 | 55 | 0,0093 | 0,0092 | 91 | 0,0049 | 0,0048 |
| 20 | 0,0170 | 0,0169 | 56 | 0,0082 | 0,0080 | 92 | 0,0044 | 0,0046 |
| 21 | 0,0158 | 0,0158 | 57 | 0,0082 | 0,0081 | 93 | 0,0039 | 0,0041 |
| 22 | 0,0146 | 0,0146 | 58 | 0,0067 | 0,0066 | 94 | 0,0026 | 0,0030 |
| 23 | 0,0156 | 0,0156 | 59 | 0,0061 | 0,0059 | 95 | 0,0023 | 0,0027 |
| 24 | 0,0132 | 0,0134 | 60 | 0,0050 | 0,0049 | 96 | 0,0016 | 0,0024 |
| 25 | 0,0126 | 0,0127 | 61 | 0,0042 | 0,0041 | 97 | 0,0008 | 0,0014 |
| 26 | 0,0113 | 0,0115 | 62 | 0,0039 | 0,0038 | 98 | -0,0005 | 0,0004 |
| 27 | 0,0111 | 0,0112 | 63 | 0,0040 | 0,0039 | 99 | -0,0013 | -0,0006 |
| 28 | 0,0107 | 0,0108 | 64 | 0,0042 | 0,0042 | 100 | -0,0002 | -0,0001 |
| 29 | 0,0088 | 0,0088 | 65 | 0,0038 | 0,0038 | 101 | 0,0018 | 0,0022 |
| 30 | 0,0103 | 0,0102 | 66 | 0,0046 | 0,0046 | 102 | 0,0044 | 0,0047 |
| 31 | 0,0111 | 0,0110 | 67 | 0,0050 | 0,0051 | 103 | 0,0046 | 0,0048 |
| 32 | 0,0107 | 0,0106 | 68 | 0,0047 | 0,0047 | 104 | 0,0046 | 0,0053 |
| 33 | 0,0105 | 0,0104 | 69 | 0,0059 | 0,0059 | 105 | 0,0046 | 0,0051 |
| 34 | 0,0106 | 0,0105 | 70 | 0,0055 | 0,0055 | | | |
| 35 | 0,0114 | 0,0113 | 71 | 0,0063 | 0,0064 | | | |

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{t;\infty} [(T_x)]$$

ressources-actuarielles.net

Tab. 4 : Coefficients des modèles calibrés (3/3)

| Kappa | | | | | |
|-------|---------------|------------------------|------|---------------|------------------------|
| Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence | Âge | Modèle étudié | Modèle LC de référence |
| 2000 | 24,4565 | 24,4761 | 2030 | -43,8008 | -43,8043 |
| 2001 | 24,4627 | 24,5265 | 2031 | -45,9908 | -45,9945 |
| 2002 | 21,2073 | 21,2070 | 2032 | -48,1809 | -48,1847 |
| 2003 | 18,4710 | 18,4083 | 2033 | -50,3709 | -50,3750 |
| 2004 | 10,9651 | 10,9513 | 2034 | -52,5610 | -52,5652 |
| 2005 | 9,4399 | 9,4231 | 2035 | -54,7510 | -54,7554 |
| 2006 | 6,0386 | 6,0366 | 2036 | -56,9410 | -56,9456 |
| 2007 | 3,1599 | 3,1578 | 2037 | -59,1311 | -59,1358 |
| 2008 | 1,4649 | 1,4631 | 2038 | -61,3211 | -61,3260 |
| 2009 | 1,6981 | 1,6984 | 2039 | -63,5112 | -63,5163 |
| 2010 | -1,1863 | -1,1865 | 2040 | -65,7012 | -65,7065 |
| 2011 | -4,7123 | -4,7140 | 2041 | -67,8912 | -67,8967 |
| 2012 | -6,6593 | -6,6691 | 2042 | -70,0813 | -70,0869 |
| 2013 | -8,5651 | -8,5639 | 2043 | -72,2713 | -72,2771 |
| 2014 | -12,6304 | -12,6243 | 2044 | -74,4614 | -74,4673 |
| 2015 | -9,8526 | -9,8338 | 2045 | -76,6514 | -76,6575 |
| 2016 | -13,5803 | -13,5743 | 2046 | -78,8414 | -78,8478 |
| 2017 | -15,8335 | -15,8386 | 2047 | -81,0315 | -81,0380 |
| 2018 | -15,6887 | -15,6650 | 2048 | -83,2215 | -83,2282 |
| 2019 | -16,4993 | -16,4493 | 2049 | -85,4116 | -85,4184 |
| 2020 | -16,1564 | -16,2296 | 2050 | -87,6016 | -87,6086 |
| 2021 | -24,0904 | -24,0924 | 2051 | -89,7916 | -89,7988 |
| 2022 | -26,2805 | -26,2826 | 2052 | -91,9817 | -91,9891 |
| 2023 | -28,4705 | -28,4728 | 2053 | -94,1717 | -94,1793 |
| 2024 | -30,6606 | -30,6630 | 2054 | -96,3618 | -96,3695 |
| 2025 | -32,8506 | -32,8532 | 2055 | -98,5518 | -98,5597 |
| 2026 | -35,0406 | -35,0435 | 2056 | -100,7418 | -100,7499 |
| 2027 | -37,2307 | -37,2337 | 2057 | -102,9319 | -102,9401 |
| 2028 | -39,4207 | -39,4239 | 2058 | -105,1219 | -105,1304 |
| 2029 | -41,6108 | -41,6141 | 2059 | -107,3120 | -107,3206 |
| | | | 2060 | -109,5020 | -109,5108 |