

# Sur l'utilisation des modèles multi-états pour la mesure et la gestion des risques d'un contrat d'assurance

Quentin GUIBERT

ISFA (Laboratoire SAF EA2429), Université de Lyon, Université Claude  
Bernard Lyon 1  
Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

7 Décembre 2015  
Soutenance de thèse - Lyon

Sous la direction de F. PLANCHET (ISFA)

# Plan

## 1 Introduction et motivations

## 2 Taux Incidence en dépendance

- Guibert, Q. et Planchet, F. (2014). Construction de lois d'expérience en présence d'évènements concurrents – Application à l'estimation des lois d'incidence d'un contrat dépendance. Publié au BFA.

## 3 Probabilité de transition en dépendance

- Guibert, Q. et Planchet, F. (2015). Non-Parametric Inference of Transition Probabilities Based on Aalen-Johansen Integral Estimators for Acyclic Multi-State Models : Application to LTC Insurance. À soumettre.

## 4 Assurance crédit

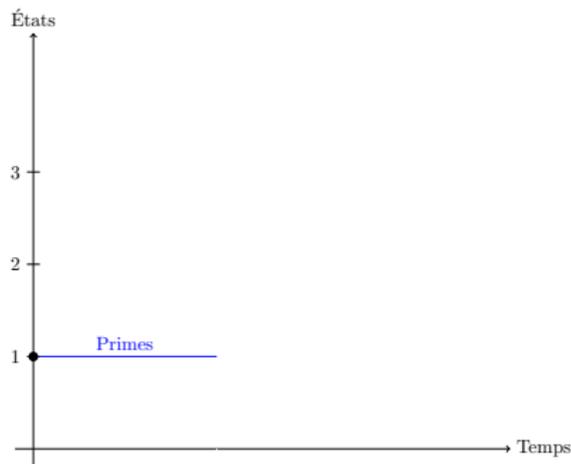
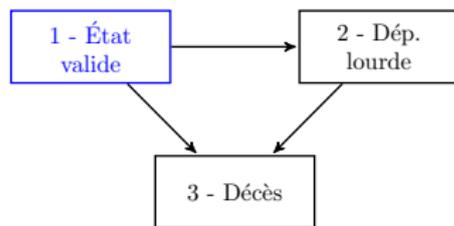
- Guibert, Q., Caja, A., et Planchet, F. (2015). Influence of Economic Factors on the Credit Rating Transitions and Defaults of Credit Insurance Business. Soumis à EUAJ. En cours de révision.

## 5 Bilan et Perspectives

## Garanties d'assurance de personnes

- ▶ Changement d'états  $\Rightarrow$  déclenchement de paiements
- ▶ Intersection entre les **clauses des contrats** et l'**état** de l'assuré.

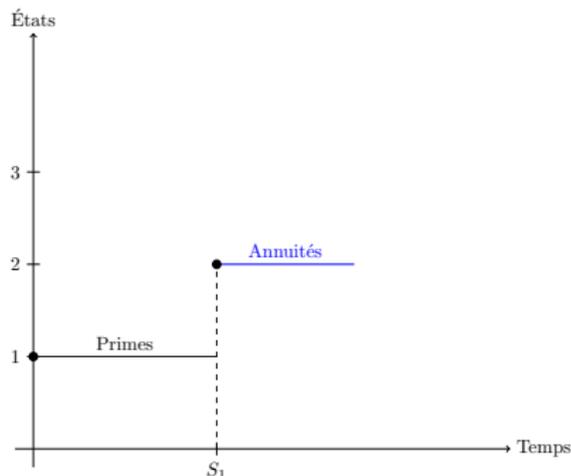
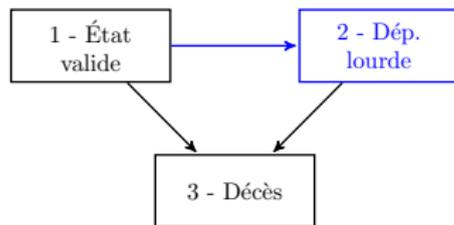
### Exemple d'une garantie de dépendance lourde



## Garanties d'assurance de personnes

- ▶ Changement d'états  $\Rightarrow$  déclenchement de paiements
- ▶ Intersection entre les **clauses des contrats** et l'**état** de l'assuré.

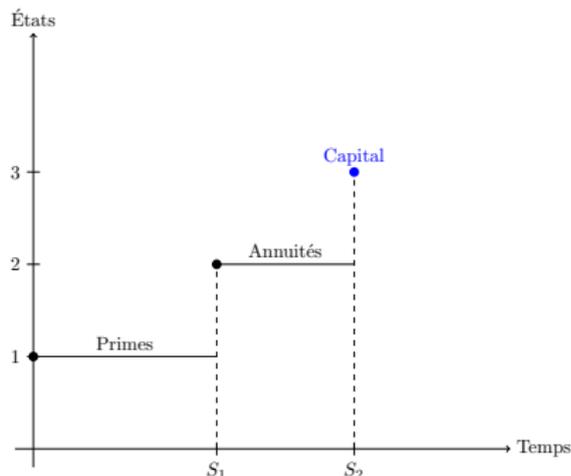
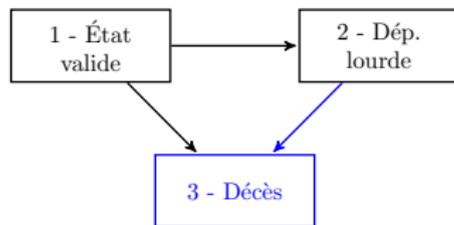
### Exemple d'une garantie de dépendance lourde



## Garanties d'assurance de personnes

- ▶ Changement d'états  $\Rightarrow$  déclenchement de paiements
- ▶ Intersection entre les **clauses des contrats** et l'**état** de l'assuré.

### Exemple d'une garantie de dépendance lourde



## Modèles multi-états

- ▶ Processus  $(X_t)_{t \geq 0} \equiv$  état courant de l'assuré au temps  $t \geq 0$ .
- ▶ **Cas Markov** : les états futurs ne dépendent que de l'état courant
  - ▶  $p_{hj}(s, t) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = h) \equiv$  Probabilité de transition  $h \rightarrow j$  ;
  - ▶  $\mu_{hj}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{hj}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \equiv$  Intensité de transition  $h \rightarrow j$ .
- ▶ Exemple : modèle de survie  $\equiv$  modèle à 2 états et 1 transition

$$p_{00}(0, t) = \exp \left\{ - \int_0^t \underbrace{\mu_{01}(u)}_{\text{fct. survie}} du \right\} = \underbrace{S(t)}_{\text{fct. survie}}$$

- ▶ **Cas semi-Markov** : dépend de l'état courant et de la durée  $U_t$  dans l'état
  - ▶  $p_{hj}(s, t, u, v) = \mathbb{P}(X_t = j, U_t \leq v \mid X_s = h, U_s = u) \equiv$  Probabilité de transition ;
  - ▶  $\mu_{hj}(t, u) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{hj}(t, t + \Delta t, u, \infty)}{\Delta t} \equiv$  Intensité de transition ;
  - ▶  $\bar{p}_{hh}(s, t, u) \equiv$  Probabilité de sortir de  $h$  et durée de maintien en  $s$  vaut  $u$ .

# Problématiques

## 1 Estimation de ces probabilités / intensités de transition ?

Contraintes de la réglementation Solvabilité II :

- ▶ Qualité des données ;
- ▶ Justesse et réalisme des hypothèses ;
- ▶ Hétérogénéité et incertitude ;
- ▶ Données internes à privilégier.

Intérêt des techniques non-paramétriques.

## 2 Quelle est leur dynamique et comment s'ajuste l'assureur en réponse ?

Hormis les risques de longévité, peu de données disponibles.

## Problématiques

### 1 Estimation de ces probabilités / intensités de transition ?

Contraintes de la réglementation Solvabilité II :

- ▶ Qualité des données ;
- ▶ Justesse et réalisme des hypothèses ;
- ▶ Hétérogénéité et incertitude ;
- ▶ Données internes à privilégier.

Intérêt des **techniques non-paramétriques**.

### 2 Quelle est leur dynamique et comment s'ajuste l'assureur en réponse ?

Hormis les risques de longévité, peu de données disponibles.

## Problématiques

### 1 Estimation de ces probabilités / intensités de transition ?

Contraintes de la réglementation Solvabilité II :

- ▶ Qualité des données ;
- ▶ Justesse et réalisme des hypothèses ;
- ▶ Hétérogénéité et incertitude ;
- ▶ Données internes à privilégier.

Intérêt des **techniques non-paramétriques**.

### 2 Quelle est leur dynamique et comment s'ajuste l'assureur en réponse ?

Hormis les risques de longévité, peu de données disponibles.

## Problématiques

### 1 Estimation de ces probabilités / intensités de transition ?

Contraintes de la réglementation Solvabilité II :

- ▶ Qualité des données ;
- ▶ Justesse et réalisme des hypothèses ;
- ▶ Hétérogénéité et incertitude ;
- ▶ Données internes à privilégier.

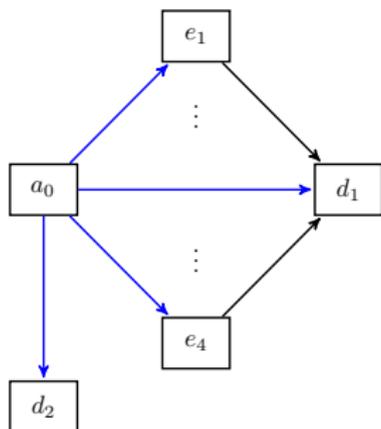
Intérêt des **techniques non-paramétriques**.

### 2 Quelle est leur dynamique et comment s'ajuste l'assureur en réponse ?

Hormis les risques de longévité, peu de données disponibles.

## Données d'assurance dépendance

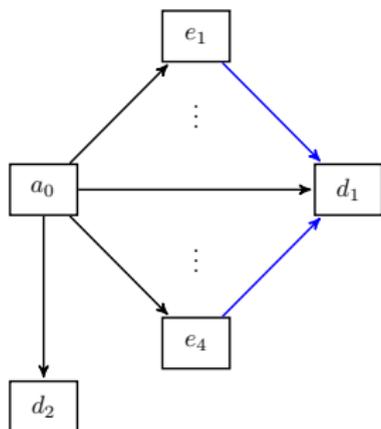
- ▶ Observations individuelles.
- ▶ Dépendance lourde.
- ▶  $\simeq 210\,000$  individus sur la période 1998-2010.
- ▶ Censure à droite indépendante.
- ▶ 4 types de pathologies et 2 causes de sortie directes.



	<b>Causes</b>	<b>%</b>
$e_1$	Pathologie neurologique	2.5%
$e_2$	Cancer en phase terminale	2.4%
$e_3$	Démence	5.4%
$e_4$	Autre pathologie	2.7%
$d_1$	Décès	52.2%
$d_2$	Résiliation	34.8%

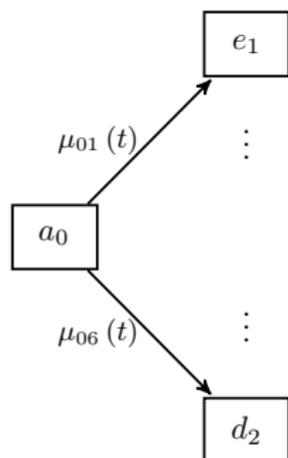
## Données d'assurance dépendance

- ▶ Observations individuelles.
- ▶ Dépendance lourde.
- ▶  $\simeq 210\,000$  individus sur la période 1998-2010.
- ▶ Censure à droite indépendante.
- ▶ 4 types de pathologies et 2 causes de sortie directes.



	<b>Causes</b>	<b>%</b>
$e_1$	Pathologie neurologique	2.5%
$e_2$	Cancer en phase terminale	2.4%
$e_3$	Démence	5.4%
$e_4$	Autre pathologie	2.7%
$d_1$	Décès	52.2%
$d_2$	Résiliation	34.8%

## Incidence en dépendance



- ▶ **Modèle à risques concurrents** :
  - ▶  $T \equiv$  durée de vie dans  $a_0$  ("bonne santé");
  - ▶  $V \equiv$  cause de sortie.
- ▶ Taux d'incidence annuel par cause

$$q_j(t) = \mathbb{P}(t < T \leq t+1, V = j | T > t).$$

- ▶  $C \equiv$  censure à droite indépendante

$$Y = \min(T, C) \text{ et } \gamma = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}}.$$

- ▶ Estimateur d'Aalen-Johansen (Andersen *et al.*, 1993)

$$\hat{q}_j(t) = \sum_{\{i: t < Y_i \leq t+1\}} \frac{\hat{S}(Y_i -)}{\hat{S}(t)} \frac{\gamma_i \mathbb{1}_{\{V_i=j\}}}{\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_k \geq Y_i\}}},$$

avec  $\hat{S}(t) \equiv$  estimateur de Kaplan-Meier.

## Pratique courante (approche marginale)

- ▶ Fondée sur les **durées de survie latentes**  $T_{0j}$  de loi de survie  $S_{0j}(t)$

$$T = \min_j (T_{0j}).$$

- ▶ Supposées indépendantes.
- ▶ Taux d'incidence annuels (marginaux) → estimateur de Kaplan-Meier

$$\hat{q}_j^*(t) = 1 - \frac{\hat{S}_j(t+1)}{\hat{S}_j(t)}.$$

- ▶ Deux sources de biais :
  - ▶  $\hat{q}_j^*(t) \neq \hat{q}_j(t)$  par définition ;
  - ▶ problème d'identifiabilité (Tsiatis, 1975) → indépendance non vérifiable.

## Pratique courante (approche marginale)

- ▶ Choix arbitraire pour donner la priorité à certaines causes.
- ▶ Ajustement selon l'ordre  $(j_1, \dots, j_n)$  :
  - ▶  $\check{q}_{j_1}(t) = \hat{q}_{j_1}^*(t)$  ;
  - ▶  $\check{q}_{j_2}(t) = \hat{q}_{j_2}^*(t) (1 - \hat{q}_{j_1}^*(t))$  ;
  - ▶ ...
  - ▶  $\check{q}_{j_n}(t) = \hat{q}_{j_n}^*(t) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t))$ .
- ▶ Encadrement des  $\check{q}_{j_i}(t)$  indépendant du choix retenu

$$b_j^-(t) = \hat{q}_j^*(t) \prod_{k \neq j} (1 - \hat{q}_k^*(t)) \leq \check{q}_{j_i}(t) \leq \hat{q}_j^*(t) = b_j^+(t).$$

## Pratique courante (approche marginale)

- ▶ Choix arbitraire pour donner la priorité à certaines causes.
- ▶ Ajustement selon l'ordre  $(j_1, \dots, j_n)$  :
  - ▶  $\check{q}_{j_1}(t) = \hat{q}_{j_1}^*(t)$  ;
  - ▶  $\check{q}_{j_2}(t) = \hat{q}_{j_2}^*(t) (1 - \hat{q}_{j_1}^*(t))$  ;
  - ▶ ...
  - ▶  $\check{q}_{j_n}(t) = \hat{q}_{j_n}^*(t) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t))$ .
- ▶ Encadrement des  $\check{q}_{j_i}(t)$  indépendant du choix retenu

$$b_j^-(t) = \hat{q}_j^*(t) \prod_{k \neq j} (1 - \hat{q}_k^*(t)) \leq \check{q}_{j_i}(t) \leq \hat{q}_j^*(t) = b_j^+(t).$$

## Pratique courante (approche marginale)

- ▶ Choix arbitraire pour donner la priorité à certaines causes.

- ▶ Ajustement selon l'ordre  $(j_1, \dots, j_n)$  :

- ▶  $\check{q}_{j_1}(t) = \hat{q}_{j_1}^*(t)$  ;

- ▶  $\check{q}_{j_2}(t) = \hat{q}_{j_2}^*(t) (1 - \hat{q}_{j_1}^*(t))$  ;

- ▶ ...

- ▶  $\check{q}_{j_n}(t) = \hat{q}_{j_n}^*(t) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t))$ .

- ▶ Encadrement des  $\check{q}_{j_i}(t)$  indépendant du choix retenu

$$b_j^-(t) = \hat{q}_j^*(t) \prod_{k \neq j} (1 - \hat{q}_k^*(t)) \leq \check{q}_{j_i}(t) \leq \hat{q}_j^*(t) = b_j^+(t).$$

## Pratique courante (approche marginale)

- ▶ Choix arbitraire pour donner la priorité à certaines causes.
- ▶ Ajustement selon l'ordre  $(j_1, \dots, j_n)$  :
  - ▶  $\check{q}_{j_1}(t) = \hat{q}_{j_1}^*(t)$  ;
  - ▶  $\check{q}_{j_2}(t) = \hat{q}_{j_2}^*(t) (1 - \hat{q}_{j_1}^*(t))$  ;
  - ▶ ...
  - ▶  $\check{q}_{j_n}(t) = \hat{q}_{j_n}^*(t) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t))$ .
- ▶ Encadrement des  $\check{q}_{j_i}(t)$  indépendant du choix retenu

$$b_j^-(t) = \hat{q}_j^*(t) \prod_{k \neq j} (1 - \hat{q}_k^*(t)) \leq \check{q}_{j_i}(t) \leq \hat{q}_j^*(t) = b_j^+(t).$$

## Pratique courante (approche marginale)

- ▶ Choix arbitraire pour donner la priorité à certaines causes.
- ▶ Ajustement selon l'ordre  $(j_1, \dots, j_n)$  :
  - ▶  $\check{q}_{j_1}(t) = \hat{q}_{j_1}^*(t)$  ;
  - ▶  $\check{q}_{j_2}(t) = \hat{q}_{j_2}^*(t) (1 - \hat{q}_{j_1}^*(t))$  ;
  - ▶ ...
  - ▶  $\check{q}_{j_n}(t) = \hat{q}_{j_n}^*(t) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t))$ .
- ▶ Encadrement des  $\check{q}_{j_i}(t)$  indépendant du choix retenu

$$b_j^-(t) = \hat{q}_j^*(t) \prod_{k \neq j} (1 - \hat{q}_k^*(t)) \leq \check{q}_{j_i}(t) \leq \hat{q}_j^*(t) = b_j^+(t).$$

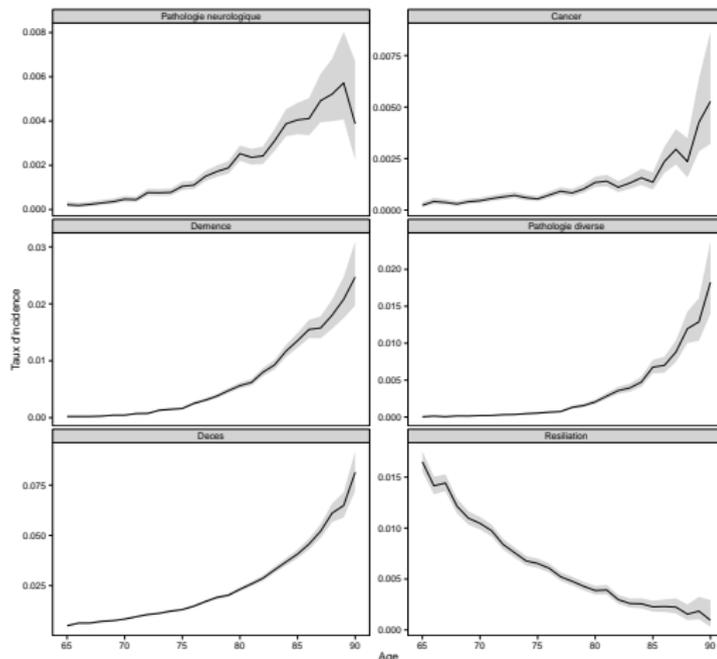
## Pratique courante (approche marginale)

- ▶ Choix arbitraire pour donner la priorité à certaines causes.
- ▶ Ajustement selon l'ordre  $(j_1, \dots, j_n)$  :
  - ▶  $\check{q}_{j_1}(t) = \hat{q}_{j_1}^*(t)$  ;
  - ▶  $\check{q}_{j_2}(t) = \hat{q}_{j_2}^*(t) (1 - \hat{q}_{j_1}^*(t))$  ;
  - ▶ ...
  - ▶  $\check{q}_{j_n}(t) = \hat{q}_{j_n}^*(t) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t))$ .
- ▶ Encadrement des  $\check{q}_j(t)$  indépendant du choix retenu

$$b_j^-(t) = \hat{q}_j^*(t) \prod_{k \neq j} (1 - \hat{q}_k^*(t)) \leq \check{q}_j(t) \leq \hat{q}_j^*(t) = b_j^+(t).$$

## Estimation des taux d'incidence bruts

- Estimateur d'Aalen-Johansen aux âges 65 – 90 ans et IC à 95 %.



- Régularisation des taux par [Whittaker-Henderson](#).

## Mesure du risque d'estimation

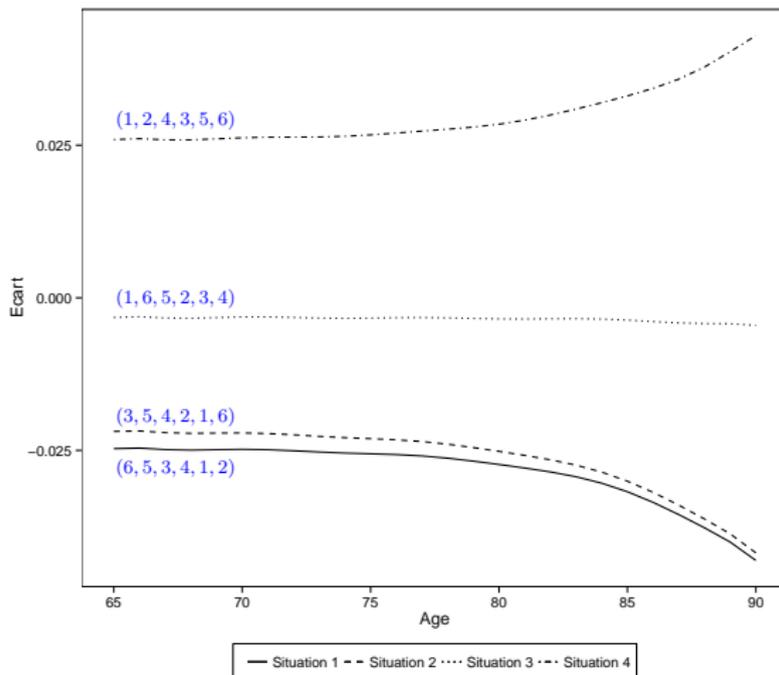
- ▶ Technique de *bootstrap* non-paramétrique (Efron, 1979, 1981).
- ▶ Coefficient de dispersion par âge

$$c(\psi_{jt}) = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^K (\tilde{q}_j^k(t) - \tilde{q}_j(t))^2}}{\tilde{q}_j(t)}$$

Causes	Moyenne de $c(\psi_{jt})$
Pathologie neurologique	6,01%
Cancer en phase terminale	7,94%
Démence	6,53%
Autre pathologie	12,12%
Décès	2,05%
Résiliation	3,76%

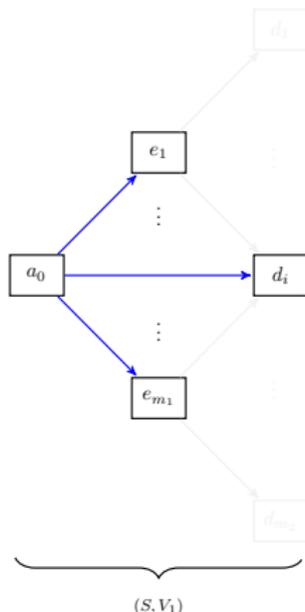
## Comparaison avec l'approche marginale

- ▶ Comparaison de 4 permutations.
- ▶ Provisions pour un 1 € en dépendance (actualisée à 4 %).



## Modèle multi-états acyclique

- Modèle  $(X_t)_{t \geq 0}$  avec **états intermédiaires**  $(e_1, \dots, e_{m_1})$  et des **états terminaux**  $(d_1, \dots, d_{m_2})$ .



Deux modèles à risques concurrents **imbriqués** :

- $S \equiv$  durée de vie en bonne santé

$$S = \inf \{t : X_t \neq a_0\} ;$$

- $V_1 \equiv$  cause de sortie de  $S$  ;

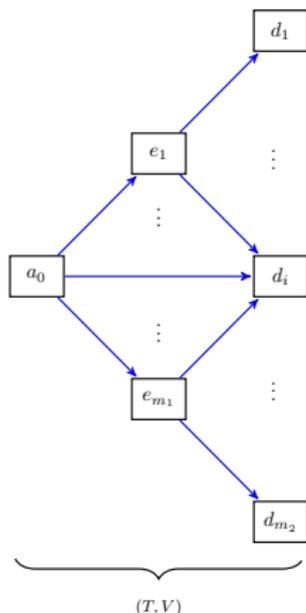
- $T \equiv$  durée de vie totale

$$T = \inf \{t : X_t \in \{d_1, \dots, d_{m_2}\}\} ;$$

- $V = (V_1, V_2)$  où  $V_2 \equiv$  cause de sortie de  $T$ .

## Modèle multi-états acyclique

- Modèle  $(X_t)_{t \geq 0}$  avec **états intermédiaires**  $(e_1, \dots, e_{m_1})$  et des **états terminaux**  $(d_1, \dots, d_{m_2})$ .



Deux modèles à risques concurrents **imbriqués** :

- $S \equiv$  durée de vie en bonne santé

$$S = \inf \{t : X_t \neq a_0\} ;$$

- $V_1 \equiv$  cause de sortie de  $S$  ;
- $T \equiv$  durée de vie totale

$$T = \inf \{t : X_t \in \{d_1, \dots, d_{m_2}\}\} ;$$

- $V = (V_1, V_2)$  où  $V_2 \equiv$  cause de sortie de  $T$ .

## Modèle à risques concurrents bivarié

- ▶  $(S, V_1, T, V_2) \equiv$  modèle à risques concurrents bivarié
- ▶ **Fonction d'incidence cumulée (CIF) jointe**

$$F^{(v)}(s, t) = \mathbb{P}(S \leq s, T \leq t, V = v), \quad s \leq t.$$

- ▶  $C \equiv$  censure à droite indépendante de  $(S, T, V)$  (H1)

$$\begin{cases} Y = \min(S, C) \text{ et } \gamma = \mathbb{1}_{\{S \leq C\}} \\ Z = \min(T, C) \text{ et } \delta = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}}. \end{cases}$$

### Estimateur non-paramétrique de la CIF (Cheng *et al.*, 2007)

- ▶  $(Y_i, \gamma_i, \gamma_i V_{1,i}, Z_i, \delta_i, \delta_i V_{2,i})_{1 \leq i \leq n}$  observations i.i.d.
- ▶ En ordonnant les valeurs de  $Z$ ,

$$\widehat{F}_n^{(v)}(y, z) = \sum_{i=1}^n W_{in} J_{[i:n]}^{(v)} \mathbb{1}_{\{Y_{[i:n]} \leq y, Z_{i:n} \leq z\}}, \quad W_{in} = \frac{\delta_{[i:n]}}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left( \frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{\delta_{[j:n]}}.$$

- ▶  $W_{in} \equiv$  **poids** de Kaplan-Meier et  $J_i^{(v)} = \mathbb{1}_{\{V_i = v\}}$ .
- ▶ Convergence p.s. vers  $F^{(v)}(\cdot)$  et asympt. normal.

## Intégrales d'Aalen-Johansen pour risques concurrents

- ▶  $\varphi \equiv$  fonction générique  $\rightarrow$  intégrales de la forme

$$S^{(v)}(\varphi) = \int \varphi dF_0^{(v)} \text{ avec } F_0^{(v)}(S \leq s, T \leq t, V = v, \mathbf{U} \leq \mathbf{u}).$$

- ▶  $T$  observée  $\Rightarrow S$  observée  
 $\rightarrow S$  peut être considérée comme **une covariable**.
- ▶ Autres **covariables** (discrètes)  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_p)$  telles que

$$\mathbb{P}(T \leq C \mid S, T, \mathbf{U}, V) = \mathbb{P}(T \leq C \mid T, \mathbf{U}, V) \quad (\text{H2}).$$

### Estimateur non-paramétrique

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) = \int \varphi(s, t) \widehat{F}_{0n}^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n W_{in}^{(v)} \varphi(Y_{[i:n]}, Z_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}),$$

avec  $W_{in}^{(v)} = W_{in} J_{[i:n]}^{(v)}$  et pour  $0 \leq s \leq t \leq \tau_Z$ ,

## Résultats de convergence

### Théorème (QG et Planchet (2015))

Supposons :

- ▶ (H1) et (H2) ;
- ▶  $F_0$  et  $G$ , la f.d.r. de  $C$ , sont continues ;
- ▶  $\varphi$  est une fonction  $F_0$ -intégrable ;
- ▶  $\text{supp}(Z) \subseteq \text{supp}(C)$ .

Alors, on a

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \longrightarrow S_\infty^{(v)}(\varphi) = \int \mathbb{1}_{\{t < \tau_Z\}} \varphi(s, t) F_0^{(v)}(ds, dt) \quad p.s.$$

- ▶ Hypothèse de Markov non nécessaire.

## Résultats de convergence

### Théorème (QG et Planchet (2015))

Supposons :

$$\blacktriangleright \int \frac{\varphi(S, T)^2 \delta}{(1 - G(T))^2} d\mathbb{P} < \infty \text{ (H3)} ;$$

$$\blacktriangleright \int |\varphi(S, T)| \sqrt{C_0(T)} \mathbb{1}_{\{T < \tau_Z\}} d\mathbb{P} < \infty \text{ (H4)} ;$$

$$\text{avec } C_0(x) = \int_0^{x-} \frac{G(dy)}{(1 - M(y))(1 - G(y))} \text{ et } M(z) = \mathbb{P}(Z \leq z).$$

On a avec les hypothèses précédentes

$$\sqrt{n} \left\{ \widehat{\mathcal{S}}_n(\varphi) - \mathcal{S}(\varphi) \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma(\varphi)).$$

- ▶ Étend les résultats de Suzukawa (2002).
- ▶ Fonctionne aussi avec **troncature à gauche** (indépendante) (Sánchez-Sellero *et al.*, 2005).

## Estimation directe des probabilités de transition

Exemple :

- ▶ Transition  $a_0 \rightarrow e$  sur  $[s, t]$  et y rester au moins une durée  $\eta$

$$p_{0e}(s, t, \eta) = \frac{\mathbb{P}(s < S \leq t - \eta, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S > s)}.$$

- ▶ *Survie dans l'état  $e$  sur  $[s, t]$*

$$p_{ee}(s, t) = \frac{\mathbb{P}(S \leq s, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, T > s, V_1 = e)}.$$

- ▶ *Transition  $e \rightarrow d$  après maintien  $\in ]\eta, \zeta]$  pour âge d'entrée  $\in ]s, t]$*

$$p_{ed}(s, t, \eta, \zeta) = \frac{\mathbb{P}(\eta < T - S \leq \zeta, s < S \leq t, V = (e, d))}{\mathbb{P}(T - S > \eta, s < S \leq t, V_1 = e)}.$$

## Estimation directe des probabilités de transition

Exemple :

- ▶ Transition  $a_0 \rightarrow e$  sur  $[s, t]$  et y rester au moins une durée  $\eta$

$$p_{0e}(s, t, \eta) = \frac{\mathbb{P}(s < S \leq t - \eta, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S > s)}.$$

- ▶ Survie dans l'état  $e$  sur  $[s, t]$

$$p_{ee}(s, t) = \frac{\mathbb{P}(S \leq s, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, T > s, V_1 = e)}.$$

- ▶ Transition  $e \rightarrow d$  après maintien  $\in ]\eta, \zeta]$  pour âge d'entrée  $\in ]s, t]$

$$p_{ed}(s, t, \eta, \zeta) = \frac{\mathbb{P}(\eta < T - S \leq \zeta, s < S \leq t, V = (e, d))}{\mathbb{P}(T - S > \eta, s < S \leq t, V_1 = e)}.$$

## Estimation directe des probabilités de transition

Exemple :

- ▶ Transition  $a_0 \rightarrow e$  sur  $[s, t]$  et y rester au moins une durée  $\eta$

$$p_{0e}(s, t, \eta) = \frac{\mathbb{P}(s < S \leq t - \eta, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S > s)}$$

- ▶ Survie dans l'état  $e$  sur  $[s, t]$

$$p_{ee}(s, t) = \frac{\mathbb{P}(S \leq s, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, T > s, V_1 = e)}$$

- ▶ Transition  $e \rightarrow d$  après maintien  $\in ]\eta, \zeta]$  pour âge d'entrée  $\in ]s, t]$

$$p_{ed}(s, t, \eta, \zeta) = \frac{\mathbb{P}(\eta < T - S \leq \zeta, s < S \leq t, V = (e, d))}{\mathbb{P}(T - S > \eta, s < S \leq t, V_1 = e)}$$

## Estimation directe des probabilités de transition

Exemple :

- ▶ Transition  $a_0 \rightarrow e$  sur  $[s, t]$  et y rester au moins une durée  $\eta$

$$p_{0e}(s, t, \eta) = \frac{\mathbb{P}(s < S \leq t - \eta, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S > s)}.$$

- ▶ Survie dans l'état  $e$  sur  $[s, t]$

$$p_{ee}(s, t) = \frac{\mathbb{P}(S \leq s, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, T > s, V_1 = e)}.$$

- ▶ Transition  $e \rightarrow d$  après maintien  $\in ]\eta, \zeta]$  pour âge d'entrée  $\in ]s, t]$

$$p_{ed}(s, t, \eta, \zeta) = \frac{\mathbb{P}(\eta < T - S \leq \zeta, s < S \leq t, V = (e, d))}{\mathbb{P}(T - S > \eta, s < S \leq t, V_1 = e)}.$$

S'expriment sous la forme

$$p(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{S(\varphi_1)}{S(\varphi_2)},$$

avec  $\varphi_1, \varphi_2$  des fonctions indicatrices de  $S$  et  $T$ .

## Estimation directe des probabilités de transition

Exemple :

- ▶ Transition  $a_0 \rightarrow e$  sur  $[s, t]$  et y rester au moins une durée  $\eta$

$$p_{0e}(s, t, \eta) = \frac{\mathbb{P}(s < S \leq t - \eta, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S > s)}.$$

- ▶ Survie dans l'état  $e$  sur  $[s, t]$

$$p_{ee}(s, t) = \frac{\mathbb{P}(S \leq s, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, T > s, V_1 = e)}.$$

- ▶ Transition  $e \rightarrow d$  après maintien  $\in ]\eta, \zeta]$  pour âge d'entrée  $\in ]s, t]$

$$p_{ed}(s, t, \eta, \zeta) = \frac{\mathbb{P}(\eta < T - S \leq \zeta, s < S \leq t, V = (e, d))}{\mathbb{P}(T - S > \eta, s < S \leq t, V_1 = e)}.$$

⇒ Estimateurs

$$\hat{p}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\hat{S}_n(\varphi_1)}{\hat{S}_n(\varphi_2)},$$

avec  $\varphi_1, \varphi_2$  des fonctions indicatrice de  $S$  et  $T$ .

## Estimation directe des probabilités de transition

Exemple :

- ▶ Transition  $a_0 \rightarrow e$  sur  $[s, t]$  et y rester au moins une durée  $\eta$

$$p_{0e}(s, t, \eta) = \frac{\mathbb{P}(s < S \leq t - \eta, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S > s)}.$$

- ▶ Survie dans l'état  $e$  sur  $[s, t]$

$$p_{ee}(s, t) = \frac{\mathbb{P}(S \leq s, T > t, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, T > s, V_1 = e)}.$$

- ▶ Transition  $e \rightarrow d$  après maintien  $\in ]\eta, \zeta]$  pour âge d'entrée  $\in ]s, t]$

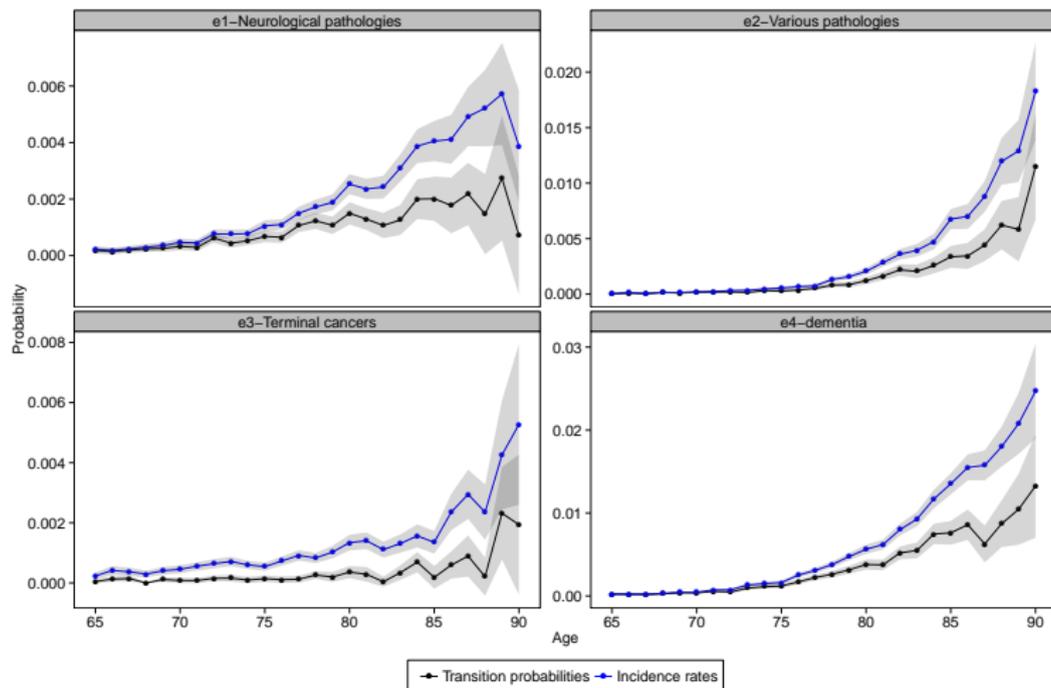
$$p_{ed}(s, t, \eta, \zeta) = \frac{\mathbb{P}(\eta < T - S \leq \zeta, s < S \leq t, V = (e, d))}{\mathbb{P}(T - S > \eta, s < S \leq t, V_1 = e)}.$$

### Proposition (QG et Planchet (2015))

- ▶  $\hat{p}(\varphi_1, \varphi_2)$  convergent p.s. et sont asympt. normaux.
- ▶ Étend les résultats de Meira-Machado *et al.* (2006).

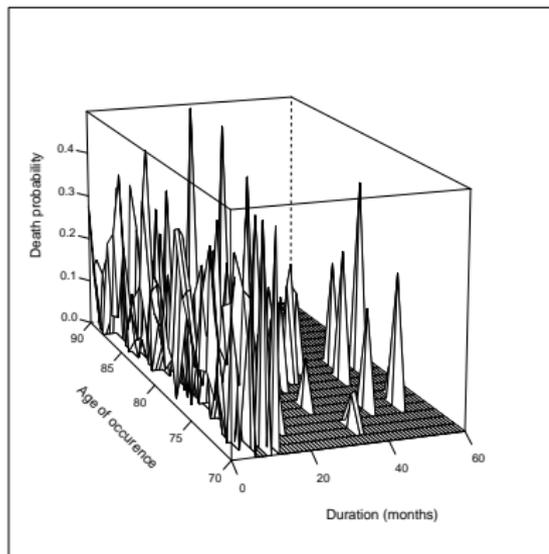
## Application à la dépendance

- ▶ Taux d'incidence vs.  $p_{0e}(s, s + 1 \text{ an}, 1 \text{ mois})$ .
- ▶ IC à 95 % par *bootstrap* avec 500 rééchantillonnages.

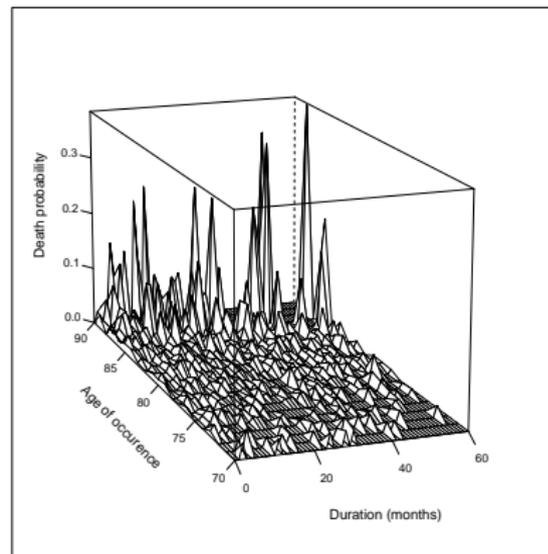


## Application à la dépendance

- Surface de taux de décès mensuels

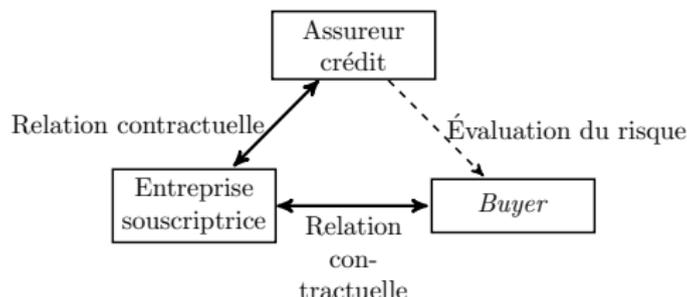


(a)  $e_3$ -Cancer en phase terminale



(b)  $e_4$ -Démence

## Assurance crédit



- ▶ Deux types de défaut (Caja, 2014) :
  - ▶ Défaut *protracted* ( $P$ ) ;
  - ▶ Défaut *insolvency* ( $I$ ).
- ▶ Capacité à **réduire ou annuler** la garantie lorsque le risque évolue.

### Données

- ▶ Trajectoires mensuelles de *ratings* (1 604 533 *buyers*).
- ▶ Période : Mars 2004 - Septembre 2012.
- ▶ Hétérogénéité en termes de taille et de secteur.

## Modèle de migration

- ▶  $X_i(t) \equiv$  *rating* du *buyer*  $i$ .
- ▶ Dépend de **facteurs**  $\mathbf{Z}(t)$  (chaîne de Markov **doublement stochastique**)

$$\mathbf{p}_k(\mathbf{Z}(t)) = (p_{hj,k}(t) = p_{hj,k}(\mathbf{Z}(t)))_{h,j \in \mathcal{R}}, \quad k = 1, \dots, K \text{ sous-groupes.}$$

- ▶ Nombre de transitions depuis le *rating*  $h$

$$N_{h,k}(t) = (N_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \sim \text{Multinomial} \left( L_{h,k}(t), (p_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \right).$$

$L_{h,k}(t) \equiv$  exposition au risque.

- ▶ Modèle de **régression ordinal** *logit*

$$\mathbb{P}(X_i(t+1) \leq j \mid X_i(t) = h, \mathbf{Z}(t)) = g \left( \mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right).$$

$\tilde{\mathbf{Z}} \equiv$  sous ensemble de facteurs macros.

- ▶ Ajout des **clôtures**  $C$  à la liste des *ratings* du modèle de migration.

## Modèle de migration

- ▶  $X_i(t) \equiv$  rating du buyer  $i$ .
- ▶ Dépend de facteurs  $\mathbf{Z}(t)$  (chaîne de Markov doublement stochastique)

$$\mathbf{p}_k(\mathbf{Z}(t)) = (p_{hj,k}(t) = p_{hj,k}(\mathbf{Z}(t)))_{h,j \in \mathcal{R}}, \quad k = 1, \dots, K \text{ sous-groupes.}$$

- ▶ Nombre de transitions depuis le rating  $h$

$$\mathbf{N}_{h,k}(t) = (N_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \sim \text{Multinomial} \left( L_{h,k}(t), (p_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \right).$$

$L_{h,k}(t) \equiv$  exposition au risque.

- ▶ Modèle de régression ordinal *logit*

$$\mathbb{P}(X_i(t+1) \leq j \mid X_i(t) = h, \mathbf{Z}(t)) = g \left( \mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right).$$

$\tilde{\mathbf{Z}} \equiv$  sous ensemble de facteurs macros.

- ▶ Ajout des clôtures  $\mathcal{C}$  à la liste des ratings du modèle de migration.

## Modèle de migration

- ▶  $X_i(t) \equiv$  *rating* du *buyer*  $i$ .
- ▶ Dépend de **facteurs**  $\mathbf{Z}(t)$  (chaîne de Markov **doublement stochastique**)

$$\mathbf{p}_k(\mathbf{Z}(t)) = (p_{hj,k}(t) = p_{hj,k}(\mathbf{Z}(t)))_{h,j \in \mathcal{R}}, \quad k = 1, \dots, K \text{ sous-groupes.}$$

- ▶ Nombre de transitions depuis le *rating*  $h$

$$N_{h,k}(t) = (N_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \sim \text{Multinomial} \left( L_{h,k}(t), (p_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \right).$$

$L_{h,k}(t) \equiv$  exposition au risque.

- ▶ Modèle de **régression ordinal** *logit*

$$\mathbb{P}(X_i(t+1) \leq j \mid X_i(t) = h, \mathbf{Z}(t)) = g \left( \mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right).$$

$\tilde{\mathbf{Z}} \equiv$  sous ensemble de facteurs macros.

- ▶ Ajout des **clôtures**  $\mathcal{C}$  à la liste des *ratings* du modèle de migration.

## Modèle de migration

- ▶  $X_i(t) \equiv$  rating du buyer  $i$ .
- ▶ Dépend de facteurs  $\mathbf{Z}(t)$  (chaîne de Markov doublement stochastique)

$$\mathbf{p}_k(\mathbf{Z}(t)) = (p_{hj,k}(t) = p_{hj,k}(\mathbf{Z}(t)))_{h,j \in \mathcal{R}}, \quad k = 1, \dots, K \text{ sous-groupes.}$$

- ▶ Nombre de transitions depuis le rating  $h$

$$N_{h,k}(t) = (N_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \sim \text{Multinomial} \left( L_{h,k}(t), (p_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \right).$$

$L_{h,k}(t) \equiv$  exposition au risque.

- ▶ Modèle de régression ordinal *logit*

$$\mathbb{P}(X_i(t+1) \leq j \mid X_i(t) = h, \mathbf{Z}(t)) = g \left( \mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right).$$

$\tilde{\mathbf{Z}} \equiv$  sous ensemble de facteurs macros.

- ▶ Ajout des clôtures  $C$  à la liste des ratings du modèle de migration.

## Lien avec les facteurs macros

- ▶ Modèle  $\text{VAR}(m)$  avec  $m \geq 1$

$$\mathbf{Z}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \mathbf{Z}(t-i) + \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \boldsymbol{\zeta}(t),$$

avec  $\boldsymbol{\zeta}(t) \equiv$  vecteur gaussien de variance-covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

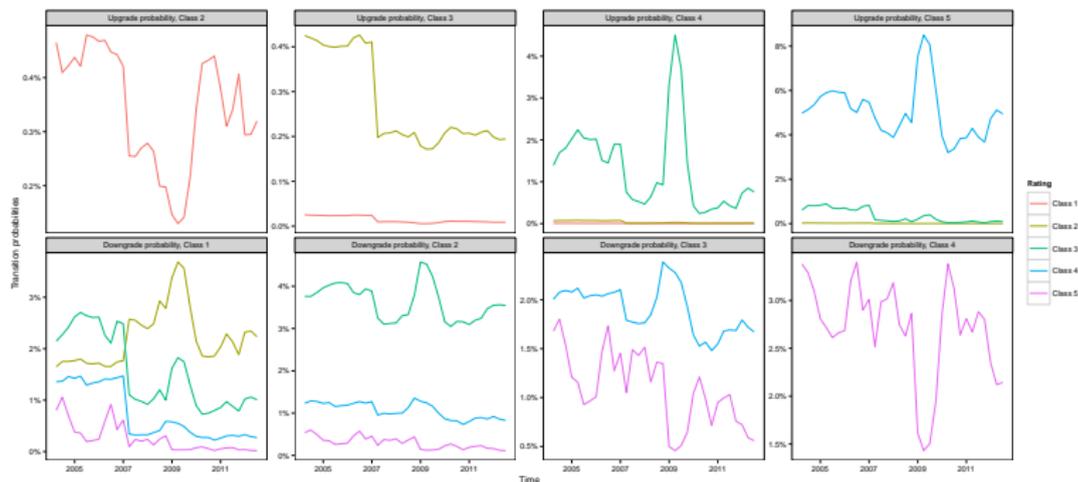
- ▶ Transformation en modèle  $\text{VECM}$   $\rightarrow$  stationnarité.
- ▶ Estimation sur  $(UR(t), \Delta CPI(t), GDP(t), IP(t), r(t), CAC(t), \sigma(t))$ .

Modèle retenu pour lien avec les migrations *via* 3 facteurs :

- ▶  $IP(t) - IP(t-4)$ ;
- ▶  $r(t)$ ;
- ▶  $\sigma(t)$ .

## Probabilités de transition estimée

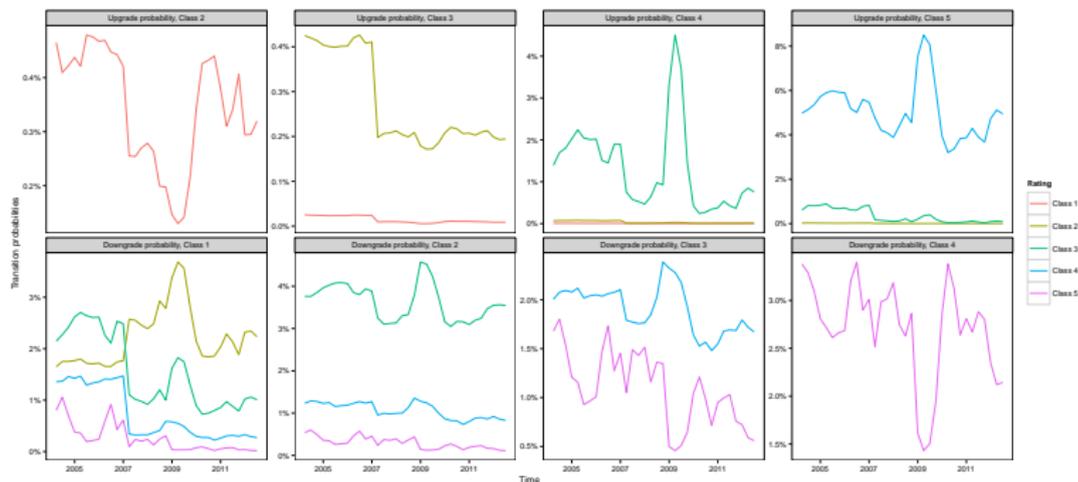
- Estimation des **probabilités de transition** trimestrielles.



- Problème : annulations créent un effet de sélection.  
Exemple : premier trimestre 2009.

## Probabilités de transition estimée

- Estimation des **probabilités de transition** trimestrielles.



- Problème : annulations créent un effet de sélection.  
Exemple : **premier trimestre 2009**.

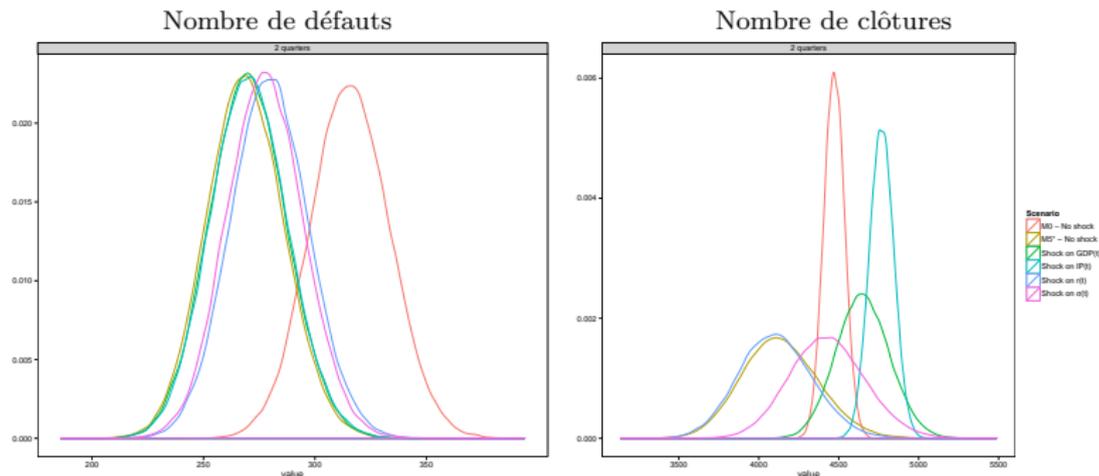
## Application à la gestion des risques

- ▶ Projection du **modèle de migration et** du modèle pour les **facteurs macros**.  
→ Nombres de transitions et de défauts.
- ▶ **Stress tests** utiles pour l'ORSA.
- ▶ Projection de 100 000 *buyers* pour  $T = 2, 4, 8, 12$  trimestres.
- ▶ Répartition population similaire à celle à fin Sept. 2012.
- ▶ 100 000 simulations.

## Application à la gestion des risques

- ▶ Chocs survenant durant le 1<sup>er</sup> trimestre :
  - ▶ choc de  $-2,58\sigma$  sur  $GDP(t)$  ;
  - ▶ choc de  $-2,58\sigma$  sur  $IP(t)$  ;
  - ▶ choc de  $+2,58\sigma$  sur  $r(t)$  ;
  - ▶ choc de  $+2,58\sigma$  sur  $\sigma(t)$ .

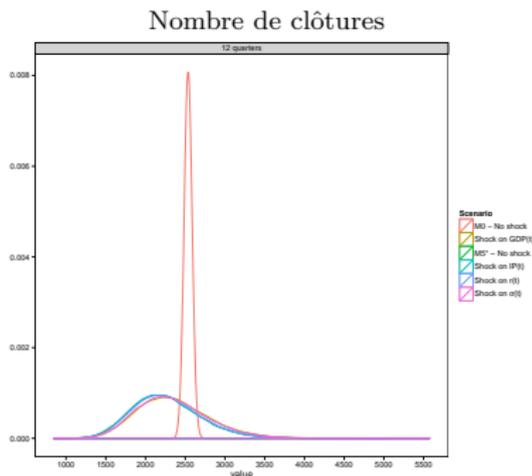
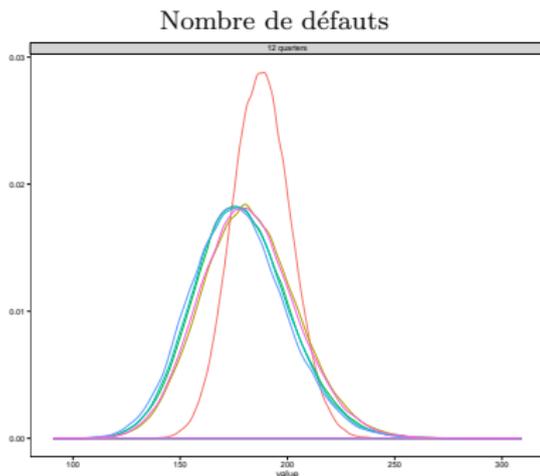
Après 2 trimestres



## Application à la gestion des risques

- ▶ Chocs survenant durant le 1<sup>er</sup> trimestre :
  - ▶ choc de  $-2,58\sigma$  sur  $GDP(t)$  ;
  - ▶ choc de  $-2,58\sigma$  sur  $IP(t)$  ;
  - ▶ choc de  $+2,58\sigma$  sur  $r(t)$  ;
  - ▶ choc de  $+2,58\sigma$  sur  $\sigma(t)$ .

Après 12 trimestres



## Bilan et perspectives

- ▶ Méthodologie non-paramétrique  
→ construction de lois d'incidence.
- ▶ Estimateurs généraux de probabilités de transition  
→ Résultats de convergence.
- ▶ Dynamique d'évolution de probabilités de migration  
→ Lien avec l'environnement macro, utile pour la gestion des risques.

## Perspectives travaux dépendance

- ▶ Applications pratiques (provisionnement et tarification) ;
- ▶ Modèles de régression et prise en compte de censure non-indépendante ;
- ▶ Analyse de performances (de Uña-Álvarez and Meira-Machado, 2015; Titman, 2015) ;
- ▶ Extension à d'autres modèles non-markoviens ;
- ▶ Petite population : performance du *bootstrap* (Beyersmann *et al.*, 2013).

## Bilan et perspectives

- ▶ Méthodologie non-paramétrique  
→ construction de lois d'incidence.
- ▶ Estimateurs généraux de probabilités de transition  
→ Résultats de convergence.
- ▶ Dynamique d'évolution de probabilités de migration  
→ Lien avec l'environnement macro, utile pour la gestion des risques.

### Perspectives travaux crédit

- ▶ Affiner les performances du modèle  
→ prise en compte de fragilités (hétérogénéité, dynamiques latentes)  
(Creal *et al.*, 2014)
- ▶ Effet de sélection des annulations  
→ nécessite une meilleure compréhension du comportement des gestionnaires.
- ▶ Modélisation de l'exposition au risque → perte de crédit.

## Quelques Références I

- Andersen, P. K., Borgan, O., Gill, R. D., and Keiding, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag New York Inc.
- Beyersmann, J., Termini, S. D., and Pauly, M. (2013). Weak Convergence of the Wild Bootstrap for the Aalen–Johansen Estimator of the Cumulative Incidence Function of a Competing Risk. *Scandinavian Journal of Statistics*, **40**(3), 387–402.
- Caja, A. (2014). *Contribution à la mesure des engagements et du besoin en capital pour un assureur crédit*. Ph.D. thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, Lyon.
- Cheng, Y., Fine, J. P., and Kosorok, M. R. (2007). Nonparametric Association Analysis of Bivariate Competing-Risks Data. *Journal of the American Statistical Association*, **102**(480), 1407–1415.
- Creal, D., Schwaab, B., Koopman, S. J., and Lucas, A. (2014). Observation-Driven Mixed-Measurement Dynamic Factor Models with an Application to Credit Risk. *Review of Economics and Statistics*, **96**(5), 898–915.
- de Uña-Álvarez, J. and Meira-Machado, L. (2015). Nonparametric estimation of transition probabilities in the non-Markov illness-death model : A comparative study. *Biometrics*.
- Efron, B. (1979). Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, **7**(1), 1–26.

## Quelques Références II

- Efron, B. (1981). Censored Data and the Bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, **76**(374), 312–319.
- Meira-Machado, L., de Uña-Álvarez, J., and Cadarso-Suárez, C. (2006). Nonparametric estimation of transition probabilities in a non-Markov illness–death model. *Lifetime Data Analysis*, **12**(3), 325–344.
- Sánchez-Sellero, C., Manteiga, W. G., and Van Keilegom, I. (2005). Uniform Representation of Product-Limit Integrals with Applications. *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**(4), 563–581.
- Suzukawa, A. (2002). Asymptotic properties of Aalen-Johansen integrals for competing risks data. *Journal of the Japan Statistical Society*, **32**, 77–93.
- Titman, A. (2015). Transition Probability Estimates for Non-Markov Multi-State Models. *Biometrics*.
- Tsiatis, A. (1975). A non identifiability aspect of the problem of competing risks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **72**(1), 20–22.