

# Sur l'utilisation des modèles multi-états pour la mesure et la gestion des risques d'un contrat d'assurance

## THÈSE

Numéro d'ordre 256 - 2015

présentée et soutenue publiquement le 07 Décembre 2015

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon I**  
(sciences de gestion)

par

Quentin GUIBERT

### Composition du jury

*Président :* Jean-Paul LAURENT, Professeur, Université Paris I

*Rapporteurs :* Michel DENUIT, Professeur, Université catholique de Louvain  
Olivier LOPEZ, Professeur, Université Paris VI

*Examineurs :* Ermanno PITACCO, Professeur, Università degli Studi di Trieste  
Frédéric PLANCHET, Professeur, Université Lyon I (directeur de thèse)  
Christian-Yann ROBERT, Professeur, Université Lyon I



## Remerciements

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse, Frédéric PLANCHET, pour m'avoir accordé sa confiance en acceptant de m'encadrer durant ces trois années de thèse. Il a progressivement guidé mes premiers pas en recherche et m'a fait bénéficier, avec grande pédagogie, de son expertise scientifique et technique. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour sa disponibilité sans faille, ses conseils fructueux et ses encouragements dans les moments plus délicats. Je souhaite également le remercier pour les enseignements prodigués au travers des multiples projets scientifiques, en lien ou non avec cette thèse, auxquels il m'a associé.

En second lieu, j'exprime toute ma gratitude envers Olivier LOPEZ pour me faire l'honneur de rapporter ma thèse. Les critiques judicieuses, qu'il m'a par ailleurs formulé concernant mes projets d'article, m'ont grandement aidé à en améliorer la qualité. Je remercie également avec sincérité Michel DENUIT d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Ma reconnaissance est aussi adressée à Jean-Paul LAURENT, Ermanno PITACCO et Christian-Yann ROBERT pour leur participation à mon jury. Les commentaires pertinents de Christian-Yann ROBERT m'ont notamment été utiles lors de la rédaction de mes articles.

Un grand merci à Stéphane LOISEL pour sa bienveillance, ses relectures critiques et pour m'avoir apporté conseil et assistance sur mes thématiques de recherche. J'ai eu grand plaisir à échanger et à collaborer avec lui lors de ses visites à l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution. Je lui suis aussi redevable de m'avoir activement associé aux travaux liés au projet LoLitA.

Mes remerciements s'adressent également à mes anciens collègues du Cabinet WINTER & Associés avec lesquels j'ai partagé ma première année de thèse. Merci notamment à Guillaume LEROY pour m'avoir accordé le soutien et la confiance nécessaire à l'établissement de celle-ci. Je ne peux oublier les échanges stimulants et les moments de convivialité partagés avec Aymric KAMEGA, Marc JUILLARD, Christophe SOULIÉ et Arnaud BURGER. Je leur dois, par leur expertise, leur probité et la qualité de leur encadrement, une bien meilleure compréhension du métier d'actuaire. Ils ont su aiguïser ma curiosité et m'ont donné, directement ou sans nécessairement le savoir, l'envie et la motivation requise pour poursuivre une activité de recherche. Je souhaiterais aussi remercier Marc JUILLARD pour les travaux de recherche que nous avons pu mener conjointement en amont de cette thèse.

Je remercie vivement les membres de la Direction des Études de l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution qui m'ont accueilli et soutenu à partir de ma seconde année de thèse. Merci à Olivier de BANDT, Dominique DURANT et Henri FRAISSE de m'avoir accordé les ressources suffisantes pour parvenir à l'achèvement de cette thèse. Je tiens à remercier tout particulièrement Fabrice BOREL-MATHURIN et Pierre-Emmanuel DARPEIX pour leur amitié, leurs conseils avisés et leurs encouragements permanents, puisqu'ils m'ont permis de surmonter les difficultés rencontrées. Surtout, je leur suis extrêmement reconnaissant pour leurs relectures, nombreuses et particulièrement soignées, ainsi que pour la flexibilité et la compréhension dont ils ont fait preuve pour me permettre d'aménager au mieux mes temps de recherche. Par ailleurs, les collaborations que nous avons conduites et les discussions passionnantes que nous avons pu avoir m'ont grandement apporté. Un merci particulier à Pierre VALADE pour ses conseils amicaux, les échanges enrichissants et la bonne humeur qu'il insufflait à chacun de ses passages dans nos bureaux. Les mots de remerciements vont ensuite aux autres membres (anciens et actuels) du service Macrorisk avec qui j'ai pu travaillé : Farida AZZI, Anne-Lise BONTEMPS-CHANEL, Laure FREY, Sarah GANDOLPHE, Gaël HAUTON, Jean-Cyprien HÉAM, Anne-Laure KAMINSKI, Claire LABONNE, Mathias LÉ, Frédéric MALGRAS, Santiago TAVO-

LARO, Sophie TRYHOEN, Cécile WELTER-NICOL, ...

Je tiens à remercier l'équipe de recherche du laboratoire SAF de l'Institut de science financières et d'assurances, ainsi que les collègues doctorants que j'ai eu le plaisir d'y croiser. Un grand merci à Anisa CAJA pour avoir accepté de m'inviter à travailler avec elle sur l'assurance crédit. Ce sujet fut très stimulant. Je souhaite remercier Alexandre BOUEMEZOUND (même s'il n'est pas du même laboratoire) pour les échanges intéressants sur les modèles multi-états. Merci enfin à Xavier MILHAUD, Yahia SALHI, Julien TOMAS et Julien VEDANI pour leurs conseils.

Je remercie chaleureusement ma famille, notamment mes parents et mon frère, ainsi que mes amis proches pour leurs encouragements. Un merci particulier à mes beaux-parents pour leur grande disponibilité. J'ai pu m'appuyer sur eux à de nombreuses reprises pour la gestion des impondérables. J'ai également une pensée affectueuse pour Anak et Maëlle qui ont eu la gentillesse de m'accueillir à de multiples reprises lors de mes venues sur Lyon. Mes remerciements vont également à Nathalie pour s'être si bien occupé de mon fils, Gabriel. Mes derniers mots de remerciement vont à mon épouse, Rarthana, pour son amour et son soutien constant, mais également pour la patience et la compréhension dont elle a fait preuve tout au long de cette thèse. Enfin, je dédie ma thèse à mon fils. Il m'a donné la force de continuer dans les moments difficiles.

*À mon fils, Gabriel*



## Résumé

### Sur l'utilisation des modèles multi-états pour la mesure et la gestion des risques d'un contrat d'assurance

---

La mise en place de Solvabilité II conduit les actuaires à s'interroger sur la bonne adéquation entre modèles et données. Aussi, cette thèse a pour objectif d'étudier plusieurs approches statistiques, souvent méconnues des praticiens, permettant l'utilisation de méthodes multi-états pour modéliser et gérer les risques individuels en assurance.

Le Chapitre 1 présente le contexte général de cette thèse et permet de faire positionner ses principales contributions. Nous abordons les concepts de base liés à l'utilisation de modèles multi-états en assurance et décrivons les techniques d'inférence classiques adaptées aux données rencontrées, qu'ils soient markoviens ou non-markoviens. Pour finir, nous présentons comment il est possible d'utiliser ces modèles pour la gestion des risques de crédit.

Le Chapitre 2 se concentre sur l'utilisation de méthodes d'inférence non-paramétriques pour la construction de lois d'incidence en assurance dépendance. Puisque plusieurs causes d'entrée sont susceptibles d'intervenir et d'intéresser les actuaires, nous nous concentrons sur une méthode utilisée pour l'estimation de modèles multi-états markoviens en temps continu. Nous comparons, dans un second temps, ces estimateurs à ceux utilisés classiquement par les praticiens tirés de l'analyse de survie. Cette seconde approche peut comporter des biais non négligeables car ne permettant pas d'appréhender correctement l'interaction possible entre les causes. En particulier, elle comprend une hypothèse d'indépendance ne pouvant être testée dans le cadre de modèles à risques concurrents. Notre approche consiste alors à mesurer l'erreur commise par les praticiens lors de la construction de lois d'incidence. Une application numérique est alors considérée sur la base des données d'un assureur dépendance.

Le Chapitre 3 est dédié aux développements d'estimateurs non-paramétriques adaptés à certains modèles multi-états acycliques, dont la définition est motivée par les applications en assurance dépendance. Nous nous plaçons dans un cadre où l'hypothèse Markov n'est pas satisfaite et proposons des estimateurs généraux permettant, entre autres, d'étudier les probabilités de transition entre états. Le type de modèles multi-états considéré revêt une structure particulière pouvant être vue comme deux modèles à risques concurrents imbriqués. Nos estimateurs prennent la forme d'intégrales d'Aalen-Johansen pour des modèles à risques concurrents. Ces quantités sont relativement proches d'intégrales Kaplan-Meier. Nous étudions dans ce chapitre leurs propriétés asymptotiques et mesurons leur performance à partir de données simulées. Le formalisme introduit permet d'appréhender des garanties d'assurance dépendance, caractérisées en pratique par des lois d'incidence et de maintien en dépendance par cause. Dans ce contexte, nous nous intéressons également à une mesure d'association, permettant de caractériser localement la dépendance entre la durée de survie en bonne santé et la durée de vie totale d'un individu par causes, reposant sur le cadre d'inférence statistique introduit auparavant. Une étude s'appuyant sur les données d'un assureur dépendance est finalement produite.

Le Chapitre 4 aborde l'utilisation de modèles multi-états pour l'estimation et la projection du nombre de défauts et de changements de notation pour les firmes couvertes en assurance crédit. Nous nous plaçons dans un cadre où les données sont observées en temps discret et correspondent aux évaluations de la qualité de crédit des firmes en portefeuille. Les liens entre les transitions d'un *rating* à l'autre et l'environnement économique sont analysés en s'appuyant sur des modèles linéaires généralisés. L'approche développée permet de mettre en place un modèle stochastique pour la projection de matrices de transition, dont les tendances résultent de l'évolution des facteurs macro-économiques. Puisque l'assureur crédit dispose d'une marge de manœuvre importante pour réguler les polices dont le risque se dégrade au cours du temps,

anticiper comment la qualité de son portefeuille se déforme dans le temps est primordial pour les gestionnaires. Enfin, ce chapitre se termine par une application numérique considérant les effets de chocs économiques sur le portefeuille assuré ainsi que sur les actions de gestion qui permettent de les absorber.

---

**Mots-clés:** Modèle multi-états, modèle à risques concurrents, estimation non-paramétrique, hypothèse de Markov, assurance dépendance, matrice de transition, *stress-tests*, assurance crédit.



## Abstract

### On the use of multi-state models to measure and manage the risks of an insurance contract

---

With the implementation of the Solvency II framework, actuaries should examine the good adequacy between models and data. This thesis aims to study several statistical approaches, often ignored by practitioners, enabling the use of multi-state methods to model and manage individual risks in insurance.

Chapter 1 presents the general context of this thesis and positions its main contributions. The basic tools to use multi-state models in insurance are introduced and classical inference techniques, adapted to insurance data with and without the Markov assumption, are presented. Finally, a development of these models for credit risk is outlined.

Chapter 2 focuses on using nonparametric inference methods to build incidence tables for long term care insurance contracts. Since there are several entry-causes in disability states which are useful for actuaries, an inference method for competing risks data, seen as a Markov multi-state model in continuous time, is used. In a second step, I compare these estimators to those conventionally used by practitioners, based on survival analysis methods. This second approach may involve significant bias because the interaction between entry-causes cannot be appropriately captured. In particular, these approaches assume that latent failure times are independent, while this hypothesis cannot be tested for competing risks data. Our approach allows to measure the error done by practitioners when they build incidence tables. Finally, a numerical application is considered on a long term care insurance dataset.

Chapter 3 is dedicated to the development of new nonparametric estimators for acyclic multi-state models motivated by insurance applications for long term care guarantees. I consider a framework where the Markov assumption is not satisfied and give general estimators to study in particular the transition probabilities between states. Multi-state models considered have a particular structure that can be seen as a bivariate competing risks model. Our estimators, in the form of Aalen-Johansen integrals for competing risk data are relatively close to the scope of Kaplan-Meier integrals. In this chapter, I study their asymptotic properties and measure their performance with simulated data. The introduced framework can be useful to estimate transition probabilities in long term care insurance. In this context, I am also interested in an association measure which locally characterizes the dependence between the lifetime in the healthy state and the overall lifetime per causes. A numerical application based on a real dataset is ultimately performed.

Chapter 4 is devoted to the use of multi-state models to estimate and project the number of defaults and rating changes for companies covered by credit insurance. I consider data from a credit scoring system, observed in discrete time, and study the links between the rating transitions and the economic environment with a generalized linear model. I set up a stochastic model for the migration matrices induced by trends related by macroeconomic factors. Since a credit insurer has a wide leeway to pilot the population of badly rated firms when the risk increases, anticipate the evolution of its credit quality is crucial for credit managers. Finally, the chapter ends with a numerical application dedicated to stress tests on the firm's portfolio as well as management actions that can absorb these stress events.

---

**Keywords:** Multi-state model, competing risks data, nonparametric estimation, Markov assumption, long term care insurance, transition matrix, stress tests, credit insurance.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Tables des matières</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Modèles multi-états en assurance et inférence statistique</b>	<b>17</b>
1.1 Processus multi-états en assurance . . . . .	18
1.2 Analyse de survie et modèle à risques concurrents . . . . .	32
1.3 Inférence statistique en dehors du cadre markovien . . . . .	38
1.4 Le suivi et la gestion des risques de crédit . . . . .	47
1.5 Annexes . . . . .	54
<b>Chapitre 2 Construction de lois d'expérience en présence d'événements concurrents</b>	<b>65</b>
2.1 Introduction . . . . .	66
2.2 Modélisation . . . . .	67
2.3 Estimation des taux d'incidence bruts . . . . .	70
2.4 Application numérique : construction des lois d'incidence en dépendance . . . . .	72
2.5 Conclusion . . . . .	83
2.6 Annexes . . . . .	83
<b>Chapitre 3 Inférence non-paramétrique des probabilités de transition</b>	<b>85</b>
3.1 Introduction . . . . .	86
3.2 Construction du modèle . . . . .	88
3.3 Estimation non-paramétrique, propriétés asymptotiques et exemples d'application	94
3.4 Résultats simulés sur les probabilités de transition . . . . .	102
3.5 Application à des données d'assurance dépendance . . . . .	107

3.6	Discussion . . . . .	112
3.7	Annexes . . . . .	113
<b>Chapitre 4 Influence des facteurs économiques sur l'évolution de la qualité de crédit</b>		<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	122
4.2	Présentation de l'assurance crédit . . . . .	125
4.3	Modèle de migration avec facteurs macroéconomiques . . . . .	127
4.4	Description des données . . . . .	133
4.5	Résultats empiriques . . . . .	142
4.6	Application à la gestion des risques . . . . .	159
4.7	Conclusion . . . . .	164
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>171</b>
<b>Table des figures</b>		<b>191</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>195</b>

# Introduction générale

## Les prémices de la gestion et de l'évaluation des risques biométriques

Les premières opérations connues s'apparentant à de la gestion de risques remonteraient à l'époque babylonienne antique. Environ 3 200 ans avant J.-C., un groupe social appelé *asipu* (Oppenheim, 1977), expert dans les rituels de "magie blanche", proposait des services de divination visant à éclairer la prise de décisions importantes, jugées délicates. Leurs pratiques, tout à fait inhabituelles à cette époque, permettaient de dispenser des conseils en analysant les dimensions d'un problème ainsi que les alternatives possibles. Pour chacune d'elle, des données étaient collectées afin d'envisager les issues possibles. Comme ils considéraient que l'issue finale de chaque alternative serait l'œuvre des dieux, les prêtres *asipu* recherchaient les signes divins dans les données collectées et rendaient leur décision au terme d'une analyse comparative des scénarios envisagés. Une démarche similaire était appliquée lorsqu'il s'agissait de déterminer la durée de vie d'un individu (Dupâquier, 1997), sur la base d'une croyance en l'existence de cycles d'années critiques de 7 ans pendant lesquelles le risque de décéder était beaucoup plus grand. Bien qu'elle ne contribue pas directement aux bases de l'analyse du risque moderne (cf. Covello et Mumpower, 1985; Bernstein, 1998, pour une synthèse historique), cette pratique est intéressante car elle constitue une première étape de la pensée humaine dans la construction d'un système de gestion des risques fondé sur des observations. Les réflexions quantitatives ont, par la suite, mis du temps à émerger. Pour autant, cela n'a pas empêché le développement d'approches alternatives pour se prémunir des risques ou en réduire l'impact. Les premiers dispositifs d'assurance maritime appelés "prêts à la grosse aventure" en sont une bonne illustration : pour financer le coût d'un voyage sur mer, un marchand, plutôt que d'exposer son propre capital, pouvait faire appel à un prêteur qui supportait les conséquences de la perte du navire ou de sa marchandise contre le paiement d'un intérêt considérable. Bien que ce système utilise un taux d'intérêt évalué de manière prudente, sans réelle considération de la durée du voyage et donc du risque associé, il se rapproche des systèmes d'assurance moderne puisque les prêteurs s'associaient généralement entre eux pour opérer une division du risque. Deux progrès scientifiques majeurs surviennent ensuite et conduisent aux approches modernes de la gestion des risques. Le premier résulte de l'avènement de la théorie des probabilités au XVIII<sup>e</sup> siècle grâce à Pascal. Le second progrès est associé entre le XVI<sup>e</sup> et le XVIII<sup>e</sup> siècle à la mise en place de méthodes pour établir les liens de causalité qui relient plusieurs événements. Les premiers travaux appliqués qui suivirent, relevant de l'épistémologie, ont été relativement lents à émerger à cause de l'absence de données pertinentes et d'outils statistiques appropriés. Le poids de la religion chrétienne et des superstitions n'est également pas à sous-estimer puisque ce type de raisonnement scientifique se heurtait à l'opinion commune de l'époque. En

effet, difficile d'admettre à l'époque qu'il était possible de représenter mathématiquement la durée de la vie humaine.

Historiquement, bien que de premières tables de conversion pour le paiement de rente aient existé à Rome, il est intéressant de noter, comme le rappelle Tomas (2013), que les premières tables de mortalité furent créées par un mercier anglais, John Graunt, aidé de son ami, le polymathe William Petty, en 1662, plutôt que directement par un mathématicien (Le Bras, 2000). En 1693, Edmond Halley construit la première table établie à partir de relevés démographiques, ceux de la ville de Breslau<sup>1</sup>, préalablement analysés par Caspar Neumann. Malgré ces développements, il faut attendre le XIX<sup>e</sup> siècle pour voir apparaître les premiers modèles mathématiques permettant d'estimer le risque de décès. L'approche paramétrique de Gompertz en 1825 puis celle Makeham en 1860, améliorant la précédente en prenant en compte les causes de décès accidentelles, comptent parmi les premiers travaux sur le sujet (p. ex. Planchet et Thérond, 2011, pour une description de ce modèle). Par la suite, les travaux de du Pasquier entre 1912 et 1913 (Haberman et Pitacco, 1998) ont permis de modéliser les risques d'invalidité et de morbidité à partir d'un schéma s'appuyant sur trois états de la vie humaine : "sain", "malade" ou "invalidé" et "décédé" ; le fameux *illness-death model* était né. Il fut le premier à faire intervenir des chaînes de Markov pour modéliser la trajectoire de vie d'un individu à travers plusieurs états, ce que l'on appelle un modèle multi-états. Cet outil, qui constitue encore aujourd'hui le cadre de base pour les aspects techniques en assurance de personnes, fut redécouvert avec l'introduction des modèles à risques concurrents par Neyman au début des années 50. Il est aujourd'hui très utilisé dans le domaine médical, en finance et en fiabilité.

Les avancées techniques concernant la construction de tables de mortalité se croisent dans l'histoire autour de 1870 avec le besoin des démographes de représenter la dynamique d'une population. Wilhelm Lexis décrit pour cela en 1875 la survenance d'événements (le décès ou l'incidence de la morbidité) dans un diagramme célèbre qui porte son nom. Ce système fournissait initialement une présentation en deux dimensions des âges d'une cohorte en fonction des dates de naissance puis a évolué par la suite sous une représentation plus moderne s'exprimant en termes de temps calendaire et d'âge, comme le décrit la Figure 1. Dans le premier

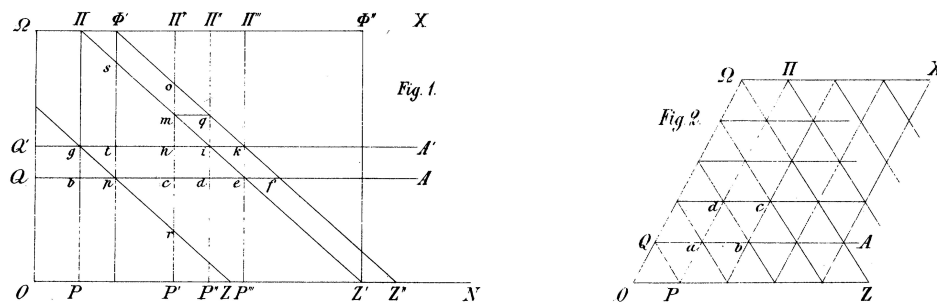


FIGURE 1 – Diagramme de Lexis original *cohorte-âge* (à gauche) et diagramme de Lexis *temps-âge* (à droite). Source : Keiding (1990), repris de l'article original de Lexis datant de 1875.

cas, la durée de vie d'un individu est représentée par un trait vertical se terminant au décès, tandis que dans le second cas, elle est matérialisée par une ligne faisant un angle de 60° avec

1. Actuellement Wrocław en Pologne.

---

l'axe des abscisses. Ces représentations font ressortir trois grandeurs d'intérêts : l'âge, le temps et la génération de départ. Comme le souligne Keiding (1990, 2006), elle s'adapte également à d'autres types de trajectoires de vie faisant intervenir des événements irréversibles (p. ex. les maladies chroniques) et peut intégrer d'avantage de dimensions temporelles. Le travail de Lexis a permis d'amorcer les premières réflexions en Allemagne sur le développement d'un cadre mathématique caractérisant les dynamiques de population au moyen du calcul différentiel. Le premier cadre formel apparaît avec la célèbre équation déterministe de Von Foerster (McKendrick, 1925; von Foerster, 1959) liant la densité de population, le taux de décès instantané et le taux de renouvellement de la population exprimés en fonction de l'âge et du temps. Décliné d'un point de vue statistique (en épidémiologie et en démographie), ce cadre mathématique requiert un suivi de cohorte et l'étude des événements de la vie des individus qui la composent.

## Les risques biométriques sont dynamiques et hétérogènes

L'étude des risques biométriques et de leurs évolutions intéresse au plus au point les pouvoirs publics, en charge du régime de protection sociale et des retraites, mais aussi les assureurs de personnes et les fonds de pensions, qui proposent des services s'adaptant à la configuration du dispositif public de chaque pays. L'enjeu est de taille puisqu'en Europe, la structure de la population changera sensiblement dans les prochaines décennies sous l'effet de son vieillissement, c'est-à-dire une augmentation progressive de la moyenne d'âge, (Commission Européenne et Comité de politique économique, 2014).

Deux mécanismes sont à l'œuvre et permettent d'expliquer cette tendance, bien qu'ils diffèrent en intensité selon les pays. La première contribution au vieillissement s'effectue par "le haut" et provient de l'allongement progressif de la durée de vie humaine. Ce phénomène progresse de manière relativement régulière (p. ex. Blanchet et Le Gallo, 2013) et est accentué par l'effet des cohortes comprises entre le fin de la Seconde Guerre Mondiale et les années 1960 (générations du *baby-boom*). Ces tendances sont bien connues des démographes et ont été diagnostiquées puis affinées depuis le début des années 1990 (p. ex. Robert-Bobée, 2006; Blanpain et Chardon, 2010; Vaupel, 2010).

La seconde contribution au vieillissement provient, d'autre part et comme l'illustre d'ailleurs l'équation de Von Foerster, de l'évolution des naissances (solde naturel) et du solde des flux migratoires qui viennent modifier la structure de la pyramide des âges. Ces deux sources d'accroissement de la population varient assez largement selon les pays et sont caractérisées par des dynamiques très incertaines. À titre d'exemple, la France apparaît, compte tenu de son solde migratoire et de sa fécondité élevée, comme relativement bien préservée par rapport à d'autres pays d'Europe (p. ex. Allemagne et Scandinavie), d'un vieillissement par "le bas" (Blanchet et Le Gallo, 2013).

L'adaptation des systèmes publics à ces évolutions constitue un enjeu crucial pour la bonne gestion des régimes de retraites, publiques et privés, ainsi que pour la pérennité du financement des frais de santé et des dépenses liées à la dépendance des personnes âgées. Pour l'assurance privée, la première contribution au vieillissement se traduit par des effets directs sur la couverture des risques, tandis que la seconde implique un suivi et une adaptation de l'offre de produits. L'actuaire apparaît à ce titre, aux côtés des économistes et des gérontologues (au sens large), comme un acteur important pour essayer de mieux appréhender ces différents changements. Le phénomène est cependant réellement complexe car la population générale

sur laquelle sont déduites ces tendances est fortement hétérogène (Vaupel *et al.*, 1979). Les ajustements successifs des tables de mortalité prospectives de place, comme en 2006, ou les réévaluations à la hausse de l'espérance de vie, par l'Insee<sup>2</sup> en 2010, illustrent cette complexité et la nécessité d'un suivi régulier. Si, comme le faisait Gompertz et Makeham en leur temps, on décompose les différentes mortalités en deux groupes (Carnes et Olshansky, 1997), avec d'un côté, les causes exogènes, résultant des interactions avec l'environnement et donc très sensibles aux modes de vie et aux politiques publiques et, de l'autre, les causes endogènes, provenant de mécanismes biologiques internes conduisant au décès, il apparaît que le recul de la mortalité observé au cours du XX<sup>e</sup> siècle provient très nettement du premier groupe, du fait des avancées des techniques médicales et des progrès sur l'hygiène. En effet, comme le souligne Vaupel (2010), les variabilités génétiques entre individus seraient peu explicatives, hormis aux grands-âges, pour expliquer ces tendances. Ainsi, en agissant sur les facteurs exogènes, des évolutions significatives ont pu être observées sur les causes de décès. En se référant par exemple à la revue fournie par Crimmins et Beltrán-Sánchez (2011), il est possible d'observer, depuis le début des années 1990, des baisses importantes de la contribution des maladies infectieuses au profit des maladies cardiovasculaires (notamment cardiaques) et des cancers, qui surviennent tous deux plus tardivement. Pour les maladies cardiovasculaires, les tendances américaines diffèrent entre les hommes (baisse globale entre 1980 et 1990) et les femmes (hausse entre 1950 et 1990 puis baisse ensuite). Le taux d'AVC, supérieur chez les hommes aux âges jeunes, devient plus important chez les femmes aux âges avancés. Pour le cancer de manière générale, les chiffres américains montrent peu de changements majeurs concernant l'incidence depuis 1950, alors même que l'espérance de vie des malades s'allonge.

Parmi les facteurs les plus fréquemment exhibés comme source d'hétérogénéité, on retient bien évidemment le sexe, la classe sociale et le niveau d'éducation qui se traduisent par des causes de décès et une exposition à l'incapacité différentes (p. ex. Cambois et Jusot, 2007; Menvielle *et al.*, 2007; Cambois *et al.*, 2008, en France). À titre d'exemple, on observe que les femmes survivent généralement aux hommes<sup>3</sup> et que les ouvriers présentent une espérance de vie plus faible ainsi que de problèmes de santé plus lourds. Toutefois, ce ne sont pas les seuls et d'autres aspects médicaux, sociaux ou encore environnementaux sont à l'œuvre (p. ex. la capacité d'accès aux soins et aux progrès techniques, l'hygiène de vie, l'alimentation, la pollution, les effets du changement climatique). À ce titre, l'étude américaine de Mimino (2010) révélait une situation inquiétante où l'espérance de vie générale observée au États-Unis entre 2007 et 2008 diminuait légèrement sous l'effet de certains facteurs environnementaux et comportementaux (pollution de l'air, tabagisme, obésité, etc.) touchant les catégories de population les plus fragiles. Les organismes et les chercheurs en assurance ont bien conscience de cette complexité puisque la sélection d'individus opérée lors de la souscription de contrats vise notamment à homogénéiser le groupe assuré (p. ex. Pitacco, 2004; Booth et Tickle, 2008; Kamega et Planchet, 2011; Barrieu *et al.*, 2012). À titre d'exemple, il est fréquent que ces effets de sélection conduisent à observer une mortalité différente selon que le contrat dispose d'une garantie en cas de vie ou d'une garantie en cas de décès. Aussi, il apparaît relativement normal d'observer des écarts plus ou moins significatifs entre la population assurée et la population nationale, toute la difficulté étant de pouvoir le détecter.

Ces variations au sein de la population ne se limitent pas à la mortalité, elles touchent

---

2. Institut National de la Statistique et des Études Économiques.

3. Des phases de stagnation de l'espérance de vie des femmes au Danemark ou aux Pays-Bas entre 1975 et 1995 dues au tabagisme sont cependant à noter.



---

l'ensemble des risques biométriques couverts en assurance de personnes. Le groupe des personnes âgées pose le plus de questions puisque c'est celui par lequel se produit l'évolution de la longévité mais également celui qui est le plus touché par le risque de morbidité. Comme le soulignent Berr *et al.* (2012), le vieillissement, qui résulte d'un déséquilibre entre la "dégradation" et la "réparation" de l'organisme, affecte différemment et dès le plus jeune âge les individus selon leur parcours de vie, ce qui se traduit par une qualité de vie différente à un âge avancé. Ainsi, de bonnes pratiques alimentaires, une bonne hygiène de vie<sup>4</sup> ou encore une participation active à la vie sociale auront un effet à la baisse sur les pathologies chroniques et le degré de fragilité des personnes âgées. L'action des politiques publiques (p. ex. les campagnes de dépistage et de vaccination), la cohésion familiale mais aussi le développement de la robotique et d'autres technologies d'assistance sont également des éléments à ne pas négliger. Globalement, il semblerait que le temps moyen passé en bonne santé chez les personnes âgées augmente dans les pays industrialisés (Salomon *et al.*, 2012). Cet effet, appelé compression de la morbidité (Fries, 1980), est délimité par le début d'une infirmité, d'un handicap, de la nécessité de soins médicaux, etc. et la date du décès. En France, par exemple, l'espérance de vie en bonne santé a cru de 2,7 ans pour les hommes contre 1,4 ans pour les femmes entre 1990 et 2010. Mais, de manière évidente, ces tendances agrégées varient fortement selon les pays, même en ne considérant que les pays industrialisés à faible taux de mortalité, et les experts ne reconnaissent pas tous l'existence d'une compression de la morbidité (Vaupel, 2010; Fries *et al.*, 2011) puisque le phénomène varie aussi selon les pathologies développées. Une altération de la mobilité n'est, en effet, pas la même chose qu'un dérèglement physiologique ou qu'une pathologie neurodégénérative.

La survie en bonne santé est donc un équilibre entre l'incidence d'une pathologie provoquant l'entrée en dépendance<sup>5</sup> (lorsque la personne âgée a besoin d'une assistance) et le décès. En considérant une espérance de vie en dépendance constante, Duée et Rébillard (2006) montrent qu'avec l'allongement général de la durée de vie, la population française devrait connaître une augmentation importante du nombre de dépendants de l'ordre de 50 % d'ici 2040. Face à l'importance du phénomène et en l'absence de dispositif public (à l'exception de l'allocation aux personnes âgées) les produits d'assurance dépendance sont appelés à se développer fortement (Plisson, 2009). À l'heure actuelle, peu de données permettent d'envisager l'évolution de ces phénomènes. Par conséquent, il convient, pour améliorer la gestion et l'assurabilité de ces risques, de porter une attention particulière à la qualité des données en phase de collecte, à la définition des garanties et à l'aménagement de leviers de gestion (p. ex. niveau des primes, réassurance).

## Solvabilité II et le rôle de l'actuaire

Un autre enjeu important en assurance provient de la réglementation prudentielle Solvabilité II (Parlement Européen et Conseil de l'Union Européenne, 2009, 2014). Alors qu'elle s'apprête à entrer en vigueur, ses principes de fonctionnement laissent, apparemment, une

---

4. Par exemple, les modes de prévention contre le tabagisme et l'obésité chez les enfants et des adolescents mais aussi les moyens plus directs de traiter ces problèmes.

5. Notons que la définition de la dépendance en France n'est pas équivalente au concept d'assurance *Long Term Care* dans les pays anglo-saxons. En France, elle se définit généralement comme la nécessité de recourir à une assistance pour l'accomplissement des actes de la vie quotidienne et concerne les personnes âgées. Dans les pays anglophones, cette notion recouvre également les aides attribuées aux handicapés, toutes classes d'âge confondues.

grande latitude pour la définition des hypothèses qui sous-tendent le calcul des provisions techniques. Il s'agit bien d'une flexibilité apparente, car pour se conformer à ces principes et au niveau de qualité attendu, sans même parler de modèle interne, les organismes d'assurance devront consentir un lourd investissement pour développer les processus internes dédiés à la construction des hypothèses techniques et à la validation des modèles (cf. articles 82 et 83 de la Directive). Dans ce contexte, l'actuaire prend officiellement une place de premier rang en tant que garant de la qualité technique. Bien que ses attributions ne soient pas complètement nouvelles, la mise en œuvre de la "fonction actuarielle" appelle le développement de normes et de standards permettant d'assurer la fiabilité et la pertinence des méthodes employées par la profession. Le changement le plus important résulte de l'abandon du principe de prudence (qui régissait jusqu'à maintenant les méthodes actuarielles) au profit d'une analyse quantitative poussée, visant à approcher au plus près les risques propres de l'entité. L'accent est donc mis sur la qualité et la pertinence des données ainsi que sur l'adéquation des modèles à celles-ci. De plus, l'actuaire devra être en mesure d'évaluer l'incertitude relative aux hypothèses utilisées et devra se positionner sur les modes de gestion qui permettent de mieux la contrôler.

Ces nouvelles contraintes proviennent du mode de comptabilisation des engagements introduits sous Solvabilité II. En effet, le cadre de valorisation des provisions techniques, inspiré des normes IFRS et similaire à celui retenu également pour l'autre grand référentiel prudentiel en Europe, le *Swiss Solvency Test* (ou SST) (cf. Holzmüller, 2009, pour une comparaison des différents dispositifs), se veut *market-consistent*. Cette logique économique<sup>6</sup> sous-tend toute la construction du bilan prudentiel, clé de voute de l'évaluation de l'exigence en capital pour le pilier 1 et l'analyse des risques dans le cadre de l'ORSA (*Own Risk Solvency Assessment*) pour le pilier 2 (Christiansen et Niemyer, 2014; Guibert *et al.*, 2014). Toutefois, si ce principe est relativement bien compris pour des actifs financiers investis<sup>7</sup>, il soulève un certain nombre de difficultés techniques en ce qui concerne les passifs d'assurance (p. ex. Denuit et Robert, 2007). En effet, l'absence de marché financier où seraient activement échangés des produits, dont les sous-jacents seraient des risques d'assurance, conduit à l'impossibilité de donner avec fiabilité un prix à ces risques<sup>8</sup>. En conséquence, la méthode de valorisation n'est pas unique<sup>9</sup> et la réglementation fait le choix d'une logique générale de valorisation dite *market-consistent*, bien explicitée dans l'ouvrage de Wüthrich et Merz (2013). Elle s'effectue en deux temps en distinguant, d'une part les risques couvrables (risques financiers), et d'autre part les risques non-couvrables (risques techniques). Dans la réglementation, cette représentation de la valeur des provisions techniques correspond à la meilleure estimation (*best estimate*) et à la marge

---

6. Plus précisément, la valeur des provisions techniques au passif correspond au montant qu'un organisme d'assurance ou de réassurance devrait payer s'il transférait sur le champ ses droits et obligations contractuels à un autre organisme, cf. article 76 de la Directive Solvabilité II.

7. Dans la plupart des cas, les actifs financiers sont évalués en valeur de marché, conformément à la norme IFRS 7. Une référence à un prix coté est retenue si le titre à évaluer est traité sur un marché suffisamment liquide, profond et transparent. Si ces conditions ne sont pas réunies, il convient d'utiliser le prix d'un actif similaire qui y satisferait. Une évaluation à partir d'un modèle est à envisager.

8. Malgré le développement, ces dernières années, de produits financiers comme les *swaps* de longévité, ceux-ci font généralement l'objet de transactions de gré à gré et dans des volumes insuffisants pour garantir la profondeur et la liquidité requise par les principes de Solvabilité II (p. ex. Barrieu *et al.*, 2012).

9. Il s'agit d'une problématique de valorisation en l'absence de marchés complets (non-unicité de la mesure risque-neutre), développée abondamment dans la littérature financière. À titre d'exemple, Balter et Pelsser (2015) tentent de donner une présentation générale dans leur introduction des différentes alternatives envisageables. En assurance, cette problématique peut être rapprochée de la littérature sur l'évaluation du bon niveau de la prime pour couvrir un risque donné (p. ex. Kaas *et al.*, 2009).

---

de risque<sup>10</sup>.

La première étape consiste à évaluer le "prix" d'une provision, en supposant que ces deux sources de risques sont indépendantes et que les risques techniques sont à coût nul<sup>11</sup>. Cette démarche se traduit dans la Directive par l'article 77, selon lequel le calcul de la provision *best estimate* est défini comme l'espérance des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs). Cette définition conduit à distinguer schématiquement deux classes de produits : ceux comportant des garanties et des options financières, comme les contrats d'épargne, et ceux qui, comme la plupart des produits d'assurance de personnes, n'en comportent pas (le risque de taux auquel ils sont exposés pouvant être évalué séparément). Pour les premiers, l'enjeu est principalement lié à l'évaluation du prix de risques financiers et ne sera pas discuté dans cet exposé. Le lecteur intéressé pourra néanmoins se reporter à Kemp (2009) ou à Vedani *et al.* (2014) pour une discussion sur les difficultés fondamentales que soulève la transposition à l'assurance du cadre utilisé en finance pour l'évaluation de produits dérivés. Pour le second type de contrat, le fait de considérer une aversion au risque nulle conduit à évaluer les risques techniques sans marge de prudence, c'est-à-dire comme une prime pure. La seconde étape, la *risk margin*, très normalisée dans sa définition, nous intéresse moins dans la suite de cet exposé et ne sera pas d'avantage discutée (p. ex. Möhr, 2011, pour une analyse de cette définition).

Ainsi, tout l'enjeu pour un contrat d'assurance de personnes, satisfaisant aux exigences de Solvabilité II, réside dans le choix des données et des techniques statistiques permettant d'exploiter celles-ci afin de traduire avec justesse les risques techniques qui sont réellement supportés. Les tables de mortalité et multi-états utilisées sont alors les premières visées. Dernièrement, les orientations techniques (Eiopa, 2015a), relatives aux Actes Délégués de Solvabilité II (Commission Européenne, 2015), ont apporté des précisions bienvenues quant aux responsabilités de la fonction actuarielle. Trois points sont en particulier à mettre en exergue eu égard à ces responsabilités : la qualité des données, la finesse de l'évaluation réalisée et les actions de gestion (*management actions*). Il apparaît alors que la recherche de précision dans la construction des hypothèses techniques doit s'effectuer avec discernement en veillant à un bon équilibre entre finesse de l'estimation et robustesse. Ce point incite à la mise en œuvre de processus de suivi de la donnée et de validation de la qualité des hypothèses retenues.

## La qualité des données

En introduisant des critères contraignants sur la qualité des données (exhaustivité, exactitude et pertinence de l'information), l'actuaire devra désormais adopter systématiquement une démarche critique lors de l'examen des biais et des méthodes d'estimation retenues pour la construction d'hypothèses statistiques. Puisque l'utilisation de données internes est privilégiée, la précision demandée par la réglementation nécessite une implication forte de la fonction actuarielle dans la mise en place et le suivi des collectes de données. Il s'agit en effet de garantir une bonne adéquation entre l'information recueillie et le phénomène modélisé. S'agissant des risques biométriques, ces nouvelles contraintes devraient conduire à rapprocher actuaires et

---

10. Solvabilité II autorise également une autre méthodologie pour déterminer les provisions techniques, appelé *technical provisions as a whole*. Cette dernière est d'application restrictive, dans la mesure où elle n'est utilisable que lorsque les flux futurs de trésorerie liés aux engagements peuvent être répliqués, de manière fiable, par des instruments financiers pour lesquels il existe une valeur de marché observable. En pratique, il semble que cette technique soit très peu applicable.

11. De manière équivalente, le déflateur stochastique ou fonction de distortion est égale à 1.

biostatisticiens lorsque ces derniers étudient les effets des biais de sélection (p. ex. choix de l'échantillon, gestion des *outliers*, censure) et des biais d'information (p. ex. subjectivité du médecin, différence de suivi, erreurs de mesure).

Si l'on cherche cependant à s'appuyer sur les données existantes, un assureur a pour l'heure accès à deux types de données pour la construction d'hypothèses biométriques :

- des données externes, généralement agrégées, issues soit de tables de référence (p. ex. en France les tables de mortalité prospectives de l'Insee, les lois de maintien du Bureau commun d'assurances collectives), soit de base de données collectées par des organisations nationales ou internationales (p. ex. les bases de l'Organisation Mondiale pour la Santé sur les causes de décès, les bases de données *Human Mortality Database*), soit des données transmises par un prestataire externe ou un réassureur ;
- des données internes, décrivant des trajectoires individuelles mais observées sur de plus courtes durées et devant répondre, au préalable, aux critères présentés *supra*.

Dans le premier cas, les statistiques nationales, reposant généralement sur des recensements, permettent de déduire une information sur les taux de mortalité d'un pays avec des tendances plus ou moins longues. Elles comprennent des informations sur le nombre de décès observés par âge entier et par année calendaire, ainsi que les niveaux d'exposition aux risques associés, construits selon certaines hypothèses de répartition des entrées et sorties de la cohorte dans l'année. Les données concernant d'autres aspects de la santé sont plus rares. Avec ces références, nous assistons ces dernières années à la multiplication des modèles de mortalité, notamment stochastiques, ce qui témoigne en particulier de la réelle difficulté d'appréhender les phénomènes observés. Partant des modèles classiques de type Lee-Carter (Lee et Carter, 1992) pour les taux de hasard ou Cairns-Blake-Dowd (Cairns *et al.*, 2006) pour les probabilités de décès, de nombreux développements visent à intégrer des caractéristiques spécifiques observées sur les taux de mortalité de populations nationales (p. ex. la mortalité des jeunes ou des grands âges, différents effets cohortes et les catastrophes) pour lesquels il n'est pas toujours simple de juger s'il s'agit d'effets plausibles d'un point de vue démographique ou bien s'ils résultent simplement d'effets provenant de facteurs latents et propres à l'échantillon sélectionné. On pourra se reporter à Booth et Tickle (2008) pour une revue de ces modèles ou à Barrieu *et al.* (2012) pour une présentation plus synthétique. Malgré cette forte émulation, Cairns *et al.* (2014) remarquent que la question de la qualité des données n'est pas triviale et que les conventions retenues pour élaborer les taux de mortalité ou les intensités de mortalité, variables de base pour l'immense majorité des modèles de mortalité des assureurs (afin d'évaluer les provisions techniques et la tarification), peuvent présenter des biais dont les effets sont significatifs. En effet, avec les données issues de recensements en Angleterre et au Pays de Galles, ces auteurs décrivent plusieurs sources de biais venant affecter le calcul de l'exposition aux risques par âge. Ces biais proviennent du mode de collecte, d'une mauvaise prise en compte des naissances (ou des nouvelles entrées dans la population) et des conventions de découpage de l'exposition par âge et par date de naissance entiers. Ces erreurs sont d'autant plus importantes qu'elles se propagent au fil du temps. Cela souligne, en particulier, que le rythme des nouvelles entrées dans une population peut indirectement jouer un rôle sur les quantités utilisées pour décrire l'évolution de la mortalité. Ce type de difficulté, identifié depuis assez longtemps déjà pour les études de cohorte (Keiding, 1990, 1991; Lund, 2000; Alho et Spencer, 2005), n'était pas nécessairement bien appréhendé par les actuaires jusqu'à présent. Cela devrait pousser les praticiens à porter une attention particulière à la fiabilité et à la pertinence des données externes recueillies. Il est donc important de retenir

---

des indicateurs (ici des probabilités de décès ou de transition) suffisamment robustes et de vérifier le caractère approprié des procédures d'estimation et de contrôle mises en œuvre. De la même manière, des indicateurs comme l'espérance de vie ou la prévalence de certaines maladies devront être estimés avec le même soin lorsqu'ils permettent par exemple de positionner un jugement d'expert.

La construction d'hypothèses prospectives est délicate si elle ne repose que sur des données internes. La difficulté ne vient pas uniquement d'un besoin des praticiens d'être sensibilisé aux techniques de construction de telles lois (cf. Hunt et Blake, 2014, pour un exemple de procédure d'estimation générale) mais plutôt du fait que l'historique des assureurs pour l'étude de la longévité dépasse rarement une quinzaine d'années, alors que les bases nationales peuvent s'étendre sur un ou deux siècles. Pour des risques comme la dépendance, fortement évolutifs, ces historiques internes peuvent être encore plus courts et les données peuvent être entachées de changements de définitions des garanties, des grilles d'évaluation ou de la politique de sélection des médecins conseils des organismes. Dans ce contexte et puisqu'il est nécessaire d'adapter les hypothèses biométriques à la population assurée, les praticiens se tournent prioritairement vers des approches pragmatiques de positionnement (Ahcan *et al.*, 2014; Tomas et Planchet, 2014), permettant d'intégrer dans une large mesure leurs données propres pour la construction et la validation des hypothèses actuarielles. L'Institut des Actuariers français fournit par exemple un certain nombre de méthodes pour la construction, le positionnement et la validation de modèles de mortalité prospectifs<sup>12</sup>. Cependant, il existe très peu de tables multi-états faisant office de standard de place (p. ex. en France, les lois du Bureau commun des assurances collectives sont les seules disponibles en arrêt de travail, bien qu'elles soient agrégées, et aucune loi n'existe pour la dépendance) permettant d'appuyer l'expert s'il souhaite utiliser une logique de positionnement. Ce manque d'information sur les données est pour l'instant très préjudiciable à la mise en œuvre de modèles prospectifs et explique leur absence pour l'arrêt de travail ou la dépendance dans la littérature appliquée. Nous notons néanmoins quelques exceptions. Christiansen *et al.* (2012) introduisent une logique prospective pour un modèle d'assurance arrêt de travail à 3 états et 4 transitions s'appuyant sur des données de référence allemandes. Ils utilisent pour cela la méthode non-paramétrique de Hyndman et Ullah (2007) pour chaque transition prise séparément. Ils négligent cependant la durée d'invalidité dans un premier temps, mais certains de ces auteurs intègrent son effet dans une autre étude (Christiansen *et al.*, 2015). Levantesi et Menzietti (2012) développent, sur la base de données nationales italiennes, un modèle prospectif à 3 états et 3 transitions (sans retour) pour l'assurance dépendance, comprenant une extrapolation individuelle des taux de transition observés à partir de modèles de mortalité classiques. Les probabilités de transition envisagées ne prennent toutefois pas en compte la durée passée en dépendance. Aro *et al.* (2015) approchent les lois de transition d'un modèle d'arrêt de travail en utilisant des régressions binomiales selon trois dimensions temporelles sur les données d'un assureur suédois. Ces différentes contributions semblent néanmoins difficile à décliner pour une mise en œuvre opérationnelle sous Solvabilité II puisque, d'une part, les périodes d'observation considérées, notamment pour la dépendance, demeurent relativement courtes et, d'autre part, les questions relatives à l'hétérogénéité des données sous-jacentes, *a priori* non négligeable pour ce type de risque, et aux causes d'entrée en dépendance ou en invalidité ne sont pas traitées. Plus généralement, une limite fondamentale des modèles construits à partir de données agrégées provient du fait qu'ils s'appuient sur l'hypothèse d'une certaine régularité des tendances obser-

---

12. cf. <http://www.ressources-actuarielles.net/gtmortalite>.

vées dans le passé pour extrapoler les évolutions futures. Bien que ce formalisme se rapproche de celui utilisé dans le cadre de modèles dits à forme réduite en économétrie<sup>13</sup>, il reste ici très descriptif, se limitant à une relation entre l'âge, l'année de naissance et l'année courante. Il est donc difficile, voire impossible, de prévoir comment les tendances projetées peuvent se déformer, puisque les données utilisées ne permettent pas de remonter aux mécanismes qui ont spécifiquement généré ces tendances. Dans ce contexte, la mise en œuvre de chantiers importants touchant à l'appropriation des données que les assureurs seraient en mesure de collecter, apparaît aujourd'hui comme un point positif pour suivre et si possible anticiper ces évolutions. De ce point de vue, la mise en œuvre de pratiques de place et de dispositifs d'aide à la collecte par les organismes professionnels pourrait constituer une première piste pour permettre aux praticiens de mieux appréhender ces nouvelles exigences.

En outre, il est courant de recourir au jugement d'expert lorsque les données sont peu fournies ou bien pour prendre en compte des anticipations épidémiologiques, démographiques ou environnementales non observées dans les données. À titre d'exemple, l'avis d'expert intervient fréquemment dans le choix d'une référence externe de mortalité pour effectuer le positionnement précédemment évoqué. Comme le rappellent toutefois Booth et Tickle (2008) et Kamega et Planchet (2011), la gestion de ces avis est relativement complexe à opérer, compte tenu des divergences possibles entre experts et des moyens à mettre en œuvre pour contrôler la pertinence de leurs anticipations. Si l'on omet les aspects relatifs à la gouvernance des experts, les textes (Eiopa, 2015b) imposent des principes de validation du jugement d'expert, nécessitant, pour la fonction actuarielle, un suivi continu des données.

## Hétérogénéité des hypothèses

Puisque la population générale présente des risques biométriques très hétérogènes, les assureurs ne peuvent se passer d'études mesurant les effets produits sur la population assurée. En principe, projeter une population non-homogène à partir d'une hypothèse globale, par exemple pour la mortalité, conduit à constater des écarts techniques futurs si les tendances d'évolution de chaque sous-population s'écartent fortement l'une de l'autre. En effet, les individus pour lesquels le risque de décès est le plus élevé deviendront moins nombreux au fil du temps, faisant ressortir à long terme les sous-populations ayant un risque de sortie plus faible. L'effet est encore plus significatif et difficile à cerner dans un cadre multi-états, comme en arrêt de travail où les probabilités de transition peuvent être nettement plus importantes que des probabilités de décès (Rogers, 1992). D'un autre côté, les mécanismes de sélection à l'entrée (p. ex. politique de souscription orientée vers certains clients, questionnaire médical) et les clauses de contrats peuvent apparaître comme des mécanismes favorisant l'homogénéisation de la population assurée. Aussi, la nécessité d'intégrer ou non l'hétérogénéité d'un portefeuille aux modèles se discute au cas par cas, en fonction de la réelle significativité du problème sur les engagements, conformément au principe dit de proportionnalité.

Toutefois, lorsqu'elle doit être considérée, une première limitation apparaît avec le faible nombre de travaux réalisés jusqu'à présent sur cette thématique. Comme le remarquent Börgen *et al.* (2014), cette absence dans la littérature conduit à rendre inadaptés bon nombre de

---

13. Comme le rappellent Arnold-Gaille et Sherris (2013), il n'existe pas de modèle pour décrire théoriquement les relations entre l'évolution de la longévité et ces causes potentielles, comme c'est le cas en macroéconomie où bien souvent les grands indicateurs agrégés peuvent être reliés entre eux ou grâce à des variables latentes par le biais de modèles économiques.

---

solutions considérées dans la littérature pour le risque de longévité<sup>14</sup>. Une possibilité pour appréhender cette hétérogénéité est de considérer pour la mortalité, des causes de décès différentes, et pour la morbidité, des pathologies d'entrée distinctes. Cette gestion par cause a l'avantage de proposer un cadre de modélisation plus structuré et offre une marge de manœuvre plus importante aux experts médicaux. Elle peut cependant se révéler compliquée à mettre en œuvre puisque, d'une part, les règles d'enregistrement<sup>15</sup> de ces pathologies, si l'on souhaite comparer des populations de plusieurs pays, dépendent des pratiques et de la formation des médecins (Booth et Tickle, 2008; Arnold-Gaille *et al.*, 2015), et, d'autre part, il faut s'assurer au préalable de disposer de volumes de données satisfaisants pour garantir des estimations robustes (Alho et Spencer, 2005; Kamega et Planchet, 2011). Par surcroît, comme le soulignent Arnold-Gaille et Sherris (2013), la plupart des approches développées en actuariat et en démographie pour la mortalité, s'appuient sur des données agrégées et font, dans un souci de simplicité, une hypothèse d'indépendance entre les différentes causes de décès qui n'a *a priori* pas de raison particulière d'être vérifiée.

Toutefois, la gestion de l'hétérogénéité des données est amenée à évoluer dans le futur. Dans leurs pratiques actuelles, les assureurs traitent la question de la granularité des hypothèses pour le provisionnement en constituant des "groupes de risque homogènes". La démarche mise en œuvre pour la construction de ces groupes vise le plus souvent à appréhender les caractéristiques techniques des contrats (p. ex. niveau de frais, type de prime, clause de participation) ou à réduire le nombre de classes d'âge d'une table d'expérience (p. ex. Goffard et Guerrault, 2015) pour des raisons calculatoires, mais porte rarement sur la prise en compte des facteurs de risque individuels de la population assurée. Une incohérence peut alors apparaître entre les données utilisées pour le provisionnement et celles retenues pour la tarification des produits, cette dernière pouvant faire intervenir des questionnaires médicaux mobilisant des données personnelles très précises. Ces pratiques sont relativement développées en assurance des emprunteurs où l'examen des patients les plus risqués requiert bien souvent une analyse approfondie du dossier médical et la réalisation de tests biologiques complémentaires. Bien qu'elles s'accompagnent d'un encadrement poussé pour garantir la confidentialité de l'information et la préservation du secret médical, ces techniques permettent généralement d'avoir une appréciation fine des risques acceptés<sup>16</sup> et pourraient venir enrichir les hypothèses actuarielles existantes. De plus, l'intérêt marqué des assureurs pour ce que l'on appelle le *Big Data* laisse penser qu'ils pourraient prochainement disposer de nouvelles collectes de données pour les risques biométriques<sup>17</sup>, ce qui devrait permettre d'alimenter les réflexions des actuaires sur l'offre de produits et les règles de souscription, mais aussi sur les méthodes de provisionnement et de gestion des risques.

---

14. Les autres critères qui rendent leur mise en application difficile sont l'absence de prise en compte de chocs extrêmes ou la mortalité aux grands-âges et le manque de flexibilité pour intégrer les jugements d'experts (démographes, médecins, etc.).

15. Il est par exemple difficile de gérer les causes de décès multi-pathologiques.

16. Certaines techniques médicales récentes, permettant de prédire facilement un risque accru de décès (p. ex. Fischer *et al.*, 2014), seraient par exemple d'un grand intérêt pour la tarification individuelle.

17. On notera à ce sujet les exemples récents de rapprochement entre Facebook et Axa ou la multiplication des objets connectés recueillant des données biologiques.

## Actions du management <sup>18</sup>

Les actions des dirigeants (*management actions*) constituent un élément essentiel de la modélisation du fonctionnement des contrats d'épargne en euro dans le cadre du calcul de la meilleure estimation des provisions (*best estimate*). C'est en effet leur transcription mathématique qui détermine le calcul du taux de revalorisation servi à l'assuré et donc le niveau des garanties. Les règles de gestion associées traduisent l'impact de l'environnement économique sur le rendement du contrat, en fonction de la richesse de l'entreprise, des performances du portefeuille d'actifs et de l'intensité de la concurrence (Borel-Mathurin *et al.*, 2015). On peut observer qu'elles sont indispensables à une description réaliste du fonctionnement du contrat et que leurs conséquences sur les engagements sont très importantes en situation stressée. Elles conduisent, toutes choses égales par ailleurs, à diminuer le besoin en capital requis pour faire face à un choc adverse en permettant le report vers l'assuré d'une partie des pertes constatées par rapport à la situation de référence.

Au-delà du cas particulier des contrats d'épargne, c'est bien là une composante essentielle du rôle des actions des dirigeants que d'adapter le partage des risques avec l'assuré de manière à permettre à long terme l'adéquation entre les engagements de l'assuré et ceux de l'assureur. Dès lors, l'intégration à un modèle de projection de flux de cette capacité d'action de l'assureur est un élément déterminant de la pertinence et du réalisme des résultats qu'il produit et ce, d'autant plus que les engagements pris ont des conséquences à long terme. Une prise en considération insuffisante des capacités d'action de l'assureur conduit ainsi dans le cas de l'assurance dépendance à des niveaux très élevés de l'exigence en capital dans le cadre de la Directive Solvabilité II (Lusson, 2013; Sator et Sother, 2013). En effet, l'assurance dépendance cumule les effets d'engagements de long terme avec la prise en compte de primes futures sur une longue durée.

Mais, si dans le cas d'un contrat d'épargne, les facteurs de risque majeurs sont économiques et donc assez directement et rapidement mesurables (le constat d'une variation brutale des taux et de l'ampleur de cette variation est direct), il n'en va pas de même pour les risques biométriques associés à la dépendance : une modification des taux d'incidence, de la survie des cotisants ou de la survie des dépendants ne peut être détectée et mesurée aussi directement. Or, les déviations des hypothèses biométriques par rapport à la réalité du risque ont des conséquences cumulatives : une aggravation de l'incidence par rapport à l'hypothèse tarifaire a, d'une part, un effet immédiat en générant plus d'entrées en dépendance que prévu à court terme et, d'autre part, un effet différé de sous-financement des primes payées par les cotisants "jeunes" qui crée mécaniquement une perte future.

Dans ce contexte, il est indispensable de se doter à l'avenir de dispositifs de suivi du risque qui permettent de détecter les changements d'hypothèses biométriques, de quantifier l'amplitude de la déviation et de décrire la politique de correction tarifaire associée. D'un point de vue technique, le dernier point est *a priori* le plus aisé. On peut, par exemple, imaginer de corriger le tarif pour les primes futures (Deléglise *et al.*, 2009) en lissant les augmentations tarifaires des cotisants actuels et/ou des nouveaux cotisants de manière à limiter les pertes encourues sur les engagements déjà nés. Dans le même temps, il s'agirait de piloter pour le mieux le phénomène de réduction de prime qui pourrait s'opérer, ce qui, à l'instar du phénomène de rachat en assurance vie, requiert une bonne connaissance du comportement des assurés. La mise en œuvre d'une action correctrice sur le tarif nécessite par conséquent, d'avoir repéré et mesuré en amont le nouvel équilibre tarifaire. Pour illustrer simplement cet enjeu, il

---

18. Ce développement s'inspire de Planchet et Guibert (2014).



est possible d'examiner l'impact du délai de réajustement du tarif offert à un nouveau cotisant suite à la survenance d'un choc sur les tables d'expérience utilisées. La Figure 2 illustre ainsi la déformation de la chronique des SCR<sup>19</sup> futurs en fonction de la vitesse de réajustement du tarif par l'assureur suite aux chocs de souscription issus de la formule standard de Solvabilité II. Il convient alors de remarquer que le fait d'intégrer cette action au modèle de projection des engagements permet une réduction significative de l'exigence en capital dans la phase de cotisation du contrat.

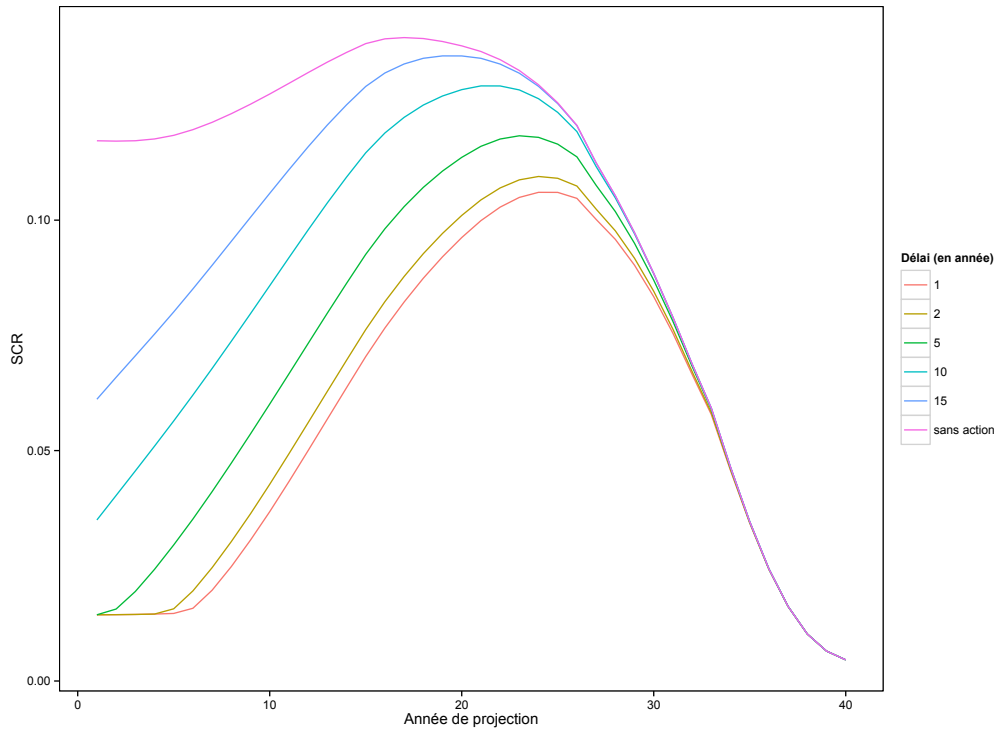


FIGURE 2 – Projection des SCR futurs (moyens) en fonction du délai de réajustement du tarif d'un contrat de dépendance lourde prévoyant 1 euro de prestation. Le SCR est évalué pour un nouveau cotisant de 60 ans en tenant compte du risque de souscription et de défaut associé à un traité de réassurance en quote-part à 50 %.

Compte tenu du manque actuel de visibilité sur la dimension prospective du risque dépendance, l'assureur semble à ce stade contraint à se limiter à des mesures correctrices établies sur la base des pertes constatées *a posteriori*. Pour aller plus loin, la question complexe de la détection d'une rupture dans une hypothèse biométrique donnée (Croix *et al.*, 2015; El Karoui *et al.*, 2015) et celle, plus délicate encore, de l'ampleur de la déviation, doivent être étudiées. Dans cette perspective, le dispositif de suivi des risques techniques est crucial et l'assureur doit se doter du matériel statistique suffisant pour pouvoir détecter et mesurer les ruptures d'hypothèses. Un suivi annuel est de ce point de vue très insuffisant.

Si, par méconnaissance du risque, ce type de réflexion n'est pas encore décrit en assurance dépendance, l'assurance crédit, qui présente un cadre de modélisation proche de celui employé en assurance de personnes, offre un cadre intéressant pour étudier le lien entre le risque de

19. Il s'agit de la charge en capital à immobiliser dans le dispositif Solvabilité II.

base et les actions du management (Caja, 2014). Il s'agit d'un dispositif dans lequel l'assureur propose à des entreprises une police qui les protège en cas de défaut de paiement de leurs clients, dans le cas d'un crédit inter-entreprise. Puisque le risque assuré est un risque de contrepartie, son évolution dépend fortement de l'environnement économique. Ainsi, le rôle de l'actuaire consiste à analyser les interactions entre le portefeuille assuré et les évolutions de l'environnement. Lorsque l'assuré voit sa situation se dégrader, l'assureur a la capacité de résilier ou de réduire unilatéralement la garantie concernée. Dans ce contexte, le suivi régulier des risques est crucial et permet, si la gestion est efficace, de réduire significativement le risque d'une perte. Toutefois, pour pouvoir intégrer ce type d'action dans un modèle de projection de flux en assurance et ainsi mieux contrôler le niveau du capital réglementaire requis, l'actuaire doit pouvoir justifier la crédibilité des hypothèses retenues.

## Organisation de la thèse et contributions

Cette thèse se compose de quatre chapitres se focalisant sur l'utilisation de modèles multi-états adaptés aux données collectées par les assureurs.

Le Chapitre 1 introduit brièvement les notions de base permettant l'utilisation de modèle multi-états en assurance. Il décrit également le cadre d'inférence statistique nécessaire pour aborder les différents résultats présentés dans le reste de cette thèse.

Le Chapitre 2 s'appuie sur Guibert et Planchet (2014) dans lequel nous présentons une méthode non-paramétrique pour l'estimation des lois d'incidence en assurance dépendance. Nous commençons par décrire les principales notations puis examinons le cadre d'inférence. Ce dernier s'appuie directement sur les méthodes développées pour l'estimation de modèles à risques concurrents, vus comme cas particulier de modèle multi-états markovien. Ce cadre est comparé à celui usuellement retenu par les praticiens. Le reste du chapitre est consacré à une application numérique réalisée sur des données tirées d'une garantie d'assurance dépendance française. Ce chapitre met en avant des techniques non-paramétriques méconnues des praticiens, utiles à des fins de validation. En particulier, elles permettent de justifier de la pertinence des méthodes classiquement employées.

Le Chapitre 3 est bâti sur l'article de Guibert et Planchet (2015) et a pour but de construire de nouveaux estimateurs non-paramétriques pour des modèles multi-états lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas satisfaite. En cherchant à reproduire un modèle décrivant la trajectoire des états parcourus par un assuré couvert par une garantie de dépendance lourde, nous développons un formalisme basé sur deux modèles à risques concurrents. Dans ce contexte, il est possible de faire appel à des intégrales, sous l'estimateur d'Aalen-Johansen associé à un modèle à risques concurrents, pour déduire des estimateurs non-paramétriques de nombreuses quantités. Dans ce contexte, nous présentons des résultats limites pour ce type d'intégrale en présence de censure à droite indépendante. Ce travail permet d'étendre les résultats de Meira-Machado *et al.* (2006) et de construire des estimateurs de probabilité de transition relativement flexibles pour la tarification et le provisionnement. Nous introduisons également une mesure d'association qui permet de caractériser, selon les causes d'entrée en invalidité, la relation de dépendance entre la durée de vie en bonne santé et la durée de vie totale d'un individu, dont nous étudions les propriétés. Le cadre de travail introduit dans ce chapitre permet de construire des estimateurs des probabilités de transition que nous comparons sur données simulées à leurs équivalents calculés dans le cadre markovien. Une application numérique sur données réelles en assurance dépendance est proposée dans la dernière section de ce chapitre

---

où sont estimées certaines probabilités de transition utiles pour les aspects techniques, ainsi que la mesure d'association introduite dans ce chapitre.

L'article de Guibert *et al.* (2015) forme le Chapitre 4 de cette thèse. Il étudie en assurance crédit comment évoluent les matrices de transition de crédit en fonction des variations de facteurs économiques et financiers. Nous présentons pour cela une application des modèles linéaires généralisés pour lier à l'environnement économique le nombre de défauts et de transition d'un *rating* à l'autre. Ce formalisme permet la mise en place d'un modèle stochastique décrivant la trajectoire des notations de crédit suivie par une firme, qui peut être directement utilisé pour la gestion des risques couverts. L'assureur dispose en effet de la capacité à clôturer les contrats souscrits dont le risque se dégrade. Ainsi, le modèle que nous développons permet d'associer ces comportements aux variations de la qualité de crédit d'un assureur. Ce chapitre propose une application économétrique sur les données d'un assureur crédit. Après avoir estimé le modèle, nous développons un second modèle économétrique permettant la projection des facteurs macro-économiques et financiers. La dernière partie de ce chapitre exploite ces travaux appliqués pour la mise en place de *stress-tests* dans le cadre de l'ORSA.



# Chapitre 1

## Modèles multi-états en assurance et inférence statistique

Ce chapitre introductif présente les pré-requis essentiels liés à l'étude et l'inférence statistique de processus multi-états en assurance et vise à remettre dans leur contexte les différentes contributions de cette thèse. Il s'agit, tout d'abord, de préciser les concepts de base qui permettent de relier les problématiques courantes de l'actuaire (à savoir la tarification, le provisionnement et la gestion des risques d'assurance) et les processus multi-états. Par la suite, nous explorons la question de l'inférence en temps continu de modèles à risques concurrents, puis la manière dont elle est abordée par les praticiens. Dans un troisième temps, nous discutons la question de l'inférence statistique, notamment non-paramétrique, de processus multi-états semi-markoviens et non-markoviens. Enfin, la dernière section fournit une description des techniques d'estimation, en temps discret avec données de panel, utilisées dans la littérature sur le risque de crédit, lorsque sont mises en œuvre des approches multi-états pour modéliser la dynamique des matrices de changements de *rating*.

## 1.1 Processus multi-états en assurance

L'objectif principal de la science actuarielle consiste à développer des méthodes statistiques permettant d'évaluer les risques associés aux garanties commercialisées. En assurance de personnes, les processus multi-états fournissent le cadre mathématique naturel pour modéliser, puis valoriser les flux financiers émanant d'un contrat. Ces outils permettent de décrire, à partir de processus stochastiques, le "chemin" parcouru par l'assuré, et donc l'historique des états qu'il a occupé, pendant la période de couverture de la garantie. Cette spécification est ancienne en assurance et remonte à Hoem (1969) qui décrivait la trajectoire de vie d'un assuré au moyen d'une chaîne de Markov. Pour tenir compte de la durée de présence dans un état, Hoem (1972) puis Janssen et de Dominicis (1984) font appel aux processus semi-markoviens, introduits par Lévy (1954) et Smith (1955) puis étudiés plus tard par Pyke (1961a,b). Bien que cette dernière approche présente une plus grande flexibilité et permette une meilleure adéquation aux phénomènes observés en assurance, l'hypothèse de Markov était régulièrement utilisée dans le cadre d'application jusqu'au début des années 2000. Ainsi, de nombreux travaux se sont appuyés sur cette hypothèse pour produire des tables de survie et de maintien (Hoem, 1977; Haberman, 1983, 1984) pour le provisionnement et la tarification. Par ailleurs, les travaux de Norberg (1991) ont permis de traduire la dynamique générale des provisions sous la forme d'équations différentielles de Thiele, et leurs variations aux paramètres techniques ont été examinées par exemple par Kalashnikov et Norberg (2003) ou plus récemment par Christiansen (2008).

L'analyse des modèles semi-markoviens homogènes, c'est-à-dire ne dépendant pas du temps, a reçu un intérêt marqué dans la littérature anglo-saxonne pour modéliser les contrats PHI (*Permanent Health Insurance*) et LTC (*Long Term Care Insurance*). En la matière, la méthodologie proposée par le CMIB (*Continuous Mortality Investigation Bureau*) (CMIR12, 1991) a longtemps fait office de référence et est encore aujourd'hui largement utilisée. Une revue de ces modèles et de leurs utilisations en assurance PHI, LTC et DD (*Dread Disease*) est par exemple proposée par Haberman et Pitacco (1998). L'ouvrage de Denuit et Robert (2007) et les travaux de Christiansen (2012) fournissent également une présentation d'ensemble concernant l'utilisation de modèles markoviens et semi-markoviens en assurance de personnes.

En dehors de l'assurance, les processus multi-états, markoviens et semi-markoviens, sont utilisés dans de nombreux domaines. En biostatistique et plus particulièrement en épidémiologie, ces outils jouent un rôle important dans l'étude de cohortes et le suivi des maladies chroniques (p. ex. Gauzère *et al.*, 1999; Hougaard, 1999; Commenges et Joly, 2004; Saint Pierre, 2005). Les modèles semi-markoviens sont également d'un grand intérêt pour l'étude de la fiabilité des systèmes (p. ex. Ouhbi et Limnios, 1999; Limnios et Oprisan, 2001; Georgiadis, 2013), où ils sont le plus souvent utilisés en temps discret. Ils apparaissent fréquemment en finance (Janssen et Manca, 2007) et, plutôt sous la forme de modèles markoviens, en crédit pour la modélisation des matrices de migrations (p. ex. Jarrow et Turnbull, 1995; Lando et Skødeberg, 2002; Duffie et Singleton, 2003; Koopman *et al.*, 2008).

Cette première section fournit une description des concepts de base sur les modèles multi-états markoviens et semi-markoviens en temps continu. Après avoir fait le lien entre ces processus et les garanties d'assurance de personnes, nous rappelons la définition et les propriétés principales des quantités d'intérêt qui seront par la suite utilisées pour le provisionnement des garanties d'assurance. Aussi, nous nous concentrons sur les quantités d'intérêt que devront estimer les actuaires pour la mise en œuvre des modèles assurantiels.

### 1.1.1 Garanties d'assurance de personnes

Les modèles multi-états sont traditionnellement utilisés en science actuarielle pour décrire le fonctionnement des garanties d'assurance de personnes. Sans chercher à dresser un inventaire exhaustif des différentes garanties et de leurs caractéristiques, l'objectif de cette première section est d'examiner, au travers de quelques exemples généraux, le formalisme que peuvent prendre ces garanties, de manière à justifier l'introduction de modèles multi-états. D'autres exemples peuvent être trouvés dans Haberman et Pitacco (1998), Denuit et Robert (2007) et Christiansen (2012).

**Nature des garanties.** Les contrats d'assurance de personnes offrent une couverture contre les conséquences financières liées à la survenance d'un risque, issu de la modification de l'état ou du statut courant de l'assuré. Ces changements d'état correspondent aux différents événements dans la vie de l'individu (p. ex. le décès, le mariage, la maladie ou encore un accident) et conditionnent, selon les modalités du contrat, les engagements respectifs des parties. Traditionnellement, les contrats d'assurance de personnes français se décomposent schématiquement en (cf. Pitacco, 2014, pour une présentation détaillée) :

- produits d'assurance vie, dédiés à la constitution d'une épargne, d'une pension de retraite supplémentaire, au versement d'un capital ou d'une rente en cas de décès ;
- produits d'assurance santé offrant une couverture contre les conséquences financières d'une maladie, d'un accident ou d'un arrêt de travail (court ou prolongé), en complément des dispositifs de protection publique ;
- produits d'assurance emprunteur destinés à couvrir l'emprunteur en cas de survenance d'un décès ou d'un arrêt de travail ;
- produits d'assurance dépendance offrant, en complément des aides publiques, une couverture financière en cas de perte d'autonomie ou de mobilité pour les personnes âgées ayant des difficultés pour accomplir des actes de la vie quotidienne.

L'éventail de garanties proposées par les contrats d'assurance de personnes est très large. Pour les contrats d'assurance vie, les prestations versées, sous forme de capital ou de rente, dépendent des sommes épargnées et de leur revalorisation nette par l'assureur. En assurance santé, les contrats de complémentaires proposent une indemnisation, visant à couvrir le coût des dépenses médicales (fixe ou au coût réel), et les contrats arrêt de travail indemnisent l'assuré *via* des indemnités de travail pour les arrêts courts ou par une rente, en cas d'invalidité selon la gravité. Les garanties d'assurance dépendance assurent le versement d'une rente en cas de dépendance totale ou partielle et sont, le plus souvent, accompagnées du versement d'un capital pour l'aménagement du domicile et de services d'assistance (p. ex. services à domicile, bilans d'autonomie). Le niveau de prestations varie selon la sévérité de la dépendance, spécifiée par le biais de grilles assez complexes.

**Flux financiers du contrats.** L'analyse d'une garantie requiert de décomposer l'ensemble des flux financiers, susceptibles d'être générés tout au long de la vie du contrat, et d'identifier les causes déclenchant les paiements réalisés par les parties. Cette analyse se doit donc de considérer, d'une part les modalités de paiement de la prime d'assurance (p. ex. primes uniques, primes périodiques), et d'autre part les prestations offertes lorsque le risque assuré se matérialise (p. ex. paiement d'un montant fixé, paiement d'une rente, remboursement de frais). Au terme de cette analyse, deux modes de provisionnement sont généralement distingués. Les contrats dont l'échéance est courte sont usuellement analysés avec des techniques

dites *non-vies* qui adoptent un formalisme agrégé. L'actuaire s'intéresse alors, pour une groupe de contrats homogènes, à la fréquence de survenance de sinistres ainsi qu'à leur liquidation. Le second mode d'analyse, dit *vie*, concerne des contrats de moyen ou de long termes pour lesquels une approche individuelle est privilégiée. Nous nous intéressons dans la suite à ce second formalisme.

Si on prend le cas d'un simple contrat portant sur une garantie de décès (temporaire décès), le risque se réalise lorsque la tête assurée (l'extension à plusieurs têtes ne posent pas difficulté) décède avant le terme du contrat. La Figure 1.1 fournit un exemple d'échéancier des primes et du capital versé en cas de décès. Dans ce contexte, l'outil de base utilisé par l'actuaire, pour la

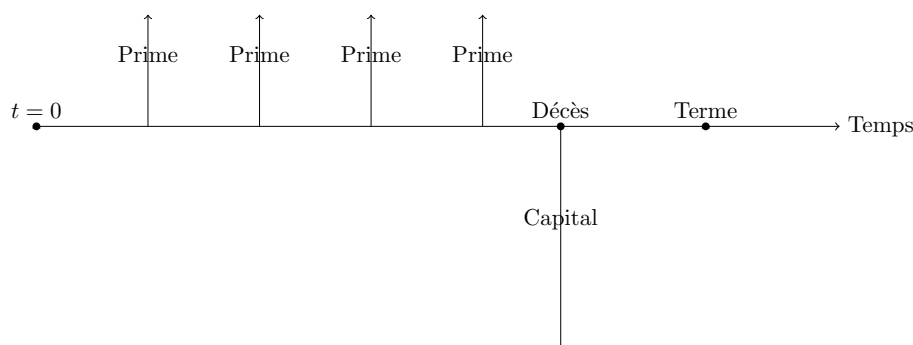


FIGURE 1.1 – Exemple de d'échéancier pour un contrat temporaire décès.

tarification et le provisionnement du contrat, est une simple table de mortalité. Celle-ci, définie en temps discret, permet de calculer les probabilités de décès  ${}_tq_x$ , c'est-à-dire la probabilité à l'âge  $x$  de décéder avant l'âge  $x + t$ , et  ${}_tp_x$ , la probabilité de survivre à l'âge  $x$  jusqu'à l'âge  $x + t$ . L'engagement des parties lorsque la prime est périodique (prise égale à 1) est alors déterminé en évaluant les quantités actuarielles suivantes <sup>1</sup>

$$a_{x:n} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x \text{ et } A_{x:n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x {}_1 q_{x+k} ,$$

où  $v$  est un coefficient d'actualisation et pour  $n$  le terme du contrat. La prime pure du contrat est ensuite déterminée comme un multiple du ratio  $\frac{A_{x:n}}{a_{x:n}}$ . Ces quantités indiquent que le paiement de la prime par l'assuré est effectué tant qu'il reste vivant, alors que le paiement du capital survient au décès de l'assuré, si celui-ci intervient avant le terme du contrat. On remarque ainsi que l'évènement déclencheur de la prestation, à savoir le décès, peut être vu comme la transition d'un état "Vivant" vers un état "Décès" selon le formalisme présenté dans la Figure 1.2. En temps discret, il est alors possible de présenter les évènements de la vie de l'assuré, au cours de la période de couverture, à partir d'un processus prenant comme valeur "Vivant" ou "Décès" à chaque instant. L'état occupé à la période suivante, connaissant l'état présent, est déterminé par une probabilité de transition. Sur cette figure, le sens des flèches permet d'indiquer les transitions possibles.

Si l'on se place dans le cadre de Solvabilité II, l'évaluation des provisions ne se limite pas, comme le calcul de la prime pure, aux flux futurs de primes et de prestations. Le raisonnement

1. Les notations introduites ici sont purement illustratives et ne sont pas à retenir pour la suite de ce chapitre.



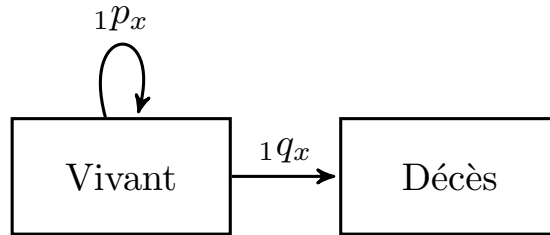


FIGURE 1.2 – Représentation en temps discret d’une garantie temporaire décès par un modèle à 2 états.

précédent est étendu à toutes les entrées et sorties de trésorerie, nécessaires pour faire face aux engagements pendant toute la durée de ceux-ci (cf. article 77 de la Directive). Ainsi, les frais, les commissions, les paiements d’impôts, les flux de réassurance etc. engagés, aux fins d’honorer ces engagements, sont à considérer (cf. article 78 de la Directive).

L’analyse des engagements de l’assureur est également contrainte par les clauses des contrats, dont l’analyse permet de déterminer les prestations auxquelles l’assuré peut prétendre. Pour les contrats d’arrêt de travail et de dépendance, on rencontre fréquemment des dispositifs de franchise correspondant à une durée minimale après la survenance d’un sinistre, au cours de laquelle l’assuré ne peut percevoir de prestation (p. ex. jours de carence en arrêt de travail ou délais de carence selon la cause d’entrée en dépendance). Les contrats d’assurance de personnes sont soit viagers, en assurance vie ou dépendance notamment, soit assortis d’un terme, défini au contrat comme dans l’exemple de la garantie temporaire décès introduit précédemment. Des clauses peuvent également être ajoutées pour préciser un âge limite pour la perception de la rente d’invalidité.

Le formalisme des modèles multi-états, que nous avons brièvement introduit avec la Figure 1.2, s’ajuste parfaitement à ces contraintes et peut être utilisé, plus largement, en augmentant le nombre d’états et de transitions. Notons cependant que la structure des états associée à une garantie d’assurance n’est généralement pas unique. Un choix parcimonieux concernant la structure la mieux adaptée en pratique conditionne la complexité de l’inférence et de l’évaluation qui est faite à partir de cette structure. Ajouter des états peut par exemple permettre de capturer une certaine forme d’hétérogénéité (p. ex. plusieurs maladies). Nous présentons dans la suite le formalisme en temps continu qu’il est possible de retenir pour quelques exemples de contrats d’assurance de personnes.

**Exemple 1. Assurance vie avec clause de rachat.** Un contrat d’assurance vie classique offre à l’assuré une protection en cas de décès en permettant un transfert de capital à un bénéficiaire désigné. L’assuré dispose généralement d’une option de rachat partiel ou total de son épargne. Ce dispositif peut être modélisé à partir d’un modèle à 4 états décrit en Figure 1.3.

Ce formalisme peut être aisément étendu afin d’intégrer d’autres droits optionnels (p. ex. la réduction ou la conversion en rente). De manière générale, l’assureur sera exposé à un risque sur le décès de l’assuré (ou la survie) et un risque associé au comportement de l’assuré (cf. Buchardt *et al.*, 2014, pour un exemple de mise en œuvre).

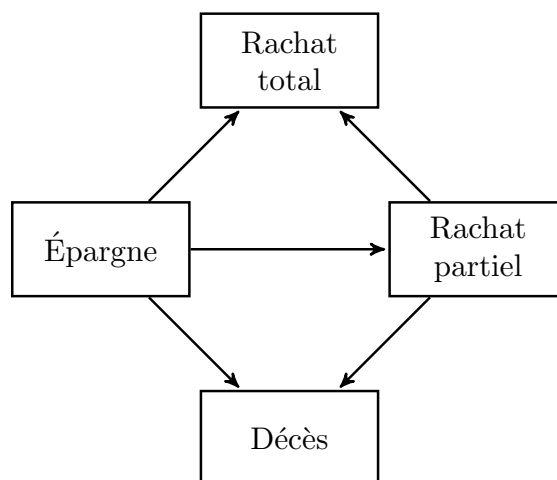


FIGURE 1.3 – Exemple de garantie d'assurance vie à 4 états.

**Exemple 2. Assurance incapacité-invalidité.** Un contrat d'assurance arrêt de travail permet de compenser la perte de revenu occasionnée en cas d'incapacité de travail ou d'invalidité. Une couverture est généralement proposée en cas de décès (p. ex. assurance emprunteur). Ce dispositif peut être modélisé à partir d'un modèle à 4 états, décrit en Figure 1.4.

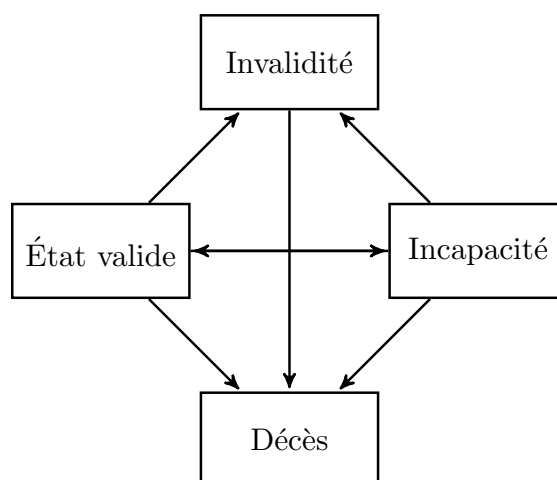


FIGURE 1.4 – Exemple de garantie incapacité-invalidité à 4 états.

Des représentations alternatives et enrichies sont toutefois possibles, en particulier pour prendre en compte l'impact de différentes causes (Cordeiro, 2002) (accidentelles et non accidentelles) ou du chômage (Biagini *et al.*, 2013).

**Exemple 3. Assurance dépendance.** Un contrat d'assurance dépendance assure une protection financière pour prendre en charge l'assistance aux actes de la vie quotidienne des personnes âgées dépendantes. Les prestations associées à cette garantie sont graduelles et dépendent de la capacité de l'individu à exercer certains actes (p. ex. s'alimenter, se laver,

s'habiller, se déplacer). Les différents niveaux de prestation associés aux différents degrés de dépendance peuvent être modélisés à partir d'un modèle à  $n + 2$  états, décrit en Figure 1.5.

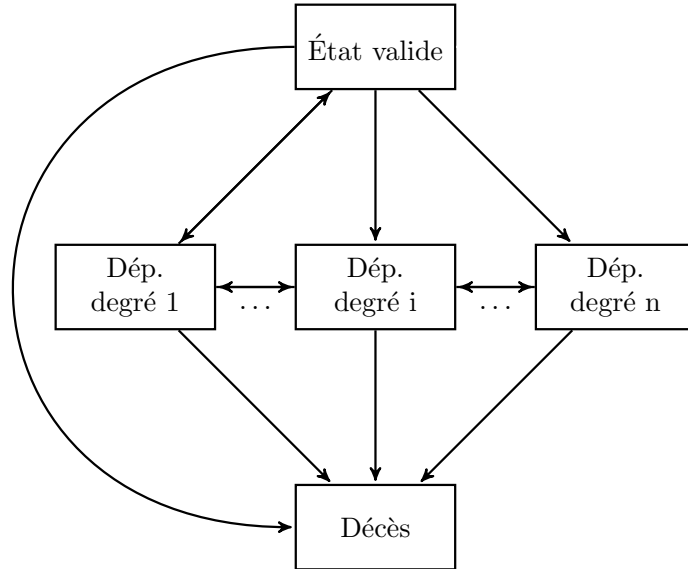


FIGURE 1.5 – Exemple de garantie dépendance à  $n + 2$  états.

Le degré de dépendance d'un individu, en France, est généralement quantifié par le biais de grilles, construites soit par les pouvoirs publics (p. ex. grille AGGIR), soit par les assureurs. Les actes de la vie quotidienne sont un autre critère répandu d'évaluation de la dépendance. Des tests complémentaires peuvent également être aménagés. Aussi, selon le formalisme du contrat, le schéma générique précédent peut-être ajusté pour tenir compte du caractère transient ou récurrent de certains états.

### 1.1.2 Cadre markovien

Dans cette sous-section, nous décrivons les concepts de base sur les modèles multi-états markoviens. L'état occupé par l'assuré est représenté à partir d'un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  càdlàg (continu à droite et avec limite à gauche) à valeurs dans un espace d'états fini  $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  que l'on appelle processus multi-états. Ce processus est défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On note sa filtration engendrée  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Le processus  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est markovien s'il satisfait à la propriété de Markov, c'est-à-dire s'il vérifie l'égalité suivante pour  $0 \leq s \leq t$  et pour tout  $e \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}(X_t = e | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t = e | X_s). \quad (1.1)$$

Cette définition signifie que le processus dispose d'une propriété "d'oubli" qui peut s'interpréter comme le fait qu'un événement futur ne dépend pas du passé si le présent est connu. Le calcul de la probabilité associée à un "chemin" particulier, parcouru par le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , peut alors s'écrire pour  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , en utilisant la formule des probabilités totales et la propriété de Markov du processus

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1, \dots, n} \{X_{t_i} = e_{t_i}\} \right) = \mathbb{P}(X_{t_0} = e_{t_0}) \prod_{i=1, \dots, n} \mathbb{P}(X_{t_i} = e_{t_i} | X_{t_{i-1}} = e_{t_{i-1}}).$$

Un processus markovien peut également être caractérisé de manière unique à partir :

- d'une loi de probabilité initiale;
- d'une famille de fonctions, appelées noyaux de transition sur  $\mathcal{S}$ , représentant des probabilités de transition définies pour tout  $0 \leq s \leq t$  par :

$$\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1] ; (h, j) \mapsto \mathbb{P}(X_t = j | X_s = h) \quad (1.2)$$

En pratique, nous utiliserons la notation matricielle  $\mathbf{p}(s, t) = (p_{hj}(s, t))_{h, j \in \mathcal{S}}$  telle

$$p_{hj}(s, t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_s = h), \quad (1.3)$$

avec  $\mathbf{p}(s, s) = \mathbf{Id}$ , correspondant à la matrice identité et  $\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{hj}(s, t) = 1$ .

Dans le cas particulier où les probabilités de transition ne dépendraient pas de  $t$  et de  $s$  mais uniquement de  $t - s$ , le processus markovien associé est qualifié de processus homogène. Bien que dans ce contexte, l'étude des processus markoviens soit simplifiée, cette hypothèse n'est pas valide dans la plupart des applications actuarielles, les probabilités de transition variant par exemple avec l'âge. Par conséquent, le recours aux processus inhomogènes semble nécessaire. Toutefois, une hypothèse d'homogénéité par morceaux (Jones, 1993, 1994) est souvent introduite dans la pratique, car elle constitue une approximation de bonne qualité et est simple à mettre en œuvre, comme nous le verrons par la suite.

Le calcul des probabilités de transition entre deux états est susceptible d'être effectué à partir de la propriété de Chapman-Kolmogorov, qui permet d'introduire un état intermédiaire dans l'expression de ces probabilités. Cette relation s'écrit sous forme matricielle pour tout  $0 \leq s \leq u \leq t$

$$\mathbf{p}(s, t) = \mathbf{p}(s, u) \cdot \mathbf{p}(u, t). \quad (1.4)$$

Pour caractériser un processus markovien, on définit des intensités de transition (ou taux instantanés de transition), qui sous réserve d'existence, s'écrivent pour tout  $t \geq 0$  et  $h, j \in \mathcal{S}$

$$\mu_{hj}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{hj}(t, t + \Delta t) - p_{hj}(t, t)}{\Delta t} \text{ pour } h \neq j \text{ et } \mu_{hh}(t) = - \sum_{j \neq h} \mu_{hj}(t). \quad (1.5)$$

Les fonctions d'intensité cumulée de transition (cf. Annexe 1.5.2 pour plus de détails) correspondantes sont alors obtenues pour tout  $t \geq 0$  et  $h, j \in \mathcal{S}$  via

$$A_{hj}(t) = \int_0^t \mu_{hj}(\tau) d\tau \text{ pour } h \neq j \text{ et } A_{hh}(t) = \sum_{j \neq h} A_{hj}(t). \quad (1.6)$$

Les grandeurs introduites en (1.5) et (1.6) fournissent une généralisation de la fonction de hasard et de la fonction de hasard cumulée utilisées dans les modèles de durée classiques.

Intéressons-nous maintenant au lien entre intensités et probabilités de transitions. Les Équations (1.4) de Chapman-Kolmogorov et la définition des intensités de transition (1.5)

permettent à présent d'obtenir les équations intégrales *forward* de Kolmogorov, exprimées sous forme matricielle, pour tout  $0 \leq s < t$

$$\mathbf{p}(s, s) = \mathbf{Id} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{p}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{p}(s, t) \boldsymbol{\mu}(t), \quad (1.7)$$

où  $\boldsymbol{\mu}(t) = (\mu_{hj}(t))_{h,j \in \mathcal{S}}$  correspond à la matrice des fonctions d'intensité de transition en  $t$ . De manière symétrique mais en s'intéressant cette fois à l'instant initial, il est possible d'établir les équations *backward* de Kolmogorov, associées aux processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , telles que pour tout  $0 \leq s < t$

$$\mathbf{p}(s, s) = \mathbf{Id} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{p}(s, t)}{\partial s} = -\mathbf{p}(s, t) \boldsymbol{\mu}(s). \quad (1.8)$$

Les équations *forward* de Kolmogorov admettent, dans le cas d'un processus markovien, une unique solution (Andersen *et al.*, 1993, Section II.6), s'exprimant sous la forme d'un produit intégral<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(s, t) &= \lim_{\max_k |t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0} \prod_{k=1}^K (\mathbf{Id} + \mathbf{A}(t_k) - \mathbf{A}(t_{k-1})) \\ &= \mathcal{P}_{\tau \in ]s, t]} (\mathbf{Id} + d\mathbf{A}(\tau)) = \mathcal{P}_{\tau \in ]s, t]} (\mathbf{Id} + \boldsymbol{\mu}(\tau) d\tau), \end{aligned} \quad (1.9)$$

où  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_K$  correspond à une partition de  $]s, t]$  et  $\mathbf{A}(t) = (A_{hj}(t))_{h,j \in \mathcal{S}}$  correspond à la matrice des fonctions d'intensité cumulée de transition. Si de plus,  $\mathbf{A}$  est une matrice de fonctions en escalier (constantes par morceaux), l'expression des probabilités de transition (1.9) se simplifie et prend la forme d'un simple produit fini sur les temps de sauts  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_K = t$  de  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{p}(s, t) = \prod_{k=1}^K (\mathbf{Id} + \Delta \mathbf{A}(t_k)), \quad (1.10)$$

avec  $\Delta \mathbf{A}(t_k) = \mathbf{A}(t_k) - \mathbf{A}(t_{k-1})$ . L'Équation (1.10) peut s'interpréter à partir de celle de Chapman-Kolmogorov (1.4), où chaque terme du produit correspond à la matrice des probabilités de transition entre deux temps de sauts. Lorsque les intensités de transition, supposées constantes, sont connues pour chaque segment  $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_K$ , chaque terme du produit s'obtient sous la forme d'une exponentielle de matrice

$$(\mathbf{Id} + \Delta \mathbf{A}(t_k)) = \exp(\boldsymbol{\mu}_k(t_k - t_{k-1})). \quad (1.11)$$

### 1.1.3 Cadre semi-markovien

L'hypothèse de Markov, introduite dans la section précédente, peut être trop rigide pour décrire les risques biométriques couverts par les contrats d'assurance de personnes. Lorsqu'un ou plusieurs états correspondent à une situation de fragilité (p. ex. maladie, accident) de l'assuré, il est généralement nécessaire de faire intervenir le temps de séjour dans ces états. Cette spécificité est alors pris en compte à partir de modèles qualifiés de semi-markoviens.

2. De manière simplifiée, l'opérateur produit intégral  $\mathcal{P}$  correspond à une version continue de l'opérateur produit  $\prod$ , un peu comme l'opérateur  $\int$  généralise la somme  $\sum$ . Le produit intégrale a été initialement introduit par Volterra en 1887 dans la cadre de la théorie des équations différentielles.

De manière générale, l'étude d'un processus semi-markovien peut être abordée selon deux approches théoriquement équivalentes, mais qui se déclinent différemment lorsqu'il s'agit de l'inférence statistique. La première consiste à poser le problème à partir des processus à temps discrets (ou chaînes semi-markoviennes) des temps de sauts et des états associés à chaque temps de saut. Cette démarche est celle fréquemment suivie dans la l'étude de la fiabilité des systèmes. Une présentation de ces approches et des techniques calculatoires afférentes, dans la cadre semi-markovien non-homogène, est fournie initialement par Janssen et de Dominicis (1984). Nous nous référons également aux ouvrages généraux de Limnios et Oprisan (2001), Janssen et Manca (2006) et Janssen et Manca (2007) pour une présentation de ces outils et de leurs utilisations pratiques. Dans cette configuration, il est ensuite possible d'obtenir des probabilités de transition en temps continu par des méthodes numériques.

La seconde approche consiste à s'intéresser directement au processus semi-markovien continu, décrit par l'état de l'individu et sa durée de présence dans l'état à chaque instant. Cette approche constitue la voie généralement privilégiée dans les sciences actuarielles, en particulier pour les travaux décrits précédemment. Une présentation complète de cette approche et un rapprochement avec la précédente sont par exemple fournie dans la thèse de Helwich (2008). Dans la section suivante, nous décrivons brièvement les concepts de base de ces deux cadres.

**Généralités.** Avec les notations de la section précédente, on introduit le processus bivarié  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{S}$ , défini en temps discret sur le même espace probabilisé que  $(X_t)_{t \geq 0}$  tel que :

- $S_k$  correspond, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , à la date du  $k$ -ième saut du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$

$$S_k = \inf \{ t > S_{k-1} \mid X_t \neq X_{S_{k-1}} \} ;$$

- $J_k$  correspond, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , à l'état du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  entre les dates  $S_k$  et  $S_{k+1}$ .

Le processus  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  permet de notifier les temps de saut ainsi que l'état occupé entre chaque saut, et fournit une représentation complète de la trajectoire suivie par l'état de l'individu. La Figure 1.6 est une illustration pour un processus à 3 états, décrivant ce principe d'équivalence entre le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et le processus  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ . Dans cet exemple, la trajectoire de l'individu comprend 4 temps de sauts  $S_1, \dots, S_4$  correspondant à des changements d'états.

Le nombre de transitions<sup>3</sup>  $h \rightarrow j$  en date  $t \geq 0$  est enregistré à partir du processus de comptage  $N_{hj}(t)$ .  $N(t)$  correspond au nombre total de transitions effectuées à cette date. L'introduction de ce dernier processus de comptage permet de relier les processus  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(X_t)_{t \geq 0}$  en notant  $X_t = J_{N(t)}$ . La durée de séjour dans l'état courant à une date  $t \geq 0$  est par ailleurs donnée par

$$U_t = t - S_{N(t)}.$$

**Processus semi-markovien.** Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est semi-markovien s'il vérifie l'égalité suivante, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $C \in [0, \infty[ \times \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}((S_{k+1}, J_{k+1}) \in C \mid (S_l, J_l), l = 1, \dots, k) = \mathbb{P}((S_{k+1}, J_{k+1}) \in C \mid (S_k, J_k)). \quad (1.12)$$

3. Cette notation désigne la transition de  $h$  vers  $j$ .

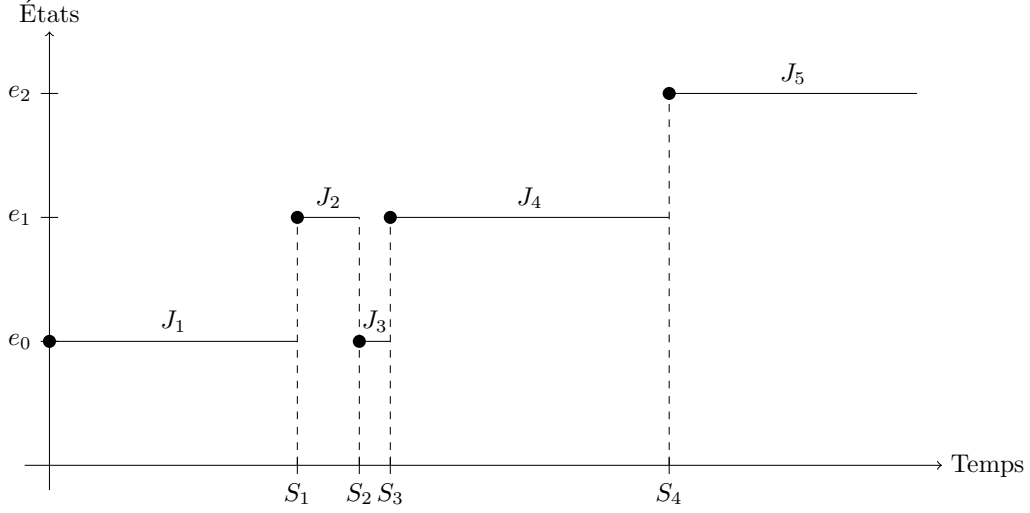


FIGURE 1.6 – Exemple de chemin parcouru au cours de la durée de vie d'un individu pour un modèle multi-états quelconque à 3 états  $\{e_0, e_1, e_2\}$ .

Cette définition correspond à celle proposée par Janssen et de Dominicis (1984) et revient à dire que le processus  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est markovien. En particulier, elle implique que le processus  $(X_t, U_t)_{t \geq 0}$  est lui aussi markovien, ce qui correspond à la définition d'un processus semi-markovien donnée par Hoem (1972).

Le processus  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est caractérisé de manière unique à partir de sa loi de probabilité initiale et de son noyau semi-markovien inhomogène<sup>4</sup>  $\mathbf{Q} = (Q_{hj})_{h,j \in \mathcal{S}}$ , défini en date  $0 \leq s$  et pour une durée  $0 \leq u$ , par

$$Q_{hj}(s, u) = \mathbb{P}(\Delta S_{N(s)+1} \leq u, J_{N(s)+1} = j \mid (S_{N(s)}, J_{N(s)}) = (s, h)), \quad h \neq j, \quad (1.13)$$

avec  $\Delta S_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ . Dans cette définition, le noyau semi-markovien (NSM) dépend explicitement de deux échelles temporelles : la date  $s$  et une durée  $u$ . S'il ne dépend pas de la date  $s$ , le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  sera qualifié de semi-markovien homogène et  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de processus de renouvellement markovien homogène (Lagakos *et al.*, 1978; Gill, 1980). Ce dernier cas correspond au cadre généralement retenu dans les applications biomédicales et pour la fiabilité des systèmes. Cette simplification provient du fait que les modèles homogènes sont, comme nous le verrons, plus simples à estimer et à manipuler.

Pour conduire l'inférence statistique de modèle, il est nécessaire d'estimer le NSM et la loi initiale du processus. S'agissant du NSM, plusieurs quantités intermédiaires sont introduites pour permettre une meilleure identification du modèle. Dans un souci de simplicité, nous nous limitons dans la suite aux grandeurs nécessaires au positionnement de la problématique.

Lorsque l'on s'intéresse au processus  $(X_t, U_t)_{t \geq 0}$ , on se réfère aux probabilités de transition, définies pour tout  $0 \leq u \leq s \leq t$ ,  $v \geq 0$  et pour tout  $h, j \in \mathcal{S}$  par

$$p_{hj}(s, t, u, v) = \mathbb{P}(X_t = j, U_t \leq v \mid (X_s, U_s) = (h, u)). \quad (1.14)$$

Ces probabilités permettent de caractériser le processus semi-markovien  $(X_t, U_t)_{t \geq 0}$  et constituent les quantités que l'on cherchera à exprimer. Pour des applications actuarielles, on intro-

4. On parle aussi également de noyau semi-markovien inhomogène cumulatif.

duit également les probabilités associées au prochain changement d'état

$$\begin{aligned}\bar{p}_{hj}(s, t, u) &= \mathbb{P}\left(X_{S_{N(s)+1}} = j, S_{N(s)+1} \leq t \mid (X_s, U_s) = (h, u)\right), \quad h \neq j \text{ et} \\ \bar{p}_{hh}(s, t, u) &= \mathbb{P}\left(S_{N(s)+1} \leq t \mid (X_s, U_s) = (h, u)\right).\end{aligned}\quad (1.15)$$

**Quantités d'intérêt.** Les processus  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(X_t, U_t)_{t \geq 0}$  peuvent être exprimés en fonction de grandeurs d'intérêt qui permettent de procéder à l'estimation du modèle. Concentrons nous d'abord sur le processus  $(S_k, J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ . On introduit dans un premier temps les probabilités de saut  $h \rightarrow j$  en date  $s$

$$r_{hj}(s) = \mathbb{P}\left(J_{N(s)+1} = j \mid (S_{N(s)}, J_{N(s)}) = (s, h)\right), \quad (1.16)$$

et les fonctions de répartition du temps de séjour, connaissant la date du dernier saut et la prochaine transition

$$K_{hj}(s, u) = \mathbb{P}\left(\Delta S_{N(s)+1} \leq u \mid J_{N(s)+1} = j, J_{N(s)} = h, S_{N(s)} = s\right), \quad (1.17)$$

ou encore

$$K_{hj}(s, u) = \begin{cases} \frac{Q_{hj}(s, u)}{r_{hj}(s)} & \text{si } r_{hj}(s) \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À partir de ces dernières, on définit également des fonctions de densités

$$k_{hj}(s, u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\left(u < \Delta S_{N(s)+1} \leq u + \Delta u \mid J_{N(s)+1} = j, J_{N(s)} = h, S_{N(s)} = s\right)}{\Delta u}. \quad (1.18)$$

La probabilité de rester dans un état  $h$  pendant une durée au plus égale à  $u$  en date  $s$  est ensuite définie par

$$H_h(s, u) = \mathbb{P}\left(\Delta S_{N(s)+1} \leq u \mid J_{N(s)} = h, S_{N(s)} = s\right) = \sum_{j \neq h} Q_{hj}(s, u).$$

Dans ce contexte, on cherchera à spécifier le modèle en fonction des densités (1.18) ainsi que des probabilités de saut (1.16). Il est également possible d'introduire des fonctions de risque, utiles pour l'introduction de modèles de régression (cf. par exemple Dabrowska *et al.*, 1994, pour la spécification de Cox)

$$\lambda_{hj}(s, u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\left(u < \Delta S_{N(s)+1} \leq u + \Delta u \mid \begin{matrix} u < \Delta S_{N(s)+1}, \\ (J_{N(s)+1}, J_{N(s)}, S_{N(s)}) = (j, h, s) \end{matrix}\right)}{\Delta u}. \quad (1.19)$$

Concernant le processus  $(X_t, U_t)_{t \geq 0}$ , les fonctions d'intensité de transition sont définies pour tout  $0 \leq u \leq s$  et pour tout  $h, j \in \mathcal{S}$  par

$$\mu_{hj}(t, u) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{hj}(t, t + \Delta t, u, \infty)}{\Delta t} \text{ pour } h \neq j \text{ et } \mu_{hh}(t, u) = - \sum_{j \neq h} \mu_{hj}(t, u), \quad (1.20)$$



ou de manière équivalente, sous réserve de dérivabilité des probabilités de transition, par

$$\mu_{hj}(t, t-s) = \begin{cases} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \bar{p}_{hj}(s, t, 0)}{1 - \bar{p}_{hh}(s, t, 0)} & \text{si } \bar{p}_{hh}(s, t, 0) < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note qu'une connexion peut-être établie entre les deux approches à partir des intensités de transition. Elles peuvent s'écrire (Denuit et Robert, 2007, Chapitre 9)

$$\mu_{hj}(t+u, u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P} \left( \begin{array}{c} J_{N(t)+1} = j, u < \Delta S_{N(t)+1} \leq u + \Delta u \mid u < \Delta S_{N(t)+1}, \\ (J_{N(t)}, S_{N(t)}) = (h, t) \end{array} \right)}{\Delta u},$$

où le terme de droite correspond à la définition des intensités de transition introduites par Ouhibi et Linnios (1999).

En utilisant l'approche fondée sur le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , nous voyons que les quantités d'intérêt à estimer sont les intensités de transition. Toutefois, pour les actuaires, il est souvent plus commode travailler en temps discret et de manipuler des probabilités de transition. Aussi, présentons-nous dans la prochaine section les moyens d'obtenir ces probabilités de transition. Nous utiliserons, à l'instar des processus markoviens, des équations de Chapman-Kolmogorov qui s'écrivent pour un processus semi-markovien inhomogène avec  $0 \leq u \leq s \leq r \leq t$ ,  $v \geq 0$  et pour tout  $h, j \in \mathcal{S}$

$$p_{hj}(s, t, u, v) = \sum_{l \in \mathcal{S}} \int_0^\infty p_{lj}(r, t, \tau, v) \cdot p_{hl}(s, r, u, d\tau), \quad (1.21)$$

où  $r$  est une date intermédiaire quelconque.

**Évaluation des probabilités de transition.** Comme dans le cadre markovien, les probabilités de transition vérifient des équations intégro-différentielles de Kolmogorov qui permettent de les lier à des intensités de transition, mais qui sont cependant plus complexes à évaluer. En actuariat, les approches utilisées par les praticiens reposent généralement sur des approximations de ces équations, comme l'algorithme de Waters (Haberman et Pitacco, 1998). En fiabilité, il est courant de travailler avec des versions en temps discret de ces équations. Ces études se focalisent alors plus spécifiquement sur l'évaluation de la probabilité  $\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = h)$  *via* des techniques numériques (Janssen et Manca, 2006). Il est en effet possible d'écrire cette quantité sous la forme suivante, pour  $s < t$  et pour  $s, t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = h) &= \delta_{hj} (1 - H_h(s, t)) \\ &+ \sum_{l \in \mathcal{S}} \sum_{\tau=s+1}^t (K_{hl}(s, \tau) - K_{hl}(s, \tau-1)) \mathbb{P}(X_t = j \mid X_\tau = l), \end{aligned}$$

avec  $\delta_{hj}$  le symbole de Kronecker. Une équation similaire peut être décrite en temps continu (p. ex. D'Amico *et al.*, 2009, avec une application à l'assurance arrêt de travail). Monteiro *et al.* (2006) et (D'Amico *et al.*, 2010) étudient et évaluent numériquement ces probabilités, ainsi que d'autres plus spécifiques dans le cadre d'application au risque de crédit.

Dans le cas d'un processus de renouvellement markovien homogène (Çınlar, 1969), les probabilités de transition du type  $\Psi_{hj}(t) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = h)$  satisfont à une équation intégrale de Volterra de degré 2 qui se résout, sous réserve d'une hypothèse d'inversibilité, à l'aide du produit de convolution  $*$  telle que

$$\Psi_{hj}(t) = \sum_{m \geq 0} Q_{hj}^{(m)}(t) * (1 - H_j(t)), \quad (1.22)$$

avec  $Q_{hj}^{(m)}(t) = \mathbb{P}(J_m = j, S_m - S_{m-1} \leq t \mid J_0 = h)$ . Cette formulation est très intéressante car elle est l'équivalent dans le cas semi-markovien de la formule du produit intégral (1.9) introduite dans le cas markovien.

Par ailleurs, les probabilités de transition du type  $p_{hj}(s, t, u, v)$  sont décrites par des équations *forward* et *backward* (Helwich, 2008), s'écrivant respectivement pour tout  $0 \leq u \leq s \leq t$ ,  $v \geq 0$  et pour tout  $h, j \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{hj}(s, t, u, v) &= \int_0^v \mu_{hh}(t, \tau) p_{hj}(s, t, u, d\tau) + \sum_{l \neq j} \int_0^\infty \mu_{lj}(t, \tau) p_{hl}(s, t, u, d\tau) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} p_{hj}(s, t, u, v), \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{hj}(s, t, u, v) = - \sum_{l \in \mathcal{S}} \mu_{hl}(t, \tau) p_{lj}(s, t, 0, v) - \frac{\partial}{\partial u} p_{hj}(s, t, u, v).$$

Les équations *backward* de Kolmogorov, sensiblement plus simples, sont généralement celles que l'on cherche à résoudre numériquement pour obtenir une expression des probabilités de transition dans le cas semi-markovien. Buchardt *et al.* (2014) examinent également une méthode de résolution numérique pour les équations *forward* avec laquelle ils obtiennent de bonnes performances.

#### 1.1.4 Évaluation des provisions en assurance de personnes

Nous considérons à présent le provisionnement d'un contrat d'assurance de personnes. Cette brève description permet de faire apparaître les quantités techniques fondamentales qui devront être estimées par les actuaires. Nous considérons ici un calcul brut de réassurance, la présence de mécanismes de transfert de risques n'étant pas abordé dans cette thèse. L'évaluation des provisions techniques (prospective) nécessite de projeter les flux relatifs aux contrats en portefeuille à la date d'évaluation. Pour un assuré, les flux futurs versés dépendent de la suite d'états dans lequel il se trouvera pendant la durée de couverture de la police. Nous nous référons à Haberman et Pitacco (1998), Denuit et Robert (2007), Christiansen (2012), Norberg (2014) et Buchardt *et al.* (2014) pour une présentation complète.

Dans un souci de simplicité, nous supposons que l'assuré verse des primes, lissées continuellement dans le temps pour un montant  $b_h(t, u)$  et perçoit une prestation ponctuelle  $\Delta B_h(t, u)$ , en date  $t$  s'il se trouve dans l'état  $h \in \mathcal{S}$  depuis une durée  $u$ . Nous considérons de plus qu'il perçoit une prestation  $b_{hj}(t, u)$  lors de chaque transition  $h \rightarrow j$ . De cette manière, les flux entrants et sortants du contrats  $B(t)$ , cumulés entre la date initiale et la date  $t$  satisfont l'équation

$$dB(t) = \sum_{h \in \mathcal{S}} \mathbb{1}_{\{X_t = h\}} dB_h(t, U_t) + \sum_{\{h, j: h \neq j\}} b_{ij}(t, U_t) dN_{hj}(t), \quad (1.23)$$

où  $dB_h(t, U_t) = b_h(t, U_t) + \Delta B_h(t, U_t)$ <sup>5</sup>. Les différentes fonctions de paiement sont supposées déterministes.

L'expression des provisions *best estimate* (ou réserves mathématiques) correspond à l'espérance de la valeur actuelle de ces flux nets en tenant compte d'une courbe des taux sans risque spécifiée réglementairement. Elle s'écrit pour un assuré présent dans l'état  $h$  depuis une durée  $u$  en date  $t$

$$V_h(t, u) = \mathbb{E} \left[ \int_t^{+\infty} \frac{\delta(\tau)}{\delta(t)} dB_h(t, U_t) | X_t = h, U_t = u \right], \quad (1.24)$$

où le coefficient d'actualisation, supposé ici déterministe, s'écrit de manière classique à partir du taux sans risque  $(r_t)_{t \geq 0}$  tel que pour tout  $0 \leq t \leq T$

$$\delta(t) = \exp \left( - \int_0^t r_\tau d\tau \right).$$

Après quelques manipulations, nous pouvons réécrire (1.24) en faisant apparaître les probabilités et les intensités de transition.

$$\begin{aligned} V_h(t, u) &= \int_t^{+\infty} \frac{\delta(\tau)}{\delta(t)} \sum_{j \in \mathcal{S}} \int_t^{u+\tau-t} p_{hj}(t, \tau, u, dv) \left( dB_j(\tau, v) + \sum_{\{l: l \neq j\}} \mu_{jl}(\tau, v) b_{jl}(\tau, v) d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Pour une mise en œuvre pratique, on cherchera dans cette expression à connaître les probabilités  $p_{hj}(t, \tau, u, v)$  et les intensités de transition  $\mu_{jl}(\tau, v)$ . La prise en compte des conditions du contrat (franchise, période spécifique de couverture) conduit à ajuster le terme  $p_{hj}(t, \tau, u, v)$  par une probabilité plus contrainte. À titre d'exemple, pour une période de franchise de durée  $f$  s'activant lors de la transition  $h \rightarrow j$ , on considèrera une probabilité du type

$$\mathbb{P}(X_t = j, f < U_t \leq v | (X_s, U_s) = (h, u)).$$

Une autre formulation de (1.24) est possible et plus fréquemment retenue dans la pratique. En séparant les périodes antérieures et postérieures au premier saut, l'expression des réserves apparaît sous la forme d'un système d'équations intégral-différentielles connu sous le nom d'équations de Thiele de type 1.

$$\begin{aligned} V_h(t, u) &= \int_t^{+\infty} \frac{\delta(\tau)}{\delta(t)} (1 - \bar{p}_{hh}(t, \tau, u)) dB_h(\tau, u + \tau - v) \\ &+ \sum_{\{j: j \neq h\}} \int_t^{+\infty} \frac{\delta(\tau)}{\delta(t)} (1 - \bar{p}_{hh}(t, \tau, u)) \mu_{hj}(\tau, u + \tau - t) (b_{hj}(\tau, u + \tau - t) + V_j(\tau, 0)) d\tau \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ce type d'équation se résout généralement numériquement (voir Helwich (2008) pour une résolution en temps continu et Janssen et Manca (2007) pour les déclinaisons à l'assurance arrêt de travail en temps discret). Pour des déclinaisons opérationnelles, on se concentre cette fois sur l'évaluation des probabilités de type  $\bar{p}_{hh}(t, \tau, u)$  ainsi que sur les intensités de transition. Dans le Chapitre 3, nous verrons comment il est possible, pour les deux formulations (1.25) et (1.26), d'obtenir pour certains types de modèles multi-états acycliques (sans retour) une estimation directe des probabilités d'intérêt.

5.  $B_h$  correspond au processus comptabilisant le total des paiements effectués depuis l'entrée dans l'état  $h$ .

## 1.2 Analyse de survie et modèle à risques concurrents

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les modèles multi-états constituent un cadre naturel pour le provisionnement et la tarification de produits d'assurance de personnes. Or, ce cadre de base demeure encore aujourd'hui assez méconnu des praticiens, qui manipulent pour les aspects pratiques des probabilités de transitions estimées sur les bases statistiques des modèle de survie (lorsqu'elles ne sont pas directement issues d'une référence externe). Ces pratiques proviennent, d'une part du manque de données permettant de décrire les transitions du modèle, et d'autre part, de l'acceptation de méthodes moins sophistiquées dans l'ancien dispositif prudentiel qui étaient admises dès lors qu'elles étaient suffisamment prudentes. Notons à ce titre que le second argument explique en partie le premier. Prenons pour illustrer ce propos le cas simple d'un modèle à risques concurrents comprenant deux causes (p. ex. deux causes de décès, l'une due à un accident et l'autre sans accident), se présentant sous la forme du modèle multi-états décrit par la Figure 1.7. L'utilisation de techniques d'inférence reposant

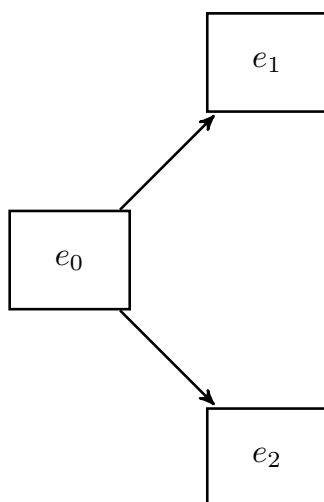


FIGURE 1.7 – Modèle à risques concurrents à 2 états.

sur l'analyse de survie conduit à considérer chacune des deux causes isolement, en négligeant leur possible interdépendance, ce qui peut induire des biais significatifs, notamment si les deux causes en question ne sont indépendantes. Une illustration numérique de l'importance que peut prendre ce phénomène est proposée en Annexe 1.5.1.

Ce simple problème, bien connu des biostatisticiens, conduit à s'intéresser aux méthodes d'estimation pouvant être mises en œuvre pour l'utilisation des modèles multi-états en assurance. Dans cette thèse, nous nous concentrons plus spécifiquement, dans les Chapitres 2 et 3, sur les techniques d'inférence non-paramétrique, qui ont l'avantage de fournir des outils de base pour mesurer l'adéquation aux données des lois multi-états utilisées. Dans cette section, nous repartons des données observées par les organismes puis nous présentons deux cadres pour l'estimation des modèles à risques concurrents : le modèle à durées latentes et l'approche multi-états. La présentation du premier permet de rappeler quelques concepts simples de l'inférence non-paramétrique des modèles survie, alors que le second décrit les techniques d'inférence utilisées dans le cadre général d'un modèle multi-états markovien, le modèle à risques concurrents pouvant être déduit comme un cas particulier. Nous nous appuyons sur

l'ouvrage très complet de Andersen *et al.* (1993) ainsi que sur les présentations de Andersen *et al.* (2002) et de Andersen et Perme (2008).

### 1.2.1 Données observées

Les informations recueillies par les assureurs lors de la souscription et pour le paiement des flux associés aux contrats d'assurance de personnes peuvent, sous réserve d'une qualité suffisante, permettre la constitution de cohortes (ou plutôt de cohortes synthétiques) de données de survie ou de données longitudinales (Hougaard, 2001). À l'inverse, les données nationales sont bien souvent issues de recensements, c'est-à-dire qu'elles ne contiennent qu'une observation des âges et des dates de survenance d'un événement (le plus souvent le décès) sur une période donnée. En présence de plusieurs états au sein du contrat, les assureurs devraient *a priori* être en capacité de suivre de manière précise les dates de changement d'état ainsi que la suite des états successifs sur la durée de couverture du contrat. Pour les contrats ne portant que sur un risque de décès, le suivi longitudinale se limite à l'enregistrement des dates de naissance et de décès, puisqu'un seul changement d'état se produit et marque la fin de vie.

Les assureurs sont cependant confrontés en pratique à une perte d'information provenant d'un phénomène de censure et de troncature. On s'intéresse donc, dans la suite, aux différents mécanismes de perte d'information auxquels sont le plus couramment exposés les organismes pour ensuite se positionner sur le cadre d'inférence adapté.

**Censure.** Le phénomène de censure aléatoire<sup>6</sup> à droite constitue le phénomène le plus fréquent en assurance de personnes. En pratique, il apparaît lorsqu'un assuré quitte le portefeuille de contrats de l'organisme avant que le phénomène étudié ne se soit manifesté, soit par résiliation du contrat, soit parce que la fin de l'étude précède le phénomène en question. Lorsqu'on étudie la mortalité, la censure à droite survient donc lorsque l'individu est vivant à la date de la dernière observation. Dans le cadre multi-états, plus généralement, l'information observée se limite à la succession des états et des dates de transition connues jusqu'à la date de censure. Plus rarement, les données peuvent également être censurées à gauche, c'est-à-dire que le phénomène d'intérêt s'est déjà produit avant d'être observé. Par exemple, en assurance arrêt de travail, ce type de censure correspond au cas où un assuré bascule dans un état d'incapacité ou d'invalidité sans qu'on puisse connaître la date de transition. Cette perte d'information est problématique puisqu'en arrêt de travail l'hypothèse de Markov n'est généralement pas vérifiée, les transitions dépendant de la date d'entrée dans l'état de vulnérabilité. Ce mode de censure est, en pratique, relativement compliqué à appréhender (cf. Satten et Sternberg, 1999, pour un exemple d'application) et constitue généralement un motif d'exclusion de l'analyse<sup>7</sup>.

Dans la majorité des études et notamment en assurance, le phénomène de censure à droite est supposé indépendant des transitions entre états. Il s'agit de l'hypothèse que nous retenons pour la description des méthodes d'estimation dans les Chapitres 2 et 3 de cette thèse. Lorsque qu'elle n'est plus satisfaite, par exemple dans le domaine médical lorsque l'arrêt du suivi et la dégradation de l'état de santé des patients surviennent en même temps, on parle alors de censure informative. Dans ce cas de figure, la non-prise en compte de l'information contenue

6. La censure aléatoire rencontrée ici est qualifiée de censure de type III. On parle de censure de type I pour un événement commun qui censure la durée de vie d'un échantillon et de censure de type II pour une censure survenant au  $k$ -ième décès au sein de l'échantillon.

7. Certains auteurs, en l'absence de censure à droite, traitent également cette problématique en renversant l'axe du temps mais ces techniques présentent certaines lacunes méthodologiques.

dans le phénomène de censure, c'est-à-dire que les patients à risque sont plus fréquemment censurés, peut engendrer des biais importants, ce qui nécessite de recourir à des techniques d'estimation appropriées permettant de "repondérer" l'information apportée par ces individus. Le lecteur intéressé pourra se reporter à Robins (1993) pour des techniques classiques (IPCW ou *Inverse Probability Censoring Weighted*), s'appuyant sur l'utilisation de covariables pour expliquer le processus de censure, ou à l'ouvrage général de Halloran *et al.* (2000) en analyse de survie ainsi qu'à Datta et Satten (2002) pour une utilisation dans un cadre multi-états.

Un autre mode de censure, la censure par intervalle, est fréquemment rencontré dans le domaine biomédical. Dans ce cas, les dates de transition ne sont pas directement observées mais il est possible de déterminer qu'elles se produisent entre deux dates d'observations consécutives (p. ex. deux consultations chez un médecin). Dans la pratique, la plupart des techniques d'inférence qui ont été développées pour des modèles multi-états dont la structure est progressive (sans retour possible) et pour lesquels le nombre de transitions possibles entre deux dates est limité (une seule dans la majorité des cas comme par exemple dans le modèle *illness-death*). Ce mode d'observation n'est cependant pas très fréquent en assurance et ne sera pas d'avantage étudié dans le cadre de cette thèse. Le lecteur intéressé pourra toutefois se reporter à Frydman (1995) pour l'utilisation de modèle non-paramétriques ainsi qu'aux thèses de Foucher (2007) et Touraine (2013) pour un ensemble d'applications aux pathologies chroniques et à la dépendance de personnes âgées à partir de modèles markoviens et semi-markoviens paramétriques, principalement de type *illness-death*.

**Troncature.** La troncature à gauche est omniprésente en assurance puisque l'observation d'un individu ne peut commencer qu'à partir de la date de souscription. Ainsi, le phénomène en question n'est pas observable en-deçà d'un certain seuil, fixe ou aléatoire. Le cas opposé, moins fréquent, correspond à un phénomène de troncature à droite. Dans ce contexte, les lois estimées à partir de l'observation de telles données sont nécessairement conditionnelles à l'intervalle de temps d'observation (au-delà de l'événement de troncature quand elle est à gauche et en-deçà quand elle est à droite). Pour les mêmes raisons que la censure, la troncature est généralement supposée indépendante du phénomène suivi.

La troncature à gauche ne doit pas être confondue avec la censure à gauche. Pour reprendre l'exemple de l'arrêt de travail, tout événement incluant une perte d'information survenant avant ou à la date précise de l'entrée en arrêt de travail est assimilable à une troncature. De même, si le suivi des assurés invalides ne débute qu'à partir d'une certaine date (p. ex. à la expiration d'une période de franchise) mais que la date précise de la transition est connue, il sera possible de parler de troncature. À l'inverse, il s'agira de censure à gauche si l'information recueillie ne permet pas de déterminer la durée de présence de l'état. De manière triviale, on parlera de troncature si le modèle retenu est supposé markovien, que la date de transition soit connue ou non.

### 1.2.2 Estimation fondées sur des durées latentes

Considérons un modèle simple à deux causes concurrentes, comme celui illustré en Figure 1.7, pour lequel sont définies deux durées de vie, appelées durées de vie latentes et notées  $T_{01}$  et  $T_{02}$ . Il s'agit pour chacune d'elle de la durée de vie hypothétique que connaîtrait un individu s'il n'était soumis qu'à une seule des deux causes. La durée de vie globale de l'individu  $T$  s'écrit alors

$$T = \min(T_{01}; T_{02}).$$

On note  $V$  la cause de sortie observée. En présence de censure indépendante à droite  $C$ , on observe les variables

$$Y = \min(T; C), \quad \gamma = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}} \text{ et } \gamma V.$$

On note  $(Y_i, \gamma_i, \gamma_i V_i)_{1 \leq i \leq n}$  les observations réalisées pour un échantillon i.i.d. La fonction de survie  $S$  de durée de  $T$  peut-être estimée à partir de l'estimateur de Kaplan-Meier (Kaplan et Meier, 1958)

$$\widehat{S}(t) = \prod_{\{i: Y_{i:n} \leq t\}} \left(1 - \frac{1}{L_0(Y_{i:n})}\right)^{\gamma_{[i:n]}} \quad (1.27)$$

où  $Y_{i:n}$  est la statistique d'ordre  $i$  des  $Y_i$ ,  $\gamma_{[i:n]}$  l'indicatrice associée et  $L_0(t)$  le nombre d'individus vivants en  $t$ . Cet estimateur possède de bonnes propriétés statistiques (consistance et normalité asymptotique) (Klein et Moeschberger, 2003) et est couramment employé par les actuaires, s'intéressant aux problématiques de construction de tables d'expérience.

Lorsque les deux causes de sortie sont indépendantes entre elles, il est possible d'estimer les durées de survie  $T_{01}$  et  $T_{02}$  de la même manière. En effet, l'estimateur de Kaplan-Meier peut s'appliquer à l'une des causes en assimilant la seconde à une variable de censure. Cependant, l'hypothèse d'indépendance sous-jacente n'est pas vérifiable sur la base des données puisque seule la cause qui se réalise est observable. La structure de dépendance entre les causes est dès lors non identifiable (Tsiatis, 1975; Andersen et Keiding, 2012).

En biostatistique pourtant, les praticiens sont généralement intéressés par la loi de durée de vie latente, plus facile à interpréter dans un cadre appliqué. Aussi, s'ils ne recourent pas à l'hypothèse d'indépendance, une approche couramment mise en œuvre, appelée *graphic-copula* (Zheng et Klein, 1995; Rivest et Wells, 2001), consiste à réintroduire une copule *a priori*, liant les durées de vie latentes, pour l'inférence statistique. Le principal défaut de cette approche provient du fait que la structure de dépendance introduite n'est pas vérifiable. En actuariat, ces travaux ont notamment été utilisés pour mesurer l'impact d'un ajustement ou du retrait de certaines causes de décès sur la survie générale d'une population (Carrière, 1994; Kaishev *et al.*, 2007; Dimitrova *et al.*, 2013).

Un autre point, plus immédiat à vérifier, est que l'utilisation de l'estimateur  $1 - \widehat{S}$  associé à  $T_1$  ou  $T_2$  n'est, par définition, pas adaptée pour calculer des probabilités d'incidence dans l'une des causes. Cela peut conduire à des biais pouvant être très significatifs comme le note par exemple Gooley *et al.* (1999). Ce phénomène est clairement en lumière dans l'annexe 1.5.1.

Aussi, plutôt que de s'intéresser aux durées de vie latentes, il est préférable de travailler avec les fonctions d'incidence cumulée

$$F^{(j)}(t) = \mathbb{P}(T \leq t, V = j) = p_{0j}(0, t), \quad j = 1, 2, \quad (1.28)$$

qui sont identifiables et peuvent être estimées à partir des outils généraux proposés dans le cadre markovien.

### 1.2.3 Estimation reposant sur une approche multi-états

La seconde approche que nous qualifions ici de multi-états ne requiert pas d'hypothèse particulière de dépendance entre les durées de vie latentes. Nous introduisons les notations suivantes et nous nous plaçons dans un cadre où l'hypothèse de Markov est vérifiée. Pour une période d'observation quelconque  $\mathcal{T}$ , les sauts survenus à la date  $t \in \mathcal{T}$  d'un état  $h$  vers un

état  $j$  sont dénombrés à partir du processus de comptage  $N_{hj}(t)$  et le nombre d'individus présents dans l'état  $h$  en  $t$  est noté  $L_h(t)$ <sup>8</sup>.

Nous supposons que le processus de Markov est soumis à un mécanisme de censure à droite indépendante et non-informative. Comme nous le précisons dans l'Annexe 1.5.2, l'inférence statistique d'un modèle markovien est effectuée à partir de processus de comptage censurés, c'est-à-dire pour les grandeurs introduites ne font appel qu'à l'échantillon observable à chaque date, comme s'il s'agissait de processus non-censurés. Ainsi, les estimateurs que nous présentons dans la suite s'écrivent de manière identique dans les deux cas. Les notations qui suivent ne font donc pas explicitement apparaître de lien avec la censure afin d'alléger les notations, mais devront cependant être considérées dans leur version censurée. De même et sans perte de généralité, nos notations ignorent la troncature (indépendante) à gauche.

L'inférence non-paramétrique de ces modèles s'aborde en deux temps. On s'intéresse d'abord à l'estimation des intensités de transition, puis on en déduit les probabilités de transition.

**Estimation des intensités de transition.** Pour un groupe supposé homogène d'individus, l'estimateur non-paramétrique des intensités d'un processus markovien est donné par les théories des processus de comptage et des martingales à partir de l'estimation de Nelson-Aalen (Andersen *et al.*, 1993). Il fournit une estimation de fonction d'intensité cumulée (1.6) pour la transition  $h \rightarrow j$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$

$$\widehat{A}_{hj}(t) = \int_0^t \frac{dN_{hj}(\tau)}{L_h(\tau)} = \sum_{\{k:t_k \leq t\}} \frac{d_{hj}(t_k)}{L_h(t_k)}. \quad (1.29)$$

où les  $t_k$  représentent les temps de saut, toutes transitions confondues du processus, et  $d_{hj}(t)$  correspond au nombre de transitions  $h \rightarrow j$  en  $t$  (cf. Annexe 1.5.3 pour ces principales propriétés). Les incréments de (1.29) permettent de calculer les estimateurs des intensités de transitions  $\mu_{hj}$ , qu'il est ensuite possible de lisser, par exemple, en introduisant une fonction de noyau. L'approche non-paramétrique, exception faite des modèles de survie, est peu présentée dans la littérature actuarielle. En risque de crédit, elle est développée par exemple par Lando et Skødeberg (2002).

**Estimation des probabilités de transition.** En présence de censures et de troncatures indépendantes, l'estimateur classique d'Aalen-Johansen (Aalen et Johansen, 1978) utilise l'expression des matrices de transition sous forme de produit intégral (1.9) et l'estimateur de Nelson-Aalen (1.29) pour déduire un estimateur des probabilités de transition tel que pour tout  $s, t \in \mathcal{T}$  avec  $s \leq t$

$$\widehat{\mathbf{p}}(s, t) = \mathcal{P}_{\tau \in [s, t]} \left( \mathbf{Id} + d\widehat{\mathbf{A}}(\tau) \right), \quad (1.30)$$

où  $\widehat{\mathbf{A}}(t) = \left( \widehat{A}_{hj}(t) \right)_{h, j \in \mathcal{S}}$  correspond à la matrice des estimateurs de Nelson-Aalen en  $t$ . Ces dernières étant des fonctions en escalier, l'expression (1.30) se simplifie en un simple produit, comme pour l'Équation (1.10). Il s'agit d'un estimateur dit *plug-in* dans le sens où il est obtenu en remplaçant la valeur des matrices d'intensité cumulée par leur estimateur. Par ailleurs, il est une stricte généralisation de l'estimateur de Kaplan-Meier, et possède tout comme lui de bonnes propriétés asymptotiques (cf. Annexe 1.5.4). Les intervalles de confiance asymptotiques sont obtenus généralement par *bootstrap* non-paramétrique (Efron, 1979).

8. Nous omettons volontairement dans cette présentation la taille de l'échantillon pour alléger les notations.



**Prise en compte de variables explicatives.** Les modèles multi-états présentent l'intérêt de pouvoir être conjugués avec les modèles de régression utilisés classiquement dans le cadre des modèles de survie. Si de nombreux modèles régressifs sont potentiellement applicables, le modèle multiplicatif de Cox à hasard proportionnel est le plus fréquent Cox (1972). L'intensité relative à la transition  $h \rightarrow j$  est définie par

$$\mu_{hj}(t | \mathbf{Z}_{hj,i}, \boldsymbol{\theta}) = \mu_{0hj}(t) \exp\left(\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Z}_{hj,i}\right), \quad (1.31)$$

où  $\mathbf{Z}_{hj,i}$  est un vecteur de covariables associées à l'individu  $i$  (constantes ou variables avec le temps) et  $\mu_{0hj}(\cdot)$  une fonction d'intensité de base, paramétrique ou indéterminée (cf. Annexe 1.5.5 pour plus détails). De nombreuses extensions et alternatives sont possibles, comme le modèle additif d'Aalen (Martinussen et Scheike, 2006). L'estimateur des intensités cumulées de base  $\mu_{0hj}$  peut être estimé paramétriquement ou non-paramétriquement (modèle semi-paramétrique) comme décrit ci-dessus. Pour un modèle semi-paramétrique, les paramètres de régression sont estimés en décomposant la vraisemblance du modèle en une composante ne dépendant que de  $\mu_{0hj}$  et une autre, appelée vraisemblance partielle de Cox, ne dépendant que du terme exponentiel. Les intensités de transition de base sont alors estimées par le biais de l'estimateur de Breslow (Andersen *et al.*, 1993) qui est dérivé de l'estimateur de Nelson-Aalen (1.29).

La prise en compte de variables latentes peut s'effectuer par le biais de modèles de fragilité (Hougaard, 1995; Duchateau et Janssen, 2007) comme dans le cadre l'analyse de survie

$$\mu_{hj}(t | \mathbf{Z}_{hj,i}, \boldsymbol{\theta}) = \mu_{0hj}(t) \omega \exp\left(\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Z}_{hj,i}\right), \quad (1.32)$$

où  $\omega$  est une variable aléatoire positive de fragilité<sup>9</sup>.

**Déclinaison pour les modèles à risques concurrents.** Il est très simple de voir qu'un modèle à risques concurrents est un cas particulier du modèle markovien. Dans ce contexte, les probabilités de transition et donc les taux d'incidence se déduisent facilement de l'estimateur d'Aalen-Johansen. La probabilité de transition estimée  $e_0 \rightarrow j$  admet de plus une expression commode sous la forme d'une somme en utilisant les temps de saut observés  $t_k$  pour toute cause et pour tout  $s, t \in \mathcal{T}$  avec  $s \leq t$  et  $j \neq e_0$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{0j}(s, t) &= \sum_{\{k:s < t_k \leq t\}} \left\{ \prod_{\{l:s < t_l < t_k\}} \left(1 - \frac{d_0(t_l)}{L_0(t_l)}\right) \right\} \frac{d_{0j}(t_k)}{L_0(t_k)} \\ &= \sum_{\{k:s < t_k \leq t\}} \frac{\hat{S}(t_k) d_{0j}(t_k)}{\hat{S}(s) L_0(t_k)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec  $d_0(t) = \sum_{j \neq e_0} d_{0j}(t)$ .

Le Chapitre 2 analysera les approches basées par durées latentes et multi-états pour estimer non-paramétriquement les taux d'incidence de contrats proposant des garanties en dépendance lourde par cause de survenance. Ceci permet de mesurer le biais commis par les praticiens lors de l'emploi de techniques reposant sur l'analyse de survie.

9. Classiquement, une loi log-normale ou gamma est retenue pour simplifier l'inférence du modèle.

### 1.3 Inférence statistique en dehors du cadre markovien

Les techniques d'inférence décrites jusqu'ici permettent d'introduire l'ensemble des modèles markoviens, indépendamment du nombre d'états et du type de transition envisagé. Toutefois, bien que l'hypothèse de Markov soit classiquement utilisée en assurance de personnes, en raison de sa commodité ou d'un manque de données, elle est mise en défaut dans la plupart des contrats de cette branche. En effet, les états qui traduisent une situation où l'assuré est fragilisé dépendent généralement de l'âge de l'assuré et du temps de séjour dans cet état. Pour répondre à cette problématique, il convient d'accroître la flexibilité du modèle en utilisant le cadre semi-markovien, décrit dans la Section 1.1.3. L'inférence du modèle devient alors plus complexe.

En s'appuyant sur les mêmes formats de données<sup>10</sup>, nous discutons dans cette section les différentes approches proposées dans la littérature pour conduire l'inférence de modèles semi-markoviens homogènes et non-homogènes. Nous passons en revue à la fois les techniques paramétriques et non-paramétriques, mais nous intéresserons plus spécifiquement aux secondes en lien avec les applications proposées dans cette thèse. Nous distinguons deux cas : celui où une seule variable de durée est présente (cas homogène) et le cas où deux variables sont nécessaires (cas inhomogène).

#### 1.3.1 Estimation avec une seule variable temporelle

La complexité à estimer un modèle semi-markovien dépend de son caractère homogène ou inhomogène et s'accroît lorsque au moins un état est récurrent, c'est-à-dire un état dans lequel le processus est susceptible de revenir après l'avoir quitté. Dans cette section, nous supposons que les intensités de transition ne sont fonction que d'une seule variable temporelle et qu'au moins une transition dépend de la durée de présence dans l'état. Il est en effet envisageable de considérer des modèles, où certaines transitions dépendent de la variable temporelle principale  $t$  et d'autres de la durée de séjour  $U_t$ .

**Estimation d'un modèle sans boucle.** Lorsque qu'aucun état n'est récurrent<sup>11</sup>, les mécanismes d'estimation paramétriques et non-paramétriques, développées dans la cas markovien s'appliquent (cf. Andersen *et al.*, 1993, Chapitre X). On distingue pour cela les transitions qui dépendent du temps  $t$  et celles qui dépendent de la durée de séjour  $U_t$ . Pour chaque transition  $h' \rightarrow j'$  fonction de la durée, il s'agit d'opérer un changement de variable pour les processus  $N_{h'j'}(t)$  et  $L_{h'}(t)$ , de sorte que les processus d'intérêt deviennent

$$\tilde{N}_{h'j'}(U_t) = N_{h'j'}(U_t + T_{h'}) \text{ et } \tilde{L}_{h'}(U_t) = L_{h'}(U_t + T_{h'}) ,$$

où  $T_{h'}$  désigne la date d'entrée dans l'état  $h'$ . Ces nouvelles quantités permettent de mesurer le nombre de transitions  $h' \rightarrow j'$ , survenues avant la durée  $U_t$ , et l'exposition aux risques dans l'état  $h'$  pour cette durée.

L'inférence non-paramétrique de ce type de modèle peut donc être abordée de la même manière que celle présentée dans la Section 1.2.3. Cependant, les méthodes retenues, notamment en actuariat, étant à majorité de nature paramétrique, nous détaillons à présent quelques

---

10. Nous omettons volontairement les approches proposées dans le cadre avec censure par intervalles car elles n'auront pas directement d'utilité dans cette thèse.

11. On rencontre fréquemment les termes acyclique, sans boucle ou encore progressif pour qualifier ce type de modèle.

spécifications usuelles. Il convient d'ailleurs de noter que ces modèles multi-états sans boucle permettent de représenter une large gamme de garanties d'assurance de personnes. Ceci a permis, du fait de la proximité entre modèles markoviens et semi-markoviens, de construire un cadre commun pour l'estimation paramétrique.

Les intensités de transition  $\mu_{hj}(t, \boldsymbol{\theta})$  (ou de manière équivalente  $\mu_{hj}(u, \boldsymbol{\theta})$  avec  $u$  la durée de présence) peuvent être estimées pour une loi connue (p. ex. Weibull, Gamma, Gompertz-Makeham, mélanges) de paramètre  $\boldsymbol{\theta}$ , par maximum de vraisemblance (ou vraisemblance partielle en présence de censure, cf. Annexe 1.5.2). Quelques exemples en assurance dépendance sont par exemple proposés par Ferri et Olivieri (2000) et Olivieri et Pitacco (2001). Un cadre fréquemment utilisé et plus flexible qu'une loi usuelle consiste à supposer les intensités constantes par morceaux (modèle de Poisson), telles que pour une décomposition en  $K_{hj}$  segments pour la transition  $h \rightarrow j$ , on a

$$\mu_{hj}(t) = \mu_{hj,k} \text{ pour } t \in ]t_{hj,k-1}; t_{hj,k}], \quad k = 1, \dots, K_{hj}.$$

Dans ce contexte, l'estimateur du maximum de vraisemblance<sup>12</sup> correspond au ratio *nombre de transitions / exposition* pour chaque intervalle de temps sur lequel l'intensité est considérée constante. L'estimateur

$$\hat{\mu}_{hj,k} = \frac{N_{hj}(t_{hj,k}) - N_{hj}(t_{hj,k-1}+)}{\int_{t_{hj,k-1}}^{t_{hj,k}} L_h(\tau) d\tau},$$

est asymptotiquement gaussien, d'écart-type

$$\sigma_{hj,k} = \frac{\sqrt{N_{hj}(t_{hj,k}) - N_{hj}(t_{hj,k-1}+)}}{\int_{t_{hj,k-1}}^{t_{hj,k}} L_h(\tau) d\tau}.$$

Le point le plus complexe réside dans la détermination de la fenêtre temporelle sur laquelle les intensités sont supposées constantes. Une fois cette question résolue, les probabilités de transition s'obtiennent aisément pour chaque segment (puisque la solution des équations de Kolmogorov s'expriment sous forme d'une exponentielle de matrice (1.11)), puis pour n'importe quelle période en appliquant l'équation de Chapman-Kolmogorov (1.4). Cette spécification est couramment retenue en actuariat (p. ex. Jones, 1993, 1994) ou en risque de crédit, comme dans Jarrow *et al.* (1997) ou Kavvathas (2001) avec une hypothèse d'homogénéité des transitions.

Une autre spécification fréquente consiste à appliquer un modèle linéaire généralisé (GLM) de Poisson pour régulariser les intensités de transition, qui ont été préalablement supposées constantes par morceaux. Pour une partition donnée, les intensités calculées selon la méthode précédente servent alors de référence pour la validation du modèle GLM. Cette méthodologie, également appliquée aux taux de hasard pour la mortalité<sup>13</sup>, consiste à supposer que le nombre de transitions  $h \rightarrow j$  observées  $d_{hj}(t)$  à la date  $t$  entière (ou de manière plus appliquée à l'âge  $x$ ) est défini par une loi de Poisson, dont le paramètre est obtenu grâce au prédicteur

$$\eta \left( \mathbb{E} \left[ \frac{d_{hj}(t)}{\int_t^{t+1} L_h(\tau) d\tau} \right] \right) = \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Z}_{hj,i}.$$

12. Certains auteurs considèrent l'approche avec intensité constante par morceaux comme non-paramétrique. Nous faisons le choix de la classer comme une méthode paramétrique puisqu'elle n'est pas non-paramétrique au sens d'une estimation par maximum de vraisemblance.

13. cf. Delwarde et Denuit (2005) et Tomas (2013) pour les techniques de régularisation existantes pour la mortalité.

La méthodologie retenue historiquement par le CMIB (*Continuous Mortality Investigation Bureau*) au Royaume-Uni (CMIR12, 1991) s'appuie sur ce formalisme. Elle propose un certain nombre de méthodes faisant office de référence en actuariat pour estimer les taux de transition en arrêt de travail et en assurance dépendance (cf. Renshaw et Haberman, 1995; Cordeiro, 2002; Fong *et al.*, 2015, pour quelques applications à différents types de garantie). Cette pratique est présentée en détail par Haberman et Pitacco (1998). Notons néanmoins que les applications qui en découlent sont généralement produites sur des données nationales. Ainsi, les questions relatives aux effets de la censure, de la troncature et du choix de la fenêtre sur laquelle les intensités sont supposées constantes ne peuvent être analysées. De plus, ces données présentant peu de covariables, le terme  $\theta^\top \mathbf{Z}_{h,j,i}$  s'exprime souvent comme une fonction polynomiale de l'âge de l'assuré.

**Estimation d'un modèle avec boucle.** Lorsque le modèle multi-états comprend des états récurrents, le changement de variables sur les processus de comptage présenté *infra* n'est plus opérant. En effet, il n'est plus possible de considérer les processus  $\tilde{N}_{hj}$  comme des semi-martingales. Toutefois, Gill (1980) étudie ces processus, à la suite de Lagakos *et al.* (1978), et parvient à montrer que les techniques, fondées sur la théorie des processus de comptage et utilisées pour l'inférence non-paramétrique du modèle markovien, peuvent s'appliquer pour le calcul du noyau semi-markovien homogène (1.13). L'estimateur introduit converge presque sûrement et est asymptotiquement normal en présence de censure à droite. Il s'écrit en date  $t$  pour la transition  $h \rightarrow j$

$$\hat{Q}_{hj}(t) = \int_0^t \left(1 - \hat{H}_h(\tau)\right) \frac{dN_{hj}(\tau)}{L_h(\tau)}, \quad (1.34)$$

où  $H_h(u) = \mathbb{P}(\Delta S_{k+1} \leq u \mid J_k = h)$  correspond à la fonction de répartition de la durée de présence dans l'état  $h$  et  $\hat{H}_h(t)$  à l'estimateur de Kaplan-Meier associé. On remarque que l'estimateur non-paramétrique du NSM est proche de celui associé aux probabilités de transition d'un modèle à risques concurrents (1.33). En considérant l'Équation (1.22), Spitoni *et al.* (2012) proposent un estimateur pour les probabilités de transition tel que

$$\hat{\Psi}_{hj}(t) = \sum_{m \geq 0} \hat{Q}_{hj}^{(m)}(t) * \left(1 - \hat{H}_j(t)\right).$$

Cet estimateur dispose également de bonnes propriétés asymptotiques, mais ses lois limitent sont complexes à obtenir.

L'inférence paramétrique de modèles semi-markoviens homogènes est équivalente au cas markovien. À l'inverse du cas sans boucle, le cadre avec boucle est relativement peu utilisé dans la littérature appliquée en actuariat. On pourra cependant se reporter à Denuit et Robert (2007, Chapitres 8 et 9) pour une présentation générale avec un modèle à intensité constante par morceaux. Notons que cette spécification est équivalent à celle retenue par Ouhbi et Limnios (1999). La mise en œuvre de modèles semi-markoviens homogènes est beaucoup plus courante en biostatistique et en fiabilité, où la pratique consiste à se focaliser sur le noyau (1.13) plutôt que sur les intensités de transition. Il s'agit alors de spécifier des probabilités de saut (1.16) et des fonctions de densité (1.18)<sup>14</sup>. La très grande majorité des applications utilisent des distributions courantes pour ces fonctions (p. ex. Foucher *et al.*, 2005, pour une spécification prenant en compte des covariables à partir de la formulation de Cox).

14. De manière équivalente, il est possible de spécifier une loi de probabilité pour la fonction de risque (1.19).

### 1.3.2 Estimation avec deux variables temporelles

Les approches développées, notamment pour l'inférence paramétrique des modèles multi-états, se limitent généralement au cas markovien et semi-markovien homogène. En effet, le cas semi-markovien non-homogène requiert la spécification de lois de probabilité en dimension deux, pour lesquelles il existe un choix relativement restreint. Pour autant, les modèles semi-markoviens inhomogènes sont ceux qui correspondent le mieux aux applications actuarielles et biomédicales. Aussi, la plupart des développements entrepris dans la littérature appliquée considèrent l'une des deux approches et s'adaptent, si possible, au cas inhomogène en considérant l'une des deux variables de durée comme une covariable.

Par la suite, nous considérons deux approches : celles fondées sur un noyau ou sur des intensités de transition, et celles s'appuyant sur un calcul direct des probabilités de transition. Dans le premier cas, il ne sera pas possible de dégager de méthodes d'estimation non-paramétriques pour ces probabilités. Ceci sera l'objet de la seconde approche.

**Approches reposant sur la définition des intensités.** En actuariat, une première méthode, pour adapter les outils markoviens à l'inférence de modèles semi-markoviens inhomogènes, consiste à décomposer les états dépendants de la durée de séjour en multiples sous-états, correspondant chacun à un intervalle de durée. Cette approche, appelée *splitting of state* (Herman et Pitacco, 1998), est très proche de celle retenue pour les modèles *phase-type* (Govrun, 2013). Elle est relativement intuitive, mais présente cependant l'inconvénient de traiter la durée de séjour en temps discret, ce qui nécessite d'introduire un nombre d'états intermédiaires important pour correctement appréhender le phénomène observé. Cette deuxième limite conduit à ajouter des dimensions supplémentaires au modèle, réduisant de fait les volumes de données disponibles pour l'estimation.

Une seconde approche, régulièrement envisagée en biostatistique, consiste à utiliser une des deux variables temporelles, le temps ou la durée, comme une variable explicative. Lorsqu'aucun état n'est récurrent, la spécification de Cox (1.31) dans le cas markovien peut être adaptée, en choisissant le temps ou la durée comme variable temporelle principale. Cette spécification s'appelle un modèle semi-markovien de Cox (Andersen et Perme, 2008) et prend la forme générique suivante, si l'on retient par exemple le temps comme variable principale

$$\mu_{hj}(t | \mathbf{Z}_{hj,i}, U_t, \boldsymbol{\theta}) = \mu_{0hj}(t) \exp \left( \theta_0 f(U_t) + \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Z}_{hj,i} \right), \quad (1.35)$$

où  $f$  est une fonction fixée de la durée de séjour, et où  $\mu_{0hj}$  est déterminée en utilisant un estimateur paramétrique ou non-paramétrique. Cette seconde voie est intéressante en première analyse puisqu'elle permet de tester si la transition considérée dépend de la durée de séjour. Cependant, la spécification de Cox peut apparaître trop rigide pour garantir une bonne adéquation aux données. Ainsi, il peut être nécessaire d'explorer des modèles de régression plus avancés.

Dans la même logique, les actuaires recourent fréquemment aux techniques d'inférence dédiées aux modèles de survie, en décomposant chacun des états et en considérant chacune des transitions de manière indépendante. Lorsque la transition dépend à la fois du temps et de la durée de séjour, une des deux variables est considérée comme une covariable pour permettre la décomposition de l'échantillon en strates, supposées relativement homogènes. Si l'on prend l'exemple d'un simple contrat d'arrêt de travail à 3 états sans récurrence possible ( $\mathcal{S} = \{\text{valide, invalide, décès}\}$ ), cette méthodologie consiste à bâtir :

- une table pour l’incidence en invalidité, généralement estimée sur la base de la population assurée ;
- deux tables de mortalité, une pour les valides et une pour les invalides.

La loi de décès des invalides est soit estimée à partir de la population assurée, soit reprise d’une table de place, éventuellement aggravée (cf. Pitacco, 2012, pour des exemples de techniques de modélisation de la mortalité des invalides). Dans le premier cas, le problème posé par les deux dimensions temporelles à considérer (âge et durée) est alors généralement traité, en divisant la population observée par âge entier d’entrée en invalidité, puis en estimant, par une approche paramétrique ou non-paramétrique, la loi de survie de chaque sous-groupe en fonction de la durée de séjour.

Lorsque le modèle multi-états considéré comprend des états récurrents, il est possible de proposer une approche similaire au modèle de Cox semi-markovien, en construisant des estimateurs semi-paramétriques reposant sur l’estimateur du NSM (Dabrowska *et al.*, 1994; Dabrowska, 1995, 2012).

Plus rarement, certains auteurs considèrent directement une méthode d’estimation paramétrique, en spécifiant les intensités de transition  $\mu_{hj}(t, u)$  ou le noyau en dimension deux. Elles constituent une alternative au modèle de Cox, en offrant une formulation plus flexible. Pour la modélisation de l’évolution par phase du Sida, Mathieu *et al.* (2007) définissent par exemple le noyau semi-markovien comme le produit de deux fonctions, l’une dépendant de la durée  $u$  et l’autre du temps  $t$ . Pour la construction de matrices de migration en risque de crédit, Monteiro *et al.* (2006) définissent des fonctions d’intensité obtenues par la multiplication d’une première intensité dépendant de  $t$  et d’une seconde dépendant de  $u$ . Ces deux fonctions d’intensité, dépendant d’une seule variable temporelle, sont ensuite supposées constantes par morceaux. Notons que la méthodologie en temps discret proposée par Vasileiou et Vassiliou (2006) qui consiste à estimer les probabilités de sauts (1.16) et des quantités proches des fonctions de densité (1.18), en comptant le nombre de transitions et les expositions au risque sur des rectangles de temps et de durée fixés, s’inscrit dans une logique proche de la précédente.

Le Chapitre 3 de cette thèse se concentre sur les techniques d’inférence de modèles multi-états lorsque l’hypothèse de Markov n’est pas satisfaite, incluant en particulier le cas semi-markovien. Comme dans le Chapitre 2, nous supposons disposer de données longitudinales (et incomplètes) et nous chercherons à développer des techniques non-paramétriques car elles sont essentielles pour mesurer la qualité d’ajustement aux données d’un modèle paramétrique. Toutefois, la littérature académique ne prévoit pas d’estimateurs non-paramétriques généraux dans la cas non-markovien. En revanche, certaines techniques d’inférence ont été développées en biostatistique pour combler ce manque lorsque le modèle dispose d’une structure simple (peu d’états et pas de boucle).

**Approches reposant sur un calcul de probabilité directe.** Un certain nombre de travaux se focalisent sur un calcul direct des probabilités d’intérêts en présence de censure à droite indépendante, c’est-à-dire sans passer par une estimation préalable des intensités de transition. Tout d’abord, Pepe (1991) propose un estimateur de la probabilité de présence (*stage occupation probability*) dans un état transient  $\pi_h(t) = \mathbb{P}(X_t = h)$  à partir de la différence entre deux fonctions de survie (estimées par Kaplan-Meier). Pour un état quelconque, Datta et Satten (2001), Datta et Satten (2002) et Glidden (2002) étudient cette probabilité *via* l’estimateur d’Aalen-Johansen et démontrent des propriétés asymptotiques. Formellement, la

quantité obtenu est

$$\hat{\pi}_h(t) = \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{L_j(0+)}{n} \hat{p}_{hj}(0, t),$$

où  $\hat{p}_{hj}(0, t)$  correspond à l'estimateur d'Aalen-Johansen des probabilités de transition. Malheureusement, elle peut présenter un biais non négligeable lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas vérifiée. De plus, ces probabilités permettent de calculer des prévalences<sup>15</sup> qui sont, en pratique, peu utiles aux actuaires.

Meira-Machado *et al.* (2006) proposent des estimateurs des probabilités de transition pour un modèle *illness-death* sans retour (cf. Figure 1.8) en utilisant des intégrales Kaplan-Meier. Ces objets, utilisés dans le cadre de l'analyse de survie en présence de censure, permettent

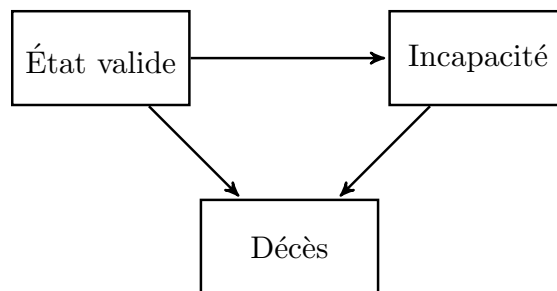


FIGURE 1.8 – Modèle *illness-death*.

d'examiner des fonctionnelles de la durée de vie  $T$  telles que

$$S(\varphi) = \mathbb{E}[\varphi(T)] = \int \varphi(t) dF(t), \quad (1.36)$$

où  $F$  correspond à la fonction de répartition de  $T$  et où  $\varphi$  est une fonction générique intégrable. En l'absence de censure, cette intégrale serait évaluée avec un simple estimateur empirique. En présence de censure à droite indépendante en revanche, il convient de s'appuyer sur l'estimateur de Kaplan-Meier (1.27) qui l'on réexprime, par commodité, sous la forme d'une somme pondérée

$$\hat{F}(t) = 1 - \hat{S}(t) = \sum_{i=1}^n W_{in} \mathbb{1}_{\{Y_{i:n} \leq t\}},$$

où  $W_{in}$  correspond à des poids obtenus à partir de Kaplan-Meier, tels que

$$W_{in} = \frac{\gamma_{[i:n]}}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left( \frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{\gamma_{[i:n]}} = \frac{\gamma_{[i:n]}}{n \left( 1 - \hat{G}(Y_{i:n}) \right)},$$

avec  $\hat{G}$ , l'estimateur de la fonction de survie attachée à la durée de censure  $C$ . D'où l'on tire pour (1.36)

$$\hat{S}(\varphi) = \sum_{i=1}^n W_{in} \varphi(Y_{i:n}). \quad (1.37)$$

15. Rapport entre le nombre de personnes présentes dans un état et le nombre d'individus dans la population totale.

La représentation sous forme de somme est fort utile et permet à Stute (1993) puis Stute (1995) d'établir la convergence presque sûre de (1.37), ainsi que son théorème central limite. Cet auteur étend ensuite ses résultats en présence de covariables (Stute, 1996). Il s'agit d'un formalisme qui trouve des applications avec les modèles de régression (p. ex. Stute, 1999; Sánchez-Sellero *et al.*, 2005).

En considérant la durée de vie passée dans l'état sain  $T_1$  et la durée de vie totale de l'individu  $T_2$ , ayant pour fonctions de répartition respectives  $F_1$  et  $F_2$ , Meira-Machado *et al.* (2006) expriment les probabilités de transition comme des ratios d'intégrales de Kaplan-Meier sous la distribution jointe de ces deux variables de durée

$$p_{00}(s, t) = \frac{1 - F_1(t)}{1 - F_1(s)}, \quad p_{01}(s, t) = \frac{\mathbb{E}[\varphi_{s,t}(T_1, T_2)]}{1 - F_1(s)} \quad \text{et} \quad p_{11}(s, t) = \frac{\mathbb{E}[\phi_{s,t}(T_1, T_2)]}{\mathbb{E}[\phi_{s,s}(T_1, T_2)]}, \quad (1.38)$$

où  $\varphi_{s,t}(u, v) = \mathbb{1}_{\{s < u \leq t, v > t\}}$  et  $\phi_{s,t}(u, v) = \mathbb{1}_{\{u \leq s, v > t\}}$ . Dans cette approche, les deux variables  $T_1$  et  $T_2$  sont censurées par un unique processus  $C$ . Compte tenu de la forme du modèle,  $T_1$  ne peut-être censurée si  $T_2$  ne l'est pas. Cette observation permet d'appliquer les propriétés asymptotiques des intégrales Kaplan-Meier en considérant  $T_1$  comme une covariable. On remarque d'ailleurs que ces résultats requièrent que le support de  $T_2$  soit inclus dans celui de  $C$ . Des raffinements de cette technique sont proposés dans Amorim *et al.* (2011). En outre, la prise en compte de covariables et d'une loi de censure non-informative est développée *via* une approche IPCW dans Meira-Machado *et al.* (2014).

Dans le Chapitre 3, cette méthodologie sera étendue à une classe plus large de modèles multi-états acycliques (sans retour), dont l'aspect général est présenté à la Figure 1.9, en s'appuyant sur des modèles à risques concurrents bivariés. Plus précisément, ce type de modèle multi-états comprend deux étapes que nous décomposerons en deux modèles à risques concurrents : le premier concerne les transitions émanant directement de l'état initial  $a_0$  ; le second apparaît lorsqu'un individu atteint un état intermédiaire  $e_1, \dots, e_{m_1}$  et résulte de toutes les transitions provenant de celui-ci. Nous étudierons alors, dans le Chapitre 3, la construction d'estimateurs pour des fonctionnelles sous la distribution jointe de ces deux modèles à risques concurrents puis montrerons comment en déduire des estimateurs directs pour les probabilités de transitions, semblables à (1.38).

Toutefois, nous verrons que ce type d'estimateur peut-être délicat à manipuler. En effet, si l'hypothèse de Markov est vérifiée ou que la durée de séjour dans un état a "peu d'effet" sur les probabilités de transition, ils peuvent présenter des biais significatifs lorsque leurs résultats sont comparés à ceux obtenus avec l'estimateur d'Aalen-Johansen. Cette situation peut d'ailleurs n'apparaître que localement. Pour répondre à cette problématique, nous chercherons à mettre en œuvre des outils de mesure de la dépendance locale entre la survie d'un individu et sa durée de vie en bonne santé.

### 1.3.3 Modèles à risques concurrents bivariés

Dans cette section, nous présentons brièvement le cadre des modèles à risques concurrents bivariés. Notons que la généralisation au cas multivarié s'obtient sans difficulté. Ce type de spécification a été introduit en biostatistique au début des années 2000 pour examiner les causes de décès, notamment celles ayant une explication génétique, au sein de familles (au sens large ou simplement de jumeaux). Une présentation d'ensemble de cette question est



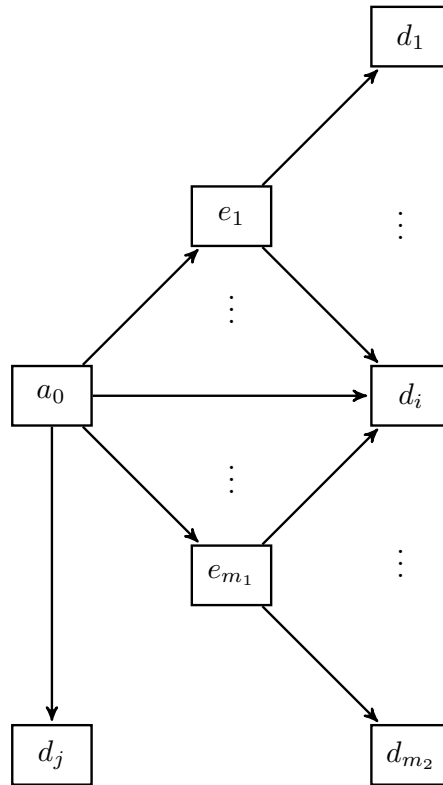


FIGURE 1.9 – Exemple de modèle multi-états acyclique.

par exemple disponible dans l’ouvrage de Klein *et al.* (2013, Chapitre 27), auquel nous nous référons.

Les études antérieures se focalisaient principalement sur l’étude de durée de vie multivariées et sur les facteurs de risque commun qui peuvent exister au sein d’une famille. Dans cette littérature, la prise en compte de la dépendance entre individus d’une même famille, en présence de censure à droite individuelle, se mesure généralement à partir l’estimateur non-paramétrique du tau de Kendall  $\tau$  (Wang et Wells, 2000). Celui-ci s’écrit, par exemple pour un couple

$$\tau = 4 \int \int F(x, y) dF(x, y) - 1 ,$$

où  $F$  est la fonction de répartition bivariée des deux durées de vie considérées. Les chercheurs de cette discipline se réfèrent également au ratio de hasard conditionnel (*conditional hazard ratio*) introduit par Oakes (1989). Cet indicateur permet de donner une mesure de la dépendance locale entre les durées de vie étudiées. Les modèles statistiques utilisés pour appréhender cette dépendance s’appuient couramment sur l’utilisation de copules (p. ex. Nelsen, 2006), archimédiennes en particulier, ou de modèles à fragilité partagée<sup>16</sup> (p. ex. Hougaard, 1995). Dans le cas le plus fréquent où une copule archimédienne est retenue, l’adéquation aux données s’effectue généralement à partir de l’estimateur du tau de Kendall ou sur des versions non-

16. Dans la plupart des cas d’ailleurs, la fragilité retenue suit une loi Gamma, ce qui la relie à la copule de Clayton-Oakes.

paramétriques<sup>17</sup> du ratio de hasard conditionnel (Chen et Bandeen-Roche, 2005). Le lecteur intéressé pourra se référer à Lopez (2012) et Gribkova et Lopez (2015) pour des méthodes non-paramétriques utilisant des estimateurs de la fonction de répartition bivariable, de la densité de copule et de la copule empirique.

Bandeen-Roche et Liang (2002) comptent parmi les premiers chercheurs à s'intéresser aux modèles à risques concurrents bivariés. Ces travaux, comme la plupart de cette littérature, se focalisent sur la construction de mesures d'association entre différentes durées de vie par cause. Nous introduisons la durée de vie d'un individu  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) et  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) la variable indiquant la cause de sortie. La fonction de survie jointe est notée  $S$ . On introduit également la fonction de densité jointe par cause

$$g_{hj}(x, y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mathbb{P}(x \leq T_1 \leq x + \Delta x, y \leq T_2 \leq y + \Delta y, V_1 = h, V_2 = j). \quad (1.39)$$

On définit alors le ratio de hasard conditionnel par cause (*conditional cause-specific hazard ratio*)

$$\theta_{hj}(x, y) = \frac{S(x, y) g_{hj}(x, y)}{\left( \int_y^\infty \sum_{l \in \mathcal{S}} g_{hl}(x, \tau) d\tau \right) \left( \int_x^\infty \sum_{l \in \mathcal{S}} g_{lj}(\tau, y) d\tau \right)}. \quad (1.40)$$

Cette mesure permet d'évaluer localement le niveau d'association entre deux individus pour les causes de décès respectives  $h$  et  $j$ . Lorsque  $\theta_{hj}(x, y) > 1$  (resp.  $< 1$ ) alors le risque qu'un individu décède de la cause  $h$  en  $x$  est supérieur (resp. inférieur) si le second décède de la cause  $j$  en  $t$  plutôt que s'il a survécu à la date  $y$ <sup>18</sup>. Bandeen-Roche et Liang (2002) présentent une méthode d'inférence paramétrique de cette quantité, basée sur un modèle à fragilité partagée. Bandeen-Roche et Ning (2008) développent une méthodologie non-paramétrique en supposant, un peu à la manière du modèle de Poisson pour les intensités, que cette quantité est constante par morceaux. Ning et Bandeen-Roche (2014) l'estiment en utilisant des régressions logistiques. En remarquant que le ratio de hasard conditionnel par cause (1.40) se réécrit

$$\theta_{hj}(x, y) = \frac{\nu_{hj}(x, y)}{\nu_{h0}(x, y) \nu_{0j}(x, y)}, \quad (1.41)$$

avec

$$\nu_{hj}(x, y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mathbb{P} \left( \begin{array}{l} x \leq T_1 \leq x + \Delta x, y \leq T_2 \leq y + \Delta y, \\ V_1 = h, V_2 = j \mid T_1 \geq x, T_2 \geq y \end{array} \right),$$

$$\nu_{h0}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \mathbb{P} ( x \leq T_1 \leq x + \Delta x, V_1 = h \mid T_1 \geq x, T_2 \geq y ),$$

et

$$\nu_{0j}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \mathbb{P} ( y \leq T_2 \leq y + \Delta y, V_2 = j \mid T_1 \geq x, T_2 \geq y ),$$

Cheng et Fine (2008) proposent un estimateur non-paramétrique de (1.41), basé cette fois-ci sur la théorie des processus empiriques. Il dispose de bonnes propriétés de convergence. Toutefois, comme cette quantité est fonction de grandeurs instantanées, proches d'intensités de transition, les estimateurs proposés nécessitent d'être lissés sur un intervalle fixé de temps.

17. Ces versions ne sont pas non-paramétriques au sens de l'estimateur de maximum de vraisemblance, il s'agit d'estimateurs s'appuyant sur une hypothèse de constance par morceaux du *conditional hazard ratio*.

18. le rôle des deux individus est ici complètement réversible.

Le ratio de hasard conditionnel par cause constitue cependant une mesure de dépendance trop générale pour être adoptée dans notre cas. Comme le montre la Figure 1.9, le modèle à risques concurrents bivariés que nous considérons ne permet pas, par définition, d’interchanger les rôles des deux processus puisque l’un vient à la suite de l’autre. Nous nous tournons donc vers des mesures alternatives. Cheng *et al.* (2007) en fournissent deux :

- le ratio des fonctions d’incidence cumulée

$$\frac{F^{(hj)}(x, y)}{F^{(h)}(x) F^{(j)}(y)},$$

où le numérateur correspond à  $F^{(hj)}(x, y) = \int_0^x \int_0^y g_{hj}(u, v) dudv$  ;

- et le ratio de hasard cumulé

$$\frac{\int_0^x \int_0^y \nu_{hj}(u, v) dudv}{\int_0^x \nu_{h0}(u) du \int_0^y \nu_{0j}(v) dv}.$$

Ces auteurs montrent en particulier les propriétés de convergence du numérateur de ces deux ratios *via* la théorie des processus empiriques. Elles sont cependant difficiles à interpréter. Scheike *et al.* (2010) et Scheike et Sun (2012) mesurent quant à eux l’association entre les différentes durées de vie par cause, dans un cadre semi-paramétrique, au moyen d’une fonction comparant des *odds ratio*, appelé *cross-odds ratio*

$$\pi^{(h|j)}(x, y) = \frac{\text{odds}(T_1 \leq x, V_1 = h \mid T_2 \leq y, V_2 = j)}{\text{odds}(T_1 \leq x, V_1 = h)}, \quad (1.42)$$

avec  $\text{odds}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}$ . Ils évoquent la possibilité de les décliner dans un cadre non-paramétrique, mais ces auteurs n’étudient pas la question. Lorsque les événements  $\{T_1 \leq x, V_1 = h\}$  et  $\{T_2 \leq y, V_1 = j\}$  sont indépendants, le ratio  $\pi^{(h|j)}(x, y) = 1$ . Le ratio est supérieur (resp. inférieur) à 1, si les deux événements sont positivement (resp. négativement) associés. Ces auteurs mettent en avant la flexibilité de ce ratio pour être combinés à des covariables et ainsi l’utiliser dans un cadre de régression. Nous retiendrons et adapterons cette grandeur dans le Chapitre 3 dans un cadre non-paramétrique pour caractériser le lien de dépendance par cause entre la durée de survie et la durée en bonne santé.

## 1.4 Le suivi et la gestion des risques de crédit

Dans les deux sections précédentes, nous avons examiné des méthodes d’inférence en temps continu reposant sur des données dont le formalisme découle des règles de gestion des flux de sinistres au sein des organismes. Ces techniques permettent d’estimer les probabilités de transition pour différents modèles multi-états et présentent un intérêt pour améliorer le processus de construction de lois d’expérience. Toutefois, ces dernières n’apportent qu’une vision statique du processus, ce qui peut évidemment conduire à des erreurs importantes lorsqu’il s’agit de couvrir des engagements de long terme. Nous nous intéressons dans cette section à la dynamique que peuvent suivre ces probabilités de transition.

### 1.4.1 Liens entre risques biométriques et risques de crédit

L’appropriation du modèle proposé par Lee et Carter (1992) a conduit à partir du début des années 2000 à de très nombreux développements concernant la modélisation prospective

de la mortalité. Comme le remarquent Hunt et Blake (2014) ou encore Currie (2014), les spécifications retenues relèvent bien souvent de modèles linéaires généralisés (McCullagh, 1980) ou non-linéaires généralisés<sup>19</sup>, faisant intervenir une relation entre :

- des taux de mortalité ou des taux de hasard, constants par morceaux (par âge et année calendaire entière);
- et l'âge  $x$ , le temps calendaire  $t$  et l'année de naissance de la cohorte  $t - x$ .

Formellement, cette relation peut être représentée pour une population donnée par le prédicteur

$$\eta \left( \mathbb{E} \left[ \frac{D_{xt}}{E_{xt}} \right] \right) = \alpha_x + \sum_{k=1}^K \beta_x^{(k)} \kappa_t^{(k)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}, \quad (1.43)$$

où :

- $\alpha_x$  capture l'effet de l'âge sur les taux de mortalité;
- pour  $K$  correspondant au nombre de facteurs envisagés par le modèle pour décrire un effet fixe "âge-période"<sup>20</sup>,  $\kappa_t^{(k)}$  représente la tendance d'évolution des taux de mortalité (ou des taux de hasard) et  $\beta_x^{(k)}$  permet de les ajuster par âge;
- $\gamma_{t-x}$  correspond à un effet cohorte, modulé par le facteur  $\beta_x^{(0)}$ ;
- $D_{xt}$  correspond au nombre de décès observés sur un segment âge-période donné;
- $E_{xt}$  correspond à l'exposition aux risques observé sur un segment âge-période donné<sup>21</sup>.

Ce formalisme est assorti de contraintes sur les paramètres permettant d'intégrer l'expertise des démographes, des sociologues ou encore des médecins (Cairns *et al.*, 2008), et surtout d'assurer l'identifiabilité du modèle (plusieurs jeux de paramètres ne pouvant aboutir à une même valeur du taux de mortalité). Notons cependant que le nombre de paramètres est relativement important. La projection à partir de ce type de modèles s'opère ensuite en spécifiant les dynamiques suivies par les paramètres  $\kappa_t^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , et  $\gamma_{t-x}$  au moyen de séries temporelles. Depuis quelques années, les contraintes induites par Solvabilité II ont conduit à faire évoluer les modèles initiaux, caractérisés par une dynamique simple des coefficients dans l'Équation (1.43), afin qu'ils puissent mieux appréhender les déformations extrêmes que peut connaître la tendance d'évolution des taux de mortalité. À titre d'exemple, les travaux de Plat (2011) et Börger *et al.* (2014) ont amélioré ces premiers modèles, en complexifiant la dynamique suivie par le terme de tendance régissant l'évolution des taux de mortalité (celui-ci étant traditionnellement modélisé comme une simple marche aléatoire). Ces évolutions permettent d'opérer un rapprochement entre les travaux empiriques et les modèles de mortalité stochastiques introduits au cours des années 2000 pour le développement des premiers dérivés de mortalité et de longévité (p. ex. Dahl et Møller, 2006; Schrager, 2006; Blake *et al.*, 2006).

Si ces évolutions techniques permettent une meilleure prise en compte des risques pour l'évaluation de la charge en capital, elles n'améliorent cependant pas la gestion des risques de longévité, dont l'impact est significatif pour un portefeuille de produits de rente par exemple. Pour l'instant, les solutions proposées pour cette gestion se limitent à la mise en œuvre de

19. Ce terme désigne ici des modèles généralisés pour lesquels le prédicteur fait intervenir des termes non-linéaires, comme dans la spécification de Lee et Carter (1992).

20. À titre d'exemple, Plat (2009) considère quatre composantes : un effet global capturant la tendance générale des taux de hasard, puis 3 effets spécifiques touchant les moins de 20 ans, les moins de 60 ans et les moins de 85 ans.

21. Si le modèle décrit l'évolution des taux de mortalité, le modèle généralisé utilisé supposera que le nombre de décès suit une loi Binomiale pour laquelle  $E_{xt}$  correspond au nombre de personnes vivantes d'âge  $x$  en date  $t$ . Si l'on s'intéresse aux taux de hasard, le nombre de décès suivra une loi de Poisson définie selon une exposition  $E_{xt}$  égale à la somme des temps d'observation de chaque individu sur le rectangle  $[x, x + 1] \times [t, t + 1]$ .

couverture, par le biais de produits dérivés de mortalité ou de longévité, et à l'utilisation des compensations naturelles (*natural hedging*) qui peuvent s'opérer au sein de la population (p. ex. Cox et Lin, 2007; Luciano *et al.*, 2012; Jevtić et Regis, 2015). Le premier mode de gestion est difficile à mettre en œuvre, compte tenu de la faible liquidité des produits proposés (p. ex. Bensusan *et al.*, 2012; Biffis *et al.*, 2015), et pourraient même être assez inefficace globalement (Luciano et Regis, 2014). Le second mode reste pour l'instant assez théorique et requiert de connaître précisément les dynamiques respectives de chaque sous-population considérée dans le portefeuille de l'assureur. Puisque que les travaux des épidémiologistes et des démographes<sup>22</sup> tendent à montrer que de forts écarts peuvent apparaître selon les sous-population considérées, il semble difficile d'orienter la politique de souscription ou de mettre en place des mécanismes de couverture, lorsque les dynamiques des taux de mortalité modélisées ne varient qu'en fonction de la cohorte considérée (et éventuellement du sexe). Ce manque de solutions pratiques, constaté pour la gestion de la mortalité et de la longévité, apparaît de manière encore plus nette lorsque l'on s'intéresse à la dynamique des probabilités de transition vers tout autre état que le décès. La réassurance constitue une alternative possible. Cependant, l'évaluation du risque de base suscitera en pratique les mêmes questions pour le réassureur que pour la mise en place de produits de titrisation.

Puisque le manque actuel de connaissances et de données constitue un frein important au développement de techniques de couverture des risques biométriques, il semble nécessaire que les assureurs puissent disposer de moyens techniques, permettant de se prémunir contre les chocs systématiques affectant leurs hypothèses. Dans le Chapitre 4, nous étudierons le cas de l'assurance crédit, pour lequel le suivi individuel des risques couverts permet d'envisager des mesures correctrices, limitant l'exposition au risque de l'assureur lorsque ceux-ci évoluent défavorablement. Ce type d'assurance propose une couverture contre le risque de non-paiement de crédits inter-entreprises et est caractérisé par des facultés importantes de réduction et de résiliation des garanties pour ajuster dynamiquement la composition du portefeuille. Ainsi, un suivi régulier et détaillé des risques de crédit couverts permet à l'assureur de se prémunir contre la survenance de futures sinistres.

Il existe un lien fort entre les risques assurés en assurance de personnes et le risque de crédit. Pour les premiers, il s'agit de modéliser un risque de décès ou dégradation de l'état de santé d'une personnes alors que pour le second, on se focalise sur le défaut et le changement de notation (*rating*) d'une entreprise. Cette analogie entre finance et assurance n'est pas nouvelle. Jarrow *et al.* (1997) introduisent par exemple des chaînes de Markov homogènes, décrivant les changements de *rating* et les défauts d'entreprises pour l'évaluation des *Credit Default Swap* (CDS). De même, les modèles de survie et à risques concurrents sont utilisés de longue date pour la modélisation des remboursements anticipés de crédit (p. ex. Frachot et Gourieroux, 1995). Dans l'autre sens, les modèles de valorisation de produits dérivés de mortalité ou de longévité s'inspirent directement des modèles à intensité, utilisés pour la valorisation des CDS (p. ex. Lando, 1998) ou des produits de taux d'intérêt.

Depuis le début des années 2000, les modèles de crédit se sont grandement sophistiqués, à la demande des banques, avec la mise en place du dispositif Bâle II (Basel Committee on Banking Supervision, 2004). Deux types de modèles sont usuellement distingués :

- les modèles structurels, introduits par Merton (1974), qui s'appuient sur la valeur de la firme pour calculer les probabilités de défaut et de transition. Ce type de spécification a

22. cf. discussion dans l'introduction générale de cette thèse ou encore le Chapitre 5 de la thèse de Bensusan (2010) qui s'appuie sur des données granulaires collectées par l'Insee, mais non-publiques.

connu un grand succès à partir de la fin des années 1990, avec notamment la publication de modèles (p. ex. CreditMetrics, KMV) construits par des banques et des sociétés spécialisées dans la gestion des risques (cf. Crouhy *et al.*, 2000, pour une revue);

- les modèles à forme réduite qui cherchent directement à estimer les probabilités de défaut, sur la base des observations de défaut ou des prix de produits financiers. La possibilité pour les banques de mettre en place des modèles internes s'est traduit par le développement de nombreux systèmes "maison" de *scoring*, permettant de suivre l'évolution de la qualité de crédit des sociétés détenues en portefeuille. Incidemment, cette collecte d'information permet d'alimenter en données les modèles à forme réduite.

Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur les approches à forme réduite. Puisque les méthodes structurelles s'appuient sur des matrices de transition préalablement fixées, les approches à forme réduite apparaissent de ce point de vue mieux adaptées, lorsque qu'il s'agit d'étudier la dynamique des matrices de transition et des défauts.

À l'instar des dynamiques de population dont nous avons précédemment parlé, les matrices de transition ne sont pas statiques. Elles sont cependant plus simples à étudier car les cycles économiques, auxquelles elles sont reliées (Kim et Nelson, 1998; Crouhy *et al.*, 2000; Nickell *et al.*, 2000; Bangia *et al.*, 2002), s'observent sur des périodes de temps significativement plus courtes. Elles présentent de plus une certaine hétérogénéité (Kadam et Lenk, 2008), notamment par secteur d'activité.

Dans le Chapitre 4, nous étudierons un historique de données, enregistrant les différents changements de *rating* et les défauts de firmes couvertes par un assureur crédit par le biais d'une approche économétrique. Nous verrons comment la modélisation de ces dynamiques peut être utile pour aider à la gestion des risques, lorsque les conditions économiques deviennent défavorables.

#### 1.4.2 Modèles de changements de *rating* et inférence statistique

Nous introduisons dans cette section le cadre de base des modèles de transition, appelés chaînes de Markov doublement stochastiques, qui sont utilisés en risque de crédit pour modéliser les changements de notation. Dans ce contexte, la chaîne de Markov introduite décrit ce que l'on peut considérer comme des états de santé d'une entreprise, mesurés selon une échelle de notation appelée *ratings*.

**Observation en temps discret.** À l'inverse des données issues de la gestion des sinistres et des encaissements de primes (cf. Section 1.2.1), les données recueillies par l'assureur crédit, que nous étudierons dans cette thèse, proviennent de systèmes dédiés à l'évaluation et au suivi des risques couverts. Ces systèmes sont mis à jour périodiquement. Ainsi, l'observation des notations de crédit s'effectue, non pas à la date précise où s'opère la transition, mais lors de la mise à jour. L'inférence statistique du modèle s'effectue alors sur des données de panel. Ce mode d'observation comprend, par rapport au cas continu, des difficultés supplémentaires puisque, si les dates précises de transition ne sont pas connues dans un modèle multi-états, les nombres de transition et d'états visités entre deux dates sont indéterminés.

**Généralités.** Dans la suite et afin de rester cohérent avec le Chapitre 4, nous nous plaçons dans un cadre discret. Nous nous référons notamment à la présentation générale de Gagliardini et Gouriéroux (2005) et adaptons au cas discret le formalisme proposé par Duffie *et al.* (2007) et Duffie *et al.* (2009). Une présentation plus générale en temps continu ne comporterait pas

de difficulté particulière ici, en suivant par exemple les développements théoriques proposés par Jakubowski et Niewegłowski (2010).

En reprenant les mêmes notations que celles introduites à la Section 1.1.2, nous commençons par introduire un processus stochastique càdlàg  $\mathbf{Z}$  de dimension  $d$ , défini sur le même espace probabilisé que  $X$ . La chaîne de Markov  $X$ , décrivant l'historique des *ratings* individuels d'une entreprise, est définie conditionnellement au processus  $\mathbf{Z}$  par le biais d'une matrice de transition entre deux dates entières  $t$  et  $t + 1$

$$\mathbf{p}(\mathbf{Z}(t); \boldsymbol{\theta}) = (p_{hj}(\mathbf{Z}(t); \boldsymbol{\theta}))_{h,j \in \mathcal{S}} \text{ ,} \quad (1.44)$$

telles que les fonctions  $p_{hj}(\cdot; \boldsymbol{\theta})$  permettent de spécifier, au moyen du vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ , la dépendance entre le processus  $\mathbf{Z}$  et les probabilité de transition  $p_{hj}(t) = \mathbb{P}(X_t = h \mid X_{t+1} = j)$  de  $h$  vers  $j$ . De manière équivalente, il serait possible de définir les intensités de transition  $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{Z}(t))$ , en supposant par exemple qu'elles demeurent constantes entre chaque pas de temps. Ceci permettrait de réintroduire, en particulier, le modèle à hasard proportionnelle de Cox. Cependant, spécifier les intensités de transition n'a réellement d'intérêt que lorsque les intervalles entre les temps d'observation du processus  $X$  ne sont pas constants. En effet, dans le cas contraire et qui nous intéresse, le modèle markovien est équivalent à une série de modèles multinomiaux, dépendants des observations au pas de temps précédent. L'avantage d'une spécification à base de modèles multinomiaux est qu'il existe une très large gamme de modèles de régression (Agresti, 2002) pour permettre de s'ajuster aux données.

Par la suite, on suppose que les filtrations,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ , engendrées par les deux processus  $X$  et  $\mathbf{Z}$  vérifient, pour toute date  $t$ ,  $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$  où  $(\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$  correspond à l'ensemble de l'information disponible. La formulation retenue conduit directement à généraliser les processus à intensité stochastique de Cox (Lando, 1998), utilisés pour la valorisation de produit de dérivés de crédit.

Nous considérons à présent un groupe de  $n$  entités, dont le *rating*  $X_{1,t}, \dots, X_{n,t}$  est calculé à chaque date  $t \in \mathcal{T}$ . Par souci de simplicité dans cette présentation, nous supposons que le processus  $\mathbf{Z}$  est exogène et décrit la dynamique de facteurs macroéconomiques ou financiers. Il serait possible de considérer que ce processus comprend également des covariables individuelles, mais leur introduction complexifierait ici inutilement les notations. Ainsi, nous nous plaçons dans un cadre où l'échantillon considéré est homogène. En présence de censure individuelle à droite  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , telle que  $X_i$  et  $C_i$  soient indépendants conditionnellement à  $\mathbf{Z}$ , l'information observée à une date  $t$  pour l'ensemble des individus  $i$  est engendrée par l'ensemble

$$\{X_{i,\tau} : i = 1, \dots, n, 0 \leq \tau \leq t \wedge C_i\} \text{ .}$$

On note  $(\tilde{\mathcal{F}}_t, t \in \mathcal{T})$  la filtration engendrée par cet ensemble. Ainsi, comme pour le cadre markovien introduit dans la Section 1.2.3, il est possible, en considérant que le processus de censure est indépendant et non-informatif, de construire le cadre d'inférence statistique du modèle, en travaillant avec des processus de comptage censurés. Nous introduisons le processus  $R_i(t)$  valant 1 si l'individu  $i$  est non-censuré en  $t$ , et 0 sinon. Le processus  $\mathbf{Z}$  est quant à lui supposé non-soumis à censure. Ainsi, l'information disponible à la date  $t$  correspond à

$$\{\mathbf{Z}(\tau) : \tau \leq t\} \cup \{X_{i,\tau} : i = 1, \dots, n, 0 \leq \tau \leq t \wedge C_i\} \text{ .}$$

On note  $(\tilde{\mathcal{H}}_t, t \in \mathcal{T})$  la filtration engendrée par cet ensemble.

Deux grands types de modélisation se dégagent dans la littérature économétrique sur la dynamique des matrices de transition. Dans la première situation, le processus  $\mathbf{Z}$  décrit un ensemble de variables observables (on se place dans le cas où celui-ci est prévisible). Dans la seconde situation, ce processus est à la fois composé de variables observables et de variables latentes, ces dernières étant appelées couramment fragilités dynamiques depuis les travaux de Duffie *et al.* (2009). Dans la suite, nous supposons, pour simplifier la présentation et sans perte de généralité, que le processus  $\mathbf{Z}$  est une série temporelle (en dimension  $d$ ) vérifiant la propriété de Markov d'ordre 1 (p. ex. un processus autorégressif d'ordre 1).

**Inférence avec facteurs observables.** Dans le cas où le processus  $\mathbf{Z}$  est complètement observable et en supposant que  $X$  est doublement stochastique, la vraisemblance (partielle) du modèle sous  $\tilde{\mathcal{H}}_t$  en  $t$  peut être séparée en deux composantes telle que

$$\mathcal{L}(X, R, \mathbf{Z}; (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})) = \mathcal{L}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\kappa}) \mathcal{L}(X, R | \mathbf{Z}; \boldsymbol{\theta}), \quad (1.45)$$

où sous  $\mathcal{G}_t$

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\kappa}) = \prod_{\tau=1}^t f(\mathbf{Z}(\tau) | \mathbf{Z}(\tau-1); \boldsymbol{\kappa}),$$

avec  $f(\mathbf{Z}(t) | \mathbf{Z}(t-1); \boldsymbol{\kappa})$ , la fonction de distribution de  $\mathbf{Z}(t)$  sachant  $\mathbf{Z}(t-1)$  de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}$ , et

$$\mathcal{L}(X, R | \mathbf{Z}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{\tau=1}^t \prod_{i=1}^n (p_{X_{i,\tau-1}X_{i,\tau}}(\mathbf{Z}(\tau-1); \boldsymbol{\theta}))^{R_i(\tau)}.$$

Cette décomposition de la vraisemblance permet d'estimer séparément les deux composantes par maximum de vraisemblance

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\kappa}} \mathcal{L}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\kappa}) \text{ et } \hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(X, R | \mathbf{Z}; \boldsymbol{\theta}).$$

Ainsi, le premier terme s'obtient en considérant les techniques d'inférence utilisées dans le cadre des séries temporelles, alors que pour le second, on se ramène généralement à un modèle (non-)linéaire généralisé, à l'instar des modèles de mortalité brièvement introduits dans la Section 1.4.1.

**Inférence avec facteurs latents.** Les travaux de Das *et al.* (2007), réalisés sur des obligations d'entreprises américaines, ont montré que la survenance de défauts conjoints, notamment en période de crise, ne pouvait être complètement prise en compte par l'utilisation de facteurs observables (variables macroéconomiques et variables individuelles), comme dans le modèle double-stochastique décrit ci-dessus. Cette constatation a conduit à ajouter à la précédente spécification des termes de fragilité pour capturer des sources d'hétérogénéité, ainsi que des dynamiques latentes. La majeure partie des travaux récents (p. ex. McNeil et Wendin, 2007; Duffie *et al.*, 2009; Chava *et al.*, 2011; Koopman *et al.*, 2011, 2012) se focalisent sur l'étude du défaut obligataire, alors que la dynamique des matrices de transition est nettement moins étudiées (cf. Wendin, 2006; Koopman *et al.*, 2008; Feng *et al.*, 2008; Stefanescu *et al.*, 2009, pour quelques exemples). Pour ces dernières, il semble également profitable de considérer des dynamiques latentes pour capter l'effet de certains chocs extrêmes. Sur des échantillons de taille plus restreinte, des auteurs comme Chava *et al.* (2011) se concentrent sur des fragilités non-dynamiques, plus simples à estimer et qui permettent d'analyser la dépendance entre



plusieurs secteurs d'activité pour le défaut (et le montant du défaut). Ces travaux capturent ainsi certains effets de contagion entre secteurs d'activités.

On suppose désormais que le processus  $\mathbf{Z}$  se décompose en deux sous-processus :  $\mathbf{Z}_1$  qui correspond à un vecteur de variables observables, et  $\mathbf{Z}_2$  un vecteur de variables non observables. Ainsi, les probabilités de transition (1.44) sont dépendantes de deux sources d'incertitude, la première déduite de l'environnement et la seconde qui peut être déterminée conditionnement aux valeurs prises dans le passé par le processus  $X$ . L'information alors disponible en  $t$  est représentée par la filtration

$$\tilde{\mathcal{H}}_{1,t} = \sigma(\{\mathbf{Z}_1(\tau) : \tau \leq t\} \cup \{X_{i,\tau} : i = 1, \dots, n, 0 \leq \tau \leq t \wedge C_i\}) = \tilde{\mathcal{G}}_{1,t} \vee \tilde{\mathcal{F}}_t,$$

alors que l'information complète s'écrit

$$\tilde{\mathcal{H}}_{2,t} = \sigma(\{\mathbf{Z}_2(\tau) : \tau \leq t\}) \vee \tilde{\mathcal{H}}_{1,t} = \tilde{\mathcal{G}}_{2,t} \vee \tilde{\mathcal{H}}_{1,t}.$$

Pour permettre une meilleure identifiabilité des paramètres du modèle, une hypothèse d'indépendance entre les deux processus  $\mathbf{Z}_1$  et  $\mathbf{Z}_2$  est généralement introduite. Ainsi, la chaîne de Markov  $X$  est définie comme dans la cas précédent à partir de

$$\mathbf{p}(\mathbf{Z}(t); (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_2)) = (p_{hj}(\mathbf{Z}_1(t), \mathbf{Z}_2(t); (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_2)))_{h,j \in \mathcal{S}} \quad (1.46)$$

avec  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ , où les paramètres  $\boldsymbol{\theta}_1$  et  $\boldsymbol{\theta}_2$  permettent de spécifier la relation de dépendance entre les probabilités de transition et  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ . Le vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}_2$  est utilisé pour spécifier la dynamique de  $\mathbf{Z}_2$ . Dans ces conditions, la vraisemblance (partielle) du modèle en  $t$  peut être à nouveau séparée en deux composantes sous  $\tilde{\mathcal{H}}_{2,t}$

$$\mathcal{L}(X, R, \mathbf{Z}; (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)) = \mathcal{L}(\mathbf{Z}_1; \boldsymbol{\kappa}_1) \mathcal{L}(X, R | \mathbf{Z}; (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_2)), \quad (1.47)$$

où le terme  $\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1; \boldsymbol{\kappa}_1)$  est identique à celui présent dans l'équation de la vraisemblance sans facteur latent. Le second terme du produit dans l'équation (1.47) s'écrit

$$\prod_{\tau=1}^t \prod_{i=1}^n (p_{X_{i,\tau-1}X_{i,\tau}}(\mathbf{Z}(\tau-1); (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_2)))^{R_i(\tau)}.$$

La détermination des paramètres  $(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)$  requiert de se placer sous la filtration  $\tilde{\mathcal{H}}_{1,t}$ , en intégrant sur l'ensemble des trajectoires prises par le processus  $\mathbf{Z}_2$ . Ainsi, il s'agit de considérer le problème du maximum de vraisemblance suivant

$$\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2, \hat{\boldsymbol{\kappa}}_2\right) = \arg \max_{(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)} \mathcal{L}(X, R | \mathbf{Z}_1; (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_2)),$$

où

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(X, R | \mathbf{Z}_1; (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_2)) \\ &= \int \prod_{\tau=1}^t \prod_{i=1}^n (p_{X_{i,\tau-1}X_{i,\tau}}(\mathbf{Z}_1(\tau-1), \mathbf{z}_2(\tau-1); (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}_2)))^{R_i(\tau)} d\Psi(\mathbf{z}_2(0), \dots, \mathbf{z}_2(t)), \end{aligned} \quad (1.48)$$

avec  $\Psi$  la fonction de répartition de  $(\mathbf{Z}_2(0), \dots, \mathbf{Z}_2(t))$ .

Le calcul du maximum de (1.48) requiert la mise en œuvre de techniques d'inférence avancées. Wendin (2006), McNeil et Wendin (2007) ou encore Stefanescu *et al.* (2009) recourent à des méthodes bayésiennes pour y parvenir. En temps continu, Koopman *et al.* (2008) s'appuient sur des techniques de simulation du maximum de vraisemblance. Duffie *et al.* (2009) utilisent un algorithme espérance-maximum (EM) nécessitant également la mise en œuvre de techniques bayésiennes.

Dans le Chapitre 4, nous nous intéresserons au lien qui peut exister entre matrices de transition et les facteurs macroéconomiques et financiers. En effet, alors que l'étude du risque de crédit obligataire a rencontré un grand succès au cours de la dernière décennie, aucun travaux à notre connaissance ne s'intéresse à ce lien pour les risques couverts par un assureur crédit. Ceux-ci sont pourtant différents des premiers, puisque les risques portés comportent deux types de défauts : le défaut classique, lié à l'insolvabilité de l'émetteur d'une facture, mais aussi le défaut appelé *protracted* qui correspond simplement au non-paiement de la dite facture. De plus, le portefeuille des assureurs crédit est constitué d'une population d'entreprises de toute taille, nettement plus diversifiée que les portefeuilles obligataires généralement étudiés et qui comprennent des titres émis par des sociétés de taille plus importantes. De ce point de vue, il se rapproche d'avantage des portefeuilles de prêts détenus par les banques de détails (p. ex. Dietsch et Petey, 2002; Malik et Thomas, 2012). Caja et Planchet (2014) ont étudiés l'impact d'un modèle à deux périodes (un cycle haut et un cycle bas), dans lequel le niveau des matrices de transition évolue, selon la période et le nombre de défauts constatés. Cependant leur application ne permet pas de relier les deux périodes à une situation économique donnée.

En étudiant la relation entre le cycle économique et le niveau des matrices de transition, nous chercherons à utiliser ces réflexions pour la mise en œuvre de *stress tests*, comme outil de pilotage des risques. Pour ce faire, nous utiliserons un modèle s'appuyant sur une chaîne de Markov doublement stochastique, où nous nous limiterons à la prise en compte de facteurs observables uniquement. En effet, si l'utilisation de modèles avec fragilité dynamique est pertinente pour améliorer les prédictions des modèles de crédit, en particulier lorsqu'il s'agit d'évaluer un niveau de quantile extrême, ils sont pour le praticien difficile à appréhender et à décliner dans une logique de *stress tests* réguliers. De ce point de vue, notre approche apparaîtra comme un bon compromis en terme de complexité.

## 1.5 Annexes

### 1.5.1 Illustration numérique en présence de risques concurrents

Cette annexe propose une application numérique sur données simulées visant à illustrer le niveau de biais qui peut être introduit lorsque les techniques d'analyse de survie (estimateur Kaplan-Meier) sont utilisés à tort pour l'estimation de modèle à risques concurrents.

Considérons pour cela un modèle à risques concurrents comprenant deux causes dont les durées de vie latentes,  $T_1$  et  $T_2$ , sont supposées distribuées selon des lois exponentielles de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous supposons que ces deux lois sont liées par le biais d'un copule de Clayton de paramètre  $\theta$  telle que pour deux dates  $(t_1, t_2)$

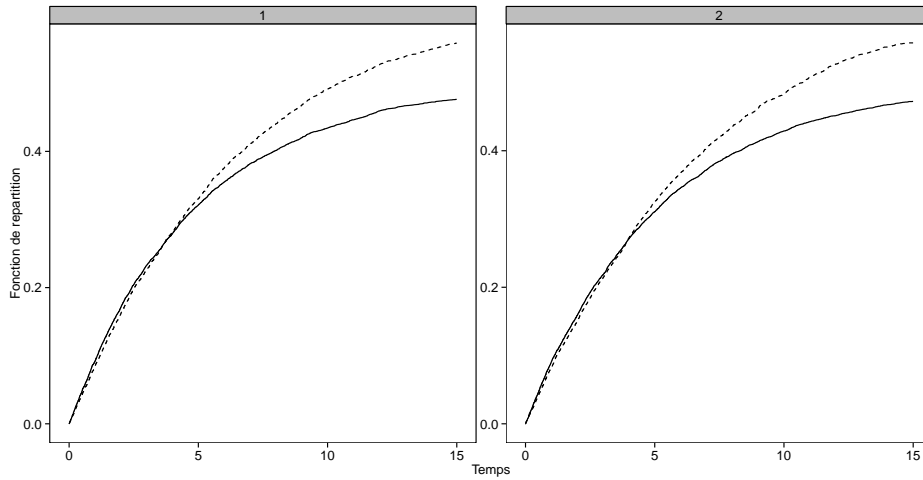
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2) &= \mathfrak{C}_\theta(\mathbb{P}(T_1 > t_1), \mathbb{P}(T_2 > t_2)) \\ &= \left( \mathbb{P}(T_1 > t_1)^{-\theta} + \mathbb{P}(T_2 > t_2)^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta}. \end{aligned}$$

Cette relation traduit une dépendance de queue à gauche et donc une plus forte probabilité pour ces deux causes d'entrée en interaction pour des valeurs de  $(t_1, t_2)$  basses. Nous introduisons également un processus de censure à droite indépendant, défini selon une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_C = \frac{1}{35}$ . Trois cas sont considérés par la suite :

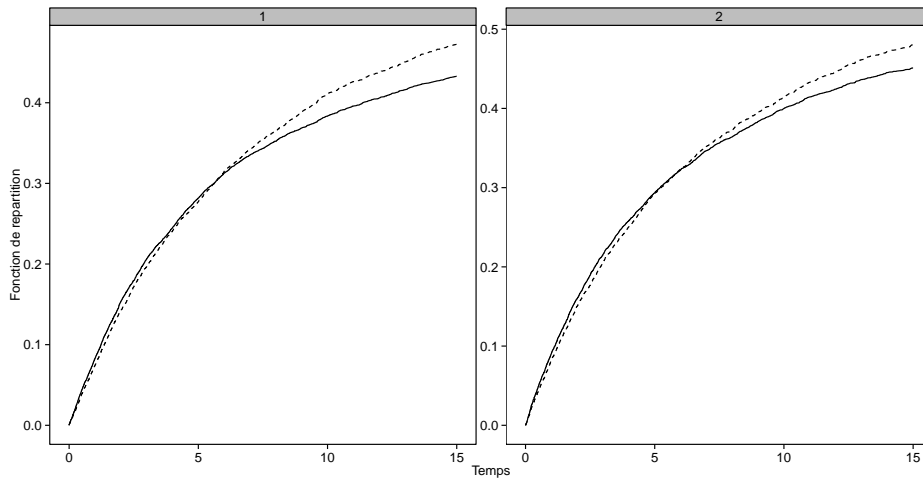
- Cas 1 :  $\lambda_1 = \frac{1}{10}$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{10}$  ;
- Cas 2 :  $\lambda_1 = \frac{1}{25}$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{10}$  ;
- Cas 3 :  $\lambda_1 = \frac{1}{50}$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{10}$ .

Deux hypothèses de dépendance sont testées pour chacun de ces cas : une hypothèse de faible dépendance ( $\theta = 0,001$ ) et une hypothèse forte ( $\theta = 0,8$ ). La situation avec faible dépendance permet de mesurer l'écart de définition entre la fonction de répartition par cause, obtenues par Kaplan-Meier (1.27) (1-KM), et l'estimateur de la fonction d'incidence cumulée (1.28), estimée non-paramétriquement à partir de l'estimateur d'Aalen-Johansen (1.33) (AJ). La seconde situation mesure l'effet supplémentaire de la dépendance entre les causes. Dans la suite, nous illustrons l'écart entre ces estimateurs et procédons pour chaque cas à une simulation de 10 000 individus.

La Figure 1.10 compare l'écart entre les deux estimateurs pour le premier cas. Lorsque les durées latentes suivent des lois identiques, l'estimateur 1-KM majore fortement AJ à partir de la date  $t = 5$  environ, alors que le second est dominant avant cette date. L'introduction d'une hypothèse de dépendance entre les causes conduit à atténuer l'écart entre 1-KM et AJ.



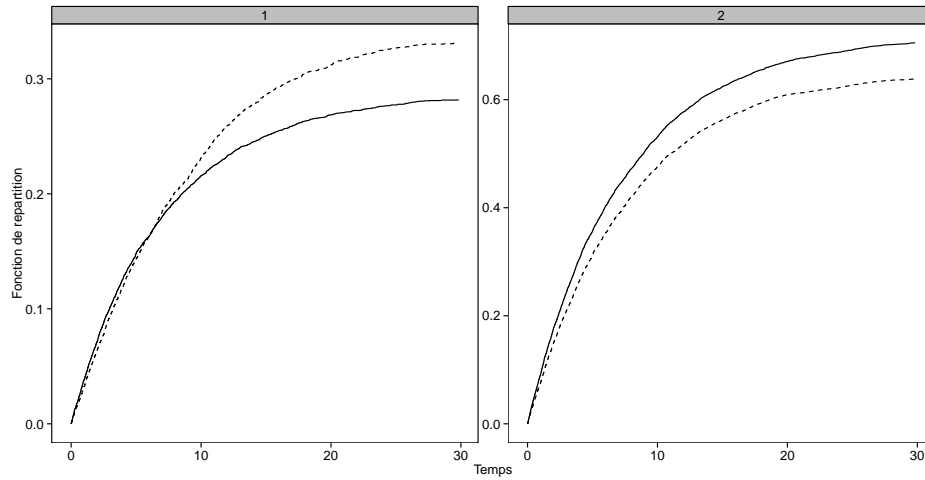
(a) Niveau de dépendance faible ( $\theta = 0,001$ ).



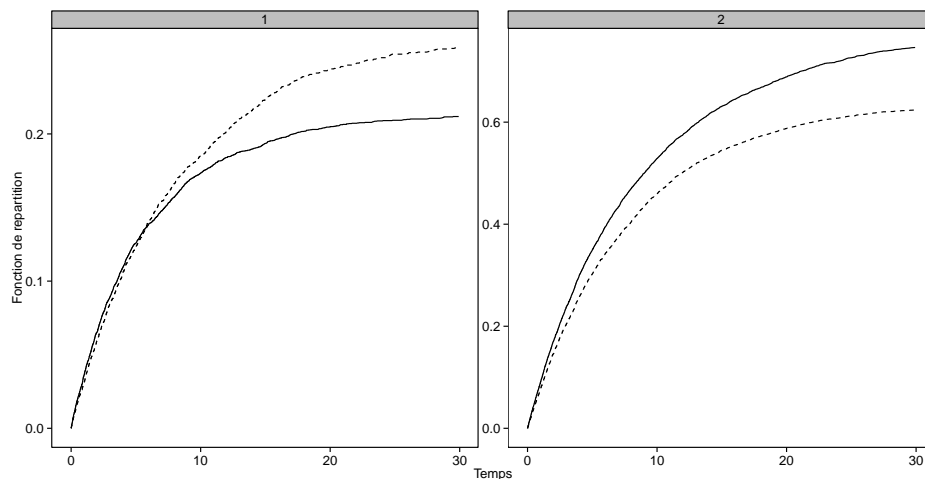
(b) Niveau de dépendance fort ( $\theta = 0,8$ ).

FIGURE 1.10 – Comparaison dans le Cas 1 des estimateurs des fonctions d'incidence cumulés (trait plein) et des fonctions de répartition (pointillé) de  $T_{01}$  (à gauche) et  $T_{02}$  (à droite) estimées par Kaplan-Meier. La Figure (a) correspond à  $\theta = 0,001$  et la Figure (b) correspond à  $\theta = 0,8$ .

La Figure 1.11 correspond au Cas 2. Dans cette situation, les sorties dues à la cause  $V = 2$  surviennent majoritairement plus tôt, ce qui a pour effet de limiter l'exposition au risque pour la cause  $V = 1$  et de rendre dominant l'estimateur AJ pour la cause  $V = 2$ . Avec une dépendance forte entre les deux causes, les écarts observés pour la Figure 1.11b s'accroissent.



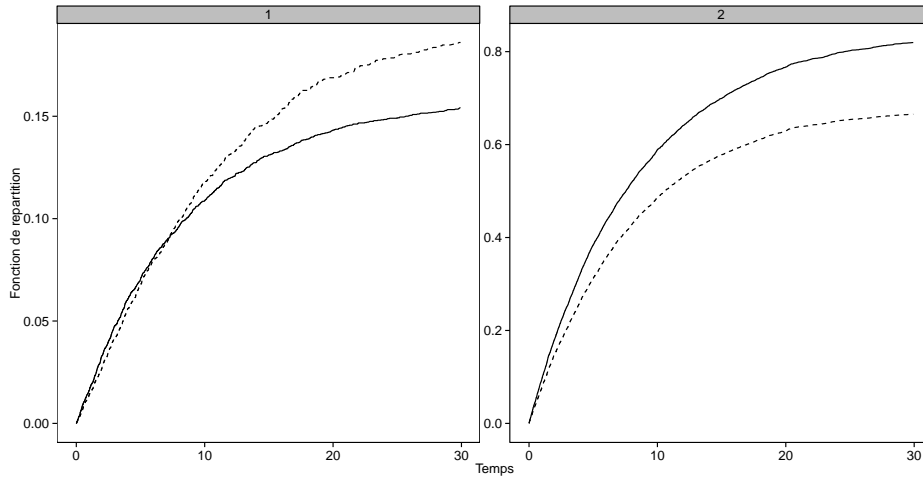
(a) Niveau de dépendance faible ( $\theta = 0,001$ ).



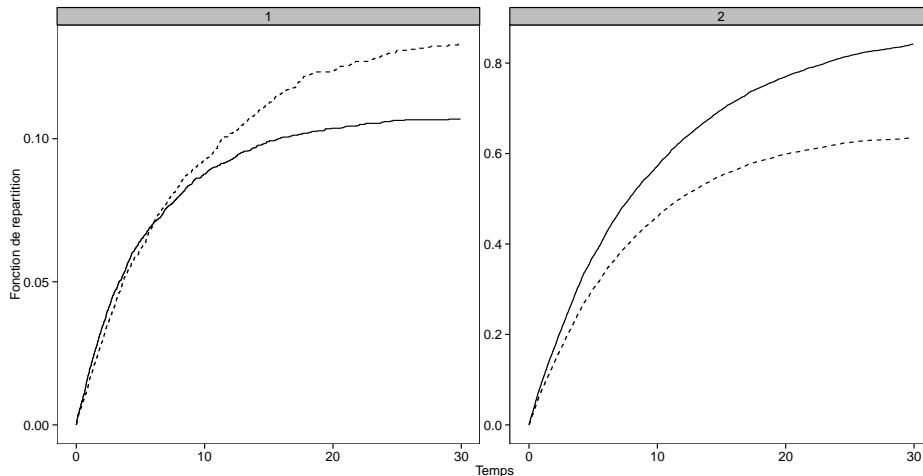
(b) Niveau de dépendance fort ( $\theta = 0,8$ ).

FIGURE 1.11 – Comparaison dans le Cas 2 des estimateurs des fonctions d'incidence cumulés (trait plein) et des fonctions de répartition (pointillé) de  $T_{01}$  (à gauche) et  $T_{02}$  (à droite) estimées par Kaplan-Meier. La Figure (a) correspond à  $\theta = 0,001$  et la Figure (b) correspond à  $\theta = 0,8$ .

Dans le Cas 3 (Figure 1.12), les sorties dues à la cause  $V = 2$  surviennent bien plus tôt que celle dues à la cause  $V = 1$ . Nous observons donc les mêmes phénomènes que pour la Figure 1.11 mais avec une amplitude plus importante.



(a) Niveau de dépendance faible ( $\theta = 0,001$ ).



(b) Niveau de dépendance fort ( $\theta = 0,8$ ).

FIGURE 1.12 – Comparaison dans le Cas 3 des estimateurs des fonctions d’incidence cumulés (trait plein) et des fonctions de répartition (pointillé) de  $T_{01}$  (à gauche) et  $T_{02}$  (à droite) estimées par Kaplan-Meier. La Figure (a) correspond à  $\theta = 0,001$  et la Figure (b) correspond à  $\theta = 0,8$ .

### 1.5.2 Vraisemblance du modèle markovien

L’inférence de modèles multi-états markoviens (mais aussi semi-markoviens) utilise la théorie des processus de comptage. Une présentation détaillée du lien entre processus multi-états et théorie des processus de comptage ainsi que la construction de la vraisemblance du modèle est fournie dans l’ouvrage Andersen *et al.* (1993, Chapitres II et III). Saint Pierre (2005) en fournit également un bon résumé.

Sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , nous considérons le processus de comptage multivarié  $\mathbf{N}$  associé au processus markovien  $X$  en date  $t \in \mathcal{T}$  tel que

$$\mathbf{N}(t) = (N_{hj}(t))_{h,j \in \mathcal{S}},$$

où  $N_{hj}(t)$  correspond au nombre de transitions de  $h$  vers  $j$  en date  $t$ . Nous notons  $(\mathcal{N}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , la filtration naturelle du processus  $\mathbf{N}$ . En introduisant  $L_h(t) = \mathbb{1}_{\{X_t=h\}}$ , il est possible de faire le lien entre le processus de comptage  $\mathbf{N}$  et le processus markovien  $X$  en faisant appel aux fonctions d'intensité cumulée (1.6). En effet (Andersen *et al.*, 1993, Theorem II.6.8), le processus de comptage admet pour compensateur  $\mathbf{\Lambda}$  selon la filtration  $(\mathcal{F}_t = \sigma(X(0)) \vee \mathcal{N}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  tel que pour  $h, j \in \mathcal{S}$

$$\Lambda_{hj}(t) = \int_0^t L_h(\tau) dA_{hj}(\tau), \quad h \neq j.$$

Dans le cas où  $\mathbf{A}$  est absolue continue,  $\mathbf{\Lambda}$  le sera aussi et s'écrit

$$\Lambda_{hj}(t) = \int_0^t L_h(\tau) \mu_{hj}(\tau) d\tau, \quad h \neq j.$$

**Vraisemblance en l'absence de censure.** En l'absence de censure, la vraisemblance complète associée au processus  $\mathbf{N}$  s'écrit, conditionnellement à l'état initial, à l'aide du produit intégral

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}} = \mathcal{P}_{t \in \mathcal{T}} \left( \prod_{\substack{h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} (d\Lambda_{hj}(t))^{\Delta N_{hj}(t)} \left( 1 - \sum_{\substack{h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} d\Lambda_{hj}(t) \right)^{1 - \sum_{\substack{h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} \Delta N_{hj}(t)} \right), \quad (1.49)$$

avec  $\Delta N_{hj}(t) = N_{hj}(t) - N_{hj}(t-)$ .

Dans le cas d'un modèle paramétrique, le processus  $\mathbf{A}$  est généralement supposé absolument continu pour permettre une spécification des intensités de transition, c'est-à-dire que l'on définit  $\mu_{hj}(t) = \mu_{hj}(t, \boldsymbol{\theta})$  pour toute transition  $h \rightarrow j$  et pour un vecteur de paramètre  $\boldsymbol{\theta}$ . Ainsi, l'expression de la vraisemblance (1.49) se réécrit plus simplement

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\theta}) = \left( \prod_{\substack{t \in \mathcal{T} \\ h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} (L_h(t) \mu_{hj}(t, \boldsymbol{\theta}))^{\Delta N_{hj}(t)} \right) \exp \left\{ - \int_{\mathcal{T}} \sum_{\substack{h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} L_h(\tau) \mu_{hj}(\tau, \boldsymbol{\theta}) d\tau \right\}, \quad (1.50)$$

**Vraisemblance avec censure.** Soit  $C$  une variable venant censurer à droite le processus  $\mathbf{N}$ . On introduit le processus  $R$  tel que pour tout  $t \in \mathcal{T}$

$$R(t) = \mathbb{1}_{\{t \leq C\}}.$$

L'information désormais disponible en date  $t$  après introduction de la variable de censure est résumée par la filtration

$$\mathcal{F}_t^c = \mathcal{F}_t \vee \sigma(R(\tau), \tau \leq t) \supseteq \mathcal{F}_t.$$

Puisque l'information est censurée, les transitions survenant au-delà de la date de censure ne sont pas observées. Le processus de comptage observé, appelé processus de comptage censuré à droite et noté  $\mathbf{N}^c$ , est donné tel que pour la transition  $h \rightarrow j$

$$N_{hj}^c(t) = \int_0^t R(\tau) dN_{hj}(\tau).$$

Par ailleurs, le nombre présence de l'individu dans l'état  $h$  devient

$$L_h^c(t) = R(t) L_h(t).$$

Dans la suite, nous supposons que le processus de censure  $R$  est prévisible par rapport  $(\mathcal{F}_t^c)_{t \in \mathcal{T}}$  et qu'il est :

- indépendant, c'est-à-dire que le processus  $\mathbf{N}$  reste le compensateur de  $\mathbf{N}^c$  par rapport à  $(\mathcal{F}_t^c)_{t \in \mathcal{T}}$ . Le processus  $\mathbf{N}^c$  admet donc pour compensateur  $\mathbf{\Lambda}^c$  par rapport à  $(\mathcal{F}_t^c)_{t \in \mathcal{T}}$  tel que pour toute transition  $h \rightarrow j$

$$\Lambda_{hj}^c(t) = \int_0^t R(\tau) d\Lambda_{hj}(\tau) ;$$

- non-informatif.

La propriété d'indépendance traduit le fait que l'événement de censure ne signifie pas une modification de l'intensité du processus. En d'autres termes, un individu subissant l'événement de censure présente le même risque de connaître une transition qu'un individu non-censuré. Dans ces circonstances, la vraisemblance du modèle censuré est définie en introduisant la notion de vraisemblance partielle du processus  $\mathbf{N}^c$ . Par souci de simplicité, nous ne détaillons pas dans cette annexe la manière de construire cette quantité. Il serait nécessaire pour cela d'introduire une notion supplémentaire, appelée processus ponctuel marqué  $\mathbf{N}^*$ , qui permettrait de représenter conjointement chaque transition et l'ensemble des individus qui l'expérimentent. La notion de vraisemblance partielle découle alors de l'écriture du processus  $\mathbf{N}^c$  en fonction du processus ponctuel marqué et de la vraisemblance de ce dernier

$$L_{\mathcal{T}}^*(\vartheta, \phi) = \mathcal{L}_{\mathcal{T}}''(\vartheta, \phi) \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^c(\vartheta). \quad (1.51)$$

Cette vraisemblance est définie sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_{\vartheta, \phi}$ , faisant intervenir deux paramètres. Le paramètre  $\vartheta$  correspond de manière général au paramètre d'intérêt pour définir les intensités de transition, alors que  $\phi$  correspond à un paramètre de nuisance, caractérisant notamment la censure. L'ensemble de définition de ces paramètres peut aussi bien être des espaces euclidiens de dimension finie, ce qui correspond aux modèles paramétriques, que des espaces de fonctions, ce qui correspond au cas non-paramétrique. L'écriture de (1.51) fait apparaître un produit de vraisemblance dont le second correspond à la vraisemblance partielle du modèle censuré

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^c(\vartheta) = \mathcal{P}_{t \in \mathcal{T}} \left( \prod_{\substack{h, j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} (d\Lambda_{hj}^c(t, \vartheta))^{\Delta N_{hj}^c(t, \vartheta)} \left( 1 - \sum_{\substack{h, j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} d\Lambda_{hj}^c(t, \vartheta) \right)^{1 - \sum_{\substack{h, j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} \Delta N_{hj}^c(t, \vartheta)} \right). \quad (1.52)$$

On remarque que la vraisemblance partielle (1.52) a la même forme que la vraisemblance du modèle non-censuré (1.49). Cette caractéristique, découlant de l'hypothèse d'indépendance de



la censure, est commode car elle permet de considérer la vraisemblance partielle du modèle censure pour conduire l'inférence statistique du modèle markovien, comme le permet la vraisemblance complète (1.49) en l'absence de censure. L'indépendance du processus de censure permet en effet de préserver les résultats de la théorie asymptotique des modèles paramétriques et non-paramétriques obtenus sans censure (cf. Andersen *et al.*, 1993, Chapitre VIII et Section VI.1.2).

Si l'on suppose de plus que la vraisemblance  $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}''(\vartheta, \phi)$  ne dépend pas de  $\vartheta$  alors le processus  $R$  est qualifié de non-informatif. Ceci signifie que le paramètre d'intérêt  $\vartheta$  est complètement caractérisé par la vraisemblance partielle du modèle censuré. Lorsque la censure est informative, cela signifie qu'elle comprend une information sur les intensités des événements d'intérêt. C'est par exemple le cas dans un modèle où plusieurs causes de décès apparaissent. Si le statisticien ne traite qu'une seule de ces causes et considère les autres comme de la censure, mener l'inférence du modèle à partir de la vraisemblance partielle  $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^c(\vartheta)$  peut signifier qu'une partie de l'information est négligée puisqu'*a priori* les durées de vie latentes associées à chacune des causes n'ont pas de raison d'être indépendantes.

### 1.5.3 Principales propriétés de l'estimateur de Nelson-Aalen

L'étude des propriétés de l'estimateur de Nelson-Aalen (1.29) est généralement conduite en introduisant le processus  $\mathbb{1}_{\{L_h(\tau) > 0\}}$ . Puisque les sauts de  $N_{hj}$  ont lieu lorsque  $L_h$  est positif, il se réécrit alors de manière équivalente

$$\widehat{A}_{hj}(t) = \int_0^t \frac{\mathbb{1}_{\{L_h(\tau) > 0\}}}{L_h(\tau)} dN_{hj}(\tau).$$

Pour un échantillon de taille  $n > 0$ , cet estimateur présente des propriétés intéressantes (cf. Andersen *et al.*, 1993, Section IV.1) récapitulées ci-dessous pour tout  $h, j \in \mathcal{S}$  et pour tout  $t \in \mathcal{T}$  :

- il est très faiblement biaisé

$$\mathbb{E} \left[ \widehat{A}_{hj}(t) \right] - A_{hj}(t) = - \int_0^t \mathbb{P}(L_i(\tau) = 0) \mu_{hj}(\tau) d\tau ;$$

- il admet pour estimateur de la variance

$$\widehat{\sigma}_{hj}^2(t) = \int_0^t \frac{\mathbb{1}_{\{L_h(\tau) > 0\}}}{(L_h(\tau))^2} dN_{hj}(\tau) ;$$

- en supposant que le ratio  $\frac{\mathbb{1}_{\{L_h > 0\}}}{L_h}$  est localement borné pour  $h \in \mathcal{S}$  et pour  $n$ , cet estimateur est uniformément consistant et asymptotiquement normal tel que

$$\sqrt{n} \left( \widehat{A}_{hj}(t) - A_{hj}(t) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{U}_{hj}(t),$$

où  $(\mathcal{U}_{hj})_{i,j \in \mathcal{S}}$  correspondent à des martingales gaussiennes indépendantes, nulles en zéro, centrées et de fonctions de covariance

$$\text{Cov} [\mathcal{U}_{hj}(t), \mathcal{U}_{hj}(s)] = \int_0^{t \wedge s} \frac{\mu_{hj}(\tau)}{\sum_{l \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X(0) = l) \cdot p_{lh}(0, \tau)} d\tau.$$

L'estimateur de la variance est particulièrement utile puisqu'il permet de construire des intervalles de confiance ponctuels ainsi que des bandes de confiance sur un intervalle de temps, et donc un encadrement du risque lié aux fluctuations d'échantillonnage.

### 1.5.4 Principales propriétés de l'estimateur d'Aalen-Johansen

Pour un échantillon de taille  $n > 0$ , l'estimateur d'Aalen-Johansen (1.30) constitue une généralisation de l'estimateur de Kaplan-Meier. Il est, comme lui, doté de bonnes propriétés (cf. Andersen *et al.*, 1993, Section IV.4). En effet, pour tout  $h, j \in \mathcal{S}$  et pour tout  $s, t \in \mathcal{T}$  avec  $s \leq t$  :

- il est biaisé positivement ;
- sous les mêmes hypothèses que celles introduites pour l'estimateur de Nelson-Aalen, il est uniformément convergent et asymptotiquement normal

$$\sqrt{n}(\widehat{\mathbf{p}}(s, \cdot) - \mathbf{p}(s, \cdot)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \int_s^{\cdot} \mathbf{p}(s, \tau) \cdot d\mathbf{U}(\tau) \cdot \mathbf{p}(\tau, \cdot),$$

où  $\mathbf{U} = (\mathcal{U}_{hj})_{h,j \in \mathcal{S}}$  correspondent à des martingales gaussiennes vérifiant  $\mathcal{U}_{hh} = - \sum_{j \neq h} \mathcal{U}_{hj}$ , nulles en zéro, indépendantes, centrées et de covariance

$$\text{Cov}[\mathcal{U}_{hj}(t), \mathcal{U}_{hj}(s)] = \int_0^{t \wedge s} \frac{\mu_{hj}(\tau)}{\sum_{l \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X(0) = l) \cdot p_{lh}(0, \tau)} d\tau.$$

Concernant la variance et la covariance de l'estimateur d'Aalen-Johansen, il est possible de définir deux estimateurs. Le premier dérive directement de l'estimateur d'Aalen-Johansen et le second est de type *Greenwood*, au sens de l'estimateur de la variance du même nom introduit pour l'estimateur de Kaplan-Meier (Klein et Moeschberger, 2003). Bien que le second soit plus simple à manipuler, son utilisation n'est pas permise dans un cadre semi-paramétrique. Le premier estimateur est défini tel que pour tout  $h, j \in \mathcal{S}$  et pour tout  $s, t \in \mathcal{T}$  avec  $s \leq t$ , par

$$\widehat{\text{Cov}}[\widehat{p}_{hj}(s, t), \widehat{p}_{lm}(s, t)] = \sum_{k \in \mathcal{S}} \sum_{q \neq k} \int_s^t \left[ \begin{array}{l} \widehat{p}_{hq}(s, \tau) \widehat{p}_{lq}(s, \tau) (\widehat{p}_{kj}(\tau, t) - \widehat{p}_{qj}(\tau, t)) \\ \times (\widehat{p}_{km}(\tau, t) - \widehat{p}_{qm}(\tau, t)) \frac{\mathbb{1}_{\{L_q(\tau) > 0\}}}{(L_q(\tau))^2} dN_{qk}(\tau) \end{array} \right].$$

Il permet de construire des intervalles de confiance ponctuels donnant un encadrement du risque lié aux fluctuations d'échantillonnage. Le second estimateur, de type *Greenwood*, s'écrit quant à lui

$$\widehat{\widehat{\text{Cov}}}[\widehat{p}_{hj}(s, t), \widehat{p}_{lm}(s, t)] = \sum_{k \in \mathcal{S}} \sum_{q \neq k} \int_s^t \left[ \begin{array}{l} \widehat{p}_{hq}(s, \tau-) \widehat{p}_{lq}(s, \tau-) (\widehat{p}_{kj}(\tau, t) - \widehat{p}_{qj}(\tau, t)) \\ \times (\widehat{p}_{km}(\tau, t) - \widehat{p}_{qm}(\tau, t)) \frac{\mathbb{1}_{\{L_q(\tau) > 0\}} (L_q(\tau) - 1)}{(L_q(\tau))^3} dN_{qk}(\tau) \end{array} \right].$$

### 1.5.5 Modèle semi-paramétrique de Cox

Les modèles multi-états présentent l'intérêt de pouvoir être conjugués avec les modèles de régression utilisés dans le cadre de modèle de survie. Une formalisation classique consiste à présenter l'intensité  $h \rightarrow j$  du modèle en date  $t$  sous forme multiplicative (Cox, 1972)

$$\mu_{hj}(t | \mathbf{Z}_{hj,i}, \boldsymbol{\theta}) = \mu_{0hj}(t) \exp\left(\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Z}_{hj,i}\right), \quad (1.53)$$

où  $\mathbf{Z}_{hj,i}$  est un vecteur de covariables associées à l'individu  $i$  (constantes ou variables avec le temps) et  $\mu_{0hj}$  une fonction d'intensité de base, paramétrique ou indéterminée. Si de nombreux modèles régressifs sont potentiellement applicables, notamment les extensions du modèle multiplicatif de Cox ou du modèle additif d'Aalen (Martinussen et Scheike, 2006), nous nous limitons ici au modèle multiplicatif à hasard proportionnel (1.53). Cette dénomination provient du fait que le ratio des intensités propres à deux individus ne dépend pas de la fonction  $\mu_{0hj}$ .

L'inférence statistique d'un modèle purement paramétrique pouvant être réalisée en maximisant la vraisemblance (1.50), nous présentons dans cette annexe les grandes lignes de l'estimation semi-paramétrique du modèle de Cox en s'appuyant sur (Andersen *et al.*, 1993, Chapitre VII). Dans ce contexte, il s'agit d'estimer non-paramétriquement la fonction  $\mu_{0hj}(\cdot)$  et déterminer ensuite le vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ . Comme précisé pour la Section 1.2, nous nous plaçons dans le cadre où les données sont censurées à droite par un processus indépendant et non-informatif, même si nos notations n'y font pas référence explicitement.

Pour un échantillon de taille  $n > 0$ , l'estimateur des intensités cumulées de base, appelé estimateur de Breslow et dérivé de l'estimateur de Nelson-Aalen (1.29), s'écrit pour la transition  $h \rightarrow j$  sous la forme suivante

$$\widehat{A}_{0hj}(t) = \int_0^t \frac{\mathbb{1}_{\{L_h(\tau) > 0\}}}{S_{hj}^{(0)}(\tau, \boldsymbol{\theta})} dN_{hj}(\tau). \quad (1.54)$$

avec  $S_{hj}^{(0)}(t, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \exp(\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Z}_{hj,i}) L_{h,i}(t)$ .

En remplaçant  $A_{0hj}$  par son estimateur (1.54) dans l'expression (1.50) de la vraisemblance (partielle), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{L}_{\text{Cox}}(\boldsymbol{\theta}) \\ &\times \left( \prod_{t \in \mathcal{T}} \prod_{i=1}^n \prod_{\substack{h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} (\mathbb{1}_{\{L_h(t) > 0\}} dN_{hj}(t))^{\Delta N_{hj,i}(t)} \right) \\ &\times \exp \left\{ - \int_{\mathcal{T}} \sum_{\substack{h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} \mathbb{1}_{\{L_h(\tau) > 0\}} dN_{hj}(\tau) \right\}, \end{aligned}$$

où le premier terme est appelé vraisemblance (partielle) de Cox

$$\mathcal{L}_{\text{Cox}}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{t \in \mathcal{T}} \prod_{\substack{h,j \in \mathcal{S} \\ h \neq j}} \left( \frac{\exp(\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Z}_{hj,i})}{S_{hj}^{(0)}(t, \boldsymbol{\theta})} \right)^{\Delta N_{hj,i}(t)}. \quad (1.55)$$

On note que le second et le troisième terme de la vraisemblance ne dépendent pas de  $\boldsymbol{\theta}$ . Ainsi, la détermination de ce paramètre est effectuée en maximisant la vraisemblance (partielle) de Cox (1.55). Les estimateurs ainsi obtenus sont asymptotiquement efficaces et leur variance asymptotique, utilisée pour construire des intervalles de confiance asymptotiques, est déduite de l'inverse de la matrice d'information de Fisher.

Par analogie de construction avec l'estimateur d'Aalen-Johansen (1.30), l'estimateur des matrices de probabilité de transition est ensuite obtenu pour l'individu  $i$  en écrivant que pour tout  $s, t \in \mathcal{T}$  avec  $s \leq t$

$$\hat{\mathbf{p}}(s, t \mid \mathbf{Z}_{hj,i}) = \mathcal{P}_{\tau \in [s,t]} \left( \mathbf{Id} + d\hat{\mathbf{A}}_0 \left( \tau \mid \mathbf{Z}_{hj,i}, \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \right) \exp \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{Z}_{hj,i} \right), \quad (1.56)$$

où  $\hat{\mathbf{A}}_0 = \left( \hat{\mathbf{A}}_{0hj} \right)_{i,j \in \mathcal{S}}$  correspond à la matrice des estimateurs de Breslow. Cet estimateur dispose de propriétés de normalité asymptotique qui sont dérivées de celles de l'estimateur d'Aalen-Johansen par application de la méthode Delta.

## Chapitre 2

# Construction de lois d'expérience en présence d'événements concurrents

Ce chapitre présente la mise en œuvre de méthodes d'estimation non-paramétriques dans le cadre de modèles multi-états markoviens avec censure pour construire des lois d'expérience applicables en présence de plusieurs événements concurrents. Cette situation se présente en pratique en assurance dépendance lorsqu'il est nécessaire de distinguer les lois d'incidence par pathologie. Aussi, plutôt que d'appliquer des techniques utilisées usuellement par les praticiens, consistant à observer marginalement chaque cause d'entrée en dépendance, l'approche décrite permet d'estimer globalement l'ensemble des lois d'entrée par cause et de correctement appréhender l'interdépendance entre chacune d'elle. Ce chapitre fournit une comparaison des résultats obtenus par ces deux approches au niveau de la provision à constituer afin de pouvoir justifier l'approche marginale, plus simple à mettre en œuvre en pratique.

Ce chapitre s'appuie sur l'article de Guibert et Planchet (2014), coécrit avec Frédéric Planchet et publié dans le *Bulletin Français d'Actuariat* 27, vol. 13, p 5-28.

## 2.1 Introduction

L'assurance dépendance permet d'offrir une couverture financière en cas de perte d'autonomie ou de mobilité entraînant des difficultés pour accomplir des actes de la vie quotidienne. En France, elle s'adresse aux personnes âgées reconnues partiellement ou totalement dépendantes et vient compléter les aides publiques, majoritairement sous forme de rente forfaitaire. Le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de Courbage et Roudaut (2011) pour davantage de précisions concernant le dispositif français ou la thèse de Plisson (2009) concernant le développement de ce marché dans l'Hexagone. La description des contrats d'assurance dépendance et l'examen des problématiques de tarification et de provisionnement associées ont fait l'objet de nombreux développements dans la littérature actuarielle (cf. Haberman et Pitacco, 1998; Deléglise *et al.*, 2009). Ils s'appuient généralement sur l'utilisation de modèles multi-états markoviens ou semi-markoviens (Denuit et Robert, 2007; Christiansen, 2012), à l'instar des modèles utilisés en assurance incapacité-invalidité. Ces derniers sont en effet d'avantage justifiés puisque la mortalité des assurés dépendants est à la fois une fonction de l'âge et de la durée de maintien. Dans ce chapitre, nous intéressons plus particulièrement aux techniques permettant d'estimer l'incidence en dépendance.

La construction de bases d'expérience adaptées à la dépendance est être un exercice particulièrement délicat, du fait d'une part, des faibles volumes observés jusqu'à aujourd'hui pour ce risque par les assureurs et, d'autre part de son caractère évolutif (Ferri et Olivieri, 2000; Olivieri et Pitacco, 2001; Rickayzen et Walsh, 2002). Une difficulté supplémentaire émerge par ailleurs avec l'arrivée des dispositifs Solvabilité II et IFRS qui demandent la conception de bases d'expérience présentant un certain degré de réalisme, d'homogénéité et de fidélité par rapport aux spécificités de l'assureur.

Ces difficultés amènent les assureurs à s'interroger sur des techniques de construction de tables, notamment non-paramétriques (cf. Tomas et Planchet, 2013, pour la construction de lois de survie en dépendance), tant en amont qu'en aval de l'entrée en dépendance. Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus spécifiquement à la construction de lois d'expérience mesurant la survenance de la dépendance lourde. Il s'agit d'un phénomène résultant de la survenance de pathologies liées à l'âge (maladies neuro-dégénératives, affections cardio-vasculaires, cancers, etc.) qui constituent des causes concurrentes qu'il peut être nécessaire de distinguer puisqu'elles témoignent d'une réelle hétérogénéité et que certains contrats appliquent des délais de carence par type de pathologie dans le but de limiter le risque d'anti-sélection.

Dans ce contexte, il est légitime de recourir à des modèles à risques concurrents pour évaluer les taux d'incidence vers les différentes causes d'entrée. Une littérature abondante traite de l'inférence de ce type de modèle, en particulier des approches reposant sur les durées de maintien latentes (Prentice *et al.*, 1978) ou sur des modèles à hasard proportionnel, comme le modèle classique de Fine et Gray (1999). Ces dernières sont notamment utilisées en biostatistiques pour estimer la fonction de répartition de la durée vie latente relative à une cause d'intérêt en particulier (en générale la survenance d'une maladie). Dans un cadre actuariel, et bien que ces techniques aient l'avantage d'une certaine simplicité, elles restent d'un intérêt limité puisqu'elles se focalisent sur des grandeurs qui n'interviennent pas directement dans le calcul des provisions techniques et des primes.

Dans la pratique, il est relativement courant en assurance de personnes que les actuaires utilisent, par commodité, des techniques d'analyse de survie, en utilisant une hypothèse d'indépendance, pour inférer les lois des durées de vie latentes et en déduire des probabilités d'incidence. Elles sont alors construites à partir des données de l'assureur, soit en estimant

séparément les taux d'incidence bruts par Kaplan-Meier (Kaplan et Meier, 1958), soit par positionnement relativement à une référence externe. Ces choix peuvent apparaître critiquables puisqu'ils ne permettent pas de correctement appréhender l'interdépendance entre les durées latentes. Les techniques employées sont donc susceptibles de générer des biais provenant d'une part, de l'hypothèse d'indépendance qui n'est probablement pas vérifiée (Tsiatis, 1975; Prentice *et al.*, 1978; Beyersmann *et al.*, 2011), et d'autre part dû fait que, par définition, l'estimateur de Kaplan-Meier n'est pas approprié pour évaluer des probabilités d'incidence. Concernant le second point, Gooley *et al.* (1999) relèvent l'utilisation de pratiques similaires dans le domaine des sciences médicales pour lesquelles ils signalent observer des biais significatifs. Pour corriger cet effet, certains praticiens en assurance réintroduisent parfois une structure de dépendance arbitraire à base de priorités entre chacune des lois latentes. Toutefois, puisque les durées de survie sont latentes, la forme de la structure de dépendance les reliant n'est pas identifiable (Andersen et Keiding, 2012). Cette problématique est similaire à celle rencontrée par les utilisateurs de l'estimateur dit *graphic-copula* de Zheng et Klein (1995) : la copule introduite pour estimer les lois de survie latentes ne peut être testée (cf. Carrière, 1994; Kaishev *et al.*, 2007; Lo et Wilke, 2010, pour quelques exemples d'applications).

À l'instar des travaux de Czado et Rudolph (2002) et de Helms *et al.* (2004), nous choisissons donc d'aborder cette problématique d'inférence à partir d'un modèle multi-états (Andersen *et al.*, 2002), en proposant des estimateurs tenant compte du phénomène de censure indépendante à droite, observé sur les données. Cette approche permet entre autres de fournir une estimation des taux d'incidence en dépendance directement manipulables pour la tarification et le provisionnement. Nous comparons cette approche avec celles utilisées par les praticiens et examinons dans quelle mesure une approche plus simple s'appuyant sur l'estimation des durées de maintien latentes pourrait se justifier.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante. La Section 2.2 précise les notations du modèle et met en exergue les quantités d'intérêts pour le calcul des provisions techniques. Dans la Section 2.3, les méthodologies d'estimation non-paramétrique sont décrites. La première utilise le cadre classique des modèles multi-états tandis que la seconde s'appuie sur les durées de maintien latentes. Une application numérique sur un portefeuille de contrats dépendance est ensuite présentée dans la Section 2.4. Elle s'attache en particulier à évaluer le risque d'estimation associé à la mise en œuvre de l'approche multi-états pour construire des lois d'expérience. La Section 2.5 conclut l'étude.

## 2.2 Modélisation

Cette section présente le cadre de base permettant de modéliser l'incidence d'un contrat dépendance en présence de risques concurrents.

### 2.2.1 Notation

Sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , l'état occupé par l'assuré est représenté par d'un processus markovien non-homogène  $(X_t)_{t \geq 0}$ , muni de sa filtration engendrée  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , et supposé continu à droite avec limite à gauche. Ce processus prend ses valeurs dans un espace d'états  $\mathcal{S} = \{e_0, e_1, \dots, e_m\}$  fini, où  $e_0$  correspond à l'état de "cotisant" ou de "valide" et  $e_j$  correspond à la "j-ème cause de sortie" pour  $j = 1, \dots, m$ . Les transitions possibles entre ces états sont représentées par le schéma de la Figure 2.1.

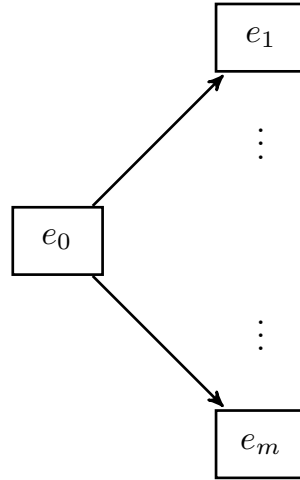


FIGURE 2.1 – Modèle multi-états associé à l'incidence en dépendance.

Comme il est classique de le faire dans la littérature relative aux modèles multi-états (Andersen *et al.*, 1993, Chapitre 2), nous caractérisons le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à partir de ses probabilités de transition

$$p_{0j}(s, t) = P(X_t = j | X_s = e_0) \text{ pour } 0 \leq s \leq t, j \in \mathcal{S}, \quad (2.1)$$

et des intensités de transition (ou taux de hasard) associés, définis tels que pour tout  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mu_{0j}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{0j}(t, t + \Delta t) - p_{0j}(t, t)}{\Delta t} \text{ pour } j \neq e_0, \\ \mu_{00}(t) &= - \sum_{j \neq e_0} \mu_{0j}(t). \end{aligned}$$

Les fonctions d'intensité cumulée de transition correspondantes sont alors obtenues pour tout  $t \geq 0$  et  $j \in \mathcal{S}$  via

$$\begin{aligned} A_{0j}(t) &= \int_0^t \mu_{0j}(\tau) d\tau \text{ pour } j \neq e_0, \\ A_{00}(t) &= - \sum_{j \neq e_0} A_{0j}(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

D'autre part, en notant  $T$  la durée totale de maintien dans l'état "valide" et  $V = X_T$  l'état du modèle à cet instant, nous introduisons les fonctions d'incidence cumulée définies pour tout  $t \geq 0$  par

$$F^{(j)}(t) = P(T \leq t, V = j), \text{ pour } j \neq e_0, \quad (2.3)$$

auxquelles, nous associons les durées de maintien latentes  $T_{0j} = \inf_{t \geq 0} \{X(t) = j\}$  pour  $j \neq e_0$  qui vérifient

$$T = \min_{j \neq e_0} (T_{0j}).$$

Ces quantités sont des durées latentes puisqu'en pratique, elles entrent en concurrence les unes avec les autres et seule la durée correspondant à la cause qui se matérialise est susceptible



d'être observée. Par ailleurs, nous remarquons que les fonctions d'incidence cumulée s'écrivent également pour tout  $t \geq 0$

$$F^{(j)}(t) = p_{0j}(0, t) = \int_0^t p_{00}(0, \tau) \cdot \mu_{0j}(\tau) d\tau, \text{ pour } j \neq e_0.$$

### 2.2.2 Provisions techniques

La définition des provisions techniques d'un contrat d'assurance conditionne les différents états que peut occuper un assuré pendant la période de couverture de la police. En effet, le déclenchement d'une prestation ou l'arrêt du paiement des cotisations sont conditionnées par la transition d'un état prédéfini vers un autre.

De le cas simplifié d'un modèle à risques compétitifs, l'expression des flux futurs actualisés associés à un assuré toujours valide en date  $t \geq 0$  et d'âge  $x + t$  à cette date s'écrit (Haberman et Pitacco, 1998; Christiansen, 2012)

$$\begin{aligned} \Lambda_x(t) = & \sum_{j \neq e_0} \int_t^{+\infty} \frac{\delta(\tau)}{\delta(t)} c_j(x + \tau) dN_{0j}(\tau) \\ & - \int_t^{+\infty} \frac{\delta(\tau)}{\delta(t)} \mathbb{1}_{\{X_{x+\tau} = e_0\}} b(x + \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $c_j(x)$  représente les prestations versées à l'âge  $x$  en cas de survenance de la  $j$ -ème cause de sortie,  $N_{0j}(t)$  le processus comptant le nombre de ces sorties et  $b(x)$  correspond à la prime versée tant que l'assuré demeure dans l'état "valide"<sup>1</sup>. Le coefficient d'actualisation et le prix d'un zéro-coupon s'écrivent de manière classique à partir du taux sans risque  $(r_t)_{t \geq 0}$  tel que pour tout  $0 \leq t \leq T$

$$\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau\right) \text{ et } B(t, T) = \mathbb{E}_t \left[ \frac{\delta(T)}{\delta(t)} \right].$$

Dans la suite, nous nous intéresserons à la provision *best estimate* associée à un contrat en considérant l'espérance de (2.4) et en supposant que des flux de primes et de prestations sont indépendants du risque de taux

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Lambda_x(t) | X_{x+t} = e_0] = & \sum_{j \neq e_0} \int_t^{+\infty} B(t, \tau) \cdot p_{00}(x + t, x + \tau) \cdot \mu_j(x + \tau) \cdot c_j(x + \tau) d\tau \\ & - \int_t^{+\infty} B(t, \tau) \cdot p_{00}(x + t, x + \tau) \cdot b(x + \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'Équation (2.5) peut s'écrire en temps discret sous la forme suivante pour  $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Lambda_x(t) | X_{x+t} = e_0] \approx & \sum_{j \neq e_0} \sum_{k=t}^{+\infty} B(t, k+1) p_{00}(x + t, x + k) q_j(x + k) c_j(x + k) \\ & - \sum_{k=t}^{+\infty} B(t, k) p_{00}(x + t, x + k) b(x + k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $q_j(x) = p_{0j}(x, x + 1) = P(x < T \leq x + 1, V = j | T > x)$ . Aussi, l'évaluation de la provision *best estimate* requiert-elle de réaliser l'estimation des lois de survie  $p_{00}(x, x + 1)$  et d'incidence  $q_j(x)$  pour tout  $j \in \mathcal{S}$ .

1. Dans un souci de simplicité, nous négligeons la capacité de réduction que procurent certains contrats.

## 2.3 Estimation des taux d'incidence bruts

Cette section décrit une méthode d'estimation reposant sur une formulation multi-états pour le calcul des taux d'incidence en dépendance et reprend les éléments essentiels d'une méthodologie plus simple, utilisée par les praticiens, s'appuyant sur les durées de maintien latentes. Les deux approches ainsi proposées tiennent compte du fait que les observations en dépendance font l'objet d'une censure à droite et d'une troncature à gauche indépendantes. Ces techniques se distinguent des modèles de régression poissonniens ou binomiaux, décrits par le CMIR12 (1991) ou par Denuit et Robert (2007, Section 2.6), très utilisés en science actuarielle mais destinés à des données plus agrégées.

### 2.3.1 Estimation multi-états

La théorie des processus de comptage et celle des martingales permettent d'introduire dans le cadre markovien l'estimateur de Nelson-Aalen des intensités de transition cumulées (2.2) et l'estimateur d'Aalen-Johansen des probabilités de transition (2.1). Pour une présentation théorique de ces estimateurs et de leurs principales propriétés, le lecteur intéressé pourra se reporter à Andersen *et al.* (1993, Sections IV.1 et IV.4) ou Andersen et Keiding (2002).

En présence de données longitudinales, les données observées sont individuelles et en partie incomplètes. Dans notre étude, il s'agit d'un phénomène  $C$  de censure à droite non-informatif (p. ex. censure administrative). Ainsi, les durées de maintien  $T$  des assurés ne sont pas complètement observées. À la place, nous observons les grandeurs suivantes

$$Y = T \wedge C \text{ et } \gamma = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}}.$$

Par conséquent, l'observation d'un individu  $i$  au sein d'un échantillon de taille  $n$  est caractérisée par

$$(Y_i, \gamma_i, \gamma_i V_i), i = 1, \dots, n.$$

Les  $n$  individus sont considérés indépendants et identiquement distribués. En notant  $Y_{i:n}$  la statistique d'ordre  $i$  des réalisations de  $Y$  et  $(\gamma_{[i:n]}, V_{[i:n]})$  les valeurs de  $(\gamma_i, V_i)$  associée à  $Y_{i:n}$ , l'estimateur des intensités cumulées de transition (2.3) s'écrit sous la forme d'une somme

$$\hat{A}_{0j}(t) = \sum_{\{i: Y_{i:n} \leq t\}} \frac{\gamma_{[i:n]} \mathbb{1}_{\langle V_{[i:n]}=j \rangle}}{L_0(Y_{i:n})} \text{ pour tout } j \neq e_0, t \geq 0. \quad (2.7)$$

où  $L_0(t)$  correspond au nombre d'individus valides présents en date  $t \geq 0$  en  $t$ . De cette manière, l'estimateur des taux d'incidence bruts s'écrit à partir de l'Équation (2.7). En adaptant l'expression de l'estimateur d'Aalen-Johansen (Andersen *et al.*, 1993, Section IV.4.1.7) au cas particulier d'un modèle à risques concurrents, il est possible d'estimer les taux d'incidence par

$$\hat{q}_j(t) = \sum_{\{i: t < Y_{i:n} \leq t+1\}} \frac{\hat{S}(Y_{i:n})}{\hat{S}(t)} \frac{\gamma_{[i:n]} \mathbb{1}_{\langle V_{[i:n]}=j \rangle}}{L_0(Y_{i:n})} \text{ pour tout } j \neq e_0, t \geq 0. \quad (2.8)$$

À ce titre, il convient de noter que les taux de maintien dans l'état "valide"  $p_{00}(x, x+1)$  sont naturellement estimés à partir de l'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie  $S$  de la durée  $T$

$$\hat{S}(t) = \prod_{\{i: Y_{i:n} \leq t\}} \left(1 - \frac{1}{L_0(Y_{i:n})}\right)^{\gamma_{[i:n]}}.$$

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur (2.8) permettent de construire des intervalles de confiance asymptotiques. De plus, il présente l'avantage d'autoriser une prise en compte de covariables (le sexe serait par exemple un critère de segmentation pertinent selon Gauzère *et al.* (1999)) en faisant l'hypothèse d'un modèle à hasard proportionnel (Andersen *et al.*, 1993, Section VII.2).

### 2.3.2 Estimation par méthode marginale

Nous présentons à présent l'approche que retiennent couramment les praticiens pour estimer les taux d'incidence. Elle s'appuie sur les durées de vie latentes  $T_{0j}$ , estimée marginalement à partir de techniques issues de l'analyse de survie. Dans ce contexte, la principale problématique relative à l'analyse de ces durées latentes provient du fait que la structure de dépendance les reliant n'est pas identifiable et ne peut être estimée. En effet, elles sont en réalité un artefact de calcul car elles ne peuvent être directement observées. Ainsi, dans la pratique, les durées de vie latentes sont couramment supposées indépendantes, ce qui permet d'écrire tout  $t \geq 0$  et  $j \neq e_0$

$$S_j(t) = P(T_{0j} > t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{0j}(\tau) d\tau\right). \quad (2.9)$$

L'expression (2.9) permet d'avoir  $P(T > t) = \prod_{j \neq e_0} P(T_{0j} > t)$  et de satisfaire l'Équation (2.3). En segmentant l'échantillon observé par cause de sortie, la quantité (2.9) est alors utilisée pour estimer les taux d'incidence tels que

$$\hat{q}_j^*(t) = 1 - \frac{\hat{S}_j(t+1)}{\hat{S}_j(t)}, \quad (2.10)$$

où  $\hat{S}_j$  est l'estimateur de Kaplan-Meier de  $S_j$ .

L'hypothèse d'indépendance n'étant généralement pas valable, les praticiens n'introduisent pas une structure de dépendance sous forme de copule mais remédient à cette problématique en introduisant des priorités entre les différents estimateurs de  $q_j^*(t)$ . Plus précisément pour un ordre de priorité (ou permutation) quelconque  $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ , les taux d'incidence  $q_j(t)$  sont estimés pour tout  $t \geq 0$  et  $j \neq e_0$

$$\begin{cases} \tilde{q}_{j_1}(t) = \hat{q}_{j_1}^*(t) \\ \tilde{q}_{j_2}(t) = \hat{q}_{j_2}^*(t) \cdot (1 - \hat{q}_{j_1}^*(t)) \\ \dots \\ \tilde{q}_{j_m}(t) = \hat{q}_{j_m}^*(t) \cdot \prod_{k=1}^{m-1} (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t)) \end{cases}. \quad (2.11)$$

L'expression (2.11) réintroduit de manière arbitraire un lien de dépendance entre les lois de durée de maintien latentes et permet de vérifier pour tout  $t \geq 0$  la relation

$$1 - \sum_{k=1}^m \tilde{q}_{j_k}(t) = \prod_{k=1}^m (1 - \hat{q}_{j_k}^*(t)) = \hat{p}_{00}(t, t+1). \quad (2.12)$$

Ainsi, la loi de maintien dans l'état "valide" est indifférente au choix de la permutation  $\mathcal{P}$ . De surcroît, l'estimateur des taux d'incidence  $\check{q}_j$  pour  $j \neq e_0$  est compris, quel que soit l'ordre de priorité retenu, entre les deux bornes  $b_j^-$  et  $b_j^+$  définies telles que pour tout  $t \geq 0$

$$b_j^-(t) = \hat{q}_j^*(t) \cdot \prod_{\substack{k \neq j \\ k \neq e_0}} (1 - \hat{q}_k^*(t)) \leq \check{q}_j(t) \leq \hat{q}_j^*(t) = b_j^+(t) \quad (2.13)$$

Enfin, notons que la borne  $b_j^+$  est parfois appelée probabilité de transition partielle (Andersen *et al.*, 1993, Exemple IV.4.1) et correspondrait au taux d'incidence estimé si une seule cause de sortie était considérée.

## 2.4 Application numérique : construction des lois d'incidence en dépendance

Cette application numérique se propose d'illustrer les résultats obtenus en utilisant la méthodologie d'estimation multi-états décrite dans la sous-Section 2.3.1 sur la population d'un contrat d'assurance dépendance. Après avoir lissé les résultats grâce à la méthodologie de Whittaker-Henderson, nous les comparons à ceux obtenus avec l'approche marginale décrite dans la sous-Section 2.3.2 et examinons les écarts entre les deux méthodes en termes de provisions techniques. L'évaluation réalisée est effectuée à partir du logiciel R (R Core Team, 2015) et plus particulièrement du package `mstate` développé par De Wreede *et al.* (2011).

Cette application n'aborde pas davantage la problématique du choix des méthodes de lissage susceptibles d'être retenues. Toutefois, ce point peut être approfondi en se reportant à la récente thèse de Tomas (2013) et aux références bibliographiques reprises par l'auteur, à l'ouvrage classique de Loader (1999) ou l'article de Müller et Wang (1994) concernant le lissage de l'estimateur de Nelson-Aalen par une méthode de noyau.

### 2.4.1 Données

La base utilisée provient de l'observation de données individuelles relative à un contrat d'assurance dépendance français entre 1998 et 2010 sur la plage d'âges [65; 90] ans. Le choix de la période d'observation est motivé par la stabilité de l'acceptation tout au long de cette période. Cet échantillon comprend approximativement 210 000 assurés pour lesquels 68 % sont censurés à droite avant leur entrée en dépendance. Cette censure est administrative, et peut être considérée comme non-informative. Lors de l'entrée en dépendance lourde, l'assureur identifie la cause du changement d'état, qu'il regroupe en 4 grandes classes de pathologies : (1) Pathologie neurologique (hors démences mais y compris accidents vasculaires cérébraux), (2) Cancer en phase terminale, (3) Démence (y compris maladie d'Alzheimer) (4) Pathologie diverse (en particulier les pathologies rhumatismales). De plus, un assuré valide peut sortir du contrat à la suite d'un décès ou d'une résiliation. Les contrats réduits sont considérés comme censurés. Ces six événements constituent alors autant de causes concurrentes qui sont résumées dans le Tableau 2.1.

En moyenne, l'entrée en dépendance survient autour de 80 ans avec un écart-type d'environ cinq ans. Le décès sans dépendance est provoqué par des causes qui ne sont pas observées dans cette étude, survenant en moyenne deux ans avant l'entrée en dépendance, ce qui indique que le décès censure les causes d'entrée en dépendance de manière assez importante. La résiliation

## 2.4. Application numérique : construction des lois d'incidence en dépendance

TABLE 2.1 – Description des causes d'entrée en dépendance.

Causes	Nombre assurés	Part de femmes	Âge de survenance				
			Moyenne	Médiane	Écart-type	1 <sup>er</sup> quartile	3 <sup>ème</sup> quartile
1 Pathologie neurologique	2,535	58.74%	79.58	79.98	5.71	76.04	83.68
2 Cancer en phase terminale	1,598	48.75%	77.62	78.09	6.75	73.18	82.23
3 Démence	6,161	71.40%	81.32	81.68	5.04	78.12	84.96
4 Pathologie diverse	2,553	66.43%	82.35	82.81	5.23	79.35	85.98
5 Décès sans dépendance	32,029	48.67%	78.07	78.58	6.63	73.82	82.90
6 Résiliation	21,373	63.83%	68.40	68.41	7.31	63.29	73.54

Note : Cette table présente les statistiques descriptives associées à la population d'assurés par causes concurrentes.

se produit en moyenne plus en amont et devrait avoir moins d'impact sur l'estimation des taux d'incidence en dépendance. Nous remarquons de plus, comme cela pouvait être attendu, que la prédominance féminine est plus importante pour les pathologies de type démence.

La détermination des causes d'entrée en dépendance est intéressante pour la tarification et le provisionnement car les contrats prévoient généralement des délais de carence différents. Toutefois, nous ne disposons malheureusement pas de plus d'information pour pouvoir contrôler la mise en œuvre du codage des causes d'entrée par les gestionnaires de sinistres lors de la réception d'un dossier. Ce point est problématique puisqu'un biais dû à une possible hétérogénéité de la règle de codage pourrait apparaître avec le temps. Celui-ci pourrait provenir de l'avancée des techniques et des recommandations médicales ainsi que de la subjectivité des médecins-conseils, notamment dans la gestion des assurés poly-pathologiques. Il convient également de souligner que cette classification ne fait pas apparaître les pertes d'autonomie consécutives à un accident ou encore ne distingue pas les pathologies coronariennes des pathologies rhumatismales ce qui peut limiter l'extrapolation de ces résultats à des applications médicales. Dans une moindre mesure, la non-identification de certains décès, survenus avant l'entrée en dépendance, et identifiés comme des résiliations (si l'assureur ne reçoit pas l'acte de décès de l'assuré) peut artificiellement majorer le taux de résiliation, en particulier aux grands âges.

### 2.4.2 Estimation et lissage des taux d'incidence par le modèle multi-états

Dans un souci de simplicité, nous choisissons de présenter les résultats agrégés pour l'ensemble de la population. Le sexe étant en pratique une variable significative, nous décomposons les résultats selon ce critère en Annexe 2.6.1. La Figure 2.2 présente les taux d'incidence bruts obtenus en appliquant l'estimateur de Nelson-Aalen (2.7) puis celui d'Aalen-Johansen (2.8) aux données. Ces estimations sont encadrées par un intervalle de confiance ponctuel de niveau  $\alpha = 95\%$  calculé en considérant l'approximation suivante (Andersen *et al.*, 1993, Formule(4.1.22)

$$\hat{q}_j(x) \exp\left(\pm \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\hat{\sigma}_j(x)}{\hat{q}_j(x)}\right),$$

pour l'âge  $x \in \llbracket 65; 90 \rrbracket$ , pour tout  $j \neq e_0$ .  $\Phi^{-1}(u)$  correspond au quantile d'ordre  $u$  d'une loi normale centrée réduite et  $\hat{\sigma}_j^2(x)$  (Andersen *et al.*, 1993, Formule (4.4.16)) correspond à l'estimateur de la variance de  $\hat{q}_j(x)$ .

L'examen des taux bruts ainsi estimés laisse apparaître un niveau d'incertitude plus importante au-delà de 85 ans. Sans surprise, les probabilités d'entrée en dépendance sont croissantes avec l'âge et demeurent relativement faibles en dehors des causes 2 et 4. À l'inverse, les taux

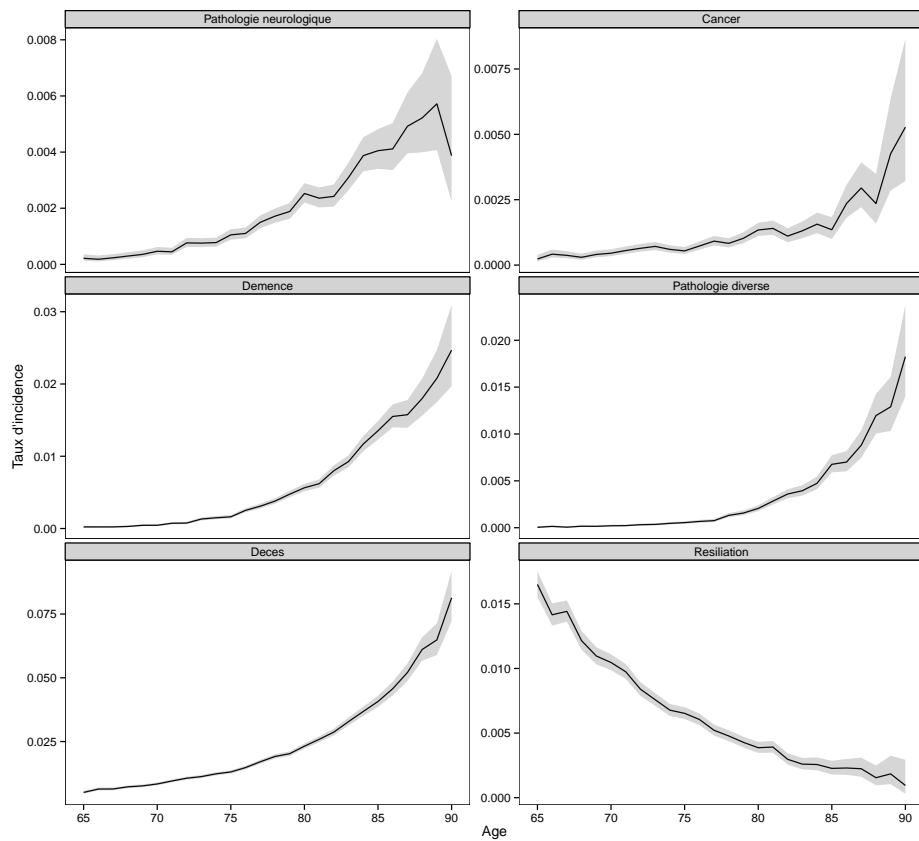


FIGURE 2.2 – Taux d'incidence en dépendance estimés selon l'approche multi-états. Les bandes grises représentent les intervalles de confiance à 95 %.

de résiliation sont décroissants avec l'âge. Ce dernier point peut en particulier être expliqué pour partie par le codage de certains décès en résiliations.

Un lissage de ces taux bruts est appliqué à partir du modèle de Whittaker-Henderson (Planchet et Thérond, 2011) dont les paramètres  $(h, z)$  sont obtenus en minimisant la combinaison linéaire

$$F + h \cdot S,$$

où  $F$  et  $S$  correspondent respectivement à des critères de fidélité et de régularité. Ils sont définis tels que

$$F = \sum_{k=1}^l w_k (\hat{q}_j(x_k) - \tilde{q}_j(x_k))^2 \text{ et } S = \sum_{k=1}^{l-z} (\Delta^z \hat{q}_j(x_k))^2,$$

où  $l$  correspond à largeur de l'intervalle  $\llbracket 65; 90 \rrbracket$  et  $w_k$  le poids de la  $k$ -ième observation.

Les paramètres de lissage optimaux sont obtenus en analysant l'erreur de prédiction pour chaque jeu de paramètres ainsi qu'en effectuant un diagnostic graphique de la qualité de l'ajustement et des résidus. À ce titre et en fonction des volumes de données sous-jacents, nous utilisons l'information produite en termes d'erreur de prédiction par les critères suivants pour  $x \in \llbracket 65; 90 \rrbracket$  et pour tout  $j \neq e_0$  :

- le critère de validation croisée

$$\frac{1}{l} \cdot \sum_{k=1}^l \left( \frac{\hat{q}_j(x_k) - \tilde{q}_j(x_k)}{1 - \text{infl}_j(x_k)} \right)^2,$$

- le critère de validation croisée généralisé

$$\frac{l}{(l - p_j)^2} \cdot \sum_{k=1}^l (\hat{q}_j(x_k) - \tilde{q}_j(x_k))^2,$$

- l'*Akaike information criterion* (AIC)

$$AIC_j = l \cdot \ln \left( \sum_{k=1}^l (\hat{q}_j(x_k) - \tilde{q}_j(x_k))^2 \right) + 2 \cdot p_j,$$

- l'AIC corrigé

$$AIC_j + \frac{2 \cdot p_j \cdot (p_j + 1)}{l - p_j - 1},$$

où  $p_j$  correspond au nombre de degrés de liberté du lissage non-paramétrique de la  $j$ -ième transition,  $\text{infl}_j(x)$  correspond à l'influence de l'âge  $x$  dans le lissage et  $\tilde{q}_j(x)$  correspond au taux d'incidence lissé (cf. Tomas, 2011, pour davantage de précisions concernant les notions de degré de liberté et d'influence dans un cadre de régression non-paramétrique). Les paramètres de lissage retenus ainsi que le nombre de degrés de liberté sont présentés dans le Tableau 2.2.

La Figure 2.3 présente les taux d'incidence lissés par Whittaker-Henderson ainsi que les résidus et les résidus de Student permettant de détecter les taux bruts extrêmes.

Les taux d'incidence lissés présentent des tendances d'évolution relativement régulières. En dehors d'un point visiblement aberrant à 90 ans concernant les pathologies neurologiques et dont le poids a été atténué lors du lissage, l'analyse des résidus et des résidus de Student permet

TABLE 2.2 – Paramètres de lissage par le modèle Whittaker-Henderson.

Causes de sortie	Degré de liberté	$h$	$z$
Pathologie neurologique	6.59	4	2
Cancer	8.21	6	4
Démence	9.98	4	6
Pathologie diverse	12.09	7	10
Décès	9.98	4	6
Résiliation	5.79	7	2

Note : Cette table fournit les paramètres de lissage obtenus par le modèle de Whittaker-Henderson pour chacune des causes concurrentes ainsi que le degré du lissage.

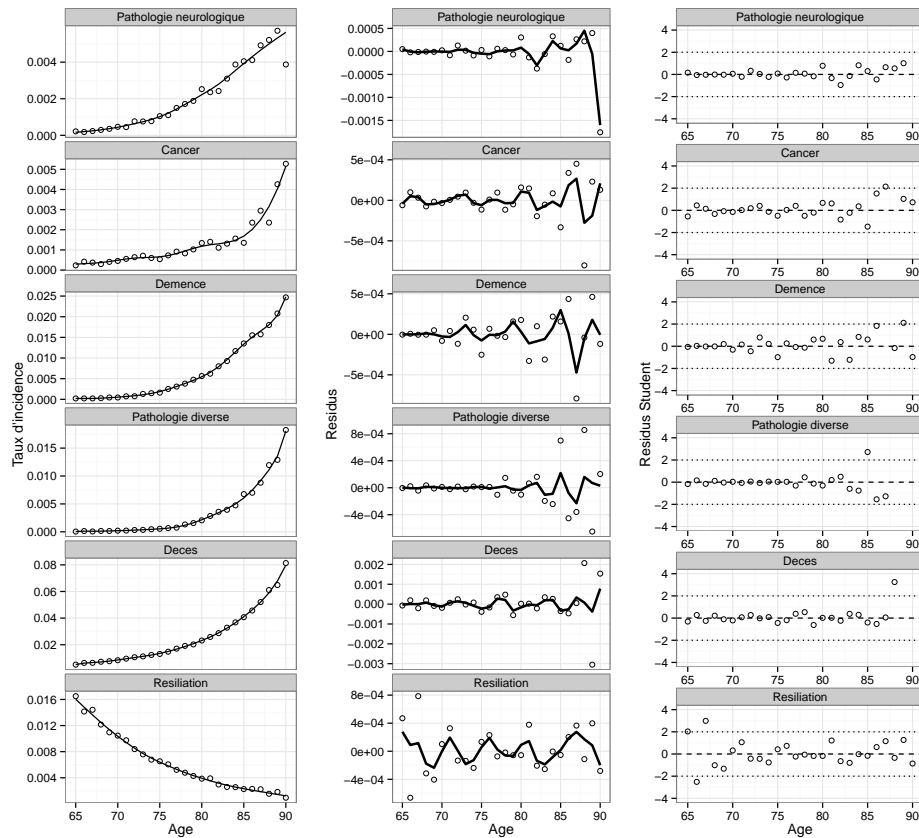


FIGURE 2.3 – Taux d'incidence lissés, résidus et résidus de Student du lissage par causes concurrentes.



de faire apparaître les classes d'âges pour lesquelles une force de lissage plus ou moins grande est appliquée. À l'examen de ces résultats, il apparaît que les taux d'incidence en dépendance sont davantage lissés au-delà de 85 ans, ce qui se traduit par un risque d'estimation plus important pour ces âges. Les taux de décès présentent quant à eux un ajustement de bonne qualité, les âges avec la plus grande incertitude se situant au-delà de 87 ans. Par ailleurs concernant les taux de résiliation, une force de lissage plus importante est appliquée avant 70 ans et dans une moindre mesure au-delà de 85 ans par rapport aux autres âges.

Un ensemble de tests classiques est finalement appliqué afin de valider la qualité du lissage. Le Tableau 2.3 fournit une présentation des résultats de ces tests dont l'examen permet de conclure à une qualité de lissage satisfaisante.

TABLE 2.3 – Évaluation de la qualité du lissage.

		Pathologie neurologique	Cancer	Démence	Pathologie diverse	Décès	Résiliation
Résidus de	> 2	1	2	2	4	3	3
Student	> 3	1	1	1	3	3	0
Kolmogorov- Smirnov	Test	0.08	0.08	0.08	0.08	0.04	0.08
	p-valeur	1	1	1	1	1	1
$\chi^2$	p-value	0.61	0.91	0.69	0.58	0.18	0.59
	$R^2$	0.95	0.97	1	1	1	1

Note : Pour chaque cause concurrente, le tableau présente le nombre de résidus de Student strictement supérieurs à 2 et 3, la statistique et la p-valeur du test d'adéquation de Komogorov-Smirnov, ainsi que la p-valeur du test de  $\chi^2$  d'indépendance entre les lois observées et lissées. La dernière ligne du tableau présente le calcul d'un  $R^2 = \frac{\sum_{k=1}^l (\hat{q}(x_k) - \bar{q}(x_k))^2}{(\sum_{k=1}^l \hat{q}(x_k) - \bar{q}(x_k))^2}$ .

### 2.4.3 Mesure du risque d'estimation

Ce paragraphe décrit les résultats obtenus par la mise en œuvre d'une approche de type *bootstrap* non-paramétrique (Efron, 1979) sur les observations pour mesurer les risques d'estimation. Ces risques apparaissent lors de l'estimation des taux d'incidence bruts et lors du lissage de ces mêmes taux. Pour chaque ré-échantillonnage, l'estimateur d'Aalen-Johansen (2.8) est réévalué et la procédure de lissage décrite dans la sous-Section 2.4.2 est réappliquée. Pour cette application,  $K = 1\ 000$  itérations sont effectuées.

La Figure 2.4 fournit un positionnement de la moyenne des taux d'incidence simulés par rapport à ceux estimés dans la sous-Section 2.4.2. Elle représente également les intervalles de confiance simulés (quantiles 5% et 95%) afin d'apprécier la robustesse de l'estimation.

Il ressort de l'analyse que la dispersion des taux d'incidence en dépendance excède assez largement celle des taux de décès ou de résiliation compte tenu du volume de données en jeu. L'incertitude sur les taux d'incidence en dépendance apparaît significative au-delà de 85 ans. Une manière de quantifier le risque d'estimation associé à chaque âge consiste à introduire le

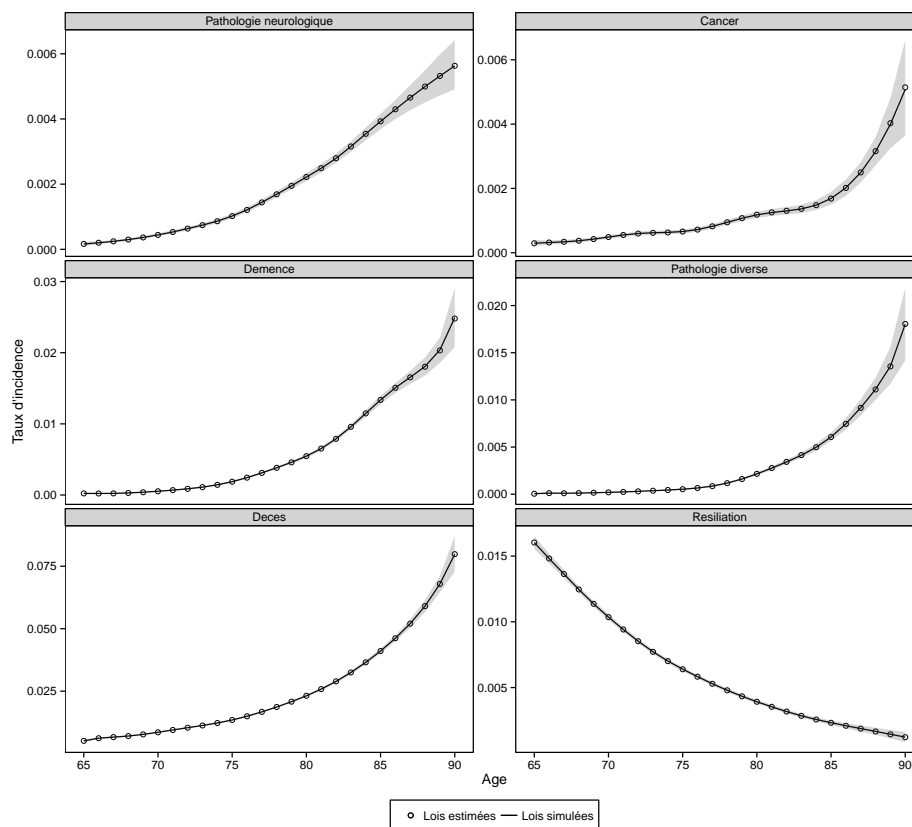


FIGURE 2.4 – Taux d'incidence simulés par *bootstrap* et intervalle de confiance à 95 % associés.

coefficient de variation pour tout  $x \in \llbracket 65; 90 \rrbracket$ ,

$$c(\psi_{jx}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\tilde{q}_j^k(x) - \tilde{q}_j(x))^2}}{\tilde{q}_j(x)} \quad j \neq e_0,$$

où  $\tilde{q}_j^k(x)$  correspond au taux d'incidence issus du k-ième ré-échantillonnage.

La Figure 2.5 représente les coefficients de variation mesurant le risque d'estimation de chaque loi d'incidence. Elle permet de détecter la présence d'un risque d'estimation significatif entre 65 et 70 ans qui n'était pas visible sur la Figure 2.4.

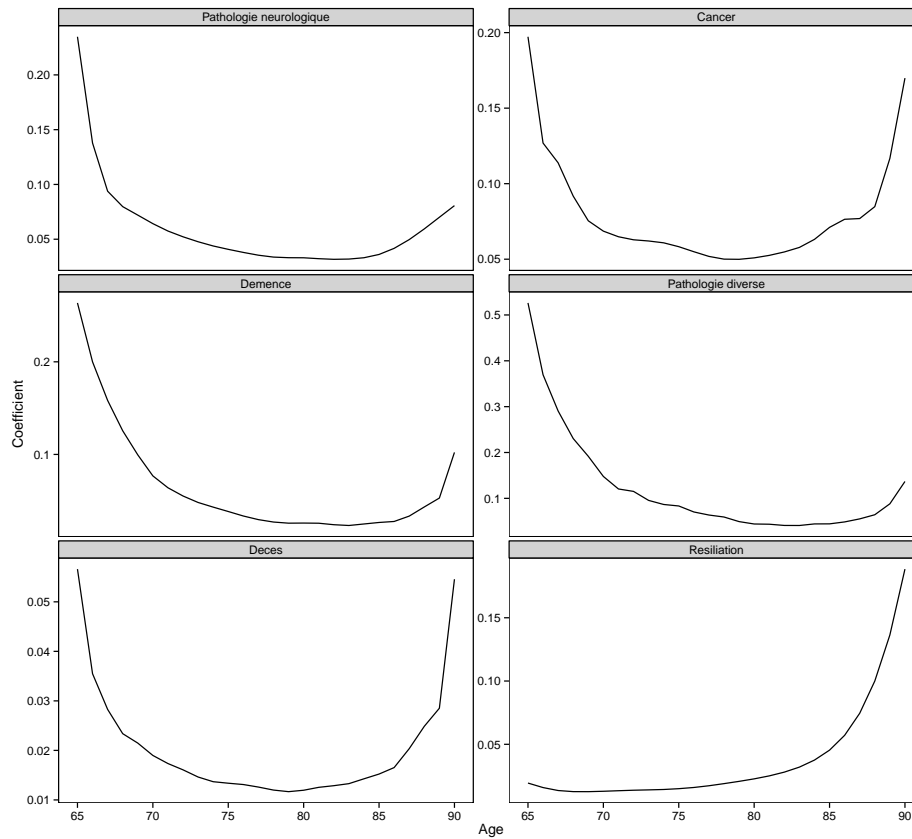


FIGURE 2.5 – Coefficients de variation des taux d'incidence.

La moyenne des coefficients de variation calculés est récapitulée dans le Tableau 2.4. Il en ressort qu'un risque d'estimation non négligeable est constaté sur les taux d'incidence en dépendance, notamment les pathologies diverses.

Enfin, le risque d'estimation est étudié en mesurant son impact sur le montant des provisions techniques. Pour cette évaluation, des hypothèses volontairement simplistes sont retenues afin de donner une meilleure appréciation des résultats au lecteur. À cet effet, nous retenons un contrat viager réduit prévoyant le versement d'un capital constant d'une unité monétaire en cas d'entrée en dépendance et utilisons un taux d'actualisation constant de 4,00 %. Le montant de provisions techniques est alors évalué à partir de l'Équation (2.6) et la distribution de  $\Lambda_x(t_0)$  est obtenue en considérant le seul risque d'estimation. Incidemment, une approche

TABLE 2.4 – Risque d'estimation moyen sur les taux d'incidence.

Causes de sortie	Coefficient de variation moyen
Pathologie neurologique	6.01%
Cancer	7.94%
Démence	6.53%
Pathologie diverse	12.12%
Décès	2.05%
Résiliation	3.76%

Note : Ce tableau fournit la valeur du coefficient de variation moyen pour chaque cause concurrente.

prenant en compte le risque mutualisable relatif aux fluctuations d'échantillonnage pourrait aisément être intégré à l'approche *bootstrap* mise en œuvre ici en considérant la méthodologie décrite dans Guibert *et al.* (2010) et appliquée par exemple par Planchet et Tomas (2014).

La Figure 2.6 présente l'estimateur du noyau de la densité  $\Lambda_x(t_0)$  pour différents âges. Au regard du faible nombre de tirages effectués, il convient toutefois de préciser que l'analyse des queues de distributions devra être effectuée avec prudence.

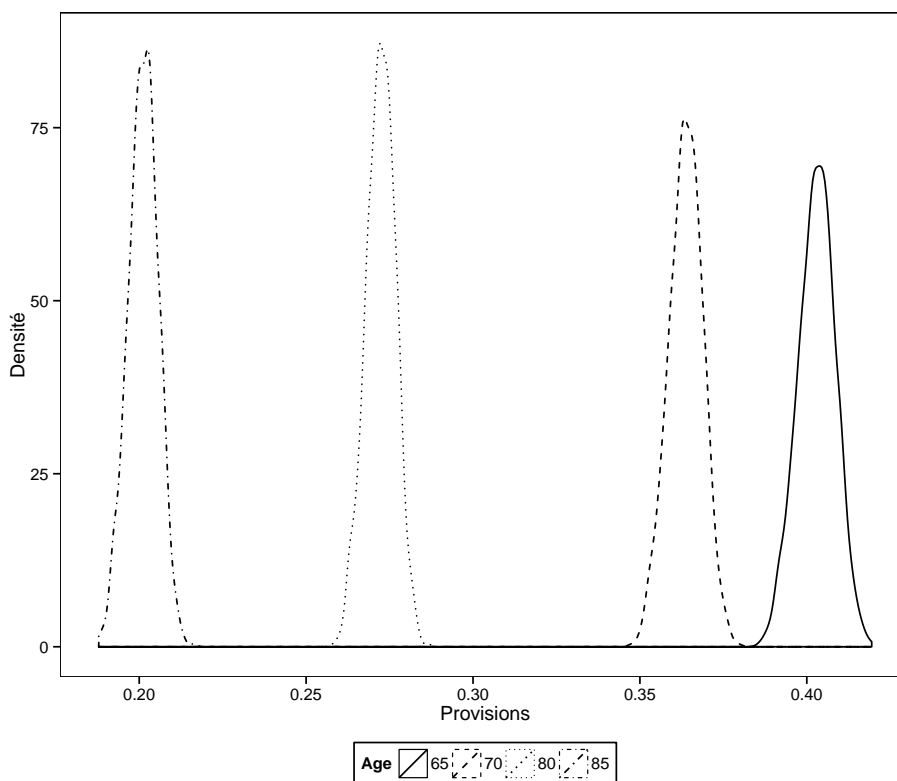


FIGURE 2.6 – Distribution des provisions techniques en fonction de l'âge de l'assuré cotisant.

À la lumière de cette analyse, le risque d'estimation apparaît relativement important et devra être pris en compte avec soin dans l'évaluation des provisions techniques d'une part et dans le cadre de la gestion des risques d'autre part.

### 2.4.4 Comparaison de l'approche multi-états et de la méthode marginale

Finalement, nous présentons une comparaison entre les deux approches décrites dans la Section 2.3 pour estimer les taux d'incidence bruts. L'objectif est ici de mesurer le biais introduit par l'utilisation d'une méthode marginale par rapport à l'utilisation d'un modèle multi-états, théoriquement mieux adapté mais pouvant être plus délicat à manipuler. Au préalable, les taux d'incidence (2.10) sont estimés à partir de l'estimateur de Kaplan-Meier puis lissés sur la base du modèle de Whittaker-Henderson en appliquant une procédure similaire à celle décrite dans la sous-Section 2.4.2.

Les bornes  $b_j^-$  et  $b_j^+$ , définies pour  $j \neq e_0$  par l'équation (2.13) puis lissées, permettant de matérialiser la plage à l'intérieur de laquelle évoluent les taux d'incidence bruts estimés *via* la méthode marginale. La Figure 2.7 positionne cette plage par rapport aux taux d'incidence bruts et lissés obtenus à partir de l'approche multi-états.

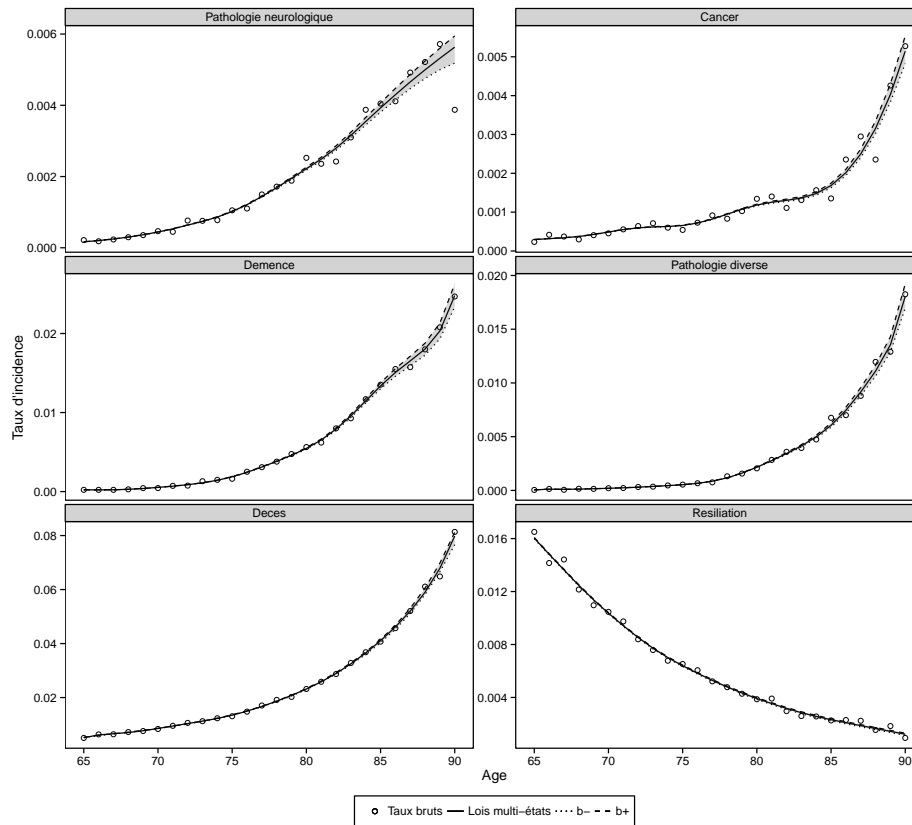


FIGURE 2.7 – Positionnement des taux d'incidence multi-états par rapport aux bornes  $b_j^-$  et  $b_j^+$ .

Il apparaît que les taux d'incidence estimés par l'approche multi-états se positionnent approximativement au centre de la plage délimitée par les bornes  $b_j^-$  et  $b_j^+$ . Ces bornes sont relativement resserrées en ce qui concerne les taux de décès et de résiliation, signifiant que l'approche marginale introduit ici un écart relativement modeste quelle que soit la convention retenue dans l'Équation (2.11). L'écartement de ces bornes est en revanche plus important pour l'incidence en dépendance, notamment en qui concerne les pathologies neurologiques.

Afin de mesurer de manière plus précise le biais potentiellement introduit par l'approche marginale, une évaluation des provisions techniques, sur les mêmes hypothèses que celles précédemment introduites, est effectuée pour différents permutations  $\mathcal{P}$ . La Table 2.5 fait état de quatre permutations testées et représentées ensuite sur la Figure 2.8. Elle permet de positionner le montant de provisions pour ces différentes situations par rapport à celle évaluée à partir de l'approche multi-états.

TABLE 2.5 – Définition des permutations testées.

Permutation	1 - Pathologie neurologique	2 - Cancer	3 - Démence	4 - Pathologie diverse	5 - Décès	6 - Résiliation
$\mathcal{P}_1$	6	5	3	4	1	2
$\mathcal{P}_2$	3	5	4	2	1	6
$\mathcal{P}_3$	1	6	5	2	3	4
$\mathcal{P}_4$	1	2	4	3	5	6

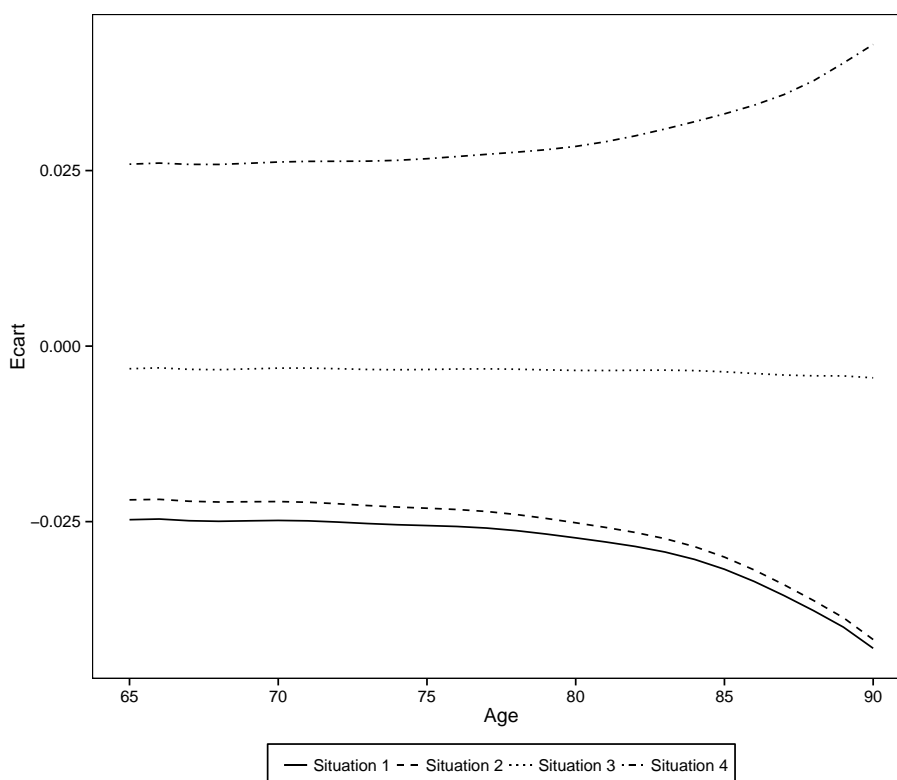


FIGURE 2.8 – Écarts relatifs sur les provisions entre les méthodes d'estimation marginale et multi-états.

Il ressort que l'ordre des priorités a un impact relativement limité sur le montant des provisions techniques, l'écart observé pouvant être positif ou négatif selon les cas. A 65 ans, l'écart absolu demeure contenu à environ 2,5 % dans les différentes situations étudiées puis a tendance à augmenter avec l'âge. Par ailleurs, cet écart semble plus faible lorsque les priorités

entre les différentes durées de maintien latentes sont établies de sorte que le décès et la résiliation soient positionnés après "au centre" du vecteur de priorité. Dans la mesure où l'écart reste limité et en répartissant judicieusement l'ordre des priorités entre les différentes durées de maintien, il semble possible pour cette application de retenir une approche marginale pour la construction de lois d'expérience.

## 2.5 Conclusion

Cette étude présente un cadre pour l'estimation de lois d'incidence en dépendance s'appuyant sur les estimateurs non-paramétriques introduits dans le cadre de modèles multi-états avec censure. Cette approche n'étant pas habituellement privilégiée par les actuaires en présence d'événements concurrents, nous mesurons le risque d'estimation qu'elle engendre et comparons les résultats obtenus à ceux de l'utilisation d'une méthodologie d'estimation simplifiée.

Cette méthodologie, à l'inverse de celle construite à partir de durées de maintien latentes, présente l'avantage d'offrir un cadre plus cohérent en évacuant le problème artificiellement posé par la structure de dépendance reliant chaque loi latente. Toutefois, si l'utilisation des modèles reposant sur les durées de vie latentes est traitée de manière appropriée en termes d'ordres de priorité, il apparaît en pratique que les lois construites par l'une ou l'autre des deux approches peuvent conduire à observer des résultats relativement comparables en termes de provisionnement sur une garantie dépendance.

Finalement, dans le contexte bien précis présenté ici, on peut donc retenir que l'utilisation d'une approche marginale semble possible pour la construction de table d'expérience, ce qui semble particulièrement utile dans la mesure où une telle approche est naturellement privilégiée par le praticien souhaitant répondre aux difficultés posées par de faibles volumes de données à partir de références externes. Une telle approche peut toutefois conduire à des biais potentiels non négligeables et croissants avec l'âge, selon le traitement retenu pour les différentes causes de sortie.

## 2.6 Annexes

### 2.6.1 Estimation des taux d'incidence par sexe

Cette annexe décrit les taux d'incidence estimés par sexe selon l'approche multi-états présentés en 2.3.1. Ces taux sont représentés sur la Figure 2.9. Disposant de suffisamment de données, nous avons privilégiés une estimation par stratification selon le sexe puisque l'hypothèse de proportionnalité de Cox (Cox, 1972) n'est pas satisfaite pour cette covariable pour chacune des transitions. Par rapport aux taux estimés pour l'ensemble de l'échantillon, nous remarquons que les probabilités d'entrée en dépendance pour démence sont nettement plus élevés chez les femmes à partir de 85 ans, comme on pourrait s'y attendre. À l'inverse, les taux de décès, et dans une moindre mesure l'incidence due à un cancer en phase terminale, sont aggravés chez les hommes. Les autres probabilités estimées sont globalement équivalentes entre hommes et femmes.

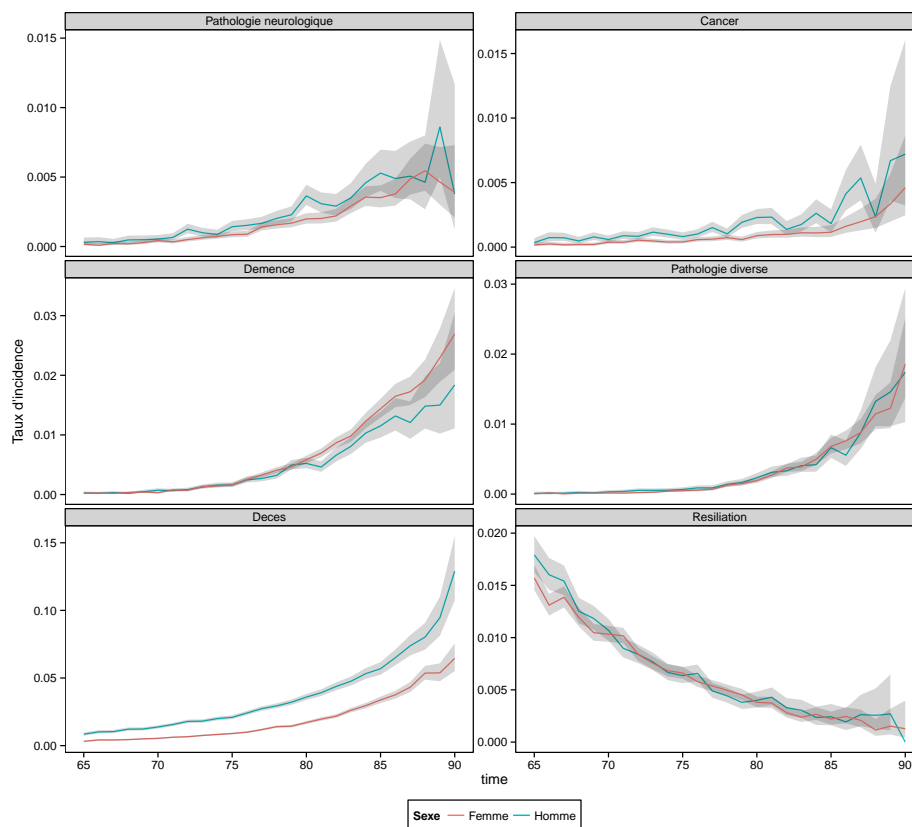


FIGURE 2.9 – Taux d'incidence en dépendance estimés selon l'approche multi-états par sexe. Les bandes grises représentent les intervalles de confiance à 95 %.



## Chapitre 3

# Inférence non-paramétrique des probabilités de transition de modèles multi-états acycliques à partir d'intégrales d'Aalen-Johansen

L'étude de l'assurance dépendance nécessite de modéliser la durée de vie d'un individu en présence d'événements terminaux et non-terminaux qui peuvent entrer en concurrence. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'inférence statistique de modèles multi-états reflétant cette situation et nous mettons en avant des estimateurs non-paramétriques pour les probabilités de transition pertinents, lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas vérifiée. Les estimateurs proposés peuvent être vus comme des intégrales d'Aalen-Johansen pour des modèles à risques concurrents. Nous obtenons ce type de formulation à partir d'une structure associant deux modèles à risques concurrents pour reproduire le modèle multi-états acyclique qui permet de décrire les événements du contrat. Peu d'attention a été portée à ce type d'intégrale dans la littérature. Nous examinons leurs propriétés asymptotiques en présence de censure à droite indépendante et de covariables, puis nous discutons les pistes d'amélioration possibles. Ce cadre permet ensuite de développer une méthodologie pour étudier la dépendance temporelle entre les différentes durées, introduites dans ce modèle. Nous réalisons également une étude sur données simulées pour mesurer les performances de nos estimateurs des probabilités de transition et les comparer à ceux obtenus *via* l'estimateur d'Aalen-Johansen dans le cas markovien. Finalement, nous proposons une application numérique reposant sur les données d'un contrat d'assurance dépendance français, traditionnellement étudié à partir d'un modèle semi-markovien.

Ce chapitre s'appuie sur l'article de Guibert et Planchet (2015), coécrit avec Frédéric Planchet et soumis au *Scandinavian Actuarial Journal*.

### 3.1 Introduction

Les modèles multi-états offrent un cadre de modélisation adéquat pour décrire la trajectoire de vie d'un individu. En biostatistique, (Hougaard, 1999, 2001; Andersen et Keiding, 2002), ils sont généralement utilisés pour modéliser des transitions entre états, comme la survenance d'une maladie ou d'un événement grave affectant la survie d'un individu. En risque de crédit et pour l'étude de la fiabilité, ce même cadre permet de représenter la durée de vie d'une entreprise ou celle d'un objet aux travers de différents états de dégradation (p. ex. Lando et Skødeberg, 2002; Janssen et Manca, 2007). Depuis une quinzaine d'années, les modèles multi-états ont suscité un intérêt croissant dans la littérature actuarielle afin de modéliser les changements d'états qui déclenchent le paiement de garanties ou l'arrêt du versement des primes. En assurance de personnes, les modèles s'appuient généralement sur l'hypothèse de Markov, voire quelquefois adoptent un modèle semi-markovien, pour la tarification et le provisionnement de contrats (Haberman et Pitacco, 1998; Denuit et Robert, 2007). Récemment, Christiansen (2012) a donné un large aperçu de l'utilisation de ces outils en assurance, valable en particulier pour l'assurance dépendance. Cependant les travaux académiques n'abordent pas toujours les problématiques d'estimation associées à la mise en place de ces modèles. Lorsque que cette question est étudiée, les données considérées sont généralement issues de bases nationales, dont le formalisme est différent des données recueillies par les assureurs, puisque ceux-ci travaillent sur des observations en temps continu et sont exposés aux problèmes de données manquantes. De plus, compte tenu des spécificités des contrats (p. ex. des périodes de carence ou de différé), les probabilités de transition relatives aux paiements des flux futurs peuvent être complexes à calculer, en particulier dans le cas semi-markovien. Si des simplifications sont mises en œuvre, les actuaires doivent être en mesure d'évaluer la marge d'erreur associée.

Dans ce chapitre, nous proposons un cadre d'estimation non-paramétrique fondé sur une approche multi-états, adaptée à des données longitudinales. Elle considère la présence d'événements terminaux (p. ex. le décès par cause) et non-terminaux (p. ex. l'entrée en dépendance pour différents motifs) : il s'agit donc d'un modèle sans état récurrent. Cette situation permet d'étudier des garanties d'assurance arrêt de travail sans rechute ou de dépendance lourde. Nous pensons également que ce cadre peut susciter un intérêt pour les biostatisticiens spécialisés dans l'étude du vieillissement (Varadhan *et al.*, 2014). Lorsque que l'ensemble des événements sont terminaux, il convient de se référer au cadre des modèles à risques concurrents. Cependant, nous considérons dans notre cas que les événements terminaux, comme le décès, peuvent-être précédés par différents événements intermédiaires, comme une maladie ou un accident. Lorsqu'il n'y a qu'un seul événement terminal et un seul événement non-terminal, il est naturel en biostatistique de se référer au cadre des modèles à risques semi-concurrents (Fine *et al.*, 2001). L'événement non-terminal étant le phénomène d'intérêt, ce type de modèle spécifie l'événement terminal comme une source de censure non-indépendante. Il s'agit alors d'estimer la fonction de survie associée à la durée de vie latente, s'achevant avec l'événement non-terminal. Pour cela, les chercheurs de ce domaine utilisent fréquemment des estimateurs de type *graphic-copula* (Zheng et Klein, 1995). Ces approches présentent cependant un intérêt limité pour les actuaires, qui étudient à l'ensemble du processus. Des quantités différentes et surtout plus précises sont alors regardées. Dans cette optique, les modèles multi-états offrent un cadre de modélisation global mieux adapté aux besoins des actuaires, en considérant l'ensemble des transitions entre états (Xu *et al.*, 2010).

L'ajustement d'un modèle multi-états pour l'assurance arrêt de travail et la dépendance

est régulièrement analysée à partir d’hypothèses que nous pourrions qualifier de fortes. Dans un souci de simplicité, la plupart des travaux actuariels recourent à l’hypothèse de Markov, c’est-à-dire qu’ils supposent que les transitions ne dépendent que de l’état présent (p. ex. Pritchard, 2006; Deléglise *et al.*, 2009; Levantesi et Menzietti, 2012). Cependant, cette hypothèse est inappropriée pour modéliser les transitions à partir d’un état dans lequel la santé de l’assuré s’est dégradé. À titre d’exemple, la mortalité des individus dépendants est fonction à la fois de l’âge et de la durée de présence (ou temps de séjour) dans l’état d’invalidité (Czado et Rudolph, 2002). Un modèle semi-markovien apparaît de ce point de vue bien plus pertinent. Pourtant, la littérature actuarielle n’aborde que rarement l’estimation de modèles non-markoviens et se focalise d’avantage sur la régularisation de données agrégées pour l’incapacité ou invalidité, par le biais de modèles paramétriques (p. ex. Haberman et Pitacco, 1998, pour l’utilisation du modèle de Poisson). Dans quelques cas particuliers, des techniques semi-paramétriques sont également employées (p. ex. Czado et Rudolph, 2002, pour une utilisation du modèle semi-markovien de Cox). Dans ce contexte, il semble nécessaire de développer de nouvelles approches, notamment non-paramétriques, pour contrôler la pertinences des hypothèses retenues pour la construction de tables biométriques. Notons qu’avec la mise en œuvre des principes de Solvabilité II et des normes IFRS, ce besoin apparaît de plus en plus pressant (Tomas et Planchet, 2013; Guibert et Planchet, 2014). Ainsi dans ce chapitre, notre contribution principale réside dans l’élaboration d’un cadre non-paramétrique, utilisable pour la construction de ces lois biométriques et pour l’évaluation de l’adéquation aux données de méthodes paramétriques.

Lorsque l’hypothèse de Markov est vérifiée, l’inférence non-paramétrique d’un modèle multi-états en présence de censure indépendante peut être facilement réalisée par le biais des estimateurs de Nelson-Aalen puis d’Aalen-Johansen (Aalen et Johansen, 1978; Andersen *et al.*, 1993). Néanmoins, il n’existe pas, à notre connaissance, de cadre général pour estimer les probabilités de transition d’un modèle plus complexe que le cas semi-markovien homogène. De récentes recherches en biostatistiques proposent quelques solutions, mais elles restent limitées soit aux modèles multi-états dont le schéma est simple, soit à certaines probabilités bien particulières, utilisées par les praticiens du domaine. Parmi ces travaux, Datta et Satten (2002) définissent des estimateurs non-paramétriques pour la probabilité d’occuper un état donné à une certaine date, connaissant l’état initial (*stage occupation probabilities*)<sup>1</sup>. Meira-Machado *et al.* (2006) définissent des estimateurs des probabilités de transition pour un modèle d’invalidité acyclique à 3 états (*illness death model*). Un aperçu de ces techniques d’inférence pour les études médicales est disponible dans l’article de Meira-Machado *et al.* (2009).

La présente approche étend les travaux de Meira-Machado *et al.* (2006). Pour cela, nous nous appuyons sur un schéma comprenant deux modèles à risques concurrents imbriqués, qui capturent la forme progressive (ou acyclique) du modèle. Cette approche peut être vue comme un cas particulier de modèle à risques concurrents bivarié, en présence d’une seule variable de censure à droite indépendante. En parallèle de nos investigations, Allignol *et al.* (2014) ont également souligné l’intérêt des modèles à risques concurrents pour obtenir une alternative au formalisme proposé par Meira-Machado *et al.* (2006) dans un modèle *illness death*. Notons également que Cheng *et al.* (2007) ont exhibé des estimateurs non-paramétriques des intensités jointes et des fonctions d’incidence cumulées pour un modèle bivarié à risques concurrents,

---

1. Ces auteurs montrent que l’estimateur d’Aalen-Johansen est robuste pour ces probabilités particulières. Leurs estimateurs vérifient des propriétés de convergence presque sûre (Datta et Satten, 2001) et de convergence en loi (Glidden, 2002).

en présence de censures indépendantes. Notre cadre présente ainsi une connexion avec ces modèles bivariés, la principale différence provenant du fait qu'on ne considère qu'une seule variable de censure. Motivés par des applications à l'assurance, nous développons dans ce chapitre des estimateurs non-paramétriques s'appuyant sur des intégrales sous la fonction d'incidence cumulée associée à un modèle à risques concurrents, appelées intégrales d'Aalen-Johansen pour un modèle à risques concurrents (Suzukawa, 2002). Nous examinons leurs propriétés asymptotiques, en présence de censure indépendante et de covariables. Ce travail constitue un premier pas vers l'étude d'estimateurs fonctionnels sous la loi jointe de modèles à risques concurrents bivariés, ce qui présente certaines similitudes avec l'étude de fonctionnels de lois de durées multivariées en présence de censure (cf. Lopez, 2012). Dans la littérature statistique, des intégrales de ce type avec covariables sont utilisées afin de construire des tests d'adéquation pour des modèles de régression (p. ex. Sánchez-Sellero *et al.*, 2005). Dans notre cas, la démonstration des résultats avec covariables sera surtout un moyen d'obtenir des propriétés de convergence adaptées à notre approche et aux probabilités de transition mises en exergue.

La construction de grandeurs mesurant l'association entre la durée de vie globale et la durée de vie en bonne santé par cause constitue une seconde contribution de ce chapitre. Ce type d'investigation semble naturel, compte tenu de l'introduction d'une loi d'incidence cumulée jointe, reliant ces deux durées de vie. La définition de cette mesure s'appuie sur la littérature récente dédiée aux modèles à risques concurrents bivariés (Bandein-Roche et Liang, 2002; Bandein-Roche et Ning, 2008; Cheng *et al.*, 2007, 2010; Scheike et Sun, 2012). Elle peut être utilisée, en pratique, comme un moyen de caractériser l'interaction entre ces deux durées de vie.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante. La Section 3.2 introduit le modèle multi-états non-markovien étudié, puis définit les quantités utilisées pour construire les probabilités de transition d'intérêt et une mesure d'association. Cette construction s'appuie sur deux modèles à risques concurrents imbriqués. Nous utilisons cette idée dans la Section 3.3 pour examiner les propriétés de convergence des estimateurs non-paramétriques introduits dans la section précédente. La Section 3.4 s'intéresse à la performance de nos estimateurs sur données simulées, qui sont comparés aux probabilités de transition estimées en supposant que l'hypothèse de Markov est satisfaite. Enfin, une application, sur un échantillon de données issu du portefeuille d'un assureur français pour des garanties de dépendance lourde, est proposée dans la Section 3.5. La Section 3.6 conclut ce chapitre.

## 3.2 Construction du modèle

Nous introduisons en 3.2.1, les notations utilisées, ainsi que la structure du modèle multi-états acyclique retenue. Cette dernière comporte deux modèles à risques concurrents imbriqués et permet de représenter la trajectoire d'un individu, lorsqu'elle est affectée potentiellement par plusieurs événements terminaux (p. ex. causes de décès) et par d'autres non-terminaux (p. ex. causes d'entrée en maladie). Dans la sous-Section 3.2.2, nous décrivons quelques probabilités de transition, utilisables en science actuarielle pour la tarification et le provisionnement de contrats, et qui peuvent faire l'objet d'un mode d'estimation direct, c'est-à-dire sans passer par la définition puis l'estimation d'intensités de transition. En 3.2.3, nous présentons une mesure, sous forme de *cross-odds ratio*, qui permet de quantifier l'association entre la durée de vie globale et la durée de vie en bonne santé, c'est-à-dire celle précédent tout état intermédiaire.

### 3.2.1 Modèle et hypothèses de base

Sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , nous considérons un processus stochastique en temps continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  prenant ses valeurs dans un espace d'états de dimension fini  $\mathcal{S} = \{a_0, e_1, \dots, e_{m_1}, d_1, \dots, d_{m_2}\}$ . Ce processus est supposé continu à droite avec limite à gauche et permet de représenter l'état courant d'un individu (l'assuré) à la date  $t \geq 0$ . L'ensemble  $\{e_1, \dots, e_{m_1}\}$  est constitué de  $m_1$  états intermédiaires, comme par exemple des événements responsables de l'entrée en invalidité. L'ensemble  $\{d_1, \dots, d_{m_2}\}$  correspond à des états terminaux, c'est-à-dire des états absorbants comme le décès sans maladie, le décès avec maladie ou le rachat. L'état  $a_0$  correspond à un état de bonne santé. Nous définissons, en reprenant les notations introduites par Rotolo *et al.* (2013), l'ensemble des états  $\mathcal{C}(a_0) \subset \mathcal{S}$ , directement atteignables depuis  $a_0$  et appelés états "fils" de  $a_0$ . Pour chaque état  $e \in \{e_1, \dots, e_{m_1}\}$ , nous considérons également l'ensemble regroupant tous ces états "fils", noté  $\mathcal{C}(e) \subset \{d_1, \dots, d_{m_2}\}$ . Évidemment, cet ensemble est vide pour un état terminal  $d \in \{d_1, \dots, d_{m_2}\}$ . Par conséquent, la trajectoire d'un individu peut prendre deux directions, selon qu'un événement intermédiaire est rencontré ou non. La Figure 3.1 fournit un exemple de modèle multi-états, que nous appelons acyclique, correspondant à cette spécification.

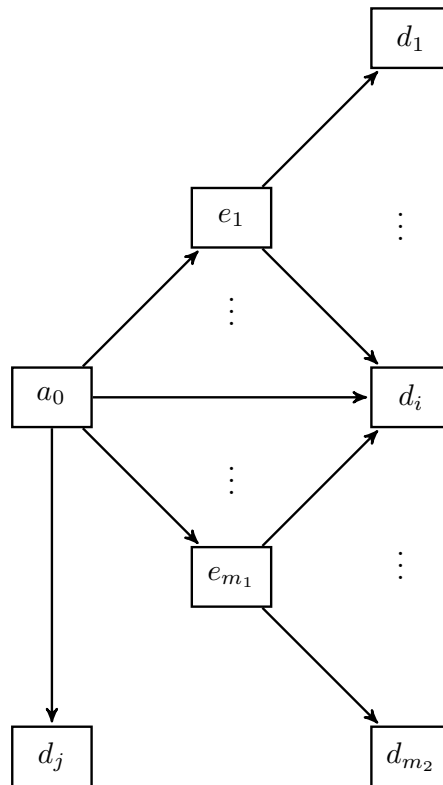


FIGURE 3.1 – Exemple de modèle multi-états acyclique avec deux niveaux de risques concurrents imbriqués.

Ce modèle multi-états peut être défini à partir de variables de durée latentes. Nous notons  $T_{0e}$ ,  $e \in \{e_1, \dots, e_{m_1}\}$ , les durées de vie latentes en bonne santé correspondant à chaque événement non-terminal, et de manière similaire  $T_{0d}$ ,  $d \in \{d_1, \dots, d_{m_2}\}$ , les durées de vie

abrégées par des événements terminaux. Nous introduisons  $T_{ed}$  la durée latente émanant de l'état intermédiaire  $e$  vers la cause terminale  $d$ . Aucune hypothèse particulière n'est nécessaire pour caractériser ici la structure de dépendance pouvant exister entre ces différentes lois. Avec ces notations, nous décomposons la durée de vie totale d'un individu au travers de deux modèles à risques concurrents. Dans un premier temps, cette trajectoire peut être affectée par  $\text{Card}(\mathcal{C}(a_0))$ -causes de sortie concurrentes de l'état  $a_0$ , soit vers un état non-terminal ( $a_0 \rightarrow e$ ) ou soit vers un état terminal ( $a_0 \rightarrow d$ ). Nous notons  $\mathcal{C}(a_0) = \mathcal{C}_E(a_0) \cup \mathcal{C}_D(a_0)$ , la décomposition entre états terminaux et non-terminaux. Avec cette structure, nous voyons apparaître un premier modèle à risques concurrents  $(S, V_1)$  tel que

$$\begin{aligned} S &= \inf \{t : X_t \neq a_0\} \\ &= \sum_{e \in \mathcal{C}_E(a_0)} T_{0e} \mathbb{1}_{\{V_1=e\}} + \sum_{d \in \mathcal{C}_D(a_0)} T_{0d} \mathbb{1}_{\{V_1=d\}}, \end{aligned}$$

où  $V_1$  est une variable aléatoire prenant ces valeurs dans  $\mathcal{C}(a_0)$ . Nous appelons  $H$  la fonction de répartition du temps de séjour  $S$  dans l'état  $a_0$ .

Dans un second temps, nous considérons  $m_2$  états terminaux qui peuvent être atteints soit directement ( $a \rightarrow d$ ), soit indirectement en traversant un des  $m_1$  états intermédiaires. Cette durée, notée  $T$ , forme un modèle à risques concurrents  $(T, V)$ , lorsqu'elle est combinée à une variable indicatrice  $V = (V_1, V_2)$  permettant de fixer la trajectoire d'un individu. La variable  $V$  dépend de deux indicatrices, où la variable  $V_2$  est fonction des valeurs prises par  $V_1$  telle que

$$\begin{cases} V = (e, d) \text{ avec } d \in \mathcal{C}(e) \text{ si } e \in \mathcal{C}_E(a_0), \\ V = (0, d) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Avec ces notations, nous avons

$$\begin{aligned} T &= \inf \{t : X_t \in \{d_1, \dots, d_{m_2}\}\} \\ &= \sum_{e \in \mathcal{C}_E(a_0)} \left[ T_{0e} \mathbb{1}_{\{V_1=e\}} + \sum_{d \in \mathcal{C}(e)} T_{ed} \mathbb{1}_{\{V_2=d\}} \right] + \sum_{d \in \mathcal{C}_D(a_0)} T_{0d} \mathbb{1}_{\{V_2=d\}}. \end{aligned}$$

Nous notons  $F$  la fonction de répartition de la durée de survie  $T$ , supposée continue. Nous définissons également  $F^{(v)}(t) = \mathbb{P}(T \leq t, V = v)$ , la fonction d'incidence cumulée<sup>2</sup>, pour  $t \geq 0$  et  $v \in \mathcal{V}$ .

Comme le remarquent Meira-Machado *et al.* (2006) pour un modèle *illness-death* acyclique, les variables  $T_{ed}$  ne sont pas observées dans le cas d'une transition directe, c'est-à-dire lorsque  $S = T$ . Sinon, on aurait  $S < T$ . De manière similaire, les variables  $T_{0e}$ ,  $e \in \mathcal{C}_E(a_0) \setminus \{e'\}$ , et  $T_{0d}$ ,  $d \in \mathcal{C}_D(a_0)$ , sont automatiquement censurées si un individu rencontre un état intermédiaire  $e'$ .

Comme en analyse de survie, nous considérons à présent une variable de censure à droite  $C$ , dont la fonction de répartition, supposée continue, est notée  $G$ . Elle est supposée satisfaire l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.**  $C$  est indépendante du vecteur  $(S, T, V)$ .

2. Aussi appelée fonction de sous-distribution (*sub-distribution function*).

L'Hypothèse 1 est largement utilisée pour des questions de commodité dans la littérature et est généralement vérifiée pour des données d'assurance de personnes, puisque la censure est majoritairement administrative (fin du contrat ou de l'étude). Il est important de noter que la variable de censure est ici la même pour toutes les variables latentes précédemment introduites. De ce fait, le couple de variables  $(S, T)$  n'est pas directement observé du fait de cette censure. Les variables observées sont les suivantes

$$\begin{cases} Y = \min(S, C) \text{ et } \gamma = \mathbb{1}_{\{S \leq C\}} ; \\ Z = \min(T, C) \text{ et } \delta = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}}. \end{cases}$$

Afin de rester général, nous incorporons dans ce chapitre un vecteur  $\mathbf{U} = (U_i)_{i=1, \dots, p}$  de  $p$ -covariables. En suivant Stute (1993), nous supposons seulement<sup>3</sup> que ces covariables n'apportent pas d'information sur l'occurrence de la censure, c'est-à-dire

### Hypothèse 2.

- $\mathbb{P}(S \leq C \mid S, \mathbf{U}, V_1) = \mathbb{P}(S \leq C \mid S, V_1)$ ,
- $\mathbb{P}(T \leq C \mid S, T, \mathbf{U}, V) = \mathbb{P}(T \leq C \mid T, V)$ .

Comme évoqué plus haut, la seconde égalité de l'Hypothèse 2 est expliquée par le fait que le couple  $(S, T)$  est, par construction, sujet à la censure. En particulier,  $S$  est non censurée tant que  $T$  l'est. Pour procéder à l'inférence du modèle, nous introduisons la fonction de répartition de  $(S, \mathbf{U})$ , notée  $H_0$ , et  $F_0^{(v)}$ , la fonction d'incidence cumulée relative à  $(S, T, \mathbf{U})$ , où la cause est  $V = v$  pour  $v \in \mathcal{V}$ . De plus, nous remarquons que  $F_0 = \sum_v F_0^{(v)}$ .

Les résultats théoriques présentés dans la section suivante peuvent être appliqués tant à des covariables discrètes (p. ex. le sexe, une variable de localisation géographique ou un statut social) et qu'à des covariables continues. Cependant d'un point de vue pratique, l'application de ces résultats à des variables continues est peu judicieux. Aussi, les applications présentées dans les Sections 3.2.2 et 3.2.3 se limitent à des covariables discrètes. Pour une application directe de ces résultats à des covariables continues, nous recommandons de les transformer au préalable en variables catégorielles.

### 3.2.2 Probabilités de transition

Avec les notations de la section précédente 3.2.1, un processus multi-états  $(X_t)_{t \geq 0}$  est habituellement étudié à partir des probabilités de transitions suivantes, avec  $0 \leq s \leq t$ ,  $h, j \in \mathcal{S}$ , et  $\mathbf{u}$  un vecteur de covariables discrètes

$$p_{hj}(s, t \mid \mathbf{u}) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = h, \mathbf{U} = \mathbf{u}).$$

Cependant, dans notre cas, le processus n'est pas supposé markovien et ces probabilités ne suffisent pas à le caractériser. En science actuarielle, de nouvelles quantités d'intérêts peuvent apparaître pour l'évaluation des risques. Les probabilités en question permettent alors de représenter la survenance d'événements associés à l'exécution des paiements prévus par le contrat. Ces flux peuvent être complexes et dépendent par exemple du temps de présence dans un événement (cf. Christiansen, 2012, pour une formulation des provisions techniques dans le cas semi-markovien). Ainsi, on cherchera à définir des probabilités de transition, adaptées

3. Aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire s'agissant de la structure de dépendance entre  $(C, S, T, \mathbf{U}, V)$ .

aux conditions des contrats (p. ex. présence de différés). Pour le type de modèle multi-états considéré dans ce chapitre, il est nécessaire de distinguer chaque état intermédiaire, puisque le contrat peut prévoir des garanties ou des conditions d'exécution différentes. Les probabilités suivantes permettent d'illustrer quelques cas pratiques.

- $p_{00}(s, t | \mathbf{u})$ , la probabilité de survie en bonne santé avec  $0 \leq s \leq t$ ;
- $p_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u})$ , la probabilité d'entrer dans un état non-terminal  $e \in \mathcal{C}_E(a_0)$ , avec  $0 \leq s \leq t$ , et un temps de séjour supérieur à  $\eta \geq 0$  à la date  $t$ ;
- $p_{ee}(s, t | \mathbf{u})$ , la probabilité de rester dans un état non-terminal  $e \in \mathcal{C}_E(a_0)$  entre les dates  $s$  et  $t$ , avec  $0 \leq s \leq t$ ;
- $p_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u})$ , la probabilité de sortir d'un état non-terminal  $e \in \mathcal{C}_E(a_0)$  provoqué par la cause  $d \in \mathcal{C}(e)$ , lorsque le temps de séjour est compris entre  $\eta$  et  $\zeta$ , avec  $0 \leq \eta \leq \zeta$ , et une date d'entrée dans l'état  $e$  comprise entre  $s$  et  $t$ , avec  $0 \leq s \leq t$ ;
- $p_{0d}(s, t | \mathbf{u})$ , la probabilité de transition directe de la bonne santé à un événement terminal  $d \in \mathcal{C}_D(a_0)$ , sans avoir traversé un état intermédiaire, entre les dates  $s$  et  $t$  avec  $0 \leq s \leq t$ .

Cette liste n'est clairement pas exhaustive et peut être modifiée pour appréhender les spécificités des contrats. Par exemple, il serait possible d'exhiber des probabilités de sortie d'un état non-terminal vers un sous-ensemble de plusieurs états terminaux. Dans tous les cas, ces quantités peuvent être exprimées comme des fonctions du couple  $(S, \mathbf{U})$  ou du quadruplet  $(S, T, \mathbf{U}, V)$  comme suit

$$p_{00}(s, t | \mathbf{u}) = \frac{\mathbb{P}(S > t, \mathbf{U} = \mathbf{u})}{\mathbb{P}(S > s, \mathbf{U} = \mathbf{u})}, \quad (3.1)$$

$$p_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u}) = \frac{\mathbb{P}(s < S \leq \min(t, t - \eta), T > t, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S > s, \mathbf{U} = \mathbf{u})}, \quad (3.2)$$

$$p_{ee}(s, t | \mathbf{u}) = \frac{\mathbb{P}(S \leq s, T > t, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, T > s, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V_1 = e)}, \quad (3.3)$$

$$p_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u}) = \frac{\mathbb{P}(\eta < T - S \leq \zeta, s < S \leq t, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V = (e, d))}{\mathbb{P}(T - S > \eta, s < S \leq t, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V_1 = e)}, \quad (3.4)$$

$$p_{0d}(s, t | \mathbf{u}) = \frac{\mathbb{P}(s < S, T \leq t, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V = (0, d))}{\mathbb{P}(S > s, \mathbf{U} = \mathbf{u})}. \quad (3.5)$$

Sans covariables, la probabilité (3.1) peut être simplement estimée, en utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier même lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas satisfaite. Dans les Équations (3.2), (3.3) et (3.4), il convient de remarquer que  $\{V_1 = e\} = \{V_1 = e, V_2 \in \mathcal{C}(e)\}$ . Lorsque l'on observe le numérateur de l'Équation (3.5), on remarque que considérer  $\mathbb{P}(T \leq t, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V = (0, d))$  ou  $\mathbb{P}(S \leq t, \mathbf{U} = \mathbf{u}, V_1 = d)$  conduit à des résultats différents, puisque la première quantité suppose l'existence d'une "compétition" entre tous les états terminaux, alors que la seconde revient à appliquer une troncature à droite sur les observations rencontrant un événement non-terminal.

### 3.2.3 Mesure d'association

En considérant le modèle général introduit précédemment, nous essayons de mesurer la dépendance entre  $(S, T)$  par cause, en s'intéressant à la fonction d'incidence cumulée  $F_0^{(v)}$ .



Cette fonction correspond à un cas particulier de fonction d'incidence cumulée pour un modèle à risques concurrents bivariés avec covariables, où un seul processus de censure est considéré. Relativement peu de travaux se sont focalisés sur l'analyse de la dépendance pour des modèles à risques concurrents multivariés, contrairement à l'analyse de survie multivariée. Un point important est que le tau de Kendall, qui constitue une mesure usuelle de la dépendance pouvant être calculé non-paramétriquement (p. ex. Lopez, 2012), ne peut être étendu facilement en présence de risques concurrents. En effet, les fonctions d'incidence cumulée ne sont pas des fonctions de répartition. Récemment, une certaine attention a été portée à cette problématique (Bandeem-Roche et Liang, 2002; Bandeem-Roche et Ning, 2008; Cheng et Fine, 2008; Cheng *et al.*, 2010) pour un schéma où les lois de censure sont indépendantes. Cette littérature se focalise sur l'estimation de versions localisées du tau de Kendall par cause, qui peuvent notamment être envisagées de manière non-paramétrique comme le suggèrent Bandeem-Roche et Ning (2008). Ces derniers fournissent une mesure d'association, fondée sur une approche non-paramétrique similaire à celle suivie par Oakes (1989). Toutefois, elle est potentiellement biaisée puisqu'elle repose sur des durées observées, sans tenir compte de la censure. De plus, le ratio qu'ils proposent s'appuie sur une hypothèse de constance par morceaux, nécessitant de choisir une partition. Scheike *et al.* (2010) et Scheike et Sun (2012) proposent une mesure d'association locale alternative, s'appuyant sur des *cross-odds ratios* qui sont introduits pour prendre en compte des covariables. Dans la suite, nous suivons cette approche et considérons des estimateurs non-paramétriques de cette quantité.

Nous définissons le *cross-odds ratio*, pour  $(e, d) \in \mathcal{V}$ ,  $0 \leq s \leq t$  et  $\mathbf{u}$  un vecteur de covariables discrètes, tel que

$$\pi_0^{(e,d)}(s, t | \mathbf{u}) = \frac{\text{odds}(T \leq t, V_2 = d | S \leq s, V_1 = e, \mathbf{U} = \mathbf{u})}{\text{odds}(T \leq t, V_2 = d | V_1 = e, \mathbf{U} = \mathbf{u})}, \quad (3.6)$$

où  $\text{odds}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}$ . Cette mesure permet une comparaison entre d'une part l'*odds* conditionnel de l'événement  $\{T \leq t, V_2 = d\}$  pour un individu en bonne santé avant la date  $s$  et qui en sortira pour la raison  $e$ , et d'autre part l'*odds* non conditionnel de l'événement  $\{S \leq s\}$ . Par définition de  $S$  et  $T$ , il n'est pas possible de renverser les rôles de  $s$  et de  $t$  dans  $\pi_0^{(e,d)}(s, t | \mathbf{u})$ . Par conséquent, cette fonction est définie sur l'ensemble  $\{0 \leq s \leq t\}$ . Si  $\{T \leq t, V_2 = d\}$  et  $\{S \leq s, V_1 = e\}$  sont indépendants conditionnellement à  $\{V_1 = e, \mathbf{U} = \mathbf{u}\}$ , c'est-à-dire que la date et la cause d'entrée dans l'état d'invalidité  $e$  n'ont pas d'effet sur la durée de vie globale se terminant pour la raison  $d$ , alors  $\pi_0^{(e,d)}(s, t | \mathbf{u}) = 1$ . Il y a association positive (respectivement négative) si  $\pi_0^{(e,d)}(s, t | \mathbf{u}) > (<) 1$ . Cette mesure prend ses valeurs dans  $[0, \infty[$ . La mesure d'association introduite est simple à manipuler et nous semble être un outil utile, comparativement à  $F_0^{(v)}$  qui est complexe à étudier, pour l'analyse de la dépendance entre la durée de vie globale et celle en bonne santé.

Nous remarquons que l'indicateur que nous définissons est légèrement différent de celui introduit par Scheike *et al.* (2010), puisque contrairement au cadre bivarié standard, notre modèle, par sa structure particulière, induit par construction une relation entre les causes  $V_1$  et  $V_2$ . Ceci explique la différence de définition s'agissant du dénominateur de (3.6). Il convient également de remarquer que Cheng *et al.* (2007) proposent d'autres mesures d'associations alternatives, sans covariable. Celles-ci s'expriment comme :

- le ratio des fonctions d'incidence cumulée jointes et des fonctions d'incidence cumulée univariées ;

- le ratio des fonctions d'intensité de transition cumulée jointes et des fonctions d'intensité de transition cumulée univariées.

Elles sont cependant difficile à interpréter. Notre mesure permet de donner une indication sur le caractère markovien d'une transition mais ne le teste pas directement. Le lecteur intéressé pourra se référer à Rodríguez-Gironde et de Uña-Álvarez (2012) pour l'introduction de tests concernant l'hypothèse de Markov.

### 3.3 Estimation non-paramétrique, propriétés asymptotiques et exemples d'application

Notre objectif premier est de fournir un cadre flexible pour l'estimation non-paramétrique des probabilités de transition, comme celles introduites en 3.2.2, et d'indicateurs, comme la mesure d'association (cf. 3.2.3) permettant de décrire le processus multi-états introduit dans ce chapitre. Pour ce faire, nous travaillons sous la loi jointe  $F_0^{(v)}$ ,  $v \in \mathcal{V}$ , et définissons, dans la Section 3.3.1, de nouveaux estimateurs sous forme d'intégrales d'Aalen-Johansen pour des modèles à risques concurrents en présence de covariables. Nous démontrons leurs propriétés asymptotiques en 3.3.2. La prise en compte de la troncature à gauche est discutée dans la Section 3.3.3. Dans les Sections 3.3.4 et 3.3.5, nous montrons comment utiliser ces résultats pour obtenir des propriétés pour les probabilités de transition et les mesures d'association.

#### 3.3.1 Cadre général

Nous nous plaçons dans le cadre où une unique variable de censure  $C$  à droite indépendante est présente (Hypothèse 1). Par conséquent, les observations disponibles pour un individu  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont

$$(Y_i, \gamma_i, \gamma_i V_{1,i}, Z_i, \delta_i, \delta_i V_{2,i}, \mathbf{U}_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ces observations sont supposées être des répliques indépendantes du vecteur  $(Y, \gamma, \gamma V_1, Z, \delta, \delta V_2, \mathbf{U})$ . Si  $\delta = 1$ , alors  $\gamma = 1$ . Nous considérons les valeurs ordonnées de  $Y$ ,  $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$ , et  $(\gamma_{[i:n]}, \mathbf{U}_{[i:n]})$  les valeurs concomitantes à la  $i$ -ème statistique d'ordre  $Y_{i:n}$  (c'est-à-dire la valeur de  $(\gamma_j, \mathbf{U}_j)_{1 \leq j \leq n}$  associée à  $Y_{i:n}$ ). Un estimateur de  $H_0$  est simplement obtenu à partir de l'estimateur de Kaplan-Meier multivarié, introduit par Stute (1993) et constitué d'une variable de durée censurée et de covariables

$$\widehat{H}_{0n}(s, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n W_{in} \mathbb{1}_{\{Y_{i:n} \leq s, \mathbf{U}_{[i:n]} \leq \mathbf{u}\}}, \quad (3.7)$$

où le poids de Kaplan-Meier pour la  $i$ -ème observation ordonnée est

$$W_{in} = \frac{\gamma_{[i:n]}}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left( \frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{\gamma_{[j:n]}}.$$

Les intégrales Kaplan-Meier, prenant la forme  $S(\varphi) = \int \varphi dH_0$  avec  $\varphi$  une fonction intégrable générique, sont estimées par

$$\widehat{S}_n(\varphi) = \int \varphi(s, \mathbf{u}) \widehat{H}_{0n}(ds, d\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n W_{in} \varphi(Y_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}).$$

Nous nous intéressons à présent au cas comportant deux variables de durée. La fonction d'incidence cumulée jointe pour  $(S, T, V_1, V_2)$  est définie et estimée non-paramétriquement par Cheng *et al.* (2007), sous une hypothèse de double censure indépendante. Cette représentation s'applique au cas général d'un modèle à risques concurrents bivariés, mais dans notre cas, nous cherchons à tirer parti du fait que la variable  $S$  est nécessairement observée lorsque  $T$  est non-censurée. Pour cela, nous introduisons  $Z_{1:n} \leq Z_{2:n} \leq \dots \leq Z_{n:n}$ , les valeurs ordonnées de  $Z$ , et  $(Y_{[i:n]}, \delta_{[i:n]}, J_{[i:n]}^{(v)}, \mathbf{U}_{[i:n]})$ , les valeurs concomitantes associées à la  $i$ -ème statistique d'ordre de  $Z$ , avec  $J^{(v)} = \mathbb{1}_{\{V=v\}}$  et  $v \in \mathcal{V}$ . En s'appuyant sur l'idée de Meira-Machado *et al.* (2006), nous considérons  $S$  comme une covariable et estimons  $F_0^{(v)}$  en utilisant l'estimateur d'Aalen-Johansen (Aalen et Johansen, 1978), adapté à un modèle à risques concurrents. Cet estimateur peut prendre la forme d'une somme

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{0n}^{(v)}(y, z, \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^n \widetilde{W}_{in}^{(v)} \mathbb{1}_{\{Y_{[i:n]} \leq y, Z_{i:n} \leq z, \mathbf{U}_{[i:n]} \leq \mathbf{u}\}} \\ &= \sum_{i=1}^n \widetilde{W}_{in} J_{[i:n]}^{(v)} \mathbb{1}_{\{Y_{[i:n]} \leq y, Z_{i:n} \leq z, \mathbf{U}_{[i:n]} \leq \mathbf{u}\}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\widetilde{W}_{in}$  correspond au poids de Kaplan-Meier pour la  $i$ -ème valeur ordonnée, associée à l'estimateur de la fonction de survie de  $T$ . Les poids d'Aalen-Johansen pour l'état  $v$ , définis par

$$\widetilde{W}_{in}^{(v)} = \frac{\delta_{[i:n]} J_{[i:n]}^{(v)}}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left( \frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{\delta_{[j:n]}} , \quad 1 \leq i \leq n,$$

sont très proches des poids de Kaplan-Meier pour la fonction de survie de  $T$ . Ils peuvent être interprétés comme des masses à associer à chaque observation pour tenir compte de la censure.

Il convient de noter qu'une représentation adaptée à la méthode IPCW (*Inverse Probability of Censoring Weighting*) peut être obtenue en écrivant

$$\widetilde{W}_{in}^{(v)} = \frac{\delta_{[i:n]} J_{[i:n]}^{(v)}}{n \left( 1 - \widehat{G}_n(Y_{i:n}) \right)},$$

où  $\widehat{G}_n$  correspond à l'estimateur de la fonction de réparation de  $C$ , obtenue par Kaplan-Meier. Bien que nos estimateurs semblent s'appliquer indifféremment en présence de covariables continues ou discrètes, nous recommandons dans la pratique une utilisation limitée aux seules variables discrètes. Une extension possible consisterait à envisager des techniques de régression. Les méthodes IPCW constitueraient une piste possible. Elles sont largement répandues dans le cadre des modèles de survie avec censure non-indépendante et ont été récemment appliquées pour le calcul des probabilités d'occupation, de sortie et d'attente pour un modèle multi-états acyclique non-markovien (Mostajabi et Datta, 2013). Une application dans le cadre d'un modèle *illness-death* a récemment été proposée par Meira-Machado *et al.* (2014). L'application de ces techniques à nos estimateurs semble clairement possible mais est en dehors du cadre de ce chapitre.

En s'appuyant sur la représentation sous forme de somme (3.8), nous cherchons à présent à obtenir des estimateurs généraux pour les quantités  $S^{(v)}(\varphi) = \int \varphi dF_0^{(v)}$ , avec  $\varphi$  une fonction intégrable. En l'absence de censure, l'estimation non-paramétrique de cette quantité s'obtient

simplement, en considérant l'intégrale d'un processus empirique multivarié sous la fonction de répartition de  $(S, T, \mathbf{U})$ . Dans ce contexte, nous disposerions d'une information complète et chaque observation aurait le même poids.

Puisque le couple  $(T, V)$  forme un modèle à risques concurrents, nous estimons  $S^{(v)}(\varphi)$ , pour chaque valeur de  $v$ , à partir d'une intégrale d'Aalen-Johansen prenant la forme

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) = \int \varphi(s, t, \mathbf{u}) \widehat{F}_{0n}^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \widetilde{W}_{in}^{(v)} \varphi(Y_{[i:n]}, Z_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}). \quad (3.9)$$

Ces estimateurs sont simples à manipuler et similaires à ceux exhibés par Suzukawa (2002). Des covariables sont cependant ajoutées. Par la suite, nous souhaitons étudier les propriétés asymptotiques de ces estimateurs et nous considérerons  $Y$  dans (3.9) comme une covariable non-censurée.

### 3.3.2 Propriétés asymptotiques

Soit  $\tau_Y$  et  $\tau_Z$  les bornes supérieures du support des fonctions de répartition de  $Y$  et  $Z$ . Sous les Hypothèses 1 et 2, la convergence presque sûre et la convergence en loi de l'estimateur (3.7) sur  $[0, \tau_Y]$  peuvent être simplement démontrées, en s'appuyant sur les arguments et sous les mêmes conditions que Stute (1993) et Stute (1996). Ce résultat est également vérifié si  $H$  et  $G$  n'ont pas de saut en commun, ce qui constitue une condition moins restrictive que la continuité, mais que nous n'étudions pas ici. La prochaine section s'intéresse aux propriétés de convergence de (3.9).

**Théorème 1.** *Sous les Hypothèses 1 et 2, et en supposant également que  $\varphi$  est une fonction  $F_0$ -intégrable, nous avons presque sûrement*

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \longrightarrow S_\infty^{(v)}(\varphi) = \int \mathbb{1}_{\{t < \tau_Z\}} \varphi(s, t, \mathbf{u}) F_0^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}), \quad v \in \mathcal{V}. \quad (3.10)$$

De plus, si le support de  $Z$  est inclus dans celui de  $C$ ,  $\widehat{S}_n^{(j)}(\varphi) \rightarrow S^{(j)}(\varphi)$  presque sûrement.

Ces résultats constituent des extensions de ceux démontrés par Suzukawa (2002, Théorème 1), qui s'appuient directement sur les preuves de Stute et Wang (1993). Des détails supplémentaires concernant cette preuve sont fournies en Annexe 3.7.1.

Afin d'obtenir des propriétés de convergence en loi, nous repartons des approches développées par Stute (1995) pour les intégrales Kaplan-Meier et par Stute (1996) pour une version avec covariables. Ainsi, nous introduisons des conditions d'intégrabilité similaires pour  $\varphi$ . Ces conditions sont données ci-dessous

**Hypothèse 3.**  $\int \frac{\varphi(S, T, \mathbf{U})^2 \delta}{(1 - G(T))^2} d\mathbb{P} = \int \frac{\varphi(S, T, \mathbf{U})^2}{1 - G(T)} d\mathbb{P} < \infty.$

**Hypothèse 4.**  $\int |\varphi(S, T, \mathbf{U})| \sqrt{C_0(T)} \mathbb{1}_{\{T < \tau_Z\}} d\mathbb{P} < \infty.$

Nous introduisons

$$\begin{aligned} M(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z), \quad M_0(z) = \mathbb{P}(Z \leq z, \delta = 0), \\ M^{(v)}(y, z, \mathbf{u}) &= \mathbb{P}(Y \leq y, Z \leq z, \mathbf{U} \leq \mathbf{u}, \delta = 1, V = v), \end{aligned}$$

et

$$C_0(x) = \int_0^{x-} \frac{G(dy)}{(1-M(y))(1-G(y))}.$$

Nous définissons également

$$\lambda_1^{(v)}(x) = \frac{1}{1-M(x)} \int \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{x < t < \tau_Z\}}}{(1-G(t))} M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}),$$

et

$$\lambda_2^{(v)}(x) = \int \frac{\lambda_1^{(v)}(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau < x\}}}{1-M(\tau)} M_0(d\tau).$$

L'Hypothèse 3 permet de garantir l'existence d'un moment d'ordre deux pour  $\varphi$ . L'Hypothèse 4 provient de Stute (1995) et n'a pas d'interprétation précise. Elle permet simplement de garantir la convergence sur  $[0, \tau_Z]$ . Cependant, elle demeure relativement faible.

À présent, nous introduisons  $\widehat{\mathbf{S}}_n(\varphi) = \left( \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \right)_{v \in \mathcal{V}}^\top$  et  $\mathbf{S}(\varphi) = \left( S^{(v)}(\varphi) \right)_{v \in \mathcal{V}}^\top$ . Le théorème suivant donne des propriétés asymptotiques pour  $\widehat{\mathbf{S}}_n(\varphi)$ .

**Théorème 2.** *On suppose que les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites et que le support de  $Z$  est inclus dans celui de  $C$ . Sous les Hypothèses 3 et 4, nous avons*

$$\sqrt{n} \left\{ \widehat{\mathbf{S}}_n(\varphi) - \mathbf{S}(\varphi) \right\} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}(\varphi)), \quad (3.11)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}(\varphi)$  est une  $m \times m$  matrice symétrique, de variance-covariance liée au vecteur  $\mathbf{a}(\varphi) = (a_v(\varphi))_{v \in \mathcal{V}}$  avec

$$a_v(\varphi) = \frac{\varphi(Y, Z, \mathbf{U}) \delta J^{(v)}}{1-G(Z)} + \lambda_1^{(v)}(Z)(1-\delta) - \lambda_2^{(v)}(Z), \quad v \in \mathcal{V}.$$

La preuve de ce résultat est donnée en Annexe 3.7.2. À partir de l'Équation (3.11), il est possible d'obtenir des intervalles de confiance asymptotiques lorsque les fonctions  $\frac{1}{1-G}$ ,  $\lambda_1^{(v)}$  et  $\lambda_2^{(v)}$  sont connues. Cela peut être fait en remplaçant les fonctions de répartition  $H$ ,  $M$ ,  $M_0$  et  $M^{(v)}$  dans l'expression de  $\boldsymbol{\Sigma}(\varphi)$  par leur estimateurs empiriques. Cependant, il s'agit d'un calcul lourd, dû fait de l'expression de  $\mathbf{a}(\varphi)$ . L'utilisation de techniques de *bootstrap* non-paramétrique permet de remédier à cette difficulté et d'obtenir des estimateurs de la matrice de variance-covariance.

### 3.3.3 Développements avec troncature à gauche

Dans cette Section, nous discutons de la possibilité d'étendre nos résultats en présence de données tronquées à gauche sans fournir de preuve formelle. Jusqu'à présent, nous avons ignoré, par simplicité, le cas où une variable de troncature à gauche  $L$  est présente. Pour les données d'assurance dépendance que nous étudierons dans la Section 3.5, la troncature à gauche n'est pas vraiment problématique, puisqu'elle survient toujours lorsque l'individu est encore en bonne santé. Par conséquent,  $Y$  et  $Z$  sont observées si  $Y \geq L$ . En revisitant l'Hypothèse 1 telle que  $(C, L)$  soient indépendants de  $(S, T, V)$ , le problème peut être traité en retirant de l'échantillon les données, telles que  $Y_i$  est plus petit que  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  (Andersen *et al.*, 1993, Chapitre III.3). Cela conduit à un faible biais dans nos applications.

Cependant, des situations plus générales où la troncature peut intervenir après  $S$  sont susceptibles de se produire. En effet, le fait de retirer les observations tronquées peut conduire à une perte d'information considérable (Peng et Fine, 2006) pour l'estimation des probabilités  $\mathbb{P}(S \leq s, V_1 = e)$ , avec  $s \geq 0$  et  $e \in \mathcal{C}(a_0)$ . Dans ce contexte, nous suggérons d'améliorer notre estimateur de (3.9) pour ce type de données, en adoptant la spécification retenue par exemple par Sánchez-Sellero *et al.* (2005). Il s'agirait de supposer que le vecteur  $(C, L)$  sont indépendantes de  $(S, T, V)$  et que  $C$  est indépendante de  $L$ . De cette manière, nous pourrions adapter les poids d'Aalen-Johansen tels que

$$\widetilde{W}_{in}^{(v)} = \frac{\delta_{[i:n]} J_{[i:n]}^{(v)}}{nC_n(Z_{i:n})} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{nC_n(Z_{i:n})}\right)^{\delta_{[j:n]}},$$

où  $C_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{L_i \leq x \leq Z_i}$ .

### 3.3.4 Application pour l'estimation des probabilités de transition

Dans cette Section, nous nous intéressons à l'estimation non-paramétrique des probabilités de transition, introduites en 3.2.2, lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas satisfaite. Dans le cas où elle serait vérifiée, les probabilités de transition  $p_{hj}(s, t | \mathbf{u})$  peuvent être estimées à partir de l'estimateur non-paramétrique d'Aalen-Johansen (Aalen et Johansen, 1978; Andersen *et al.*, 1993).

Pour répondre à cette problématique, nous exprimons les probabilités de transition (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5) comme des intégrales de la forme  $\int \varphi dH_0$  et  $\int \varphi dF_0^{(v)}$

$$(3.1) = \frac{\mathbb{E} \left[ \varphi_{t,\mathbf{u}}^{(0)}(S, \mathbf{U}) \right]}{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,\mathbf{u}}^{(0)}(S, \mathbf{U}) \right]}, \quad (3.12)$$

$$(3.2) = \frac{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,t,\eta,\mathbf{u}}^{(1)}(S, T, \mathbf{U}) \mathbb{1}_{\{V=(e,\mathcal{C}(e))\}} \right]}{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,\mathbf{u}}^{(0)}(S, \mathbf{U}) \right]}, \quad (3.13)$$

$$(3.3) = \frac{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,t,\mathbf{u}}^{(2)}(S, T, \mathbf{U}) \mathbb{1}_{\{V=(e,\mathcal{C}(e))\}} \right]}{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,s,\mathbf{u}}^{(2)}(S, T, \mathbf{U}) \mathbb{1}_{\{V=(e,\mathcal{C}(e))\}} \right]}, \quad (3.14)$$

$$(3.4) = \frac{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,t,\eta,\zeta,\mathbf{u}}^{(3)}(S, T, \mathbf{U}) \mathbb{1}_{\{V=(e,d)\}} \right]}{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,t,\eta,\mathbf{u}}^{(4)}(S, T, \mathbf{U}) \mathbb{1}_{\{V=(e,\mathcal{C}(e))\}} \right]}, \quad (3.15)$$

$$(3.5) = \frac{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,t,\mathbf{u}}^{(5)}(S, T, \mathbf{U}) \mathbb{1}_{\{V=(0,d)\}} \right]}{\mathbb{E} \left[ \varphi_{s,\mathbf{u}}^{(0)}(S, \mathbf{U}) \right]}, \quad (3.16)$$

avec  $\varphi_{s,\mathbf{u}}^{(0)}(x, z) = \mathbb{1}_{\{x>s, z=u\}}$ ,  $\varphi_{s,t,\eta,\mathbf{u}}^{(1)}(x, y, z) = \mathbb{1}_{\{s<x \leq \min(t, t-\eta), y>t, z=u\}}$ ,  $\varphi_{s,t,\mathbf{u}}^{(2)}(x, y, z) = \mathbb{1}_{\{s<x, y>t, z=u\}}$ ,  $\varphi_{s,t,\eta,\zeta,\mathbf{u}}^{(3)}(x, y, z) = \mathbb{1}_{\{s<x \leq t, \eta < y-x \leq \zeta, z=u\}}$ ,  $\varphi_{s,t,\eta,\mathbf{u}}^{(4)}(x, y, z) = \mathbb{1}_{\{s<x \leq t, \eta < y-x, z=u\}}$  and  $\varphi_{s,t,\mathbf{u}}^{(5)}(x, y, z) = \mathbb{1}_{\{x>s, y \leq t, z=u\}}$ .

Notre approche considère les numérateurs et les dénominateurs des équations (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16) comme des espérances sous les fonction de répartition de  $(S, \mathbf{U})$  ou de  $(S, T, \mathbf{U}, V)$ . Il s'agit ensuite de les estimer, à partir d'intégrales de Kaplan-Meier ou d'Aalen-Johansen pour un modèle à risques concurrents, selon les cas. Par conséquent, nous obtenons les estimateurs suivants

$$\widehat{p}_{00}(s, t | \mathbf{u}) = \frac{\widehat{S}_n(\varphi_{t, \mathbf{u}}^{(0)})}{\widehat{S}_n(\varphi_{s, \mathbf{u}}^{(0)})}, \quad (3.17)$$

$$\widehat{p}_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u}) = \frac{\widehat{S}_n^{(e, \mathcal{C}_e)}(\varphi_{s, t, \eta, \mathbf{u}}^{(1)})}{\widehat{S}_n(\varphi_{s, \mathbf{u}}^{(0)})}, \quad (3.18)$$

$$\widehat{p}_{ee}(s, t | \mathbf{u}) = \frac{\widehat{S}_n^{(e, \mathcal{C}_e)}(\varphi_{s, t, \mathbf{u}}^{(2)})}{\widehat{S}_n^{(e, \mathcal{C}_e)}(\varphi_{s, s, \mathbf{u}}^{(2)})}, \quad (3.19)$$

$$\widehat{p}_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u}) = \frac{\widehat{S}_n^{(e, d)}(\varphi_{s, t, \eta, \zeta, \mathbf{u}}^{(3)})}{\widehat{S}_n^{(e, \mathcal{C}_e)}(\varphi_{s, t, \eta, \mathbf{u}}^{(4)})}, \quad (3.20)$$

$$\widehat{p}_{0d}(s, t | \mathbf{u}) = \frac{\widehat{S}_n^{(0, d)}(\varphi_{s, t, \mathbf{u}}^{(5)})}{\widehat{S}_n(\varphi_{s, \mathbf{u}}^{(0)})}, \quad (3.21)$$

Les Théorèmes 1 et 2 peuvent alors être appliqués pour déduire des propriétés asymptotiques concernant (3.18), (3.19), (3.20) et (3.21). Les convergences en loi et presque sûre pour  $\widehat{p}_{00}(s, t | \mathbf{u})$  sont immédiates en appliquant les résultats de Stute (1996) et la méthode delta.

**Proposition 3.** *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1, les estimateurs (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16) convergent presque sûrement, si le support de  $Z$  est inclus dans celui de  $C$ . Par ailleurs, ils convergent également en loi, puisque les fonctions  $\varphi_{s, t, u, \eta}^{(1)}$ ,  $\varphi_{s, t, u}^{(2)}$ ,  $\varphi_{s, t, \eta, \zeta, u}^{(3)}$ ,  $\varphi_{s, t, \eta, u}^{(4)}$  et  $\varphi_{s, t, u}^{(5)}$  satisfont les Hypothèses 3 et 4. Par conséquent, on a :*

- $\sqrt{n} \{ \widehat{p}_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u}) - p_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u}) \} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u}))$ , avec  $0 \leq s \leq t$ ,  $\eta \in [0, \infty[$  et  $e \in \mathcal{C}_E(a_0)$  ;
- $\sqrt{n} \{ \widehat{p}_{ee}(s, t | \mathbf{u}) - p_{ee}(s, t | \mathbf{u}) \} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{ee}(s, t | \mathbf{u}))$ , avec  $0 \leq s \leq t$  et  $e \in \mathcal{C}_E(a_0)$  ;
- $\sqrt{n} \{ \widehat{p}_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u}) - p_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u}) \} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u}))$ , avec  $0 \leq s \leq t$ ,  $0 \leq \eta \leq \zeta$ ,  $e \in \mathcal{C}_E(a_0)$  et  $d \in \mathcal{C}(e)$  ;
- $\sqrt{n} \{ \widehat{p}_{0d}(s, t | \mathbf{u}) - p_{0d}(s, t | \mathbf{u}) \} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{0d}(s, t | \mathbf{u}))$ , avec  $0 \leq s \leq t$  et  $d \in \mathcal{C}_D(a_0)$ .

Les variances  $\sigma_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u})$ ,  $\sigma_{ee}(s, t | \mathbf{u})$ ,  $\sigma_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u})$  et  $\sigma_{0d}(s, t | \mathbf{u})$  sont des fonctions complexes à décrire analytiquement.

*Preuve de la Proposition 3.* Premièrement, la fonction  $\varphi_{s, u}^{(0)}$  satisfait aux conditions du Théorème 1.1 de Stute (1996). Par conséquent,  $\widehat{S}_n(\varphi_{s, u}^{(0)})$  est consistant et convergent en loi. Ensuite, en appliquant les résultats du Théorème 1 aux fonctions  $\varphi_{s, t, u, \eta}^{(1)}$ ,  $\varphi_{s, t, u}^{(2)}$ ,  $\varphi_{s, t, \eta, \zeta, u}^{(3)}$ ,  $\varphi_{s, t, \eta, u}^{(4)}$  et  $\varphi_{s, t, u}^{(5)}$ , qui sont  $F_0$ -intégrables, nous obtenons le premier résultat sur la convergence presque

sûre. La preuve de la convergence en loi s'obtient simplement en appliquant le Théorème 2 aux fonctions introduites. Les fonctions limites  $\sigma_{0e}(s, t, \eta | \mathbf{u})$ ,  $\sigma_{ee}(s, t | \mathbf{u})$ ,  $\sigma_{ed}(s, t, \eta, \zeta | \mathbf{u})$  et  $\sigma_{0d}(s, t | \mathbf{u})$  peuvent être déterminées en appliquant la méthode delta, mais sont difficiles à manipuler.  $\square$

Cette proposition élargit les résultats de Meira-Machado *et al.* (2006, Corolaires 1 et 2). Comme évoqué plus haut, les fonctions de variance des processus gaussiens limites sont complexes à estimer et sont évaluées au moyen de techniques de *bootstrap*. Dans la Section 3.5, nous utilisons des techniques de *bootstrap* non-paramétriques pour la construction d'intervalles de confiance asymptotiques. La technique employée sera une simple procédure de rééchantillonnage au sens de Efron (1979). Récemment, Beyersmann *et al.* (2013) ont fourni des techniques de type *wild bootstrap* pour étudier les lois limites de l'estimateur d'Aalen-Johansen pour un modèle à risques concurrents. Ces outils sont utiles, par exemple pour la construction des bandes de confiance en présence de petits échantillons. Comme ces auteurs le remarquent, leurs approches donnent des résultats proches de celle fournie par Efron. À notre connaissance, il n'existe pas d'alternative pour construire des estimateurs *bootstrap* plus cohérents pour les fonctions d'incidence cumulée ou d'autres probabilités de transition.

### 3.3.5 Estimation de la mesure d'association

Nous nous intéressons à présent à l'estimation non-paramétrique de la mesure d'association (3.6), reliant la durée de vie en bonne santé et la durée de vie globale. Nous détaillons dans cette section ses propriétés asymptotiques. Pour simplifier la présentation, nous ignorons le vecteur de covariables  $\mathbf{U}$ . Pour  $(e, d) \in \mathcal{V}$  et  $0 \leq s \leq t$ , le *cross-odds ratio* est une fonction de

$$\mathbb{P}(T \leq t, V_2 = d | S \leq s, V_1 = e) = \frac{\mathbb{P}(T \leq t, V_2 = d, S \leq s, V_1 = e)}{\mathbb{P}(S \leq s, V_1 = e)},$$

et

$$\mathbb{P}(T \leq t, V_2 = d | V_1 = e) = \frac{\mathbb{P}(T \leq t, V_2 = d, V_1 = e)}{\mathbb{P}(V_1 = e)}.$$

Le premier terme admet pour estimateur non-paramétrique

$$\frac{\widehat{F}_{0n}^{(e,d)}(s, t)}{\widehat{H}_{0n}^{(e)}(s)},$$

où  $\widehat{H}_{0n}^{(e)}$  est l'estimateur de la fonction d'incidence cumulée

$$\widehat{H}_{0n}^{(e)}(s) = \sum_{i=1}^n W_{in} \mathbb{1}_{\{V_{1,[i:n]}=e\}} \mathbb{1}_{\{Y_{i:n} \leq s\}}.$$

Le second peut être estimé en considérant

$$\frac{\widehat{F}_n^{(e,d)}(t)}{\widehat{H}_{0n}^{(e)}(\infty)}.$$



Par conséquent, nous présentons l'estimateur suivant pour le *cross-odds ratio*

$$\widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)}(s,t) = \frac{\widehat{F}_{0n}^{(e,d)}(s,t)}{\frac{\widehat{H}_{0n}^{(e)}(s) - \widehat{F}_{0n}^{(e,d)}(s,t)}{\widehat{F}_n^{(e,d)}(t)} \cdot \frac{\widehat{H}_{0n}^{(e)}(\infty) - \widehat{F}_n^{(e,d)}(t)}}{\quad} \quad (3.22)$$

**Proposition 4.** *Sous les hypothèses du Théorème 1, l'estimateur de la mesure d'association locale (3.22) converge presque sûrement, si le support de  $Z$  est inclus dans celui de  $C$ . De plus, on a*

$$\sqrt{n} \left\{ \widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)}(s,t) - \pi_0^{(e,d)}(s,t) \right\} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \sigma_\pi^{(e,d)}(s,t) \right),$$

avec  $0 \leq s \leq t$  et  $(e,d) \in \mathcal{V}$ .  $\sigma_\pi^{(e,d)}(s,t)$  est une fonction de variance à préciser.

*Preuve de la Proposition 4.* Les Théorèmes 1 et 2 sont vérifiés pour les estimateurs de fonctions d'incidence cumulée  $\widehat{F}_{0n}^{(e,d)}$ . La preuve vient facilement en utilisant les propriétés de convergence de l'estimateur d'Aalen-Johansen (Andersen *et al.*, 1993) et la méthode delta pour la convergence en loi.  $\square$

Comme pour les probabilités de transition, nous utiliserons une technique de *bootstrap* non-paramétrique pour l'évaluation des fonctions de variance asymptotique. La mesure d'association étant locale et fonction de deux variables temporelles, il peut être utile d'introduire des fonctions mesurant la dépendance agrégée sur des intervalles de temps, contenus dans  $\{0 \leq s \leq t\}$ . Cette version agrégée du *cross odds-ratio* peut être affinée par l'introduction d'une fonction de poids, comme le proposent Cheng *et al.* (2007) dans le cas d'un modèle à risques concurrents bivariés. Pour la réalisation de tests, les poids permettent d'augmenter la puissance des tests, mais leur mise en place nécessite une phase d'analyse préalable.

Soit  $\mu^{(e)} = [\mu_1^{(e)}, \mu_2^{(e)}]$  et  $\mu^{(d)} = [\mu_1^{(d)}, \mu_2^{(d)}]$  deux intervalles de temps qu'on associe aux causes  $e$  et  $d$ , à l'intérieur de la période d'étude. Nous introduisons la statistique de test suivante

$$\widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)*} = \iint_{\mu^{(e)} \times \mu^{(d)}} \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \widetilde{w}_n(s,t) \widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)}(s,t) dsdt, \quad (3.23)$$

où

$$\widetilde{w}_n(s,t) = \frac{\widehat{w}_n(s,t)}{\iint_{\mu^{(e)} \times \mu^{(d)}} \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \widehat{w}_n(s,t) dsdt},$$

représente une fonction de poids que nous supposons uniformément convergente sur  $\mu^{(e)} \times \mu^{(d)}$  vers une fonction déterministe bornée  $w(s,t)$ . Nous examinons ensuite les propriétés asymptotiques pour  $\widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)*}$ .

**Proposition 5.** *Sous les hypothèses de la Proposition 4,  $\widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)*}$  converge presque sûrement et*

$$\sqrt{n} \left( \widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)*} - \pi^{(e,d)*} \right),$$

*est asymptotiquement normal.*

*Preuve de la Proposition 5.* Toute d’abord, nous remarquons que  $\widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)*}$  est une fonction Hadamard différentiable de  $\widehat{\pi}_{0n}^{(e,d)}$ . L’application des résultats de la Proposition 4 et de la méthode delta fonctionnelle (van der Vaart et Wellner, 2000, Theorem 3.9.4) permet de montrer la convergence en loi.  $\square$

Le choix des fonctions de poids  $\widehat{w}_n$  sur la région d’intégration est délicat. Les poids peuvent être simplement pris égaux à 1 ou optimisés pour augmenter la puissance du test. Un choix naturel serait par exemple de considérer des poids fonction de l’inverse du nombre d’observations. Comme le remarquent Cheng *et al.* (2007), ceci nécessite une analyse préliminaire, visant à identifier les dates pour lesquelles l’association est importante, et où les données sont manquantes. De plus, il est nécessaire de distinguer les zones pour lesquelles la fonction d’association prend des signes opposés, afin d’y conduire des analyses séparées.

### 3.4 Résultats simulés sur les probabilités de transition

Dans cette section, nous mettons en œuvre une analyse sur données simulées afin d’évaluer les performances des estimateurs (3.18) et (3.19) en les comparant à leur équivalent, calculé sous l’hypothèse de Markov *via* les estimateurs d’Aalen-Johansen. Dans la suite, les applications numériques ont été développées à partir du logiciel R (R Core Team, 2015). Puisque nos travaux s’appuient sur des modèles à risques concurrents, nous avons utilisé et adapté certains outils présents dans le *package* `mstate`, conçu sous R par De Wreede *et al.* (2011), ainsi que dans l’ouvrage de Beyersmann *et al.* (2011). Notons également que les spécifications du modèle de Meira-Machado *et al.* (2006) sont implémentées en R (Meira-Machado et Roca-Pardinas, 2011).

Afin de générer des données pour lesquelles l’hypothèse de Markov n’est pas respectée, nous repartons des durées latentes introduites dans la Section 3.2.1, puis spécifions une hypothèse de dépendance pour les relier. En présence d’un seul état intermédiaire, c’est-à-dire un simple modèle *illness-death*, Amorim *et al.* (2011) utilisent la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern pour modéliser la fonction de répartition jointe de  $(S, T - S)$ . Pour notre approche qui est plus générale, nous nous référons à la méthode de simulation développée pour les modèles multi-états acycliques par Rotolo *et al.* (2013). Nous retenons le formalisme décrit par la Figure 3.2. Par simplicité, nous nous limitons à un seul état terminal et deux états intermédiaires.

En premier lieu, nous choisissons de spécifier la dépendance entre les durées latentes  $T_{0e}$ ,  $e \in \{e_1, e_2\}$ , issues de l’état initial  $a_0$ , et  $T_{0d}$  par le biais d’une copule de Clayton  $\mathfrak{C}_{\theta_0}$  de paramètre  $\theta_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{0e_1} > t_{e_1}, T_{0e_2} > t_{e_2}, T_{0d} > t_d) &= \mathfrak{C}_{\theta_0}(\mathbb{P}(T_{0e} > t_{e_1}), \mathbb{P}(T_{0e} > t_{e_2}), \mathbb{P}(T_{0d} > t_d)) \\ &= \left( \mathbb{P}(T_{0d} > t_d)^{-\theta_0} + \sum_{e \in \{e_1, e_2\}} \left[ \mathbb{P}(T_{0e} > t_e)^{-\theta_0} - 1 \right] \right)^{\frac{-1}{\theta_0}}. \end{aligned}$$

En second lieu, nous introduisons des copules de Clayton  $\mathfrak{C}_{\theta_e}$ , pour les états non-terminaux

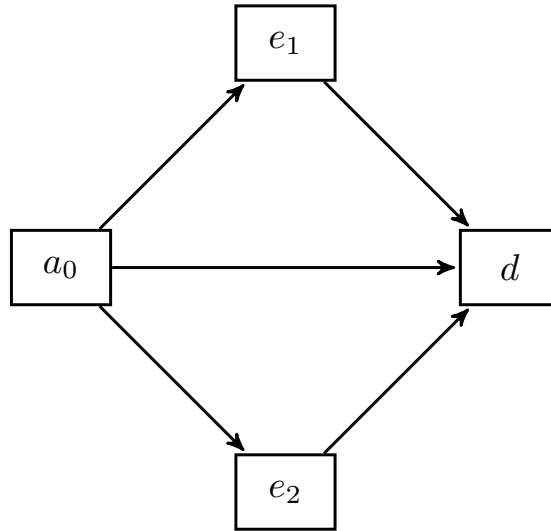


FIGURE 3.2 – Forme du modèle multi-états étudié pour l’analyse sur données simulées.

$e_1$  et  $e_2$ , afin de lier  $T_{0e}$  et ces états "fils"  $T_{ed}$ . Formellement, on a pour  $e \in \{e_1, e_2\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{0e} > t_e, T_{ed} > t_d) &= \mathfrak{C}_{\theta_e}(\mathbb{P}(T_{0e} > t_e), \mathbb{P}(T_{ed} > t_d)) \\ &= \left( \mathbb{P}(T_{0e} > t_e)^{-\theta_e} + \mathbb{P}(T_{ed} > t_d)^{-\theta_e} - 1 \right) \frac{-1}{\theta_e}. \end{aligned}$$

Avec cette spécification, nous supposons que les paramètres  $\theta_0$  et  $\theta_e$ ,  $e \in \{e_1, e_2\}$ , prennent la même valeur  $\theta = 0.5$ . Nous considérons que les durées de vie latentes  $T_{0e}$ ,  $T_{ed}$ ,  $e \in \{e_1, e_2\}$ , et  $T_{0d}$  suivent des lois de Weibull Wei  $(\lambda, \rho)$ , avec  $\lambda$  le paramètre d’échelle et  $\rho$  le paramètre de forme. Afin d’estimer les performances de nos estimateurs, nous introduisons trois variables de censure indépendantes  $C_0, C_1$  et  $C_2$ , supposées suivre des lois exponentielles Wei  $(\lambda, 1)$ . Ces variables sont associées aux durées de vie latentes émanant de  $a_0, e_1$  et  $e_2$ . Nous comparons les résultats obtenus dans deux scénarios : (1) un scénario de censure modérée et (2) un scénario de censure moyenne. Le Tableau 3.1 présente les paramètres sectionnés.

TABLE 3.1 – Paramètres de simulation pour les deux scénarios de censure.

Paramètres	$T_{0e_1}$	$T_{0e_2}$	$T_{0d}$	$C_0$	$T_{e_1d}$	$C_1$	$T_{e_2d}$	$C_2$
<i>Scénario de censure modérée</i>								
Échelle $\lambda$	25	15	40	35	2.5	10	5	15
Forme $\rho$	0.9	0.8	1.1	1	0.5	1	0.8	1
<i>Scénario de censure moyenne</i>								
Échelle $\lambda$	25	15	40	27	2.5	3	5	7
Forme $\rho$	0.9	0.8	1.1	1	0.5	1	0.8	1

Note : Ce tableau présente les paramètres utilisés pour l’analyse sur données simulées. Celle-ci s’appuie sur des lois de Weibull Wei  $(\lambda, \rho)$ . Deux scénarios avec différents niveaux de censure sont distingués.

Les proportions de données censurées pour le scénario (1) sont de 21 % pour  $S$  et de 34 %

pour  $T - S$ . Pour le scénario de censure moyenne, elles sont respectivement de 24 % et de 47 %. Pour chaque scénario, nous considérons trois échantillons de taille  $n = 200$ ,  $n = 400$  et  $n = 800$  que nous répliquons  $K = 1\,000$  fois.

Par la suite, nous nous focalisons sur l'estimation de  $\hat{p}_{0e}(s, t, 0)$  et  $\hat{p}_{ee}(s, t)$ . Nous nous plaçons pour cela aux dates  $s = 5$ ,  $s = 10$  et  $s = 15$ . La comparaison est donc effectuée par rapport à l'estimateur d'Aalen-Johansen de ces quantités, qui devrait être meilleur dans le cadre markovien. En nous appuyant sur Meira-Machado *et al.* (2006), les métriques retenues pour évaluer la performance de nos estimateurs sont la valeur absolue du biais, la variance et la moyenne des erreurs au carré. Elles sont évaluées ponctuellement mais aussi sous une forme agrégée, en intégrant sur l'intervalle  $[s, s + 50]$ <sup>4</sup>. Les Tableaux 3.2 et 3.3 fournissent les résultats obtenus pour les deux scénarios de censure.

La simulation montre pour  $\hat{p}_{e_1e_1}(s, t)$  et  $\hat{p}_{e_2e_2}(s, t)$  que nos estimateurs (NP) offrent de meilleures performances pour les deux scénarios de censure. Les Tableaux 3.2 et 3.3 illustrent clairement que l'estimateur d'Aalen-Johansen (AJ) est fortement biaisé dans ce cas de figure. Ce biais semble croître avec la taille de l'échantillon. Nous observons également une plus forte erreur quadratique pour les estimateurs AJ. Les bonnes performances des estimateurs NP, en termes de biais et d'erreur quadratique, sont cependant compensées par une plus forte variance. Il convient de noter que ce biais est plus faible pour des petites valeurs de  $s$ , ce qui est conforme aux spécifications retenues pour la copule (dépendance de queue à gauche). En moyenne, le temps passé dans l'état non-terminal  $e_1$  est plus long que pour l'état  $e_2$ , ce qui conduit à un biais plus important pour l'état  $e_2$  avec l'estimateur NP. Pour le scénario (2), la situation est différente entre  $e_1$  et  $e_2$  à la date  $s = 5$ , puisque les individus dans l'état  $e_1$  sont plus exposés à la censure. Pour les deux types d'estimateurs, le biais et la variance augmentent avec la valeur de  $s$  à cause de la diminution du nombre d'individus à risque.

Nous comparons ensuite les estimateurs NP et AJ pour  $\hat{p}_{0e_1}(s, t, 0)$  et  $\hat{p}_{0e_2}(s, t, 0)$ . Les résultats obtenus sont plus complexes à interpréter, puisque dans ce contexte, le biais dépend sensiblement des spécifications retenues pour les lois marginales, les scénarios de censure et l'intervalle de temps. La fonction copule joue également un rôle important, puisqu'elle détermine les régions pour lesquelles l'hypothèse de Markov est plus ou moins satisfaite. L'observation locale des biais (non présentée) permet d'identifier des zones particulières, pour lesquelles l'estimateur NP donne de meilleurs résultats, et d'autres où la situation opposée apparaît. Cette caractéristique est visible dans les Tableaux 3.2 et 3.3, alors qu'elle n'apparaissait pas dans les résultats de Meira-Machado *et al.* (2006), compte tenu d'une différence de méthode de simulation des données. Cette remarque concernant les résultats de ces auteurs est également également confirmée par les tests menés par Allignol *et al.* (2014) avec des estimateurs identiques, mais une méthode de simulation différente de la nôtre.

Puisque le temps moyen passé dans l'état  $a_0$  avant de basculer vers  $e_1$  est supérieur à celui dans  $e_2$ , l'hypothèse de dépendance considérée génère une plus forte sensibilité au temps passé dans l'état intermédiaire pour la probabilité de transition  $p_{0e_1}(s, t, 0)$ . Ceci permet d'expliquer pourquoi l'estimateur adapté au cas markovien produit de meilleurs résultats pour l'état  $e_2$ . Pour  $p_{0e_1}(s, t, 0)$ , l'estimateur AJ est fortement biaisé pour les faibles valeurs de  $s$  et de  $t - s$  ( $s \in \{5, 10\}$  et  $t \leq 20$ ). Ce biais demeure stable avec la taille de l'échantillon. Nos résultats indiquent de meilleures performances pour l'estimateur NP en termes de biais, en date  $s = 5$

4. Nous approximations les intégrales par une somme sur des intervalles de temps de taille égale à  $\Delta = 0,2$  unité de temps, c'est-à-dire que pour une fonction  $f$  correspondant à l'une de ces trois mesures, on a  $\int_s^{s+50} f(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=0}^{\frac{50}{\Delta}} f(s + \Delta k) \Delta$ .

TABLE 3.2 – Analyse de performance pour le scénario de censure modérée.

$n$	$s$	Estimateur	$p_{0c_1}(s, t, 0)$			$p_{0c_1}(s, t)$			$p_{0c_2}(s, t, 0)$			$p_{0c_2}(s, t)$		
			BIAS	VAR	MSE	BIAS	VAR	MSE	BIAS	VAR	MSE	BIAS	VAR	MSE
200	5	NP	0.2677	0.0292	0.0314	0.6066	0.7473	0.7559	0.1974	0.0708	0.0719	1.0558	0.4734	0.4986
		AJ	0.2107	0.0238	0.0250	12.5020	0.1686	4.7780	0.2025	0.0545	0.0557	13.0388	0.0823	4.6581
	10	NP	0.2400	0.0479	0.0495	1.6947	1.4419	1.5208	0.3353	0.1322	0.1353	2.4179	0.9449	1.0810
		AJ	0.4173	0.0562	0.0600	13.3934	0.4767	5.4007	0.3671	0.1225	0.1263	14.6820	0.1721	5.6497
	15	NP	0.2955	0.0846	0.0871	2.2481	2.7788	2.9194	0.4811	0.2538	0.2597	3.1900	1.8140	2.0565
		AJ	0.6290	0.1150	0.1240	13.0411	1.5824	6.0611	0.5685	0.2548	0.2649	15.6106	0.4091	6.3747
400	5	NP	0.1410	0.0150	0.0155	0.4132	0.3997	0.4036	0.0971	0.0391	0.0393	0.7755	0.2467	0.2595
		AJ	0.1157	0.0103	0.0110	12.6670	0.0759	4.8312	0.1268	0.0270	0.0275	13.0637	0.0383	4.6253
	10	NP	0.1769	0.0242	0.0250	1.7003	0.7829	0.8509	0.4501	0.0695	0.0747	2.3527	0.5160	0.6397
		AJ	0.1962	0.0244	0.0255	13.7911	0.1779	5.3736	0.2102	0.0595	0.0607	14.7317	0.0820	5.5742
	15	NP	0.2338	0.0401	0.0415	2.5634	1.3643	1.5265	0.6775	0.1209	0.1332	3.3957	0.9095	1.1744
		AJ	0.3331	0.0510	0.0537	14.5204	0.4781	5.9202	0.3074	0.1201	0.1231	15.8460	0.1699	6.2659
800	5	NP	0.0771	0.0082	0.0084	0.2412	0.2174	0.2188	0.1602	0.0202	0.0208	0.9523	0.1337	0.1536
		AJ	0.1250	0.0050	0.0057	12.7165	0.0378	4.8383	0.0907	0.0125	0.0128	13.1200	0.0181	4.6491
	10	NP	0.2097	0.0132	0.0144	1.6509	0.4465	0.5060	0.7095	0.0335	0.0452	2.5794	0.2817	0.4321
		AJ	0.1513	0.0114	0.0123	13.9589	0.0839	5.4243	0.1214	0.0273	0.0278	14.7700	0.0375	5.5601
	15	NP	0.3212	0.0207	0.0234	2.6677	0.7873	0.9486	1.0721	0.0545	0.0809	3.8228	0.5062	0.8399
		AJ	0.2075	0.0235	0.0249	14.9268	0.1820	5.9346	0.1559	0.0551	0.0558	15.9453	0.0779	6.2465

Note : Cette table contient les résultats sur données simulées concernant le biais (en valeur absolu) intégré (BIAS), la variance intégrée (VAR) et la moyenne des écarts au carré intégrée (MSE), avec nos estimateurs (NP) et l'estimateur d'Aalen-Johansen adapté au cas markovien (AJ). Nous comparons les résultats aux dates  $s = 5$ ,  $s = 10$  et  $s = 15$  pour des échantillons de taille  $n = 200$ ,  $n = 400$  et  $n = 800$ . Les résultats sont obtenus avec  $K = 1\ 000$  simulations.

TABLE 3.3 – Analyse de performance pour le scénario de censure moyenne.

$n$	$s$	Estimateur	$P_{ce1}(s, t, 0)$			$P_{ce1}(s, t)$			$P_{ce2}(s, t, 0)$			$P_{ce2}(s, t)$		
			BIAS	VAR	MSE	BIAS	VAR	MSE	BIAS	VAR	MSE	BIAS	VAR	MSE
200	5	NP	0.9159	0.0668	0.0887	1.914	1.2698	1.3744	0.4886	0.1229	0.1305	0.8676	0.7658	0.7836
		AJ	0.4688	0.0451	0.0521	12.9462	0.2773	5.3693	0.5384	0.0979	0.1073	13.0583	0.1052	4.7245
		NP	0.7760	0.1135	0.1308	2.1609	2.5397	2.6578	0.6324	0.2168	0.2267	2.9612	1.5380	1.7775
	10	AJ	0.9717	0.1197	0.1462	13.3084	1.1390	6.127	1.0419	0.2340	0.2678	14.3679	0.3248	5.6281
		NP	0.9537	0.2150	0.2421	3.1541	4.9698	5.2163	0.8754	0.3978	0.4167	3.9565	3.0569	3.5118
		AJ	1.6298	0.2595	0.3284	9.9289	4.5391	7.5448	1.7081	0.4857	0.5766	14.572	1.1424	6.5033
400	5	NP	0.6869	0.0380	0.0503	1.4312	0.7400	0.7953	0.2841	0.0675	0.0699	0.9746	0.4318	0.4546
		AJ	0.2855	0.0177	0.0197	13.192	0.0991	5.4109	0.2573	0.0446	0.0472	13.1923	0.0500	4.7607
		NP	0.4185	0.0576	0.0624	1.6965	1.4035	1.4806	0.6878	0.1133	0.1274	3.6053	0.8671	1.1742
	10	AJ	0.4284	0.0484	0.0547	14.6438	0.2995	6.3736	0.5511	0.1086	0.1197	14.7660	0.1252	5.6891
		NP	0.4635	0.0977	0.1037	2.8219	2.4924	2.7194	0.9460	0.1983	0.2250	5.0151	1.5387	2.1608
		AJ	0.8309	0.1140	0.1350	14.7602	1.0902	6.8767	0.9716	0.2321	0.2663	15.6127	0.35102	6.3629
800	5	NP	0.5821	0.0214	0.0296	1.2003	0.4007	0.4364	0.1554	0.0364	0.0371	0.8650	0.2357	0.2512
		AJ	0.2491	0.0075	0.0092	13.2184	0.0460	5.3865	0.1506	0.0213	0.0220	13.1564	0.0256	4.6949
		NP	0.2420	0.0275	0.0291	2.1227	0.7551	0.8598	0.9525	0.0519	0.0747	3.7492	0.4470	0.7607
	10	AJ	0.2786	0.0202	0.0223	14.7628	0.1348	6.3297	0.2993	0.0516	0.0545	14.8136	0.0595	5.6305
		NP	0.3710	0.0410	0.0449	4.0669	1.3465	1.7387	1.3976	0.0854	0.1343	5.6074	0.7752	1.4943
		AJ	0.4045	0.0485	0.0542	15.8200	0.3886	7.0898	0.5068	0.1112	0.1204	15.8090	0.1446	6.2374

Note : Cette table contient les résultats sur données simulées concernant le biais (en valeur absolue) intégré (BIAS), la variance intégrée (VAR) et la moyenne des écarts au carré intégrée (MSE), avec nos estimateurs (NP) et l'estimateur d'Aalen-Johansen adapté au cas markovien (AJ). Nous comparons les résultats aux données  $s = 5$ ,  $s = 10$  et  $s = 15$  pour des échantillons de taille  $n = 200$ ,  $n = 400$  et  $n = 800$ . Les résultats sont obtenus avec  $K = 1\ 000$  simulations.

pour  $e_1$ , mais ce gain décroît quand le taux de censure augmente. Il est, en particulier, assez faible pour  $e_2$ <sup>5</sup>. À l'inverse, l'estimateur NP est fortement biaisé lorsque  $t > 20$  et le biais augmente avec les valeurs de  $s$ . Cet effet est particulièrement prononcé pour  $T_{0e_2}$ , compte tenu des spécifications choisies pour la simulation et notamment la fonction copule. Les deux effets que nous venons de décrire jouent en sens inverse dans les résultats produits, en terme de biais. En fonction des périodes retenues, l'un des deux effets prend le pas sur l'autre : le premier effet décrit est dominant pour les faibles valeurs de  $s$  et de  $t$ , mais le second est plus fort ailleurs. Pour  $n = 400$  et  $n = 800$ , cela induit un biais plus faible pour l'estimateur AJ des probabilités associées à l'état  $e_2$ , alors que les deux estimateurs sont équivalents, sauf pour  $s = 5$ , avec  $e_1$ . S'agissant de la variance intégrée, nos résultats illustrent des niveaux équivalents dans les deux cas.

### 3.5 Application à des données d'assurance dépendance

En France, l'assurance dépendance propose une large gamme de garanties touchant à des aspects sociaux et à la santé. Ces garanties sont destinées aux personnes âgées souffrant d'une perte de mobilité ou d'autonomie, partielle ou totale, pour réaliser des actes de la vie quotidienne. Les prestations sont généralement proposées sous forme de rente et comprennent des périodes de carence, dont la durée peut dépendre de la pathologie responsable de l'entrée en dépendance. Le montant des engagements dépend de la trajectoire suivie par l'assuré durant la période de couverture, et du degré d'invalidité (cf. Plisson, 2009; Courbage et Roudaut, 2011). Cette section décrit dans un premier temps les données utilisées pour cette application, puis discute les résultats obtenus à partir de nos estimateurs non-paramétriques. L'incertitude sur les quantités estimées est mesurée *via* une techniques de *bootstrap* non-paramétrique.

#### 3.5.1 Description des données

Le jeu de données que nous analysons dans cette section provient d'un assureur français. Il s'agit des mêmes données que celles utilisées par Guibert et Planchet (2014) pour estimer des probabilités d'incidence en dépendance. Ces données ont également été étudiées par Tomas et Planchet (2013) pour la régularisation des taux de mortalité d'assurés lourdement dépendants, grâce à des méthodes de lissage non-paramétrique. Dans cette étude, les auteurs calculent des taux de décès mensuels (sans distinction par pathologie) qui présentent des différentes importantes, en fonction de la durée de maintien en dépendance et de l'âge des assurés. Leur travaux soulignent clairement le caractère non-markovien du processus décrivant la durée de vie de l'assuré à partir de l'entrée en dépendance<sup>6</sup>. Les données utilisées sont longitudinales, censurées à droite de manière indépendante (censure administrative principalement) et tronquées à gauche. En comparaison des études précédentes, nous considérons, dans cette application, les pathologies responsables de l'entrée en dépendance. La période d'observation s'étend du début de l'année 1998 à la fin de l'année 2010 et concerne la tranche d'âge 65-90 ans. Nous observons environ 210 000 contrats et 68 % des assurés sont censurés avant l'entrée en dépendance. Nous nous référons à Guibert et Planchet (2014) (ou au Chapitre 2) ainsi qu'à Tomas et Planchet (2013) pour la présentation détaillée des données. Quatre types de cause d'entrée

5. Nous obtenons de meilleurs résultats pour  $e_2$  lorsque  $s < 5$ .

6. À titre de complément, nous avons testé le non-respect de l'hypothèse de Markov par le biais d'un modèle de Cox semi-markovien, où la durée de présence, exprimée comme une covariable, était très significative.

en dépendance sont distinguées : les pathologies neurologiques  $e_1$  (taux de censure=40 %), les pathologies diverses  $e_2$  (taux de censure=36%), les cancers en phase terminale  $e_3$  (taux de censure=6%) et la démence  $e_4$  (taux de censure=45%). Nous considérons deux états terminaux, à savoir le décès  $d_1$  et l'annulation du contrat  $d_2$ . La structure du modèle multi-états finalement utilisée est représentée par la Figure 3.3. Nous ne considérons pas de covariable dans cette application.

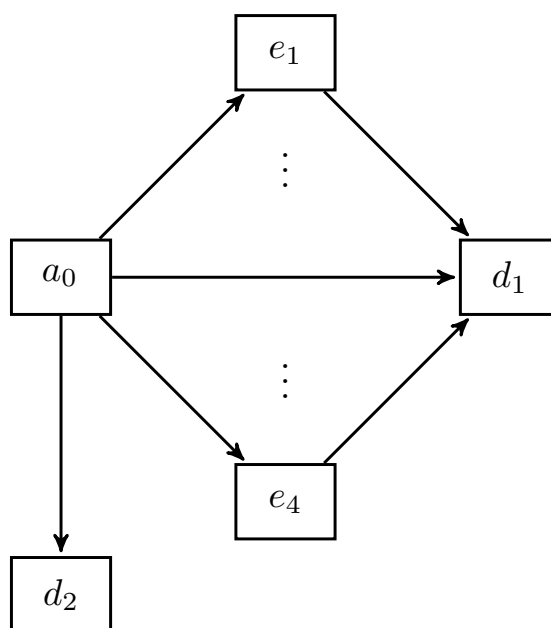


FIGURE 3.3 – Forme du modèle multi-états retenu pour les données d'assurance dépendance.

### 3.5.2 Probabilité de transition et mesure d'association estimées

Dans cette section, nous estimons les probabilités de transition (3.18) et (3.20). La Figure 3.4 décrit les probabilités annuelles d'entrée en dépendance entre les date  $s$  et  $s + 1$  an et d'y rester au moins un mois, pour chacune des causes. Cette figure représente également, pour comparaison, les taux d'incidence annuels dans chaque état de dépendance

$$q_{0e}(s, s + 1) = \mathbb{P}(S \leq s + 1, V_1 = e \mid S > s),$$

évalués à partir de l'estimateur d'Aalen-Johansen (cf. Guibert et Planchet, 2014, Section 4.2). Les intervalles de confiance asymptotiques à 95 % sont obtenus par *bootstrap* non-paramétrique à partir de 500 rééchantillonnages. Pour chaque pathologie, les probabilités de transition (3.18) sont globalement croissantes avec le temps. Nous observons que l'écart entre les taux d'incidence et les probabilités de transition s'accroît rapidement à partir de l'âge de 75 ans. Pour les cancers en phase terminale, le taux d'incidence à 80 ans est 3,7 fois supérieur au niveau atteint par la probabilité de transition estimée, ce qui traduit une mortalité très importante des assurés dans le premier mois suivant l'entrée en dépendance.

Nous présentons dans la Figure 3.5 la surface des taux de mortalité bruts, estimés à partir de notre modèle pour chaque pathologie *via*  $p_{ed}(s, s + 1, \eta, \eta + 1/12)$ . Ces taux sont présentés



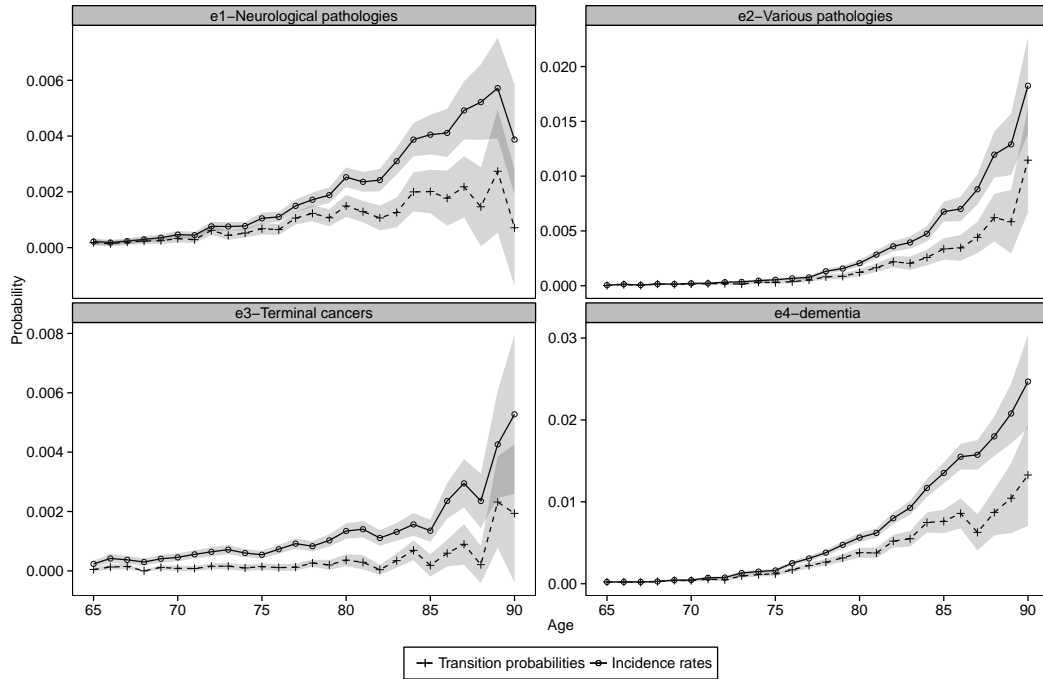


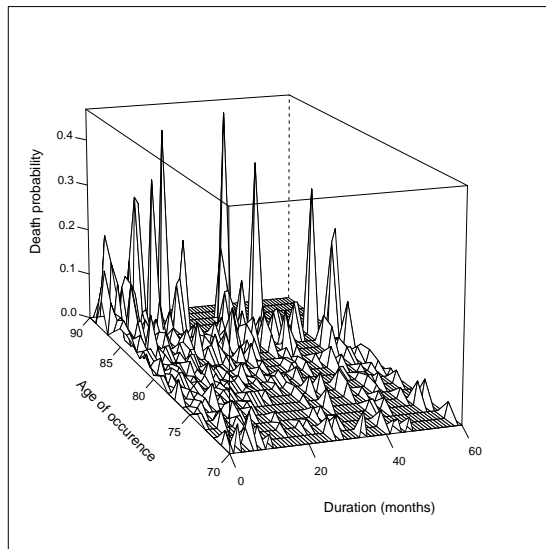
FIGURE 3.4 – Probabilités de transition estimées (pointillés) de l'état de bonne santé  $a_0$  vers un état de dépendance  $e_1, \dots, e_4$ , ainsi que les taux d'incidence en dépendance associés (trait plein). Les intervalles de confiance asymptotique à 95 % sont obtenus par *bootstrap* à partir de 500 rééchantillonnages.

en fonction de l'âge d'occurrence de la dépendance<sup>7</sup> et du temps de séjour dans chaque état. Nous nous limitons à la plage d'âge 70 – 90 ans et prenons 60 mois comme maximum pour la durée de présence. Au préalable, nous avons exclu pour cette figure les taux supérieurs à 0,5 qui sont clairement non robustes. Les taux de décès ne sont pas observés pour certaines régions à cause du faible nombre d'observations, en particulier pour des durées supérieures à 12 mois. Nous remarquons que la durée de vie résiduelle en dépendance est très différente selon les causes d'entrée, ce qui nécessite de les séparer pour correctement appréhender la survie des dépendants. En particulier, le modèle décrit des taux de mortalité extrêmes pour les assurés atteints de cancer pour les six mois suivant la survenance de la dépendance.

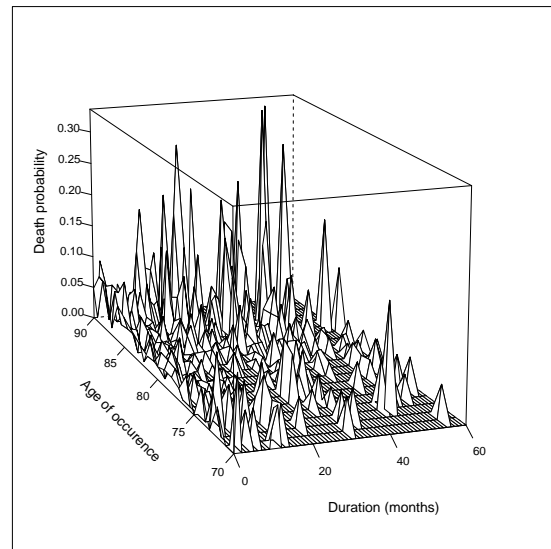
Nous mesurons à présent le lien entre la durée en bonne santé et la durée de vie totale à partir des *cross-odds ratios*. Nous évaluons  $\log(\hat{\pi}_{0n}^{(e,d)}(s, s+t))$ , ainsi que les intervalles de confiance à 95 % associés aux âges  $s = 70, 75, 80, 85$  et 90 ans et aux durées  $t = 1, 6, 12$  et 24 mois. Ces derniers sont obtenus au moyen de 500 échantillons *bootstrap*. Les résultats sont présentés dans le Tableau 3.4.

Pour chaque cause, la mesure d'association locale décroît en fonction de l'âge  $s$  et diminue légèrement en fonction de la durée de séjour à l'âge  $s$  fixé. Cela confirme l'impact de l'entrée dans un état non-terminal sur la durée de vie globale. Pour les cancers en phase terminale, nous signalons que l'association n'est pas disponible au delà de six mois à l'âge de 90 ans à cause du manque de données.

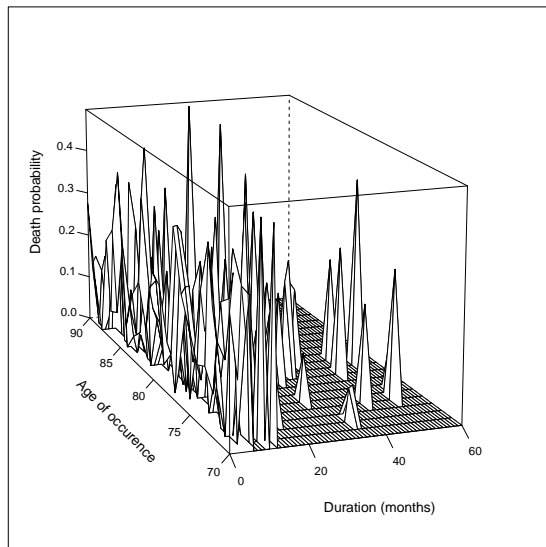
7. Âges entiers.



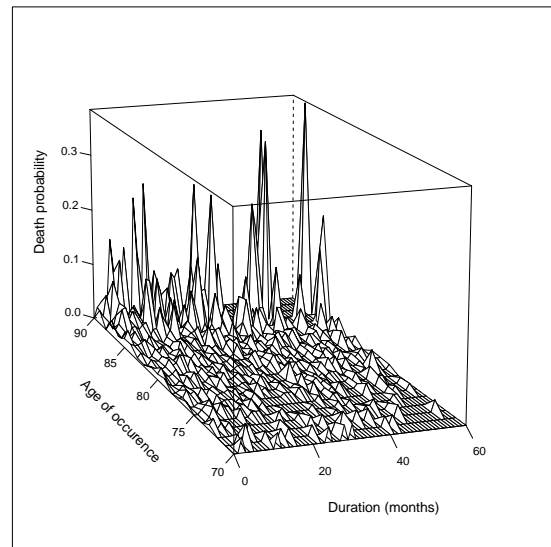
(a)  $e_1$ -Pathologies neurologiques.



(b)  $e_2$ -Pathologies diverses.



(c)  $e_3$ -Cancers en phase terminale.



(d)  $e_4$ -Démence.

FIGURE 3.5 – Surface des taux de décès mensuels estimés pour des assurés dépendants ((a) Pathologies neurologiques, (b) Pathologies diverses, (c) Cancers en phase terminale et (d) Démence).

TABLE 3.4 – Mesure d'association estimée.

$s$	1 mois	6 mois	12 mois	18 mois	24 mois
<i>e<sub>1</sub>-Pathologies neurologiques</i>					
70	3.302 (3.034, 3.569)	3.253 (2.98, 3.525)	3.201 (2.921, 3.481)	3.138 (2.853, 3.423)	3.06 (2.768, 3.352)
75	2.604 (2.417, 2.79)	2.543 (2.352, 2.733)	2.48 (2.287, 2.672)	2.403 (2.209, 2.596)	2.329 (2.13, 2.528)
80	1.892 (1.725, 2.059)	1.844 (1.676, 2.013)	1.761 (1.586, 1.935)	1.679 (1.501, 1.857)	1.61 (1.429, 1.791)
85	1.373 (1.18, 1.567)	1.348 (1.151, 1.544)	1.277 (1.07, 1.484)	1.223 (1.007, 1.439)	1.182 (0.961, 1.404)
90	0.959 (0.67, 1.248)	0.925 (0.617, 1.234)	0.944 (0.627, 1.26)	0.958 (0.575, 1.34)	0.889 (0.45, 1.328)
<i>e<sub>2</sub>-Pathologies diverses</i>					
70	5.15 (4.706, 5.594)	5.124 (4.686, 5.562)	5.06 (4.612, 5.509)	5.044 (4.589, 5.498)	4.974 (4.52, 5.428)
75	4.184 (3.939, 4.429)	4.09 (3.835, 4.345)	4.012 (3.752, 4.273)	3.898 (3.635, 4.161)	3.841 (3.574, 4.107)
80	3.27 (3.066, 3.474)	3.229 (3.023, 3.436)	3.135 (2.92, 3.349)	3.007 (2.787, 3.226)	2.914 (2.694, 3.134)
85	2.263 (2.057, 2.47)	2.217 (2.002, 2.431)	2.169 (1.944, 2.394)	2.149 (1.915, 2.383)	2.067 (1.823, 2.311)
90	1.621 (1.333, 1.909)	1.661 (1.343, 1.979)	1.694 (1.339, 2.048)	1.736 (1.328, 2.144)	1.706 (1.24, 2.172)
<i>e<sub>3</sub>-Cancers en phase terminale</i>					
70	3.846 (3.436, 4.257)	3.802 (3.384, 4.221)	3.761 (3.332, 4.189)	3.692 (3.266, 4.119)	3.637 (3.212, 4.062)
75	3.366 (3.065, 3.666)	3.388 (3.073, 3.703)	3.353 (3.035, 3.671)	3.303 (2.982, 3.625)	3.254 (2.931, 3.576)
80	3.004 (2.708, 3.3)	3.036 (2.722, 3.35)	3.026 (2.701, 3.352)	2.984 (2.642, 3.325)	2.915 (2.566, 3.264)
85	2.371 (2.059, 2.683)	2.39 (2.055, 2.725)	2.39 (2.029, 2.751)	2.366 (1.977, 2.755)	2.298 (1.894, 2.701)
90	1.652 (1.026, 2.277)	–	–	–	–
<i>e<sub>4</sub>-Démence</i>					
70	4.45 (4.226, 4.673)	4.469 (4.241, 4.698)	4.403 (4.165, 4.641)	4.282 (4.027, 4.537)	4.174 (3.907, 4.442)
75	3.396 (3.27, 3.522)	3.333 (3.199, 3.467)	3.258 (3.117, 3.4)	3.115 (2.969, 3.26)	2.994 (2.845, 3.142)
80	2.333 (2.233, 2.433)	2.272 (2.168, 2.376)	2.193 (2.082, 2.304)	2.102 (1.989, 2.214)	2.007 (1.889, 2.125)
85	1.487 (1.38, 1.594)	1.434 (1.323, 1.545)	1.379 (1.264, 1.493)	1.313 (1.192, 1.434)	1.234 (1.107, 1.36)
90	0.885 (0.737, 1.033)	0.876 (0.718, 1.034)	0.826 (0.651, 1.002)	0.775 (0.583, 0.968)	0.751 (0.53, 0.973)

Note : Ce tableau fournit la valeur estimée de la mesure d'association locale pour chaque cause d'entrée en dépendance,  $e_1, \dots, e_4$ , ainsi que l'intervalle de confiance à 95 % associé (entre parenthèses), calculé à partir de 500 rééchantillonnages. La mesure d'association locale est calculée pour les âges  $s = 70, 75, 80, 85$  et  $90$  ans et pour des durées  $t = 1, 6, 12$  et  $24$  mois.

### 3.6 Discussion

Ce chapitre se focalise sur des méthodes non-paramétriques en présence de censure indépendante pour analyser certains modèles multi-états acycliques, sans recourir à l'hypothèse de Markov. En s'appuyant sur une construction comprenant deux modèles à risques concurrents imbriqués, nous proposons un cadre d'inférence, en formulant les quantités d'intérêt comme des fonctionnelles sous une fonction de répartition jointe. Elles peuvent alors être estimées par le biais d'intégrales d'Aalen-Johansen, adaptées aux modèles à risques concurrents. Nous examinons les propriétés asymptotiques de ces estimateurs, en adoptant une logique proche de celle utilisée antérieurement pour obtenir des résultats théoriques sur les intégrales Kaplan-Meier en présence de covariables. Cela permet d'exhiber des estimateurs de plusieurs probabilités d'intérêt pour les actuaires, qui peuvent être ensuite utilisées pour mesurer l'adéquation d'un modèle (paramétrique) aux données. Par construction, notre spécification comprend deux modèles à risques concurrents, pour lesquels il est naturel de chercher à mesurer le lien de dépendance. La mesure d'association retenue, puis adaptée, s'inspire des travaux récents relatifs à l'analyse des modèles à risques concurrents bivariés.

L'analyse sur données simulées semble démontrer la pertinence de notre approche pour les probabilités de transition "classiques". En effet, nos estimateurs de (3.2) obtiennent de meilleures performances que l'estimateur d'Aalen-Johansen, lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas satisfaite. Ce gain en performance n'est parfois que local, ce qui peut rendre l'analyse des résultats assez complexe, puisqu'à l'inverse lorsque l'hypothèse de Markov est vérifiée, l'estimateur d'Aalen-Johansen est nettement plus performant. À titre d'illustration, nous appliquons ce cadre d'inférence à des données d'assurance dépendance, pour lesquelles il n'est pas raisonnable de s'appuyer sur l'hypothèse de Markov. Nous y testons une mesure d'association qui peut être utilisée pour étudier localement l'amplitude de la dépendance entre la durée en bonne santé et la durée de vie globale. Elle témoigne d'un niveau élevé d'association entre les deux durées de vie.

Plusieurs développements pourraient être envisagés. Tout d'abord, une extension intéressante de ce travail serait de développer des méthodes réduisant le biais de nos estimateurs, notamment pour des échantillons de taille modeste. Les travaux de Amorim *et al.* (2011) constituent une direction naturelle et semblent applicables assez directement à nos estimateurs, mais en l'absence de covariables. Il convient également de remarquer que de Uña-Álvarez et Meira-Machado (2015) ont récemment proposé des améliorations aux estimateurs de Meira-Machado *et al.* (2006) pour en accroître les performances. Nos estimateurs non-paramétriques sont applicables sans difficultés en présence de covariables discrètes, mais ne peuvent pas être utilisés en pratique avec des covariables continues ou bien lorsque le nombre de covariables est trop important. Une autre piste de réflexion pourrait être de proposer des modèles de régression semi-paramétriques adaptés à notre cas. Scheike et Sun (2012) ont par exemple développés une approche de ce type en spécifiant la forme de la mesure d'association. Il serait possible de s'en inspirer en exploitant la structure bivariée du modèle. Finalement, il conviendrait d'étudier plus largement la construction de tests d'adéquation à partir de nos estimateurs. Ceci nécessiterait notamment le calcul de valeurs critiques qui, lorsqu'elles sont obtenues avec les méthodes de *bootstrap* (Efron, 1979) que nous utilisons, sont critiquables en raison des perturbations induites par la censure.

## 3.7 Annexes

### 3.7.1 Démonstration du Théorème 1

Soit, pour  $i = 1, \dots, n$  et  $v \in \mathcal{V}$ ,  $D_i^{(v)} = (Y_i, \delta_i, J_i^{(v)}, \mathbf{U}_i)$  et pour chaque  $n \geq 0$ , la  $\sigma$ -algèbre

$$\mathcal{F}_n^{(v)} = \sigma \left( Z_{i:n}, D_{[i:n]}^{(v)}, 1 \leq i \leq n, Z_{n+1}, D_{n+1}^{(v)}, \dots \right),$$

où  $D_{[i:n]}^{(v)}$  est la valeur associée à  $Z_{i:n}$ .

Pour  $v \in \mathcal{V}$ ,  $\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi)$  est adaptée à  $\mathcal{F}_n^{(v)}$ .  $\mathcal{F}_n^{(v)}$  est décroissante et converge vers  $\mathcal{F}_\infty^{(v)} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_n^{(v)}$ . Notre stratégie suit celle de Stute et Wang (1993) et vise à démontrer que  $(\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi), \mathcal{F}_n^{(v)}, n \geq 0)$  est une sur-martingale renversée. Il s'agit ensuite d'appliquer les résultats de Neveu (1975, Proposition V-3-11, p. 116) pour obtenir la convergence presque sûre du processus. Dans le lemme suivant, nous considérons que  $\varphi$  est une fonction non-négative. Autrement, les résultats resteraient applicables en décomposant  $\varphi$  en parties positives et négatives.

**Lemme 1.** *Pour  $\varphi \geq 0$  et en supposant que la fonction de répartition de  $Z$  est continue,  $(\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi), \mathcal{F}_n^{(v)}, n \geq 0)$  est une sur-martingale renversée pour  $v \in \mathcal{V}$ .*

*Démonstration.* En notant  $\widehat{F}_n^{(v)}(z) = \sum_{i=1}^n \widetilde{W}_{in}^{(v)} \mathbb{1}_{\{Z_{i:n} \leq z\}}$  et  $\widehat{F}_n^{(v)}\{z\} = \widehat{F}_n^{(v)}(z) - \widehat{F}_n^{(v)}(z-)$ , nous remarquons que

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi(Y_{[i:n]}, Z_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}) \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{i:n}\}.$$

Si  $Z_{n+1}$  est de rang  $k$  avec  $1 \leq k \leq n+1$ , alors  $Z_{i:n} = Z_{i:n+1}$  pour tout  $i < k$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(Y_{[i:n]}, Z_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}) \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{i:n}\} &= \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(Y_{[i:n+1]}, Z_{i:n+1}, \mathbf{U}_{[i:n+1]}) \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{i:n+1}\}, \\ \sum_{i=k}^n \varphi(Y_{[i:n]}, Z_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}) \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{i:n}\} &= \sum_{i=k+1}^{n+1} \varphi(Y_{[i:n+1]}, Z_{i:n+1}, \mathbf{U}_{[i:n+1]}) \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{i:n+1}\}, \end{aligned}$$

et

$$\varphi(Y_{[k:n+1]}, Z_{k:n+1}, \mathbf{U}_{[k:n+1]}) \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{k:n+1}\} = 0.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(Y_{[i:n+1]}, Z_{i:n+1}, \mathbf{U}_{[i:n+1]}) \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{i:n+1}\}. \quad (3.24)$$

En suivant la même démarche que pour la preuve du Lemme 2.2 de Stute et Wang (1993) (cf. aussi Stute, 1993, Lemma 2.2), nous montrons qu'avec le Lemme 2.1 de Stute et Wang (1993) appliqué à  $D_{[i:n]}$

$$\mathbb{E} \left[ \widehat{F}_n^{(v)}\{Z_{i:n+1}\} \mid \mathcal{F}_{n+1}^{(v)} \right] = \widetilde{W}_{i,n+1}^{(v)}, \quad 1 \leq i \leq n$$

et

$$\mathbb{E} \left[ \widehat{F}_n^{(v)} \{Z_{n+1:n+1}\} \mid \mathcal{F}_{n+1}^{(v)} \right] \leq \widetilde{W}_{n+1,n+1}^{(v)}.$$

Puisque  $\varphi \geq 0$ , on obtient le résultat désiré en écrivant l'espérance conditionnelle de (3.24).  $\square$

À partir du Lemme 1, nous obtenons, en appliquant la Proposition V-3-11 de Neveu (1975) que

$$\mathbb{E} \left[ \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \mid \mathcal{F}_\infty^{(v)} \right],$$

admet une limite  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Grâce à la loi 0-1 de Hewitt-Savage,  $\mathcal{F}_\infty^{(v)}$  est trivial et il en résulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \mid \mathcal{F}_\infty^{(v)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \right] = S_\infty^{(v)}(\varphi).$$

À présent, notre objectif est de déterminer la valeur de  $S_\infty^{(v)}(\varphi)$ . Pour cela, nous écrivons

$$m(z) = \mathbb{P}(\delta = 1 \mid Z = z),$$

$$\Psi_n(z) = \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{1 - m(Z_{i:n})}{n - i + 1} \right)^{\mathbb{1}_{\{Z_{i:n} < z\}}},$$

et pour  $v \in \mathcal{V}$

$$\widetilde{\varphi}^{(v)}(z) = \mathbb{E} \left[ \varphi(Y, Z, \mathbf{U}) \delta J^{(v)} \mid Z = z \right].$$

**Lemme 2.** Avec les hypothèses du Lemme 1, nous avons pour  $v \in \mathcal{V}$

$$\mathbb{E} \left[ \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \right] = \mathbb{E} \left[ \widetilde{\varphi}^{(v)}(Z) \mathbb{E} [\Psi_{n-1}(Z)] \right].$$

*Démonstration.* Soit  $R_{jn}$  le rang de  $Z_j$  parmi  $Z_1, \dots, Z_n$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \widetilde{W}_{in}^{(v)} \varphi(Y_{[i:n]}, Z_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - i + 1} \mathbb{E} \left[ \varphi(Y_{[i:n]}, Z_{i:n}, \mathbf{U}_{[i:n]}) \delta_{[i:n]} J_{[i:n]}^{(v)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \prod_{j=1}^{i-1} \left( \frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{\delta_{[j:n]}} \mid Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n} \right) \right]. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.1 de Stute et Wang (1993) à  $D_i^{(v)}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , nous savons que, conditionnellement à  $Z_{1:n} < \dots < Z_{n:n}$ , les valeurs concomitantes de  $D$  sont indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\widetilde{\varphi}^{(v)}(Z_{i:n})}{n-i+1} \prod_{j=1}^{i-1} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{n-j}{n-j+1} \right)^{\delta_{[j:n]}} \mid Z_{j:n} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\widetilde{\varphi}^{(v)}(Z_{i:n})}{n-i+1} \prod_{j=1}^{i-1} \left( 1 - \frac{m(Z_{j:n})}{n-j+1} \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\widetilde{\varphi}^{(v)}(Z_{i:n})}{n} \prod_{j=1}^{i-1} \left( 1 + \frac{1-m(Z_{j:n})}{n-j} \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\widetilde{\varphi}^{(v)}(Z_i)}{n} \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{1-m(Z_j)}{n-R_{jn}} \right)^{\mathbb{1}_{\{Z_j < Z_i\}}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \widetilde{\varphi}^{(v)}(Z_1) \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{1-m(Z_j)}{n-R_{jn}} \right)^{\mathbb{1}_{\{Z_j < Z_1\}}} \right]. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Si  $Z_j < Z_1$  alors  $R_{jn} = R_{j,n-1}$ . En conditionnant par  $Z_1$ , le résultat attendu suit facilement.  $\square$

Une preuve similaire est construite dans Stute et Wang (1993)[Lemma 2.4] et réutilise les résultats de Stute (1994). À présent, nous sommes en capacité de prouver le Théorème 1 en étudiant le processus  $\Psi_n(z)$ .

*Preuve du Théorème 1.* À partir des résultats de Stute et Wang (1993)[Lemma 2.5 et Lemma 2.6] et en supposant que  $G$  et la fonction de répartition  $F$  sont continues, pour chaque  $z < \tau_Z$ , nous avons

$$\mathbb{E}[\Psi_n(z)] \uparrow \frac{1}{1-G(z)}. \tag{3.26}$$

Par conséquent, sous l'Hypothèse 2 et  $\varphi \geq 0$ , nous obtenons en appliquant le Lemme 2, l'Équation (3.26) et le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}
S_\infty^{(v)}(\varphi) &= \int \mathbb{1}_{\{Z < \tau_Z\}} \frac{\widetilde{\varphi}^{(v)}(Z)}{1-G(Z)} d\mathbb{P} \\
&= \int \mathbb{1}_{\{Z < \tau_Z\}} \mathbb{E} \left[ \varphi(Y, Z, \mathbf{U}) \delta J^{(v)} \mid Z \right] \frac{1}{1-G(Z)} d\mathbb{P} \\
&= \int \varphi(S, T, \mathbf{U}) \frac{\mathbb{1}_{\{T < \tau_Z\}} \delta J^{(v)}}{1-G(T)} d\mathbb{P} \\
&= \int \varphi(S, T, \mathbf{U}) \frac{\mathbb{1}_{\{T < \tau_Z\}} J^{(v)}}{1-G(T)} \mathbb{P}(T \leq C \mid S, V, T, \mathbf{U}) d\mathbb{P} \\
&= \int \varphi(S, T, \mathbf{U}) \frac{\mathbb{1}_{\{T < \tau_Z\}} J^{(v)}}{1-G(T)} \mathbb{P}(T \leq C \mid V, T) d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Puisque  $C$  et  $(V, T)$  sont indépendants (cf. Hypothèse 1), nous remarquons que  $\mathbb{P}(T \leq C \mid V, T) = 1 - G(T)$ . Par conséquent, on a

$$S_\infty^{(v)}(\varphi) = \int \mathbb{1}_{\{t < \tau_Z\}} \varphi(s, t, \mathbf{u}) F_0^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}). \quad (3.27)$$

Comme indiqué plus tôt, si  $F^{(v)}$  est continue, la preuve est résolue à partir du Lemme 1, l'Équation (3.27) et la Proposition V-3-11 de Neveu (1975).  $\square$

### 3.7.2 Preuve du Théorème 2

Ici, nous notons

$$\begin{aligned} \widehat{M}_n(z) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i \leq z\}}, \\ \widehat{M}_{0n}(z) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i \leq z, \delta_i = 0\}}, \\ \widehat{M}_n^{(v)}(y, z, \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y, Z_i \leq z, \mathbf{U}_i \leq \mathbf{u}, \delta_i = 1, V_i = v\}}, \end{aligned}$$

les distributions empiriques de  $M$ ,  $M_0$  et  $M_0^{(v)}$ . En s'appuyant sur la démarque suivie par les preuves de Stute (1995), notre stratégie s'effectue en 2 étapes : prouver le théorème centrale limite quand  $\varphi$  s'annule à droite pour un certain temps  $\nu < \tau_Z$  et ensuite l'étendre sur  $[0, \tau_Z]$ . Remarquons que Suzukawa (2002) suivent également la même stratégie.

**Lemme 3.** *Nous avons pour  $v \in \mathcal{V}$*

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \exp \left\{ n \int_0^{Z_i^-} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{n(1 - \widehat{M}_n(\tau))} \right\} \widehat{M}_{0n}(d\tau) \right\} \quad (3.28)$$

*Démonstration.* Avec le même résultat que celui suivi pour obtenir (3.25), nous trouvons

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{1 - \delta_j}{n - R_{jn}} \right)^{\mathbb{1}_{\{Z_j < Z_i\}}}.$$

Le résultat suit immédiatement par définition de  $\widehat{M}_n(z)$  et  $\widehat{M}_{0n}(z)$ , cf. la preuve du Lemme 2.1 de Stute (1995).  $\square$

Le terme exponentiel dans (3.28) s'écrit, comme pour Stute (1995), tel que

$$\exp \{ \dots \} = \frac{1}{1 - G(Z_i)} (1 + B_{in} + C_{in}) + \frac{1}{2} \exp \{ \Delta_i \} (B_{in} + C_{in})^2, \quad (3.29)$$

où

$$B_{in} = n \int_0^{Z_i^-} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{n(1 - \widehat{M}_n(\tau))} \right\} \widehat{M}_{0n}(d\tau) - \int_0^{Z_i^-} \frac{\widehat{M}_{0n}(d\tau)}{1 - \widehat{M}_n(\tau)},$$



$$C_{in} = \int_0^{Z_i^-} \frac{\widehat{M}_{0n}(d\tau)}{1 - \widehat{M}_n(\tau)} - \int_0^{Z_i^-} \frac{M_0(d\tau)}{1 - M(\tau)},$$

et  $\Delta$  est entre les deux termes

$$n \int_0^{Z_i^-} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{n(1 - \widehat{M}_n(\tau))} \right\} \widehat{M}_{0n}(d\tau) \text{ et } \int_0^{Z_i^-} \frac{M_0(d\tau)}{1 - M(\tau)}.$$

En considérant (3.28) et (3.29), nous écrivons

$$\begin{aligned} \widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \frac{1 + B_{in} + C_{in}}{1 - G(Z_i)} \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \exp\{\Delta_i\} (B_{in} + C_{in})^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

À présent, nous décomposons la dernière partie de l'équation et approximos chaque composante. Pour cela, nous appliquons l'hypothèse suivante pour  $\varphi$

**Hypothèse 5.**  $\varphi$  est une  $F_0$ -intégrable telle que  $\int \varphi^2 dF_0 < \infty$  et  $\varphi(s, t, \mathbf{u}) = 0$  pour  $\nu < t$  où  $\nu < \tau_Z$ .

Cette hypothèse vise à borner le dénominateur des termes obtenus dans les lemmes suivants.

**Lemme 4.** *Sous l'Hypothèse 5, nous avons*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \frac{C_{in}}{1 - G(Z_i)} \\ &= - \iiint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t, \tau < \omega\}}}{(1 - G(t))(1 - M(\tau))^2} \widehat{M}_n(d\omega) M_0(d\tau) M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \\ &+ \iint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}}{(1 - G(t))(1 - M(\tau))} \widehat{M}_{0n}(d\tau) M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) + R_n^{(v)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $|R_n^{(v)}| = O(n^{-1} \ln n)$  presque sûrement.

*Démonstration.* En utilisant la décomposition suivante pour  $z < Z_{n:n}$  dans  $C_{in}$ ,

$$\frac{1}{1 - \widehat{M}_n(z)} = -\frac{1 - \widehat{M}_n(z)}{(1 - M(z))^2} + \frac{2}{1 - M(z)} + \frac{(\widehat{M}_n(z) - M(z))^2}{(1 - M(z))^2 (1 - \widehat{M}_n(z))},$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \frac{C_{in}}{1 - G(Z_i)} \\ &= - \iiint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t, \tau < \omega\}}}{(1 - G(t))(1 - M(\tau))^2} \widehat{M}_n(d\omega) \widehat{M}_{0n}(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \\ &+ 2 \iint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}}{(1 - G(t))(1 - M(\tau))} \widehat{M}_{0n}(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \\ &- \iint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}}{(1 - G(t))(1 - M(\tau))} M_0(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) + R_{n1}^{(v)}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où

$$R_{n1}^{(v)} = \iint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}}{(1 - G(t))} \frac{(\widehat{M}_n(t) - M(t))^2}{(1 - M(t))^2 (1 - \widehat{M}_n(t))} \widehat{M}_{0n}(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}).$$

Sous l'Hypothèse 5 et avec le même argument que Stute (1995, Lemma 2.5), c'est-à-dire en utilisant la loi du logarithme itéré pour les processus empiriques et la loi forte des grands nombres (LFGN), nous obtenons  $|R_{n1}^{(v)}| = O(n^{-1} \ln n)$  presque sûrement. Pour le reste de la preuve, nous pouvons décomposer les autres termes dans l'Équation (3.32) comme une U-statistique plus un reste négligeable. Formellement, nous avons

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t, \tau < \omega\}}}{(1 - G(t)) (1 - M(\tau))^2} \widehat{M}_n(d\omega) \widehat{M}_{0n}(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \\ &= \iiint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t, \tau < \omega\}}}{(1 - G(t)) (1 - M(\tau))^2} \\ & \quad \times \left[ \widehat{M}_n(d\omega) M_0(d\tau) M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) + M(d\omega) \widehat{M}_{0n}(d\tau) M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \right. \\ & \quad \left. - 2M(d\omega) M_0(d\tau) M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) + M(d\omega) M_0(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \right] \\ & + R_{n2}^{(v)}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

et

$$\begin{aligned} & \iint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}}{(1 - G(t)) (1 - M(\tau))} \widehat{M}_{0n}(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \\ &= \iint \frac{\varphi(s, t, \mathbf{u}) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}}{(1 - G(t)) (1 - M(\tau))} \\ & \quad \times \left[ \widehat{M}_{0n}(d\tau) M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) - M_0(d\tau) M^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) + M_0(d\tau) \widehat{M}_n^{(v)}(ds, dt, d\mathbf{u}) \right] \\ & + R_{n3}^{(v)}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

où  $|R_{n2}^{(v)}| = O(n^{-1} \ln n)$  et  $|R_{n3}^{(v)}| = O(n^{-1} \ln n)$  presque partout. Nous nous référons à des arguments similaires que pour les Lemmes 2.3 et 2.4 de Stute (1995) pour obtenir les deux représentations fondées sur la projection de Hajek pour une V-statistique pour des données multivariées  $(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i, \delta_i, J_i^{(v)})$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Finalement, la preuve de (3.31) suit en substituant (3.33) et (3.34) dans (3.32).  $\square$

À présent, nous examinons les autres termes dans (3.30) dans le lemme suivant.

**Lemme 5.** *Sous l'Hypothèse 5, nous obtenons presque sûrement*

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \frac{B_{in}}{1 - G(Z_i)} \right| = O(n^{-1}), \tag{3.35}$$

et

$$\frac{1}{2n} \left| \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)} \exp\{\Delta_i\} (B_{in} + C_{in})^2 \right| = O(n^{-1} \ln n). \tag{3.36}$$

*Démonstration.* La preuve est immédiate en appliquant les preuves des Lemmes 2.6 et 2.7 de Stute (1995).  $\square$

*Proof of Theorem 2.* Avec les Lemmes 4 et 5, l'Équation (3.30) devient

$$\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(Y_i, Z_i, \mathbf{U}_i) \delta_i J_i^{(v)}}{1 - G(Z_i)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_1^{(v)}(Z_i) (1 - \delta_i) - \lambda_2^{(v)}(Z_i) \right] + R_{n4}^{(v)} \quad (3.37)$$

où  $|R_{n4}^{(v)}| = O(n^{-1} \ln n)$  presque sûrement. En conséquence, le processus  $\widehat{S}_n^{(v)}(\varphi)$ ,  $v \in \mathcal{V}$ , suit un théorème central limite et le Théorème 2 suit sous les Hypothèses 5.

Finalement, les résultats du Théorème 2 peut être étendus sur  $]\nu, \tau_Z]$  en suivant des arguments similaires à ceux de utilisés dans la preuve du Théorème 1.1 de Stute (1995), sous l'Hypothèse 3 et 4.  $\square$



## Chapitre 4

# Influence des facteurs économiques sur l'évolution de la qualité de crédit et le nombre de défauts en assurance crédit

Ce chapitre s'intéresse à l'utilisation de modèles multi-états pour l'estimation, puis la projection du nombre de défauts et de changements de *ratings* en assurance crédit. Comme pour les banques, les assureurs crédit s'appuient sur une évaluation de la qualité des firmes qu'ils assurent, pour la gestion de leurs risques, et établissent des matrices de changement de *ratings*, ne prenant pas en compte les effets ponctuels produits par les variations de l'environnement économique. Notre approche met en œuvre un modèle stochastique pour la projection de ces matrices, utilisables par groupe homogène de firmes assurées, en les faisant dépendre de variables macro-économiques observables, *via* un modèle de régression ordonné. Elle s'appuie pour cela sur des données individuelles d'un assureur crédit français, observées en temps discret en présence de censure. Une des caractéristiques importante de cette activité d'assurance réside dans la capacité unilatérale qu'a l'assureur de réduire ou d'annuler les garanties souscrites, lorsque le risque évolue. Une analyse fine des entreprises assurées est alors nécessaire. Ainsi, l'objectif est permettre l'ajustement de la qualité du portefeuille en fonction des changements de l'environnement économique. Nous considérons ces actions de gestion et analysons comment elles permettent d'absorber des chocs issus de *stress tests*. Ce type de réflexion est en effet particulièrement utile dans le cadre de l'ORSA (*Own Risk Solvency Assessment*) puisqu'elle permet de mieux appréhender la pertinence de ces actions en cas de chocs adverses sur l'économie.

Ce chapitre s'appuie sur l'article de Guibert *et al.* (2015), coécrit avec Frédéric Planchet et Anisa Caja. Il est soumis à l'*European Actuarial Journal*.

## 4.1 Introduction

Les entreprises commerciales recourent à l'assurance crédit lorsqu'elles émettent des doutes sur la capacité d'un client, appelé dans la suite *buyer*, à régler ses factures à temps (*protracted default*) ou bien pour se protéger de son insolvabilité (*solvency default*) à court terme. Elles souscrivent alors une police d'assurance garantissant le remboursement partiel des sommes dues, si le client n'est pas en capacité d'honorer ses dettes.

Les assureurs crédit disposent d'une large marge de manœuvre pour piloter les risques au sein du portefeuille d'assurés. En effet, ils sont en capacité de réduire ou d'annuler les garanties offertes, à n'importe quel moment, si le risque de crédit assuré vient à évoluer. Celui-ci est peut être notamment relié à l'évolution des cycles économiques (Caja et Planchet, 2014). Ainsi, les assureurs doivent être en mesure de suivre avec attention les entreprises qui pourraient se fragiliser et voir augmenter leur probabilité de défaut. Pour cela, ils déploient en interne des systèmes de notation évaluant la qualité de crédit des firmes assurées, à l'instar des banques pour la gestion des risques de crédit sous Bâle II. En pratique, ces systèmes attribuent une note, appelée *rating*, sur une base mensuelle aux *buyers*, ce qui fournit une image régulière du risque de crédit supporté.

Dans ce chapitre, nous développons un modèle à forme réduite, visant à évaluer les effets dans le temps de facteurs de risque macroéconomiques sur la qualité de crédit du portefeuille. Ceci permet d'en déduire une réponse en termes de gestion des risques. Notre analyse s'appuie sur un jeu de données issu des systèmes de gestion d'un assureur crédit français. La littérature académique consacrée à l'analyse et à la gestion des risques en assurance crédit est extrêmement rare et les quelques travaux, à notre connaissance, ayant discuté de ces aspects sont ceux de Passalacqua (2006, 2007). Cet auteur examine des problématiques de tarification et projette la perte en cas de défaut d'un portefeuille d'assurance crédit. Ses développements ignorent cependant la dynamique suivie par les *ratings*. Ainsi, une première contribution du présent travail réside simplement dans l'analyse du lien entre des facteurs macroéconomiques et les risques couverts en assurance crédit. En pratique, il semble que les assureurs recourent à des modèles de crédit classiques sous forme structurelle, comme par exemple le modèle de Merton (Merton, 1974) ou bien le modèle KMV. L'hétérogénéité au sein du portefeuille est généralement appréhendée par le biais d'indicateurs bilantiels, qui permettent de déterminer la probabilité de défaut de chaque firme. La dépendance au sein du portefeuille est ensuite spécifiée au moyen d'une matrice de corrélation. Récemment, Caja et Planchet (2014) ont étendu ce type d'approche et ont cherché à capturer l'effet des cycles de crédit, en formalisant deux matrices de transition constantes, l'une relative à un régime haut et l'autre à un régime bas. Cependant, sa mise en œuvre requiert un calibrage initial et une identification à dire d'expert des périodes de cycles haut et bas, difficilement justifiable.

Dans ce chapitre, nous présentons, en temps discret, un modèle s'appuyant sur une chaîne de Markov doublement stochastique, décrivant l'évolution des taux de défaut et des matrices de transition, aussi appelées matrices de migration stochastiques (Gagliardini et Gouriéroux, 2005), en fonction de variables macroéconomiques. Ce type de spécification est couramment utilisé pour les modèles de crédit des banques, lorsqu'il s'agit de fournir la dynamique des taux de défaut (p. ex. Duffie *et al.*, 2007). Notre approche permet de projeter le nombre d'améliorations (*upgrades*) ou de dégradations (*downgrades*) des *ratings*, ainsi que le nombre de défauts, en réponse aux évolutions de la conjoncture. Dans la pratique, elle permet de projeter, puis de choquer la distribution du nombre de défauts sur plusieurs périodes, en faisant intervenir les actions du management qui se fondent sur la qualité de crédit des firmes assurées.

Elle offre, entre autres, aux assureurs des outils permettant de se positionner par rapport aux exigences du dispositif prudentiel Solvabilité II (Parlement Européen et Conseil de l'Union Européenne, 2009), qui demande la mise en œuvre d'une politique personnalisée de gestion et d'évaluation des risques au travers de l'ORSA (*Own Risk Solvency Assessment*)<sup>1</sup>. De plus, notre modèle donne des estimations qui peuvent être ensuite utilisées pour comparaison avec les résultats du modèle dédié à l'évaluation de la charge en capital (formule standard ou modèle interne).

Avec la mise en œuvre des accords de Bâle II, la littérature bancaire consacrée à l'évaluation du risque de crédit des obligations d'entreprises et souveraines s'est considérablement développée pour mesurer, notamment, les effets des changements de l'environnement économique sur les taux de défaut et les matrices de transition. Depuis les travaux de Nickell *et al.* (2000) et de Bangia *et al.* (2002) sur le lien entre les changements de *ratings* et les cycles économiques (caractérisés notamment chez ces auteurs par l'indice américain NBER ou la croissance du produit intérieur brut), un nombre considérable d'études a été mené pour préciser ce lien (cf. Hu *et al.*, 2002; Chava et Jarrow, 2004; Couderc et Renault, 2005; Duffie *et al.*, 2007; Koopman *et al.*, 2009, 2011; Figlewski *et al.*, 2012; Fei *et al.*, 2012). Un résultat récurrent dans cette littérature est que les nombres de défauts et de dégradations des notations augmentent en période de récession économique. Les modèles employés s'appuient sur des facteurs macroéconomiques observables pour refléter la situation économique locale ou internationale. Plus récemment pour les obligations d'entreprises, les économètres ont considéré des modèles à facteurs latents dans l'optique d'accroître la précision de la prédiction. Parmi ces approches, Koopman *et al.* (2008) et Koopman *et al.* (2009) ont introduit, en temps continu, des modèles de migration, prenant en compte des facteurs observables et des facteurs non-observables. Dans le même temps, Duffie *et al.* (2009) se sont focalisés sur les intensités de défaut, à partir d'un modèle s'appuyant sur des fragilités dynamiques, des facteurs financiers et des covariables individuelles. Ces derniers travaux visent à proposer une projection individualisée des intensités de défaut. Chava *et al.* (2011) fournissent un cadre plus complet en modélisant conjointement les taux de défaut et les taux de recouvrement en cas de défaut, à partir de plusieurs variables de fragilité, dont l'objet est de capturer des effets latents propres à plusieurs secteurs de l'industrie. Wendin et McNeil (2006), McNeil et Wendin (2007) et Stefanescu *et al.* (2009) ont également développé des approches intégrant une part inobservée du cycle économique et estiment leur modèle par le biais de techniques bayésiennes. Celles-ci sont développées en temps discret et présentent l'avantage de fournir des intervalles de prédiction pour les probabilités projetées. Azizpour *et al.* (2014) discutent des différentes sources de défaut pour des obligations d'entreprises et incluent des effets de contagion (auto-excitation). Creal *et al.* (2014) proposent un cadre relativement flexible modélisant à la fois les transitions, les défauts et les taux de recouvrement, en utilisant des variables observables et des fragilités dynamiques pour le calcul de la distribution des pertes.

---

1. Conformément à l'article 45 de la Directive Solvabilité II, l'ORSA est une composante fondamentale de la politique interne de gestion des risques d'un assureur, permettant de considérer ses risques propres, ses propres limites de risque, ses propres tolérances aux risques ainsi que sa stratégie d'ensemble. Ce système permet de vérifier le respect permanent des engagements réglementaires sous Solvabilité II et vise à contrôler la pertinence de la règle retenue pour l'évaluation du capital (Guibert *et al.*, 2014). Les *stress tests* constituent une composante essentielle de l'ORSA, puisqu'ils permettent à l'assureur d'explorer des scénarios adverses, d'en mesurer les effets et de définir des réponses adaptées. Cette procédure s'appuie sur des données historiques et la cohérence de ces scénarios doit, si possible, être étudiée. Les instances dirigeantes et le superviseur doivent être en mesure de discuter de la pertinence des scénarios et de leur capacité à évaluer l'ensemble des vulnérabilités de l'assureur.

Ces exemples d'économétrie financière prennent en compte des effets complexes (p. ex. la contagion entre industries, des caractéristiques inobservées, des indicateurs économiques plus ou moins fins), observés sur de longues périodes, avec des jeux de données d'obligations d'entreprises issus de grandes banques ou d'agences de notation. Les données des assureurs crédit sont différentes, puisque leur portefeuille est relativement diversifié, avec à la fois des entreprises de petite taille, de taille moyenne<sup>2</sup> et des grandes firmes, issues de différentes industries. Leurs caractéristiques sont moins connues d'un point de vue académique. Pour ces raisons, spécifier un modèle sophistiqué en première approche n'est pas nécessairement recommandé, tant que ces données ne sont pas mieux connues. Plusieurs points sont en effet singuliers. Notamment, notons que les garanties d'assurance crédit distinguent deux types de défauts. Le défaut *protracted* est atypique. Bien qu'il déclenche des paiements pour l'assureur, il ne s'agit pas d'un état terminal, mais d'une situation ponctuelle dans laquelle l'hypothèse de Markov d'ordre 1 n'est pas satisfaite. Cet état comprend un effet de *momentum*, c'est-à-dire que le défaut *protracted* s'inscrit dans une tendance où la firme se dégrade progressivement. Ce type d'analyse est rarement entrepris dans la littérature sur le risque de crédit, comme le remarquent Malik et Thomas (2012). Par ailleurs, nous observons un effet de sélection induit par la résiliation de contrats de la part de l'assureur. Celui-ci n'est pas neutre et vise à réduire le risque du portefeuille. Après cette sélection, il apparaît que les taux de défaut observés sont peu sensibles à l'environnement économique, même pendant la crise financière de 2008-2009. Par contre, des effets importants apparaissent concernant les changements de *rating*.

Nos résultats empiriques se fondent sur un modèle de migration, estimé à partir d'un modèle à fonction de lien cumulée (*cumulative link model*)<sup>3</sup> qui est plus approprié qu'un simple modèle multinomial en temps discret pour prendre en compte la relation d'ordre en *ratings*. Puisqu'une majorité de *buyers* dans nos données ne sont pas cotés, il n'est pas possible d'utiliser une approche s'appuyant sur des prix d'action. En termes de mise en œuvre, un avantage de notre spécification est de s'appuyer uniquement sur des facteurs observables. Par conséquent, l'inférence statistique du modèle reste simple, car elle s'obtient par maximum de vraisemblance, le processus décrivant les *ratings* étant supposé ne pas prédire les facteurs de risques systématiques. Cela permet de traiter séparément la partie dédiée aux facteurs de risque et celle consacrée aux probabilités de transition. De ce point de vue, notre méthodologie est plus abordable que les techniques d'inférence bayésiennes ou les techniques appliquées pour les modèles espace-état, qui sont utilisées lorsque des dynamiques latentes sont choisies. Par la suite, les probabilités de transition ne peuvent être obtenues par des formules fermées et requièrent des techniques de simulation Monte-Carlo.

S'agissant des facteurs de risque, notre spécification s'appuie sur un simple processus autorégressif multivarié (VAR), permettant de prédire le score de crédit qui intervient dans le calcul des probabilités de transition. Contrairement à Pesaran *et al.* (2004) et Pesaran *et al.* (2006)<sup>4</sup> qui utilisent des modèles VAR globaux, comprenant des équilibres macroéconomiques à l'échelle internationale, nous nous limitons dans ce travail aux variables qui sont le plus statistiquement significatives pour nos observations. En effet, l'étude générale des équilibres

---

2. Une autre base de donnée, provenant également d'un assureur crédit français, est analysée par Dietsch et Petey (2002) et Dietsch et Petey (2004). Elle montre, par exemple, que les petites et moyennes entreprises ont une corrélation au moment du défaut significativement différente de celle utilisée dans les formules retenues pour Bâle II, qui sont calibrées sur de grandes firmes.

3. Aussi appelé modèle de régression ordinal (McCullagh, 1980; Agresti, 2002).

4. Ce type de modèle constitue un exemple typique des approches de *stress tests* développées par les banques centrales ou les autorités de supervision nationales (Foglia, 2008).



macroéconomiques (domestiques et étrangers) qui peuvent intervenir dans ce type de modèle est largement en dehors du cadre de ce chapitre. Nous transformons par la suite le modèle VAR en un modèle à correction d'erreur (*vector error-correcting model* ou VECM) pour prendre en compte certaines interactions de long terme. Cette modélisation permet alors de disposer d'un générateur de scénarios économiques, utile pour l'étude et la gestion des risques.

Ce chapitre est structuré de la manière suivante. Dans la Section 4.2, nous présentons les principales caractéristiques de l'assurance crédit. La Section 4.3 expose le processus décrivant les *ratings* individuels. Nous spécifions à la fois le modèle de séries temporelles VAR, pour les facteurs de risques systématiques, et leurs liens avec le nombre de transitions et de défauts. Dans la Section 4.4, nous décrivons les données utilisées dans notre application numérique. Les résultats empiriques pour le modèle de migration et le modèle VAR sont discutés dans la Section 4.5. Nous analysons ensuite les effets pour la gestion des risques dans la Section 4.6. Finalement, la Section 4.7 conclut le chapitre et présente des pistes d'amélioration.

## 4.2 Présentation de l'assurance crédit

Cet section donne un bref aperçu du fonctionnement des contrats d'assurance crédit et explique l'importance des matrices de migration pour la gestion des risques. Nous nous référons à Caja (2014) pour une présentation plus générale. La relation contractuelle implique deux parties, à savoir le souscripteur du contrat et l'assureur. Une troisième partie, le client du souscripteur, intervient dans cette relation comme source de risque. Elle est communément appelée le *buyer*. Les garanties d'assurance crédit offrent aux entreprises commerciales (le souscripteur) une protection contre le risque d'impayés de leurs clients (les *buyers*). La Figure 4.1 illustre ce mécanisme d'assurance.

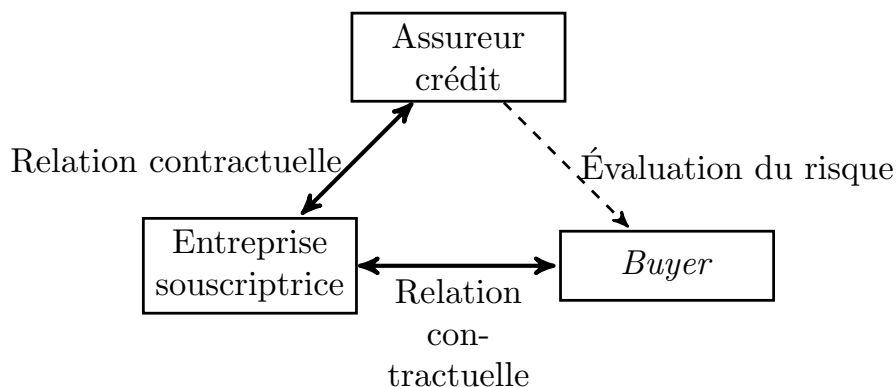


Figure 4.1: Relation triangulaire en assurance crédit.

À l'exception des souscripteurs de très petite taille, un contrat standard ne couvre qu'un seul *buyer* et le souscripteur a alors la possibilité de s'assurer individuellement contre le défaut de plusieurs de ses clients. Il est ainsi possible que certains *buyers* soient simultanément la tête assurée de plusieurs polices, sans nécessairement en être informés. Si un *buyer* fait défaut pendant la période de couverture et que le souscripteur le déclare, l'assureur doit indemniser son client selon les modalités prévues au contrat. Celles-ci offrent généralement à l'assureur certaines latitudes pour atténuer l'effet des défauts. Ainsi, la mesure du risque de crédit sur le

portefeuille nécessite, pour chaque *buyer*, de disposer du montant de la perte en cas de défaut et de la probabilité de défaut en elle-même.

#### 4.2.1 Événements de défaut

Deux événements de défaut peuvent survenir : (1) le défaut légal ou *insolvency*, prononcé par une instance judiciaire, et (2) le non-paiement des factures par le *buyer* au terme prévu, appelé défaut *protracted*<sup>5</sup>. La fréquence de ces événements est mesurée par des probabilités de défaut qui dépendent du niveau de *rating*, du secteur industriel et de l'emplacement géographique. Par conséquent, les assureurs crédit ont développé des systèmes de notation internes, s'appuyant sur des caractéristiques propres à chaque *buyer*, dans l'optique de présenter une image instantanée de la fiabilité de chaque entreprise.

#### 4.2.2 Perte en cas de défaut

Une des traits caractéristiques de l'assurance crédit consiste en la capacité dont dispose l'assureur à atténuer ses pertes, à la fois au moment et en amont du défaut, c'est-à-dire pour la période de couverture. En effet, il ne doit pas nécessairement rembourser au souscripteur l'intégralité de l'impayé, puisque des mesures préventives peuvent intervenir au cours de la vie de la police.

La première mesure consiste à réduire, à tout moment, la limite de la police, c'est-à-dire le montant de remboursement garanti en cas de défaut, si le risque du *buyer* se dégrade. Dans cette situation, l'assureur a le droit de réduire immédiatement ou même l'annuler complètement. Cette décision concernera alors toutes les factures ultérieures et permettra de réduire la perte encourue pour l'assureur, en augmentant le reste à charge du souscripteur. La légitimité d'une telle action se fonde sur le fait que la prime d'assurance est initialement calculée pour couvrir une exposition et un niveau de risque donné. Ainsi, dans le meilleur des cas, un bon suivi du risque peut permettre à l'assureur de se désengager vis-à-vis du souscripteur, et donc de limiter significativement l'impact d'un défaut. À l'inverse, si la perception du risque est plus faible, l'événement de défaut peut survenir avant que l'assureur n'ait eu le temps d'annuler la garantie ou d'ajuster son niveau. Notons également que l'assureur peut mettre un terme à la police peu de temps après la survenance d'un sinistre. Il est également possible qu'un *buyer* soit de nouveau assuré après une annulation, mais à des conditions différentes. Ce degré de latitude justifie que l'assureur développe des outils de suivi fiables pour anticiper la dégradation du risque et la survenance de défauts. Lorsque l'assureur réduit le niveau de ses garanties pour un *buyer*, l'entreprise souscriptrice en est informée et peut, connaissant cette information, limiter ses activités futures avec ce *buyer*. Deux raisons expliquent ce comportement. D'une part, si l'assureur réduit ses limites, le souscripteur l'interprète comme un signal d'alerte indiquant que le *buyer* aura plus de difficultés à s'acquitter de ses dettes. La seconde raison est que si le *buyer* fait défaut, la quantité remboursée par l'assureur sera moindre, et donc le reste à charge plus élevé.

Le second type de levier, dont dispose l'assureur pour réduire ses pertes, est plus classique et provient des conditions initiales du contrat. Il s'agit simplement de seuils et de franchises, se fondant sur un niveau total de remboursement par événement ou bien sur des dispositifs

---

5. La durée du crédit inter-entreprise, accordée au client par son fournisseur, fait l'objet d'un accord entre ces deux parties. En France, pour les contrats couverts en portefeuille, ce délai est de 90 jours, sauf pour de rares exceptions.

fixant un maximum de sinistres annuels agrégés. Par ailleurs, une fois son client indemnisé, l'assureur récupère généralement la créance non honorée et peut alors se retourner contre le *buyer* pour obtenir une partie des sommes non versées. En outre, l'assureur peut évidemment recourir à un dispositif de réassurance.

### 4.3 Modèle de migration avec facteurs macroéconomiques

Cette section décrit un modèle stochastique en temps discret pour la trajectoire de *rating* suivie par une firme, en tenant compte des effets produits par les évolutions de la conjoncture. Notre approche comprend deux étapes. Il s'agit tout d'abord de relier les mouvements de certains facteurs macroéconomiques au nombre de transitions, puis de définir la dynamique de ces facteurs. Nous exposons par la suite la méthode d'inférence retenue, puis la projection des quantités d'intérêt.

#### 4.3.1 Présentation du modèle économétrique

Soit  $T \in \mathbb{N}$  un horizon temporel fixé et  $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ , l'ensemble des dates observations (discrètes). Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  une filtration générale.

Nous considérons un portefeuille de  $n$  *buyers*, observés sur  $\mathcal{T}$ , dont le *rating* courant est représenté sous la forme du processus discret  $(X_i(t))_{t \in \mathcal{T}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ces processus individuels sont supposés  $\mathbb{H}$ -adaptés et prennent leurs valeurs dans l'espace d'états  $\mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$ , correspondant à l'échelle des notations utilisées par l'assureur, classées par ordre décroissant de qualité. La note  $R$  correspond au défaut *insolvency* et correspond à un état absorbant. La note  $R - 1$  correspond au défaut *protracted*.

Nous notons  $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$  un ensemble de  $K$  sous-groupes de *buyers*, considérés comme homogènes au sein du portefeuille. Chaque sous-groupe est caractérisé par les valeurs prises par un ensemble de covariables propres aux *buyers*, comme le secteur industriel, la zone d'activité ou la taille. Pour simplifier, nous supposons que ces covariables sont fixes au cours de temps, et donc que la composition des sous-groupes n'évolue pas. Notons que l'introduction de covariables dépendant du temps ne soulèverait pas de problèmes particuliers (p. ex. Wendin, 2006; Duffie *et al.*, 2007). Soit  $(\mathbf{Z}(t))_{t \in \mathcal{T}}$  un processus discret multivarié formé de  $d$  variables macroéconomiques et financières, que nous appelons "facteurs macros". Nous considérons que la totalité de l'information disponible provient entièrement de l'information générée par l'historique des *ratings*, ainsi que des facteurs macros.

**Hypothèse 1.** En notant  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t, t \in \mathcal{T})$ , la filtration relative aux facteurs macros, c'est-à-dire la filtration naturelle de  $\mathbf{Z}$ , et  $\mathbb{F}^{X_i}$  la filtration relative à  $X_i$ , nous supposons que l'information générale  $\mathcal{H}_t$  à la date  $t \in \mathcal{T}$  est définie par  $\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_t^{\mathbf{X}} \vee \sigma(\mathcal{K})$  où  $\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}} = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{F}_t^{X_i}$ .

Pour la gestion des risques, la prédiction à un niveau fin des *ratings* futurs est déterminante. En suivant l'approche classique que retiennent les agences de notation et conditionnement aux facteurs macros, nous considérons que l'hétérogénéité entre *buyers* de même notation est entièrement appréhendée par le découpage en sous-groupes  $1, \dots, K$ . En pratique, cette hypothèse est critiquable puisqu'il est difficile de recueillir toutes les sources d'hétérogénéité sous forme de variables observables. En conséquence, nous reconnaissons que ce formalisme

ne permet de prendre en compte qu'une part de l'hétérogénéité au sein du portefeuille. Le reste du modèle est spécifié de la manière suivante.

**Hypothèse 2.** Nous supposons que, pour le  $i$ -ème *buyer* appartenant au sous-groupe  $k \in \mathcal{K}$ , le processus en temps discret  $X_i$  est une chaîne de Markov doublement stochastique, entraînée par  $\mathbf{Z}$ . La chaîne est caractérisée par une matrice de migration (ou de transition) stochastique, telle que pour tout  $t \in \mathcal{T}$

$$\mathbf{p}_k(\mathbf{Z}(t)) = (p_{hj,k}(t) = p_{hj,k}(\mathbf{Z}(t)))_{h,j \in \mathcal{R}},$$

où  $p_{hj,k}(t)$  correspond à la probabilité de transition du *rating*  $h$  vers  $j$  entre les dates  $t$  et  $t+1$

$$p_{hj,k}(t) = \mathbb{P}(X_i(t+1) = j \mid X_i(t) = h, \mathbf{Z}(t), i \in k). \quad (4.1)$$

Nous supposons également que tous les *buyers* d'un même sous-groupe  $k$  sont indépendants, conditionnellement à  $\mathbf{Z}$ .

Puisque la matrice de transition sur une période est fonction du facteur  $\mathbf{Z}$ , l'hypothèse de Markov est vérifiée pour  $(X_i, \mathbf{Z})$ , si le facteur est lui aussi markovien (d'ordre 1). Notons que le formalisme retenu jusqu'ici peut facilement être décliné en temps continu. Nous introduisons à présent les processus de comptage suivants

$$\mathbf{N}(t) = (\mathbf{N}_1(t), \dots, \mathbf{N}_K(t))_{t \in \mathcal{T}} \text{ et pour } k \in \mathcal{K}, \mathbf{N}_k(t) = (N_{hj,k}(t))_{h,j \in \mathcal{R}}, \quad (4.2)$$

où  $N_{hj,k}(t)$  correspond au nombre de transitions  $h \rightarrow j$ , observées pour un sous-groupe  $k$  entre les dates  $t$  et  $t+1$ .

L'Hypothèse 2 implique que les nombres de transitions soient corrélés entre eux, par le biais des matrices de migration stochastiques qui dépendent de facteurs communs. Nous considérons dans ce chapitre que les nombres de migrations n'ont pas d'incidence sur les facteurs  $\mathbf{Z}$ . En notant  $L_{h,k}(t)$ , l'exposition au risque dans le *rating*  $h$  au sein du sous-groupe  $k$  à la date  $t$ , nous considérons

$$\mathbf{N}_{h,k}(t) = (N_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}} \sim \text{Multinomial}\left(L_{h,k}(t), (p_{hj,k}(t))_{j \in \mathcal{R}}\right). \quad (4.3)$$

La variable  $L_{h,k}(t)$  est observée et doit être recalculée à chaque début de période.

Par la suite, nous considérons un modèle économétrique permettant de définir les matrices de transition conditionnelles (4.1). Comme les *ratings* sont naturellement ordonnés entre eux, nous faisons appel à un modèle de lien cumulé (McCullagh, 1980; Agresti, 2002), aussi appelé modèle de régression ordinal, qui utilise les facteurs macros. Ce type de spécification est relativement classique en risque de crédit (p. ex. Bangia *et al.*, 2002; Feng *et al.*, 2008). Par rapport au cas continu, où la spécification des intensités de transition reviendrait à un simple modèle multinomial, le fait de recourir à une approche en temps discret apparaît plus flexible, en offrant une large gamme de modèles pour appréhender l'ordre des *ratings*. Ainsi, nous supposons que les probabilités cumulées conditionnelles satisfont, pour chaque *buyer*  $i$  appartenant au sous-groupe  $k$

$$\mathbb{P}(X_i(t+1) \leq j \mid X_i(t) = h, \mathbf{Z}(t)) = g\left(\mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t)\right), \quad h, j \in \mathcal{R}, \quad (4.4)$$

où les  $\mu_{hj,k}$  correspondent à des seuils (non-observés) et spécifiques à chaque note.  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_{hj,k})_{h,j \in \mathcal{R}}$  correspond à un vecteur de paramètres de taille  $d$ , représentant la sensibilité de

chaque facteur. La fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  est une fonction de lien à fixer. Des choix fréquents pour  $g$  sont les liens *probit*, *logit* ou *log-log*. Dans l'Équation (4.4), nous utilisons la notation  $\tilde{\mathbf{Z}}$  au lieu  $\mathbf{Z}$ , puisque le modèle de migration peut ne dépendre que d'un sous-ensemble de facteurs macros. Cette notation peut également être utilisée pour indiquer que des versions retardées des composantes du vecteur  $\mathbf{Z}$  sont retenues. Il convient de remarquer que nous ne supposons pas nécessairement que les probabilités cumulées soient "parallèles" les unes par rapport aux autres, comme par exemple pour un modèle à *odds* proportionnels. En effet dans ce cas, les paramètres de  $\boldsymbol{\theta}$  seraient égaux pour toutes les transitions, impliquant la même sensibilité aux facteurs macros. Cela permet d'accroître la flexibilité du modèle, en donnant aux facteurs macros la possibilité d'influencer différemment chaque transition. Notons également que nous pouvons considérer l'indicatrice d'appartenance à un sous-groupe, comme une covariable et ainsi limiter le nombre total de paramètres.

À partir de l'Équation (4.4), nous obtenons facilement les probabilités de transition conditionnelles, pour tout  $h \in \mathcal{R}$  et  $k \in \mathcal{K}$

$$\begin{cases} p_{h1,k}(t) = g\left(\mu_{h1,k} + \boldsymbol{\theta}_{h1,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t)\right) \\ \vdots \\ p_{hj,k}(t) = g\left(\mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t)\right) - g\left(\mu_{hj-1,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj-1,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t)\right) \\ \vdots \\ p_{hR,k}(t) = 1 - g\left(\mu_{hR-1,k} + \boldsymbol{\theta}_{hR-1,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t)\right) \end{cases} \quad (4.5)$$

Puisque le cardinal de  $\mathcal{R}$  est  $R$ , nous remarquons que seul  $R - 1$  paramètres de seuil sont nécessaires. Le défaut terminal (*insolvency*) est caractérisé par un seuil  $\mu_{hR-1,k}$ . Le terme  $\mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}$  dans (4.4) ne contient pas de variable idiosyncratique, puisque ce risque est pris en compte par la suite dans (4.3).

Le cadre économétrique présenté ci-dessus est relativement classique en risque de crédit et peut être associé à des modèles structurels, en suivant l'approche de Merton (1974), fréquemment utilisée par les praticiens. Ceci permettrait de donner une interprétation économique à notre spécification. Plus précisément, le processus de *rating* peut être simulé, en considérant  $(\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t))$ ,  $n$  variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition  $g$ . Le  $i$ -ème *buyer* appartenant au sous-groupe  $k$ , de *rating*  $h$  en date  $t$ , effectue une transition vers  $j$  telle que

$$X_i(t+1) = j \iff \varepsilon_i(t) \in \left] \mu_{hj-1,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj-1,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t), \mu_{hj,k} + \boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right],$$

où  $\varepsilon_i(t)$  correspond à un terme idiosyncratique, alors que les termes de type  $\boldsymbol{\theta}_{hj,k}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t)$  correspondent à un effet systématique.

### 4.3.2 Modèle dynamique pour les facteurs macros

Dans cette section, nous présentons le modèle de séries temporelles retenu pour les variables  $\mathbf{Z}$ . Il permet par la suite de projeter les nombres de transitions sur plusieurs périodes. Nous supposons que le processus  $\mathbf{Z}$  est décrit par le biais d'un modèle VAR( $m$ ) avec  $m \geq 1$ . Ce cadre de travail est usuellement appliqué en économétrie pour modéliser les relations de cause à effet, qui peuvent intervenir entre différentes grandeurs macroéconomiques. Pour le risque de crédit, de telles approches ont été utilisées par Pesaran *et al.* (2004), Pesaran *et al.* (2006)

ou encore Duffie *et al.* (2007), et sont généralement au cœur des modèles de *stress tests* utilisés par les banques centrales, les organismes de supervision et les autres institutions de stabilité financière (cf. Foglia, 2008, pour une revue).

Puisqu'une large part du portefeuille comprend des petites et moyennes entreprises, l'hypothèse, selon laquelle les trajectoires suivies par les *buyers* ne prédisent pas les facteurs macros, semble raisonnable. Dans la suite, nous supposons que ces derniers sont obtenus en date  $t$  par

$$\mathbf{Z}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \mathbf{Z}(t-i) + \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \boldsymbol{\zeta}(t), \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{b}_0$  et  $\mathbf{b}_1$  sont des vecteurs de paramètres de dimension  $d$ ,  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont des matrices de paramètres indépendants du temps et de dimension  $d \times d$ , et  $\boldsymbol{\zeta}(t)$  est un vecteur gaussien de dimension  $d$ , dont les composantes sont i.i.d. et admettant pour matrice de variance-covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

En général, les facteurs macroéconomiques ne sont pas stationnaires<sup>6</sup>, mais sont cointégrés<sup>7</sup>. En d'autres termes, ils admettent une tendance stochastique commune permettant de les modéliser de manière conjointe. Par commodité, nous travaillerons avec des facteurs  $I(1)$ , c'est-à-dire intégrés d'ordre 1. Ainsi, il est possible de réécrire l'Équation (4.6) sous la forme d'un modèle à correction d'erreur (VECM)<sup>8</sup>

$$\Delta \mathbf{Z}(t) = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{Z}(t-1) + \sum_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{\Psi}_i \Delta \mathbf{Z}(t-i) + \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \boldsymbol{\zeta}(t), \quad (4.7)$$

avec  $\boldsymbol{\Pi} = -(I_d - \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i)$  et  $\boldsymbol{\Psi}_i = -\sum_{j=i+1}^m \mathbf{A}_j$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ . La matrice  $\boldsymbol{\Pi}$  est appelée matrice d'équilibre et son rang correspond au nombre d'équations de cointégration (relations de long terme) que comprend le système. Cette matrice est telle que  $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^\top$ , où  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  sont des matrices de dimension  $d \times r$ , avec  $r$  le rang de  $\boldsymbol{\Pi}$ . Le terme  $\boldsymbol{\beta}$  comprend les coefficients qui déterminent les relations de long terme entre facteurs. Puisque  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  ne sont *a priori* pas uniques, la stratégie, couramment retenue en économétrie, consiste à leur appliquer des restrictions. Pour les coefficients de  $\boldsymbol{\beta}$ <sup>9</sup>, les restrictions sont établies de manière à satisfaire à des relations d'équilibre de long terme, fondées sur la théorie macroéconomique (p. ex. Garratt *et al.*, 2003). La construction de tels modèles avec ces contraintes d'équilibre requiert généralement de considérer à la fois des variables domestiques et des variables internationales.

### 4.3.3 Estimation par maximum de vraisemblance

Les analyses effectuées dans ce chapitre s'appuient sur des données de panel, pour lesquelles le *rating* individuel des *buyers* est observé régulièrement sur un nombre fini de dates. Nous introduisons le processus  $(R_i(t))_{t \in \mathcal{T}}$ , prenant la valeur 1 si le *rating* de la firme  $i$  est observé à la date d'évaluation  $t$ , et 0 sinon. Ce mode d'observation implique une perte d'information. Nous notons  $\widetilde{\mathcal{F}}_t^{\mathbf{X}}$ , la filtration correspondant à l'information disponible, tenant compte des processus  $R_1, \dots, R_n$ . Dans la suite, nous faisons l'hypothèse suivante et discuterons de sa validité dans la section 4.4, dédiée aux données.

6. Le processus est stationnaire si le polynôme  $\det(I_d - \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i)$  n'a pas de racine à l'intérieur et sur le cercle unité complexe (cf. Lütkepohl et Krätzig, 2004, Chapter 3).

7. Il existe une combinaison linéaire de ces facteurs qui est stationnaire.

8.  $\Delta$  correspond à l'opérateur de différence première.

9. les coefficients de  $\boldsymbol{\alpha}$  peuvent être restreints à 0. Cela permet notamment de tester si l'une des équations de cointégration est faiblement exogène.

**Hypothèse 3.** Les facteurs macros sont complètement observés et le processus  $(R_i(t))_{t \in \mathcal{T}}$ , indiquant s'il y a censure, est non informatif et indépendant de  $(X_i(t))_{t \in \mathcal{T}}$ .

Comme les facteurs macros ne sont pas prédits par la suite des *ratings* individuels, nous notons  $f(\cdot | (\mathbf{Z}(t-1), \dots, \mathbf{Z}(t-m)); \boldsymbol{\kappa})$  la distribution de  $\mathbf{Z}(t)$ , conditionnellement à  $(\mathbf{Z}(t-1), \dots, \mathbf{Z}(t-m))$  avec  $\boldsymbol{\kappa}$  un vecteur de paramètres à estimer. Cette fonction se déduit de la spécification de  $\mathbf{Z}(t)$  sous forme de série temporelle dans la Section 4.3.2. Puisque le modèle est doublement stochastique (cf. Hypothèse 2) et si l'Hypothèse 3 est satisfaite, les paramètres  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})$  peuvent être directement obtenus à partir des données observées. Conditionnellement à l'état initial, la vraisemblance s'écrit comme le produit de deux termes impliquant séparément  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\kappa}$ , comme dans le cas de Duffie *et al.* (2007, Section 2.2)

$$\mathcal{L}(X, R, \mathbf{Z}; (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})) = \mathcal{L}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\kappa}) \times \mathcal{L}(X, R; (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})) , \quad (4.8)$$

où

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\kappa}) = \prod_{t \geq 1} f(\mathbf{Z}(t) | (\mathbf{Z}(t-1), \dots, \mathbf{Z}(t-m)); \boldsymbol{\kappa}) , \quad (4.9)$$

et

$$\mathcal{L}(X, R; (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})) = \prod_{t \geq 1} \prod_{k=1}^K \prod_{h, j \in \mathcal{R}} p_{hj,k}(t)^{n_{hj,k}(t)} , \quad (4.10)$$

avec

$$n_{hj,k}(t) = \sum_{i \in k} \mathbb{1}_{\{X_i(t)=j, X_i(t-1)=h, R_i(t)=R_i(t-1)=1\}} ,$$

le nombre de transitions  $h \rightarrow j$  observées entre  $t$  et  $t+1$  pour le groupe  $k$ . Cette dernière vraisemblance s'obtient à partir de la distribution multinomiale dans l'Équation (4.3), où l'exposition au risque s'écrit  $l_{h,k}(t) = \sum_{i \in k} \mathbb{1}_{\{X_i(t)=h, C_i(t)=1\}}$ . Nous remarquons également que chaque transition, émanant de l'état  $h$  pour le groupe  $k$ , pourrait être estimée séparément avec une forme paramétrique particulière, comme c'est le cas, en temps continu, pour les intensités de transition d'un modèle à risques concurrents.

Lorsque les facteurs sont tous latents, l'inférence statistique devient plus délicate, le degré de complexité dépendant de la dynamique attribuée aux facteurs (p. ex. Gagliardini et Gouriéroux, 2005). Notre approche avec facteurs observables présente l'avantage de ne mobiliser que des techniques d'estimation par maximum de vraisemblance, qui sont simples à manipuler. En effet, le problème général de maximisation se décompose en deux sous-problèmes, puisque la log-vraisemblance de (4.8) correspond à la somme des logarithmes de (4.9) et de (4.10). Il est alors possible de distinguer l'estimation du vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}$ , associé aux facteurs macros, de celle des paramètres  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$ , relatives au modèle de migration. Pour l'Équation (4.9), l'estimation d'un modèle VAR (4.6) (ou VECM) s'obtient par maximum de vraisemblance, cf. p. ex. Lütkepohl et Krätzig (2004, Section 3.3.1) ou Juselius (2006) pour un point de vue plus général. Puisque les variables économiques sont rarement  $I(0)$ , nous utilisons la procédure de Johansen pour estimer le modèle VECM, décrit dans la section précédente (cf. Johansen, 1991). S'agissant de l'Équation (4.10), les estimateurs  $(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$  sont également obtenus par maximum de vraisemblance (Agresti, 2002).

### 4.3.4 Projection

Pour la gestion des risques, un assureur crédit s'intéresse à la projection du profil de risque de son portefeuille de *buyers* sur un horizon de plusieurs périodes. En supposant qu'un gestionnaire soit en capacité d'ajuster son exposition aux risques en réduisant le nombre de contreparties risquées, notre spécification, construite à partir de facteurs observables, répond efficacement à cette contrainte et permet de construire des stratégies répondant à un changement de la conjoncture. Cependant, il est nécessaire de connaître au préalable les valeurs prises par les facteurs exogènes. Nous décrivons, dans un premier temps, les probabilités de transition futures, puis expliquons comment procéder à la simulation des futurs *ratings*.

#### Projection du portefeuille

Le modèle VAR (4.6) peut être utilisé, sur la base des paramètres estimés<sup>10</sup>, pour projeter les valeurs des facteurs à un horizon  $t + s$ , avec  $s \geq 1$ , connaissant la situation en  $t \geq 0$

$$\mathbf{Z}(t + s) = \sum_{i=1}^m \widehat{\mathbf{A}}_i \mathbf{Z}(t + s - i) + \widehat{\mathbf{b}}_0 + \widehat{\mathbf{b}}_1 t + \boldsymbol{\zeta}(t, t + s), \quad (4.11)$$

où le terme  $\boldsymbol{\zeta}(t, t + s)$  capture l'erreur de prédiction et suit une loi normale multivariée de variance-covariance (Lütkepohl et Krätzig, 2004)

$$\boldsymbol{\Sigma}(s) = \sum_{i=1}^{s-1} \boldsymbol{\Upsilon}_i \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Upsilon}_i^\top,$$

avec  $\boldsymbol{\Upsilon}_i = \sum_j^i \boldsymbol{\Upsilon}_{i-j} \widehat{\mathbf{A}}_j$ .

Connaissant les valeurs futures de  $\mathbf{Z}$ , il est possible d'en déduire aisément  $\widetilde{\mathbf{Z}}$ . De ce fait, les probabilités de transition entre  $t$  et  $t + s$  vérifient la relation suivante, pour un *buyer* appartenant au sous-groupe  $k$  en date  $t$

$$\mathbf{p}_k(t, t + s) \mid \widetilde{\mathbf{Z}}(t), \dots, \widetilde{\mathbf{Z}}(t + s) = \prod_{u=0}^{s-1} \mathbf{p}_k(\widetilde{\mathbf{Z}}(t + u)). \quad (4.12)$$

En pratique, l'Équation (4.12) s'obtient facilement par simulation Monte-Carlo. Le risque idiosyncratique est considéré en simulant une distribution multinomiale à partir de (4.3).

#### Scénarios de *stress tests*

Un des intérêts majeurs de cette approche est de permettre de projeter la composition du portefeuille dans des situations où une ou plusieurs variables macros sont perturbées. Nous nous appuyons sur les approches institutionnelles pour bâtir des scénarios de *stress tests* (cf. Foglia, 2008). Nous suivons l'approche proposée par Koop *et al.* (1996), fondée sur des fonctions de réponse à l'impulsion d'un choc isolé. Ce type d'approche est par exemple mise en œuvre par Pesaran *et al.* (2006) et Dees *et al.* (2007). L'intérêt de cette spécification est de pouvoir considérer, de manière cohérente, les effets d'un choc sur les autres facteurs de risque, puis de mesurer l'effet global sur le portefeuille de *buyers*.

---

10. Le modèle VECM estimé peut se réécrire sous la forme d'un modèle VAR.



En supposons que le choc considéré affecte le facteur numéro  $f$ , d'un niveau égal à un écart-type (calculé sur les valeurs historiques) sur une période, c'est-à-dire  $\zeta_f(t+1) = \sqrt{\sigma_{ff}}$ , les autres facteurs sont évalués en considérant

$$\zeta_{-f}(t+1) \mid \zeta_f(t+1) = \sqrt{\sigma_{ff}} \sim IIN \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ff}}} \boldsymbol{\rho}, \Sigma_{-f} - \frac{1}{\sigma_{ff}} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}^\top \right),$$

où  $\boldsymbol{\rho}$  est la  $f$ -ième colonne de  $\boldsymbol{\Sigma}$  sans la ligne  $f$ ,  $\Sigma_{-f}$  est la matrice de variance-covariance de  $\zeta_{-f}(t)$ , un vecteur gaussien issu de  $\zeta(t)$  auquel a été retranchée la  $f$ -ième composante. L'effet de chaque choc s'obtient aisément par simulation Monte-Carlo.

## 4.4 Description des données

Cette section fournit une présentation des données d'assurance crédit utilisées dans la suite de ce chapitre. Nous décrivons également les facteurs macros analysés.

### 4.4.1 Données d'assurance crédit

Contrairement à de nombreux travaux empiriques sur le risque de crédit, nous n'avons pas recours dans ce chapitre aux données provenant d'une agence de notation, mais nous nous concentrons sur l'analyse d'une base extraites du système de notation interne d'un assureur crédit français. Ce jeu de données est anonymisé et contient les trajectoires de *ratings* individuels de *buyers*, mis à jour mensuellement. La base couvre la période allant de Mars 2004 à Septembre 2012. Elle comprend des firmes de toute taille (information non observable), localisées dans différents pays et couvrant de nombreux secteurs d'activité. Les *ratings* sont déterminés à chaque date d'évaluation sur la base d'un score quantitatif (auquel nous n'avons pas accès) calculé en fonction des caractéristiques individuelles de chaque *buyer*. Nous disposons également des dates de déclaration des défauts (*insolvency* et *protracted*). Notons que le *rating* peut être parfois mis à jour manuellement par les experts en charge des systèmes d'information, si les caractéristiques habituellement collectées ne sont pas suffisamment précises ou qu'une information supplémentaire est disponible.

Dans cette étude, nous sélectionnons, sur la période d'observation, un sous-ensemble de cette base comprenant 1 604 533 *buyers* français<sup>11</sup>, provenant de plusieurs secteurs regroupés en  $K = 5$  grands groupes : (1) Agriculture, (2) Finance/Immobilier, (3) Produits finis, (4) Matières premières et (5) Services/Commerce. Ces groupes sont conçus par l'assureur sur la base de codes NACE<sup>12</sup> et sont utilisés pour la gestion courante. Pour des raisons de confidentialité, il ne nous est pas possible d'identifier ces codes, ainsi que les noms des *buyers*. Le Tableau 4.1 fournit des statistiques descriptives concernant ces données.

Il est utile de disposer d'une variable indiquant le secteur industriel, puisque la littérature constate habituellement la présence d'effets imputables aux secteurs, comme par exemple Nickell *et al.* (2000), Bangia *et al.* (2002) ou plus récemment Xing *et al.* (2012). Puisque nous ne disposons pas d'informations plus fines concernant le secteur, nous supposons, dans le reste de cette étude, que les *buyers*, d'un même secteur et de même *rating* sont de risque homogène.

11. Les données provenant d'autres pays devraient faire l'objet d'une inférence séparée, puisque le défaut peut y être défini différemment. Pour les données françaises, le défaut *protracted* est généralement constaté à 90 jours.

12. Il s'agit d'un système standard de classification européen utilisé par la Communauté européenne ([http://ec.europa.eu/competition/mergers/cases/index/nace\\_all.html](http://ec.europa.eu/competition/mergers/cases/index/nace_all.html)).

Table 4.1: Statistiques descriptives sur l'échantillon sélectionné.

Secteur	Nom	Nombre de <i>buyers</i>
1	Agriculture	93 697
2	Finance/Immobilier	148 582
3	Produits finis	187 857
4	Matières premières	471 270
5	Services/Commerce	703 127

Note : Ce tableau présente le nombre cumulé de *buyers* observés par secteur sur la période.

Ce type d'hypothèse est finalement assez classique dans la littérature sur le risque de crédit, mais nous sommes conscients qu'une hétérogénéité résiduelle peut exister. En particulier, nous pensons que les probabilités de défaut *protracted* peuvent dépendre, non seulement des caractéristiques des *buyers*, mais également des liens qu'ils entretiennent avec leurs fournisseurs. Dans une situation délicate, un *buyer* serait sous doute amené à établir des règles de priorité pour payer ses fournisseurs. De telles informations nous sont malheureusement inaccessibles, mais pourraient tout à fait s'intégrer dans notre modèle en tant que covariables.

### Définition des états et censure

Le système de *rating* interne de l'assureur comprend initialement 10 classes, que nous regroupons en 5 classes, numérotés de "1" à "5". Ce regroupement vise à éliminer les classes ne comprenant qu'un très faible nombre de transitions sur la période d'observation. La classe "1" correspond au niveau de qualité le plus élevé, tandis que la catégorie "5" est la plus mauvaise. Au cours de leur période d'observation, les *buyers* peuvent connaître un événement de défaut *protracted*, noté  $P$ , ou devenir insolubles  $I$ . Nous désignons par la lettre  $C$  l'événement correspondant à la clôture du contrat, soit parce que l'assureur l'a annulé, soit parce qu'il arrive simplement à son terme. Cependant, les données disponibles ne permettent pas de distinguer ces deux causes. Les états  $I$  et  $C$  sont considérés comme absorbants, alors que des transitions sont supposées possibles depuis l'état  $P$ . En pratique, il est envisageable, pour un *buyer* donné, qu'un nouveau contrat soit créé après une annulation. Ce cas est alors considéré comme un nouveau dossier. Dans ces circonstances, 42 transitions sont possibles. Selon l'assureur, il n'y a pas eu de changement important dans la définition des classes de *rating* sur la période d'observation, sauf en Janvier 2007 où une reclassification de certains *buyers*, appartenant aux classes 1 et 2, a été opérée vers la classe 5. Ainsi, dans le reste de ce chapitre, cet effet sera appréhendé à partir d'une variable indicatrice, séparant les deux périodes de part et d'autre de cette date.

Les observations peuvent être censurées pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les *buyers* peuvent être simplement non-notés pour une date donnée. Cependant, dans ce cas de figure, l'assureur continue de suivre le *buyer* tant que le contrat n'est pas rompu et les défauts qui pourraient survenir sont alors enregistrés. De la même manière, l'information sur le *rating* d'un contrat annulé n'est pas enregistrée mais son défaut peut l'être, puisque la part des factures enregistrées avant l'annulation restent couvertes. Afin de limiter les éventuels biais que pourraient générer ces actions sur les taux de défaut, nous considérons que le *buyer* conserve le dernier *rating* connu, si une transition vers l'état "non-noté" ou vers l'état  $C$

intervient et si le *buyer* fait défaut moins d'un an après. Les autres transitions vers l'état "non-noté" sont assimilées à de la censure indépendante. Cette hypothèse est usuellement reprise dans la littérature en crédit. S'agissant des autres cas de clôture, nous choisissons de les modéliser comme des transitions à part entière et assimilons donc l'état  $C$  à une valeur prise par le processus décrivant les *ratings*.

Deux raisons motivent ce choix pour les clôtures (non suivies d'un défaut). Tout d'abord, une modélisation réaliste de la distribution des pertes ne peut ignorer la capacité d'annulation de l'assureur, puisqu'il s'agit d'une action du management légitime. Par conséquent, il est intéressant d'examiner comment cette capacité affecte les pertes et comment elle intervient lorsque l'environnement économique change. Le second point est plus technique. Si les clôtures étaient considérées comme une source de censure des *ratings*, nous devrions examiner la pertinence de l'Hypothèse 3. Dans la plupart des cas, la clôture s'explique simplement par l'arrivée au terme du contrat. Cette situation peut être raisonnablement assimilée à une perte d'information complètement non-informative et pourrait donc être ignorée pour l'inférence du modèle, tant que les observations sont présentes en nombre suffisant. Cependant, les données disponibles ne nous permettent pas de distinguer des sorties classiques des annulations à l'initiative de l'assureur, pouvant se manifester notamment en période de crise. Dans ces circonstances, les annulations constitueraient une source de censure informative, à intégrer pour l'inférence du modèle. De fait, elles génèrent un effet de sélection, dont l'ampleur est indéterminée car elles ne sont pas identifiables dans nos données. La Figure 4.2 représente les taux de clôture observés sur la période, et en particulier au cours de l'année 2009.

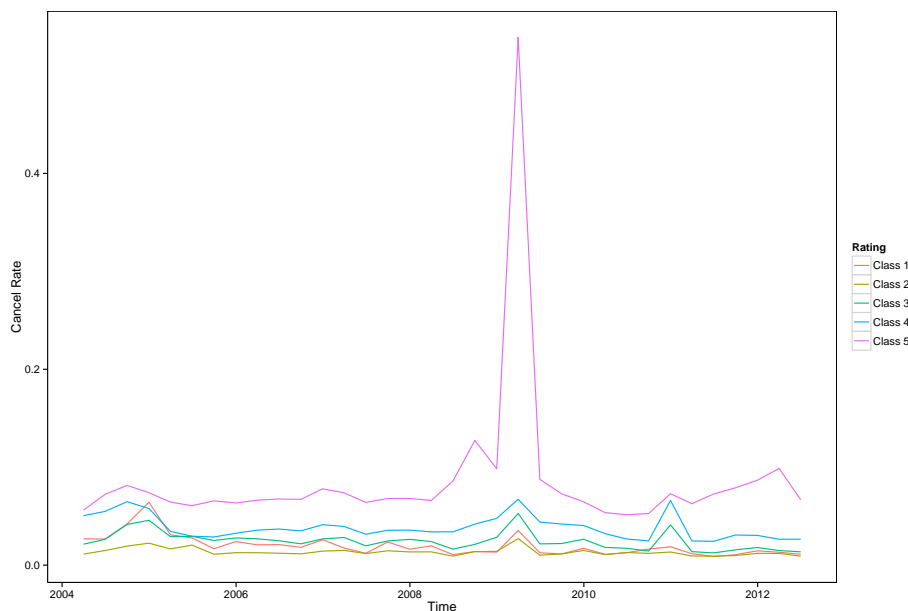


Figure 4.2: Taux de clôture pour chaque classe de *rating* (classe 1 à 5).

Sur la période d'observation, le taux de clôture n'excède pas 10 %, sauf au cours du premier trimestre de l'année 2009 où les *buyers* les moins bien notés (classe 5) sont largement exclus du portefeuille. Il semble que ceci puisse être interprété comme un signal de dégradation de la qualité de crédit de ces *buyers*, et donc comme une indication en faveur de la non-indépendance de l'annulation et du défaut. Comme nous le verrons par la suite, l'annulation

semble être appliquée de manière précoce et traduit un comportement plutôt prudent des gestionnaires. Cependant, l'effet de cette action n'apparaît clairement que sur une courte période de temps (seulement deux ou trois dates) et il ne nous est pas possible, à cause de ce manque d'information, de jauger l'importance du biais de sélection, produit par les annulations. En conséquence, spécifier un modèle comprenant une fonction de correction du biais de sélection ou une méthode d'imputation, pour tenir compte des données manquantes, apparaît à ce stade extrêmement délicat, au vu des données disponibles. L'approfondissement de cette question intéressante<sup>13</sup> sera à explorer dans le cadre de futures recherches.

Une autre source de données manquantes provient du schéma d'observation en temps discret qui ne permet pas de tenir compte des possibles transitions survenant entre deux dates d'observations. Cependant, cette perte a un impact extrêmement limité, puisque la probabilité qu'une firme subisse plus d'une transition au cours d'un mois est très faible. En fin de compte, nous observons environ 660 000 *buyers* sur chaque trimestre et au minimum 515 000 *buyers* sur toute la période.

Dans la suite, nous donnons quelques détails supplémentaires sur les données. L'exposition globale augmente avec le temps sur la période, sauf en 2009. La Figure 4.3 fournit une description de la distribution de l'échantillon par classe de *rating*. Cette répartition est équivalente lorsqu'elle est analysée par secteur. Les firmes, dont la qualité de crédit est moyenne ou faible, correspondent à une part significative du portefeuille. Nous remarquons, en particulier, que la proportion de *buyers* mal notés augmente sensiblement au cours de la période 2004-2008, lorsque la situation économique est plutôt favorable. À l'inverse, les catégories 4 et 5, les plus risquées, sont moins représentées pendant l'année 2009, où sévit une crise économique et financière.

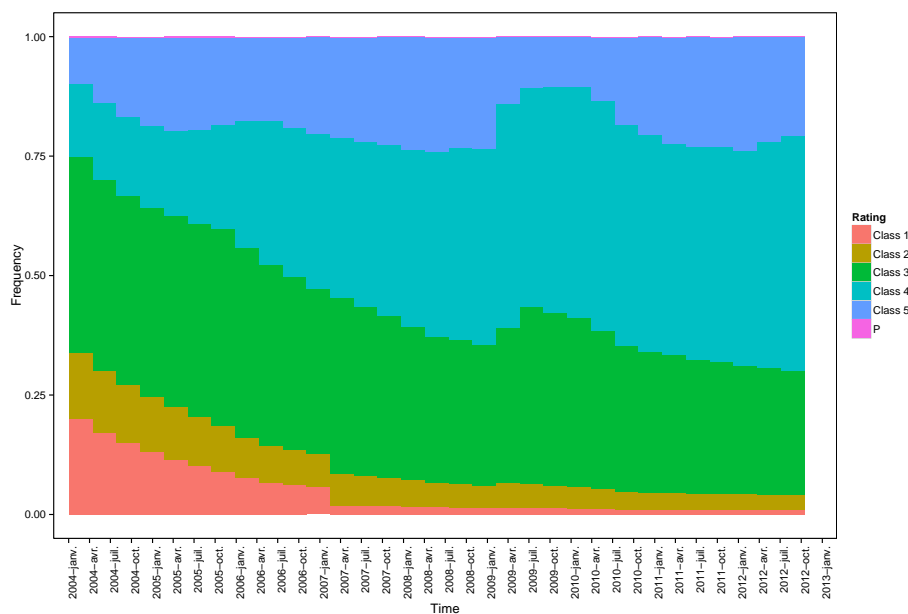


Figure 4.3: Répartition du portefeuille par *rating* sur la période d'observation.

13. À notre connaissance, il semble que peu de travaux (p. ex. Chen *et al.*, 2011) ait cherché à inférer des modèles pour les transitions ou des modèles multi-états en présence de données manquantes MNAR (*missing not at random*).

Le nombre total de transitions directes est présenté dans le Tableau 4.2. Le nombre de clôtures est évidemment important et s'explique, en grande partie, par l'arrivée naturelle des contrats à leur terme. Pour les classes 2 à 5, la plupart des transitions s'opère vers des *ratings* adjacents. À l'inverse, ce résultat n'est pas observé pour la classe 1 et pour les *buyers* en situation de défaut *protracted*. Par ailleurs, nous notons que les fortes améliorations demeurent relativement rares, en comparaison des fortes dégradations qui sont en proportion beaucoup plus fréquentes.

Table 4.2: Nombre de transitions directes observées.

État initial	Exposition totale	État de transition							
		1	2	3	4	5	P	C	I
1	2 802 022	–	18 221	47 147	10 676	4 186	2 658	26 537	7
2	4 211 672	5 928	–	55 901	16 511	4 941	3 461	20 576	5
3	22 998 099	1 279	25 536	–	158 009	82 947	12 941	195 022	79
4	24 890 613	198	2 325	112 622	–	229 832	33 484	312 732	287
5	13 035 742	74	451	13 603	246 523	–	28 452	427 807	547
P	105 801	2 564	3 324	12 297	32 212	27 904	–	13 509	242

Note : Ce tableau contient le nombre total de transitions observées durant la période d'observation. L'exposition totale correspond à la somme du nombre de *buyers* observés à chaque début de mois par *rating*. Les classes de *rating* sont ordonnées de 1 à 5 et nous comptons les transitions vers les états *P* (défaut *protracted*), *C* (clôture) et *I* (défaut *insolvency*).

La fréquence de mise à jour des *ratings* permettrait d'estimer des matrices de transition sur base mensuelle. Toutefois, l'estimation du modèle de migration sur cette base conduirait à des résultats peu robustes, compte tenu du faible nombre de transitions observées pour certaines paires de *ratings*. Une autre limite provient de la fréquence de mise à jour des grands indicateurs macroéconomiques, rarement mensuelle, qui nécessiterait de spécifier un modèle supplémentaire pour ajuster les facteurs macros sur les dates d'observations des *ratings*. Dans ces conditions, nous choisissons de nous focaliser sur des probabilités de transition trimestrielles. De manière à limiter les biais induits par l'utilisation d'un modèle discret par rapport à un modèle en temps continu (Shumway, 2001), nous ajustons les nombres de transitions trimestrielles observées, de manière à tenir compte des transitions intermédiaires (entre chaque trimestre) que nous pouvons également mesurer. Pour ce faire, le nombre de transitions  $h \rightarrow j$  trimestrielles réajusté est calculé tel que

$$n_{hj,k}(t+3) := l_{h,k}(t) \hat{p}_{hj,k}(t, t+3).$$

En supposant l'existence d'un processus continu sous-jacent décrivant l'historique des *ratings* et pour lequel les intensités de transition seraient constantes sur des périodes d'un mois, il serait aisé d'estimer la valeur des intensités. Ces estimateurs sont relativement proches de ceux produits à partir des estimateurs de Nelson-Aalen des matrices d'intensité cumulée de transition, utilisés pour l'inférence non-paramétrique d'un modèle multi-états markovien<sup>14</sup>.

14. Cette approximation suggère qu'il serait possible de spécifier le modèle de migration, non pas sur la base des probabilités de transition (4.4), mais à partir des intensités de transition de ce processus continu, en retenant par exemple le modèle relationnel de Cox (1972). Leow et Crook (2014) utilisent par exemple cette approximation pour spécifier les intensités de transition pour des données de prêts sur carte bancaire. Toutefois, comme le note Jackson (2011), un modèle markovien en temps discret est équivalent à une série de modèles multinomiaux (si les durées entre observations sont fixes), pour lesquels il existe une gamme de techniques de régression bien plus fournies et efficaces que dans le cas continu.

Dans ces conditions, l'estimateur  $\widehat{p}_{h,j,k}(t, t+3)$  de la probabilité de transition  $h \rightarrow j$  entre  $t$  et  $t+3$  mois peut être calculé, selon la même logique que l'estimateur du produit intégral d'Aalen-Johansen pour la matrice de transition, cf. Andersen *et al.* (1993) ou Lando et Skødeberg (2002) pour une application au risque de crédit. Cet estimateur, *a priori* proche du véritable estimateur non-paramétrique d'Aalen-Johansen puisque le pas d'observation est mensuel, sera utilisé dans la suite pour valider l'adéquation aux données du modèle de migration. Bien qu'il s'agisse d'un abus de langage, nous l'assimilerons dans la suite à l'estimateur d'Aalen-Johansen.

### Matrices de transition et ordre des transitions issues de l'état de défaut *protracted*

Poursuivant toujours l'objectif d'illustrer les données utilisées, nous présentons maintenant les matrices de transition moyennes (sur base trimestrielle), évaluées sur l'ensemble de la période d'observation. Pour commencer, nous estimons les matrices de transition trimestrielles pour chaque secteur, en utilisant l'approche que Lando et Skødeberg (2002) appellent l'approche *duration*<sup>15</sup> et qui s'appuie sur une hypothèse d'homogénéité temporelle. Elle est plus probante que l'estimation des probabilités de transition s'appuyant sur ce que Lando et Skødeberg (2002) qualifient d'approche *cohorte*. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 4.3. Puisque le défaut  $I$  et la clôture  $C$  sont des états absorbants, les lignes des matrices associées à ces états sont supprimées puisqu'elles ne comportent que des 0, sauf pour le terme de la diagonale qui vaut 1.

Sans surprise, les *buyers* les plus risqués, classés en 5, ont les plus fortes probabilités de défaut et de clôture. Jusqu'à la classe 3, ces probabilités décroissent légèrement à mesure que la qualité de crédit décroît. Toutefois, en supposant que la durée des contrats proposés ne dépend pas du *rating*, il est raisonnable de considérer les écarts de probabilités de clôture comme provenant des annulations. L'effet de sélection sur les mauvais *ratings* apparaît alors clairement. Pour les défauts *protracted* et les clôtures, cette tendance est moins claire pour les classes 1 à 3, mais nous remarquons que les probabilités de clôture depuis la classe 1 sont significatives.

Un autre résultat intéressant est que les probabilités de survenance d'un défaut *protracted* depuis l'état 2 sont supérieures à celles issues de l'état 3. Il semble s'expliquer par des annulations de contrats moins fréquentes pour la classe 2. L'examen du Tableau 4.3 révèle des taux de défaut pour le secteur Agriculture très différents des autres secteurs.

Les probabilités de transition provenant de l'état  $P$  sont élevées et ne sont pas intuitives. Ce résultat provient du fait que l'hypothèse de Markov d'ordre 1 n'est pas respectée pour cet état, puisqu'un *buyer*, faisant temporairement l'expérience d'un retard de paiement, aura une forte propension à retourner à proximité du *rating* précédant l'état  $P$ . Dans ces circonstances, nous analysons si l'hypothèse de Markov d'ordre 2 est pertinente pour les transitions qui émanent de cet état. L'hypothèse d'ordre 1 est rarement remise en cause dans la littérature, hormis dans le cas de bases de données très particulières (p. ex. Malik et Thomas, 2012). Le Tableau 4.4 fournit les estimations des probabilités de transition, calculées de manière similaire aux résultats présentés dans le Tableau 4.3. Afin de préserver la taille de ce tableau, nous ignorons les transitions issues des états 1 à 5, puisqu'elles sont très proches de celles estimées

---

15. Puisque les données sont initialement mensuelles, le générateur d'un modèle markovien homogène (sous forme de matrice) peut être calculé, en supposant qu'un *buyer* ne peut connaître qu'une seule transition par mois.

Table 4.3: Matrices moyennes des probabilités de transition trimestrielles.

État initial	État de transition							
	1	2	3	4	5	P	C	I
Agriculture								
1	94.266	0.548	1.660	0.563	0.229	0.007	2.727	0
2	0.096	95.370	1.702	0.858	0.316	0.018	1.640	0
3	0.003	0.032	97.197	0.509	0.313	0.009	1.937	0
4	0.001	0.004	0.200	97.115	0.585	0.016	2.079	0
5	0.002	0.005	0.277	1.942	91.507	0.045	6.221	0.001
P	0.981	1.764	19.456	37.098	17.667	5.691	17.344	0
Finance/Immobilier								
1	94.439	0.900	0.830	0.390	0.129	0.037	3.276	0
2	0.398	93.451	1.792	0.764	0.181	0.044	3.368	0
3	0.031	0.222	93.972	1.085	0.606	0.029	4.054	0
4	0.012	0.054	0.781	92.714	1.062	0.063	5.313	0.001
5	0.015	0.034	0.364	3.363	85.893	0.090	10.231	0.009
P	4.467	4.323	15.994	35.046	17.282	6.107	16.751	0.030
Produits finis								
1	90.335	3.187	2.436	1.288	0.566	0.135	2.050	0.002
2	0.566	91.626	4.779	1.399	0.473	0.111	1.044	0.002
3	0.035	0.677	92.561	3.148	1.410	0.100	2.065	0.003
4	0.014	0.069	2.250	90.697	3.359	0.201	3.402	0.008
5	0.018	0.040	0.508	6.690	83.694	0.302	8.726	0.022
P	2.565	4.288	13.494	29.641	25.061	8.709	15.635	0.606
Matières premières								
1	90.383	1.812	2.989	1.559	0.619	0.166	2.470	0.001
2	0.340	92.591	3.997	1.293	0.452	0.122	1.205	0.001
3	0.016	0.303	94.249	2.223	1.048	0.083	2.076	0.001
4	0.012	0.033	1.411	91.939	2.931	0.203	3.468	0.004
5	0.015	0.024	0.340	5.668	84.792	0.272	8.880	0.009
P	2.456	2.897	11.447	32.997	25.588	7.540	16.875	0.201
Services/Commerce								
1	90.989	1.827	2.121	1.235	0.526	0.078	3.223	0.001
2	0.360	92.814	3.631	1.151	0.376	0.066	1.602	0.001
3	0.017	0.283	93.619	1.912	1.123	0.049	2.994	0.002
4	0.007	0.035	1.227	91.672	2.618	0.109	4.328	0.005
5	0.009	0.021	0.370	4.727	84.697	0.164	9.997	0.015
P	2.165	3.095	12.447	31.233	27.557	6.585	16.771	0.148

Note : Ce tableau fournit les probabilités de transition trimestrielles moyennes (en %) estimées par l'approche duration. Les classes de *rating* sont ordonnées de 1 à 5 et nous comptons les transitions vers les états *P* (défaut *protracted*), *C* (clôture) et *I* (défaut *insolvency*). Les lignes associées aux transitions émanant des états *C* et *I* sont supprimées.

dans le tableau précédent<sup>16</sup>.

Table 4.4: Matrices moyennes d'ordre 2 des probabilités de transitions issues de l'état  $P$ .

(État précédant, État initial)	État de transition							
	1	2	3	4	5	P	C	I
Agriculture								
(1,P)	81.978	0.341	1.041	9.651	0.181	4.984	1.823	0
(2,P)	0.059	84.413	1.042	0.518	0.191	6.963	6.814	0
(3,P)	0.002	0.020	84.121	3.691	2.876	5.077	4.215	0
(4,P)	0	0.003	1.138	84.125	2.952	5.546	6.236	0
(5,P)	0	0.002	0.153	11.797	69.650	5.665	12.733	0
(P,P)	0.003	3.743	7.696	23.137	29.249	15.189	20.984	0
Finance/Immobilier								
(1,P)	84.728	1.119	2.717	1.883	0.608	5.559	3.387	0
(2,P)	0.249	83.225	5.084	2.184	0.665	5.682	2.912	0
(3,P)	0.018	0.301	79.396	5.176	2.442	5.170	7.497	0
(4,P)	0.004	0.110	2.184	75.607	4.316	5.830	11.949	0.001
(5,P)	0.003	0.016	0.368	7.136	66.827	5.850	19.795	0.005
(P,P)	3.816	1.939	6.599	35.014	19.383	13.779	18.810	0.660
Produits finis								
(1,P)	82.219	3.668	3.598	2.107	0.882	5.379	2.147	0.001
(2,P)	0.998	78.556	8.700	2.851	1.190	6.082	1.386	0.236
(3,P)	0.021	1.334	75.882	7.493	4.114	6.615	4.383	0.157
(4,P)	0.002	0.070	2.659	70.815	8.045	7.851	10.296	0.261
(5,P)	0.001	0.010	0.450	8.010	63.720	8.088	19.202	0.518
(P,P)	0.452	1.278	5.678	25.035	26.664	17.846	20.555	2.492
Matières premières								
(1,P)	83.663	2.730	2.794	2.033	0.609	6.036	2.133	0.001
(2,P)	1.032	81.416	6.804	2.257	1.224	5.787	1.480	0
(3,P)	0.062	0.970	77.246	6.624	4.081	6.210	4.711	0.096
(4,P)	0.007	0.021	1.825	72.863	7.661	7.008	10.496	0.118
(5,P)	0.001	0.013	0.379	7.978	63.562	6.825	21.034	0.209
(P,P)	1.435	0.959	5.837	28.722	23.296	16.577	22.318	0.857
Services/Commerce								
(1,P)	81.825	3.506	3.422	1.595	0.970	5.587	3.093	0.001
(2,P)	0.875	82.230	5.451	2.817	1.128	5.435	2.065	0
(3,P)	0.011	0.770	79.570	5.820	3.327	5.798	4.680	0.024
(4,P)	0.002	0.028	1.770	75.483	7.202	6.198	9.231	0.088
(5,P)	0.001	0.007	0.352	6.663	67.675	6.196	18.965	0.142
(P,P)	1.181	1.354	6.539	27.160	27.417	14.675	20.601	1.075

Note : Ce tableau fournit les probabilités de transition trimestrielles moyennes (en %) estimées par l'approche duration, avec une hypothèse d'ordre 2 lorsque l'état initial est  $P$ . Les classes de *rating* sont ordonnées de 1 à 5 et nous comptons les transitions vers les états  $P$  (défaut *protracted*),  $C$  (clôture) et  $I$  (défaut *insolvency*). Les lignes associées aux transitions émanant des états  $C$  et  $I$  sont supprimées.

L'étude du Tableau 4.4 montre une forte propension à retourner dans l'état qui précède le défaut  $P$ , excepté dans le cas de défauts successifs. Cela confirme le fait que l'hypothèse d'ordre 1 n'est pas satisfaite. Nous remarquons que les probabilités de se déplacer autour de la diagonale, c'est-à-dire les transitions du type  $(h, P) \rightarrow h - 1$  or  $(h, P) \rightarrow h + 1$ , augmentent

16. L'introduction de l'hypothèse de Markov d'ordre 2 pour l'état  $P$  a un impact très limité sur les autres états, puisque les expositions dans l'état  $P$  sont négligeables comparées aux autres états, cf. Figure 4.3.



après un défaut *protracted* dans la plupart des cas. En particulier, cette hausse apparaît nettement pour les transitions, lorsque le *rating* précédent était 4 ou 5. De manière intéressante, nous remarquons également que ce défaut a un effet à la hausse sur les probabilités de clôture et d'insolvabilité. À titre d'exemple, un *buyer* de *rating* 5, appartenant au secteur Services/Commerce qui connaît un défaut *protracted*, a une probabilité de devenir insolvable plus de 9 fois supérieure à celle d'un *buyer* n'ayant pas connu de défaut *protracted*. À l'inverse, les probabilités associées à de très larges améliorations ou détériorations sont moins importantes. Une large dégradation de la qualité de crédit, après un défaut de paiement, semble naturelle mais l'opération inverse est plus complexe à interpréter. Nous pensons dans ce dernier cas qu'il pourrait être nécessaire d'évaluer les transitions avec une hypothèse de Markov d'ordre supérieur. Cependant, cette analyse est délicate car augmenter l'ordre réduit la robustesse des estimations, peu de transitions étant observables pour des ordres supérieurs à 2.

Dans ce reste de ce chapitre, nous considérerons que l'état  $P$  vérifie une hypothèse de Markov d'ordre 2. Toutefois, compte tenu du faible nombre d'observations, nous supposons que les transitions émanant de cet état sont constantes au cours du temps.

#### 4.4.2 Description des covariables

L'étude du lien entre le risque de crédit des obligations d'entreprises et les variables économiques et financières est un thème de recherche actif (p. ex. Couderc et Renault, 2005; Duffie *et al.*, 2007; Koopman *et al.*, 2009, 2011; Figlewski *et al.*, 2012; Azizpour *et al.*, 2014; Creal *et al.*, 2014). Cependant, à notre connaissance, ce type de lien n'a pas été examiné dans la littérature académique (mais probablement par les praticiens) sur des données d'assurance crédit. De manière intéressante, notre période d'observation inclut les années 2008 et 2009, marquées par une crise financière et sur laquelle nous pouvons observer les conséquences des actions des gestionnaires. La question qui consiste à identifier les variables susceptibles d'affecter les probabilités de transition est cependant complexe.

Dans ce chapitre, nous examinons les effets de 8 facteurs que nous regroupons en 3 catégories (*Conditions macroéconomiques générales*, *Direction de l'économie* et *Conditions sur les marchés financiers*), en suivant une logique similaire à celle de Figlewski *et al.* (2012) mais en l'adaptant à des variables concernant la France. La sélection des variables est également effectuée au regard de l'utilité qu'elles peuvent avoir pour les gestionnaires et pour l'application de *stress tests*. Dans la suite, nous considérons les variables suivantes :

- *Conditions macroéconomiques générales (taux de croissance trimestriel du chômage français, taux de croissance trimestriel de l'indice des prix à la consommation français, taux de croissance trimestriel du taux de création d'entreprises en France)*. L'évolution du chômage est considérée comme un indicateur de la santé de l'économie. Nous nous attendons à ce qu'une hausse du chômage ait un impact négatif sur la qualité de crédit du portefeuille. L'indice des prix à la consommation (IPC) est un indicateur économique central, mais les effets d'une hausse de l'inflation sont délicats à anticiper sur le portefeuille, notamment pour les *buyers* impliqués dans des opérations de commerce extérieur. Puisque le portefeuille d'un assureur crédit bénéficie d'une forte diversification, la création d'entreprise pourrait avoir un effet significatif, en introduisant de nouvelles firmes dans l'économie. En France, Dolignon (2011) remarque par exemple que les fortes hausses du nombre d'entreprises, simultanée à la mise en œuvre des lois Dutreil, ont conduit par la suite à des hausses du nombre de défauts car toutes ne sont pas viables.

- *Direction de l'économie (taux de croissance trimestriel du produit intérieur brut réel français, taux de croissance trimestriel de la production industrielle française)*. Le produit intérieur brut (PIB) réel est un indicateur macroéconomique couramment utilisé dans la littérature sur le risque de crédit pour représenter l'état courant du cycle économique. Lorsque l'économie croît plus rapidement, la qualité de crédit des *buyers* devrait s'améliorer et *vice versa*. Puisqu'il s'agit cependant d'un indicateur très général, il peut être considéré comme un approchant du résultat comptable d'un *buyer* générique. Nous considérons également la production industrielle comme un indicateur potentiellement plus précis, puisqu'il exclut la contribution des secteurs non industriels.
- *Conditions sur les marchés financiers (le taux d'emprunt d'État français à 10 ans, le taux d'évolution annuel de l'indice CAC40, le niveau de la volatilité de l'indice CAC40)*. Le taux d'intérêt joue un rôle important dans le financement des *buyers* et nous nous attendons à ce qu'une hausse des taux d'intérêt ait un impact négatif sur la qualité de crédit des *buyers*. Pour les grandes entreprises, le taux de rendement des actions est un indicateur de leur santé. Intuitivement, nous nous attendons également à ce qu'une hausse de l'indice de volatilité ou une baisse soudaine des marchés financiers ait un impact négatif sur la qualité de crédit des *buyers*.

Le Tableau 4.5 présente la liste des données utilisées, leurs sources et des transformations appliquées pour les inclure dans le modèle de migration. L'ensemble de ces variables est observé sur une base au moins trimestrielle et est synchronisé avec les dates d'observation des *ratings*. Ces variables tentent de capturer l'état courant de la conjoncture. Cependant, puisqu'il n'est pas possible de distinguer si les *buyers* pratiquent des activités à l'étranger, nous nous limitons, dans ce chapitre, à des facteurs liés à la conjoncture française.

## 4.5 Résultats empiriques

Dans cette section, nous considérons le modèle de migration avec différentes spécifications et discutons les résultats de l'estimation *in-sample*. Dans un second temps, nous analysons la qualité de prédiction (*out-of-sample*) de ces modèles de crédit. Finalement, nous concluons cette section par la calibration du modèle VAR pour les facteurs macros. Dans la suite, les calculs sont effectués à partir du logiciel R (R Core Team, 2015).

### 4.5.1 Estimation du modèle de migration

Nous estimons le modèle<sup>17</sup> décrit dans la Section 4.3.1, en utilisant les données et les covariables présentés précédemment. Dans l'Équation (4.4), nous décidons d'employer une fonction de lien *logit*<sup>18</sup>, telle que  $x \mapsto (1 + \exp\{-x\})^{-1}$ . Le modèle de régression ordinal avec lien *logit* considéré est adapté à la modélisation dynamique des probabilités de transition entre *ratings*. Toutefois, modéliser la clôture du contrat avec cette spécification, c'est-à-dire en l'assimilant à un *rating*, est discutable, puisque cet état n'est pas naturellement ordonné par rapport aux autres. Malik et Thomas (2012) font face au même problème et développent une procédure d'estimation en deux étapes, où le processus décrivant les *ratings* (et les défauts) est modélisé conditionnellement à la non-clôture du contrat. Ils proposent d'estimer les probabilités de fermeture du contrat séparément, en utilisant par exemple un simple modèle de régression

---

17. Dans sous-section, nous utilisons le *package* VGAM (Yee, 2010) du logiciel R.

18. Les résultats obtenus avec un lien *probit* sont très proches.

Table 4.5: Variables macroéconomiques et financières utilisées dans le modèle de migration.

Variable	Définition	Source	Moyenne	Écart-type
<i>Conditions macroéconomiques générales</i>				
$UR(t) - UR(t - 4)$	La variation annuelle du logarithme du taux de chômage, $UR(t)$ , à la fin du trimestre $t$ .	<i>Harmonized unemployment rate of all business for France</i> . Base de données FRED de la <i>Federal Reserve Bank</i> de St. Louis.	1.14%	8.96%
$CPI(t) - CPI(t - 4)$	La variation annuelle du logarithme de l'indice des prix à la consommation, $CPI(t)$ , à la fin du trimestre $t$ .	<i>Consumer Price Index of all items in France</i> . Base de données FRED de la <i>Federal Reserve Bank</i> de St. Louis.	1.71%	0.82%
$EB(t) - EB(t - 4)$	La variation annuelle du logarithme du nombre de créations d'entreprises, $EB(t)$ , à la fin du trimestre $t$ .	Nombre de créations d'entreprises tout secteur en France. Insee, Démographie des entreprises.	0.52%	11.34%
<i>Direction de l'économie</i>				
$GDP(t) - GDP(t - 4)$	La variation annuelle du logarithme du produit intérieur brut réel, $GDP(t)$ , à la fin du trimestre $t$ .	<i>Growth Domestic Product in France</i> . Base de données FRED de la <i>Federal Reserve Bank</i> de St. Louis.	1.18%	1.85%
$IP(t) - IP(t - 4)$	La variation annuelle du logarithme de la production industrielle, $IP(t)$ , à la fin du trimestre $t$ .	<i>Production of Total Industry in France</i> . Base de données FRED de la <i>Federal Reserve Bank</i> de St. Louis.	-1.04%	6.12%
<i>Conditions sur les marchés financiers</i>				
$r(t) = 0.25 \ln(1 + RF(t))$	La transformation trimestrielle des taux souverains français à 10 ans sur base annuelle, $RF(t)$ , à la fin du trimestre $t$ .	Banque de France.	0.90%	0.14%
$\rho(t) = \frac{CAC(t) - CAC(t - 4)}{CAC(t - 4)}$	La variation annuelle du logarithme de l'indice CAC40, $CAC(t)$ , à la fin du trimestre $t$ .	Yahoo!Finance	-0.01%	21.62%
$\sigma(t)$	La volatilité trimestrielle de l'indice CAC40, $CAC(t)$ , à la fin du trimestre $t$ . La volatilité est estimée comme l'écart-type annualisé (sur une base de 260 jours commerciaux) des rendements journaliers au sein d'un trimestre (arrondi à 90 jours commerciaux).	Yahoo!Finance	21.94%	10.60%

Note : Cette table décrit les facteurs utilisés pour le modèle de migration spécifié dans ce chapitre. Les statistiques descriptives sont calculées sur la période 2004:1-2012:3.

logistique. Cette spécification s'appuie cependant sur une hypothèse d'indépendance entre les événements de clôture et les changements de *ratings* qui ne semble pas se vérifier dans notre cas. Puisque la pratique des gestionnaires semble relativement conservatrice, nous décidons tout de même de modéliser la clôture, conjointement aux autres événements, à partir de notre modèle ordonné, en supposant qu'elle se positionne dans l'ordre juste avant la première dégradation (par exemple, pour un *buyer* dans l'état 2, l'état *C* se situe entre l'état 2 et l'état 3)<sup>19</sup>. Pour l'état 5, l'état *C* est positionné juste avant l'état de défaut *protracted*.

Nous commençons par discuter les résultats obtenus avec plusieurs spécifications du terme  $\theta_{ij,h}^\top \tilde{\mathbf{Z}}(t)$  dans l'Équation (4.4). L'estimation des paramètres est réalisée en dissociant chaque *rating* de départ, ce qui ne pose pas de difficulté, compte tenu de la nature additive de la fonction de log-vraisemblance. Du fait de la taille réduite des secteurs Agriculture et Finance/Immobilier, mais aussi dans l'optique de réduire le nombre de paramètres, nous choisissons de considérer le secteur comme une covariable du modèle. De plus, puisque les défauts provenant des classes 1 et 2, et les transitions  $5 \rightarrow 1$  sont très peu fréquents, nous les supposons constants dans le reste de ce chapitre. Ces transitions n'interviennent donc pas dans la modélisation. Le Tableau 4.6 illustre les résultats obtenus avec les spécifications suivantes : (M1) *Conditions macroéconomiques générales*, (M2) *Direction de l'économie*, (M3) *Conditions sur les marchés financiers*, (M4) *Toutes les variables*. Pour chacune d'elle, les coefficients associés aux facteurs macros sont supposés identiques, pour toutes les transitions issues d'un même état initial, c'est-à-dire  $\theta_{ij} = \theta_i$  (transitions parallèles). À l'inverse, les coefficients de seuil et ceux associés à chaque secteur sont supposés pouvoir varier. Cette hypothèse se retrouve fréquemment dans la littérature. Dans le souci de ne pas alourdir inutilement le tableau de résultats, nous omettons les estimations des coefficients de seuil  $\mu_{hj}$  ainsi que ceux associés aux secteurs.

Les modèles M1 et M3 présentent globalement les moins bonnes performances, avec 2 et 3 variables explicatives. Le modèle M4 est clairement le meilleur mais dépend de 8 variables. Ces estimations, pour les modèles M1 à M4, fournissent un premier aperçu de l'effet des facteurs macros sur les probabilités de transition. En général, ceux-ci apparaissent tous comme statistiquement significatifs. Dans ce contexte, un coefficient positif (resp. négatif), combiné à une hausse du facteur auquel il est associé, a un effet positif (resp. négatif) sur la qualité de crédit du *buyer*. Une première difficulté provient cependant du fait que les facteurs sont fortement corrélés entre eux. Par conséquent, en présence de plusieurs facteurs, les coefficients estimés peuvent présenter des signes inattendus, à cause de possibles combinaisons entre eux. Ceci explique par exemple, les signes opposés qui sont observés pour les taux de croissance du PIB réel et de la production industrielle pour M2. De manière intéressante, il semble qu'un taux de création d'entreprises plus élevé produise un effet négatif sur la qualité de crédit, probablement à cause de l'introduction de nouveaux *buyers* plus instables dans la population. La décroissance progressive du taux d'intérêt, observée sur la période en France, semble avoir un effet positif sur la qualité de crédit. Par ailleurs, nous remarquons que ces quatre modèles ont une qualité d'ajustement aux données relativement modeste, ce qui s'explique par le fait que les transitions issues d'un même état ont des formes relativement différentes, ne pouvant pas être appréhendées avec l'hypothèse de transitions parallèles. Ceci contribue à réduire l'interprétabilité des paramètres.

Dans ces conditions, nous décidons de relâcher l'hypothèse de transitions parallèles. Une

---

19. D'autres combinaisons ont été testées mais sans faire apparaître de différences notoires au niveau des résultats.

Table 4.6: Paramètres estimés pour différentes spécifications du modèle de migration avec l'hypothèse de transitions parallèles.

	État initial																
	1			2			3			4			5				
	M1	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3	M4	M5
Chômage	-1.25*** (0.07)			-1.17*** (0.06)			0.19*** (0.03)			-0.25*** (0.03)			-5.38*** (0.03)				
Inflation	-3.46*** (1.01)			2.92*** (0.64)			15.16*** (0.28)			1.48*** (0.23)			14.83*** (0.22)				
Création d'entreprises	-0.07 (0.07)			-0.30*** (0.06)			-0.59*** (0.03)			-1.29*** (0.03)			-3.53*** (0.03)				
PIB réel		17.17*** (1.24)			7.48*** (0.90)			-10.37*** (0.40)			4.72*** (0.32)						
Production industrielle		-2.49*** (0.36)			-0.40 (0.25)			3.81*** (0.11)			-3.12*** (0.09)						
AIC	16569.76	16364.82	13840.93	13819.14	69009.62	69945.37	175787.64	174640.69	220846.62	196586.05							
BIC	22113.76	21740.82	19384.93	19195.14	76569.62	77337.37	183347.64	182032.69	227398.62	202970.05							
Log vraisemblance	-8251.88	-8150.41	-6887.47	-6877.57	-34459.81	-34928.68	-87848.82	-87276.35	-110384.31	-98255.02							
	M3	M4	M3	M4	M3	M4	M3	M4	M3	M4	M3	M4	M3	M4	M3	M4	M5
Chômage		-1.65*** (0.10)			-0.46*** (0.08)			-0.05 (0.04)			-1.90*** (0.04)						
Inflation		8.73*** (1.32)			-2.63*** (0.95)			18.91*** (0.41)			16.26*** (0.32)						
Création d'entreprise		-1.63*** (0.10)			0.09 (0.08)			-0.30*** (0.04)			-1.43*** (0.03)						
PIB réel		19.01*** (1.58)			8.48*** (1.16)			0.61 (0.51)			8.33*** (0.41)						
Production industrielle		-5.45*** (0.52)			0.41 (0.36)			-2.08*** (0.16)			-8.77*** (0.13)						
Taux d'intérêt 10 ans		-35.54*** (3.70)			-44.67*** (3.50)			-80.38*** (1.19)			-43.03*** (0.95)						
Rendement CAC40		0.62*** (0.04)			-0.68*** (0.06)			0.57*** (0.03)			-0.73*** (0.01)						
Volatilité CAC40		-0.97*** (0.12)			-0.44*** (0.06)			-0.31*** (0.02)			-0.99*** (0.02)						
AIC	16140.48	15264.81	14257.66	13331.84	68364.90	64948.56	174533.85	165414.31	204793.23	177417.80							
BIC	21684.48	21648.81	19801.66	19715.84	75924.90	73348.56	182093.85	173814.31	211345.23	184809.80							
Log Vraisemblance	-8037.24	-7594.41	-7095.83	-6627.92	-34137.45	-32424.28	-87221.92	-82657.16	-102357.62	-88664.90							

Note : Ce tableau présente les paramètres estimés, ainsi que leur écart-type entre parenthèses, pour les 4 modèles de migration avec transitions parallèles : (M1) *Conditions macroéconomiques générales*, (M2) *Direction de l'économie*, (M3) *Conditions sur les marchés financiers*, (M4) *Toutes les variables*. Les différentes spécifications peuvent être comparées sur la base de leur log-vraisemblance, de leur *Akaike information criterion* (AIC) et de leur *Bayesian information criterion* (BIC). Les écarts-types sont calculés en utilisant l'inverse de la matrice hessienne du maximum de vraisemblance. Les estimations des coefficients de seuil  $\mu_{ij}$ , ainsi que ceux associés aux secteurs, sont omis. Les défauts provenant des états 1 et 2, ainsi que les transitions de l'état 5 vers 1, sont supposés constants. Significativité des tests de Wald : \*\*\* $p < 0.001$ , \*\* $p < 0.01$ , \* $p < 0.05$ .

telle spécification, autorisant des paramètres propres à chaque transition, est retenue par exemple par Figlewski *et al.* (2012). Son inconvénient est, bien évidemment, d'être plus coûteuse en paramètres. Le Tableau 4.7 permet de comparer la qualité des précédents modèles à leur nouvelle version (M1\*-M4\*), sans hypothèse de transitions parallèles. Le modèle M0 ne contient pas de lien avec les facteurs macros et est utilisé comme référence pour mesurer les performances des différents modèles. Les variables macros étant fortement corrélées entre elles, nous cherchons également à définir un modèle de migration comprenant au plus 3 facteurs pour éviter qu'il ne soit surajusté. Pour cela, nous construisons une procédure de sélection *forward-backward*, s'appuyant sur le log-vraisemblance et l'Akaike information criterion (AIC). Le modèle parcimonieux qui en ressort, noté M5\*, dépend du taux production industriel, de la volatilité du CAC40 et du niveau des taux d'intérêt souverains à 10 ans. En pratique, il est délicat d'affirmer la supériorité de ce modèle par rapport à d'autres, puisque certaines alternatives à 3 facteurs donnent également de bons résultats en termes d'ajustement aux données. Par ailleurs, des alternatives avec *lag* ont également été examinées et permettaient d'obtenir des niveaux d'ajustement aux données de qualité quasi-équivalente. Nous privilégions cependant un modèle non retardé, car il est mieux adapté à une logique de *stress tests*.

Les différentes spécifications proposées sont comparées en termes d'AIC, de BIC et de log-vraisemblance. L'ajustement aux données est examiné à partir du  $R^2$  de McFadden et du  $R^2$  de McFadden ajusté. La qualité des modèles M1\*, M2\* et M3\* est clairement supérieure à leur équivalent avec hypothèse de transitions parallèles. Notons également que les performances du modèle M4 sont, selon les indicateurs, relativement bonnes en comparaison des modèles M1\*-M3\*. Comme nous nous y attendions, le modèle M5\* donne de meilleures performances que les précédents modèles. Au regard des critères choisis, le modèle M4\* apparaît supérieur au modèle M5\*. Cependant, il comprend trop de paramètres et n'est pas privilégié car il risque d'être surajusté. Ainsi, nous retenons pour la suite les estimations fournies par le modèle M5\*, comme modèle de référence. En outre, nous remarquons que M2\* obtient de bonnes performances pour les transitions émanant des états 4 et 5, ces transitions étant apparemment sensibles à la production industrielle.

Les Tableaux 4.8 et 4.9 présentent les estimations des paramètres de seuil, les estimations des paramètres propres aux secteurs (le secteur Services/Commerce est pris comme secteur de référence), ainsi que les estimations de paramètres relatifs aux facteurs macros pour le modèle M5\*. Ils décrivent également les écarts-types associés à ces paramètres. Compte tenu des faibles nombres de défauts provenant des classes 1 et 2 et de transitions de 5 vers 1, aucun coefficient de seuil n'est à considérer pour ces transitions.

Les coefficients de seuil sont clairement significatifs et permettent de donner un premier aperçu des probabilités de transition sans facteur macro. Les coefficients liés aux secteurs sont presque tous significatifs, ce qui rend compte d'une hétérogénéité des *buyers* capturée, au moins en partie, par les secteurs. Pour chaque état initial, nous avons choisi un modèle comprenant au plus 3 facteurs, puis sélectionné celui proposant le meilleur ajustement aux données. Pratiquement tous les coefficients associés à ces facteurs sont significatifs, à la fois pour les dégradations et les améliorations de *ratings*. Hormis pour les *buyers* dans l'état 1, le signe et la magnitude des coefficients estimés indiquent, comme nous nous y attendions, que l'augmentation de la volatilité du CAC40 a un effet négatif sur la qualité de crédit du portefeuille. Les résultats sont plus ambigus pour la croissance de la production industrielle, car une décroissance a un effet négatif seulement pour les *buyers* les mieux notés. En effet, nous remarquons que les mauvais *ratings* sont touchés dans la direction opposée, ce qui peut

Table 4.7: Critères d'information et performances des différents modèles de migration.

Modèle	État initial				
	1	2	3	4	5
M0					
AIC	16900.29	14547.47	72012.62	182711.31	270704.55
BIC	21940.29	19587.47	79068.62	189767.31	276752.55
Log Vraisemblance	-8420.14	-7243.74	-35964.31	-91313.65	-135316.28
McFadden R <sup>2</sup>	0.53	0.40	0.47	0.29	0.14
McFadden R <sup>2</sup> ajusté	0.48	0.29	0.45	0.28	0.13
M1*					
AIC	15417.54	12875.74	60663.97	126999.99	157815.43
BIC	22977.54	20435.74	71247.97	137583.99	166887.43
Log Vraisemblance	-7663.77	-6392.87	-30268.99	-63437.00	-78853.71
McFadden R <sup>2</sup>	0.59	0.46	0.56	0.52	0.51
McFadden R <sup>2</sup> ajusté	0.53	0.36	0.54	0.51	0.50
M2*					
AIC	16081.48	13569.05	64006.56	107196.71	98392.70
BIC	22801.48	20289.05	73414.56	116604.71	106456.70
Log Vraisemblance	-8000.74	-6744.53	-31947.28	-53542.35	-49148.35
McFadden R <sup>2</sup>	0.56	0.55	0.53	0.60	0.70
McFadden R <sup>2</sup> ajusté	0.51	0.46	0.51	0.59	0.69
M3*					
AIC	14414.26	13514.79	62888.78	126951.08	125985.13
BIC	21974.26	21074.79	73472.78	137535.08	135057.13
Log Vraisemblance	-7162.13	-6712.39	-31381.39	-63412.54	-62938.57
McFadden R <sup>2</sup>	0.63	0.51	0.54	0.52	0.61
McFadden R <sup>2</sup> ajusté	0.57	0.43	0.53	0.51	0.60
M4*					
AIC	12592.34	11190.12	50472.16	85440.00	70664.23
BIC	24352.34	22950.12	66936.16	101904.00	84776.23
Log Vraisemblance	-6226.17	-5525.06	-25138.08	-42622.00	-35248.12
McFadden R <sup>2</sup>	0.69	0.65	0.64	0.68	0.79
McFadden R <sup>2</sup> ajusté	0.64	0.56	0.63	0.67	0.78
M5*					
AIC	14764.97	12996.75	59513.61	102565.07	94791.34
BIC	22324.97	20556.75	70097.61	113149.07	103863.34
Log Vraisemblance	-7337.49	-6453.38	-29693.81	-51219.54	-47341.67
McFadden R <sup>2</sup>	0.61	0.54	0.57	0.61	0.71
McFadden R <sup>2</sup> ajusté	0.55	0.45	0.55	0.61	0.70

Note : Ce tableau fournit la log-vraisemblance, l'*Akaike information criterion* (AIC), le *Bayesian information criterion* (BIC), le McFadden R<sup>2</sup> et le McFadden R<sup>2</sup> ajusté pour le modèle *logit* de lien cumulé, sans l'hypothèse de transitions parallèles, pour différentes spécifications (M0, M1\*-M5\*). Les défauts provenant des états 1 et 2, ainsi que les transitions de l'état 5 vers 1, sont supposés constants.

Table 4.8: Paramètres estimés pour le modèle de migration M5\* (État initiaux 1 et 2).

État initial 1	État de transition				
	< C	< 2	< 3	< 4	< 5
Seuil	3.22*** (0.04)	3.60*** (0.05)	4.71*** (0.06)	7.20*** (0.10)	12.74*** (0.22)
Agriculture	0.50*** (0.02)	0.66*** (0.03)	0.49*** (0.03)	0.77*** (0.05)	0.82*** (0.09)
Finance/Immobilier	0.48*** (0.01)	0.94*** (0.02)	1.01*** (0.02)	1.15*** (0.04)	1.30*** (0.08)
Produits finis	-0.08*** (0.01)	-0.29*** (0.01)	-0.13*** (0.02)	-0.08** (0.02)	-0.11* (0.04)
Matières premières	-0.04*** (0.01)	-0.19*** (0.01)	-0.25*** (0.01)	-0.14*** (0.02)	-0.06 (0.03)
Volatilité du CAC40	1.07*** (0.09)	0.55*** (0.10)	0.43** (0.13)	-1.07*** (0.22)	-3.35*** (0.43)
Production industrielle	3.31*** (0.14)	3.05*** (0.16)	3.19*** (0.23)	1.39** (0.44)	-5.57*** (1.09)
Taux d'intérêt 10 ans	-70.04*** (3.90)	-53.39*** (4.52)	-62.70*** (5.76)	-162.74*** (9.82)	-528.87*** (20.79)
2	< 2	< C	< 3	< 4	< 5
Seuil	-5.29*** (0.12)	2.96*** (0.03)	3.21*** (0.03)	5.46*** (0.06)	8.87*** (0.14)
Agriculture	-1.27*** (0.18)	0.42*** (0.03)	0.60*** (0.03)	0.23*** (0.05)	0.05 (0.10)
Finance/Immobilier	0.13** (0.05)	0.09*** (0.01)	0.65*** (0.02)	0.46*** (0.03)	0.69*** (0.07)
Produits finis	0.46*** (0.03)	-0.14*** (0.01)	-0.27*** (0.01)	-0.19*** (0.02)	-0.22*** (0.04)
Matières premières	-0.06 (0.04)	-0.02* (0.01)	-0.10*** (0.01)	-0.10*** (0.02)	-0.14*** (0.03)
Volatilité du CAC40	0.75** (0.23)	-0.11* (0.05)	-0.16** (0.06)	-0.67*** (0.10)	-2.09*** (0.23)
Production industrielle	4.80*** (0.39)	1.49*** (0.08)	1.46*** (0.08)	0.64*** (0.17)	-3.92*** (0.43)
Taux d'intérêt 10 ans	-79.65*** (11.17)	-17.09*** (2.79)	-12.27*** (3.08)	-94.46*** (5.89)	-250.81*** (12.81)

Note : Ce tableau fournit les estimateurs des paramètres de seuil  $\mu_{h,j}$ , les estimateurs des coefficients pour les indicatrices des secteurs et les estimateurs des paramètres associés aux facteurs macros, pour les transitions issues des états 1 et 2 obtenus avec le modèle M5\*. Les écarts-types sont calculés en utilisant l'inverse de la matrice hessienne du maximum de vraisemblance. Les défauts provenant des états 1 et 2, ainsi que les transitions de l'état 5 vers 1 sont supposés constants. Significativité des tests de Wald : \*\*\* $p < 0.001$ , \*\* $p < 0.01$ , \* $p < 0.05$ .



Table 4.9: Paramètres estimés pour le modèle de migration M5\* (État initiaux 3, 4 et 5).

État initial	État de transition						
	< 2	< 3	< C	< 4	< 5	< P	< I
3							
Seuil	-9.33*** (0.25)	-6.32*** (0.05)	3.49*** (0.01)	4.44*** (0.02)	6.42*** (0.03)	7.05*** (0.07)	11.30*** (1.05)
Agriculture	-1.69*** (0.26)	-2.12*** (0.07)	0.81*** (0.01)	1.33*** (0.01)	1.31*** (0.02)	1.64*** (0.08)	16.28 (697.65)
Finance/Immobilier	0.68*** (0.09)	-0.15*** (0.03)	0.05*** (0.01)	0.57*** (0.01)	0.60*** (0.02)	0.52*** (0.05)	2.25* (1.01)
Produits finis	0.72*** (0.07)	0.87*** (0.02)	-0.11*** (0.00)	-0.43*** (0.01)	-0.28*** (0.01)	-0.61*** (0.02)	-0.02 (0.28)
Matières premières	-0.21** (0.08)	0.06*** (0.02)	0.12*** (0.00)	-0.09*** (0.00)	0.00 (0.01)	-0.46*** (0.02)	1.10** (0.32)
Volatilité du CAC40	0.12 (0.49)	0.39*** (0.10)	-0.14*** (0.02)	-0.58*** (0.03)	-1.32*** (0.05)	-0.16 (0.13)	2.27 (2.04)
Production industrielle	2.67** (0.77)	1.16*** (0.15)	0.93*** (0.03)	-0.23*** (0.04)	-3.89*** (0.08)	0.51** (0.19)	5.56* (2.60)
Taux d'intérêt 10 ans	4.61 (24.08)	8.51 (5.23)	-66.66*** (1.23)	-86.33*** (1.58)	-176.31*** (2.62)	-22.23** (7.09)	-14.00 (103.19)
4							
Seuil	-12.13*** (0.68)	-8.94*** (0.18)	-4.54*** (0.03)	3.13*** (0.01)	4.34*** (0.02)	6.97*** (0.04)	11.44*** (0.49)
Agriculture	-1.52* (0.69)	-2.05*** (0.25)	-1.81*** (0.03)	1.01*** (0.01)	1.54*** (0.02)	1.81*** (0.06)	3.16** (1.03)
Finance/Immobilier	0.97*** (0.21)	0.56*** (0.07)	-0.39*** (0.02)	0.10*** (0.01)	0.83*** (0.01)	0.49*** (0.03)	2.16*** (0.59)
Produits finis	0.27 (0.20)	0.47*** (0.05)	0.58*** (0.01)	0.01 (0.00)	-0.28*** (0.01)	-0.50*** (0.02)	-0.17 (0.16)
Matières premières	-0.50* (0.20)	-0.33*** (0.05)	0.12*** (0.01)	0.05*** (0.00)	-0.17*** (0.00)	-0.60*** (0.01)	0.39** (0.14)
Volatilité du CAC40	-1.34 (1.32)	-0.79* (0.33)	-2.71*** (0.04)	-0.47*** (0.02)	-1.16*** (0.03)	-0.58*** (0.07)	1.53 (0.83)
Production industrielle	1.52 (1.97)	-4.10*** (0.44)	-12.31*** (0.05)	-0.09** (0.03)	-3.48*** (0.04)	-0.24* (0.11)	2.48* (1.13)
Taux d'intérêt 10 ans	126.27* (63.99)	31.76 (18.21)	11.11*** (2.85)	-48.52*** (1.02)	-60.78*** (1.48)	-100.42*** (4.20)	-176.56*** (45.85)
5							
Seuil	-11.56*** (0.47)	-7.15*** (0.09)	-2.65*** (0.02)	2.07*** (0.01)	5.11*** (0.05)	9.94*** (0.35)	
Agriculture	-1.03 (0.52)	-0.17** (0.06)	-0.85*** (0.02)	0.60*** (0.01)	1.19*** (0.08)	2.71** (0.97)	
Finance/Immobilier	0.94*** (0.16)	0.18*** (0.04)	-0.32*** (0.01)	0.11*** (0.01)	0.49*** (0.04)	0.01 (0.20)	
Produits finis	0.34** (0.13)	0.25*** (0.02)	0.36*** (0.01)	0.08*** (0.01)	-0.47*** (0.02)	-0.22 (0.12)	
Matières premières	-0.19 (0.12)	-0.08*** (0.02)	0.15*** (0.00)	0.14*** (0.00)	-0.40*** (0.01)	0.56*** (0.11)	
Volatilité du CAC40	-2.56** (0.92)	-4.13*** (0.17)	-1.31*** (0.03)	-0.40*** (0.02)	-0.23** (0.09)	-0.18 (0.58)	
Production industrielle	-2.19 (1.44)	-8.76*** (0.23)	-4.54*** (0.04)	8.05*** (0.03)	-0.47*** (0.13)	3.40*** (0.89)	
Taux d'intérêt 10 ans	231.79*** (43.49)	142.29*** (8.14)	-10.09*** (1.56)	39.90*** (1.20)	39.83*** (4.51)	-78.45* (34.18)	

Note : Ce tableau fournit les estimateurs des paramètres de seuil  $\mu_{hj}$ , les estimateurs des coefficients pour les indicatrices des secteurs et les estimateurs des paramètres associés aux facteurs macros, pour les transitions issues des états 3, 4 et 5 obtenus avec le modèle M5\*. Les écarts-types sont calculés en utilisant l'inverse de la matrice hessienne du maximum de vraisemblance. Les défauts provenant des états 1 et 2, ainsi que les transitions de l'état 5 vers 1 sont supposés constants. Significativité des tests de Wald : \*\*\* $p < 0.001$ , \*\* $p < 0.01$ , \* $p < 0.05$ .

être expliqué par l'effet de sélection introduit *via* les annulations. La baisse continue des taux d'intérêt français à 10 ans sur la période semble produire un effet largement positif.

Le lien entre le risque de crédit et les facteurs macros apparaît plus clairement en présentant les transitions estimées. Nous nous focalisons tout d'abord sur les probabilités d'amélioration et de dégradation. La Figure 4.4 représente ces probabilités estimées pour le secteur Services/Commerce. Les probabilités de transition associées aux autres secteurs sont obtenues par un ajustement en niveau. Comme on pourrait s'y attendre, pour une classe donnée, les probabilités d'une amélioration des *ratings* augmentent lorsque la qualité de crédit diminue. Inversement, celles d'une dégradation décroissent lorsque la qualité de crédit diminue. Les probabilités situées de part et d'autre de la diagonale des matrices de migration sont celles dont le niveau est le plus élevé. La crise économique et financière de 2008-2009 a produit des effets importants sur la qualité de crédit des *buyers*. Notons également que les probabilités de dégradation augmentent fortement pendant cette période, mais uniquement pour les *buyers* les mieux notés, ce qui s'explique par les annulations pratiquées par les gestionnaires pendant cette période. Pour les classes 3 et 4, il en résulte même un effet non-intuitif, caractérisé par une baisse des probabilités de dégradation pendant cette période de crise, suivie d'une hausse des probabilités d'amélioration (des notations).

La Figure 4.5 illustre les probabilités de défaut estimées obtenues à partir du modèle de migration, ainsi que leur intervalle de confiance à 95 % (erreur sur les paramètres obtenue par méthode delta). En raison du manque d'observations, nous présentons les probabilités de transition des trois secteurs dont les expositions sont les plus importantes, c'est-à-dire Matières premières, Produits finis et Services/Commerce. Pour comparaison, nous représentons également les probabilités estimées selon l'estimateur d'Aalen-Johansen, dont le calcul est décrit en 4.4. Cela constitue une approximation des probabilités de défaut brutes.

S'agissant des défauts *protracted*, une rupture apparaît au début de l'année 2007, qu'on peut expliquer par le changement opéré dans les données à cette date (cf. Section 4.4). Globalement, nous observons, pour tous les *ratings*, une faible baisse de ces probabilités de défaut sur la période, même si elle est moins marquée pour les secteurs Agriculture et Finance/Immobilier. À partir du début de l'année 2007, les probabilités de défaut *protracted* estimées sont relativement stables, pour les mauvais *ratings*, et nous n'observons pas d'effet particulier sur la période 2008-2009. Ceci confirme l'effet protecteur des annulations à cette date<sup>20</sup>. S'agissant du défaut *insolvency*, des pics à cette date sont visibles pour les *buyers* des classes 3 et 5, mais demeurent relativement modestes.

Finalement, la Figure 4.6 présente les probabilités de clôture obtenues avec le même modèle. Les probabilités de clôture sont sensibles pendant la période 2008-2009, où se matérialisent des difficultés économiques, en particulier pour les *buyers* mal notés. Nous remarquons que le modèle présente des difficultés à appréhender certaines probabilités de transition issues de l'état 4, à cause de certains points qui semblent aberrants pour les secteurs Agriculture et Finance/Immobilier. Il convient également de noter que le modèle n'arrive pas à capturer complètement l'effet produit par certains pics. Un modèle plus avancé, s'appuyant par exemple sur des fragilités, serait nécessaire pour cela.

---

20. Une faible hausse survient à la fin de l'année 2010 pour le secteur Matières premières, mais n'est pas appréhendée par le modèle.

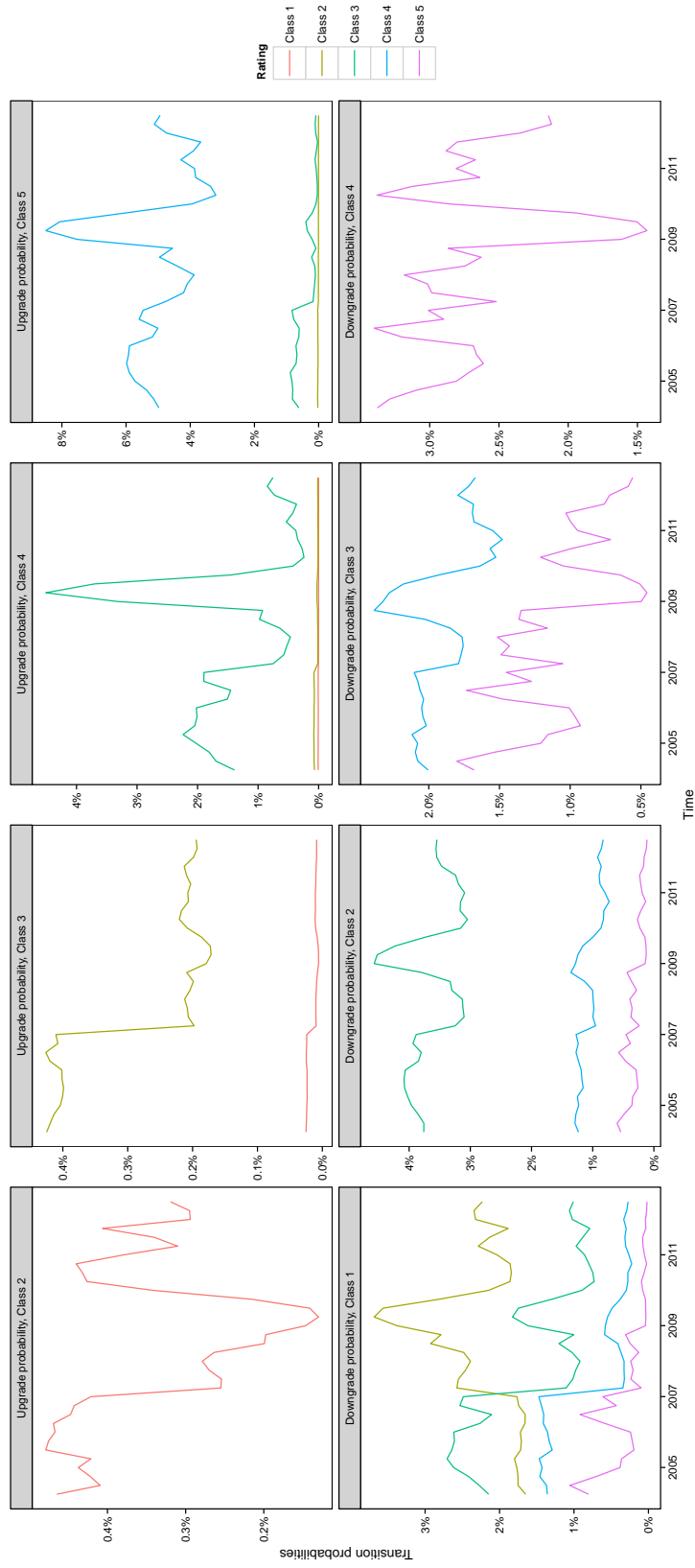
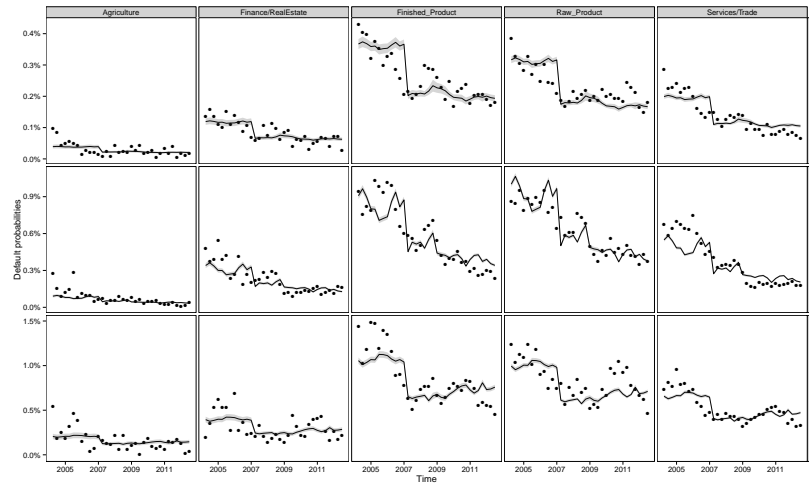
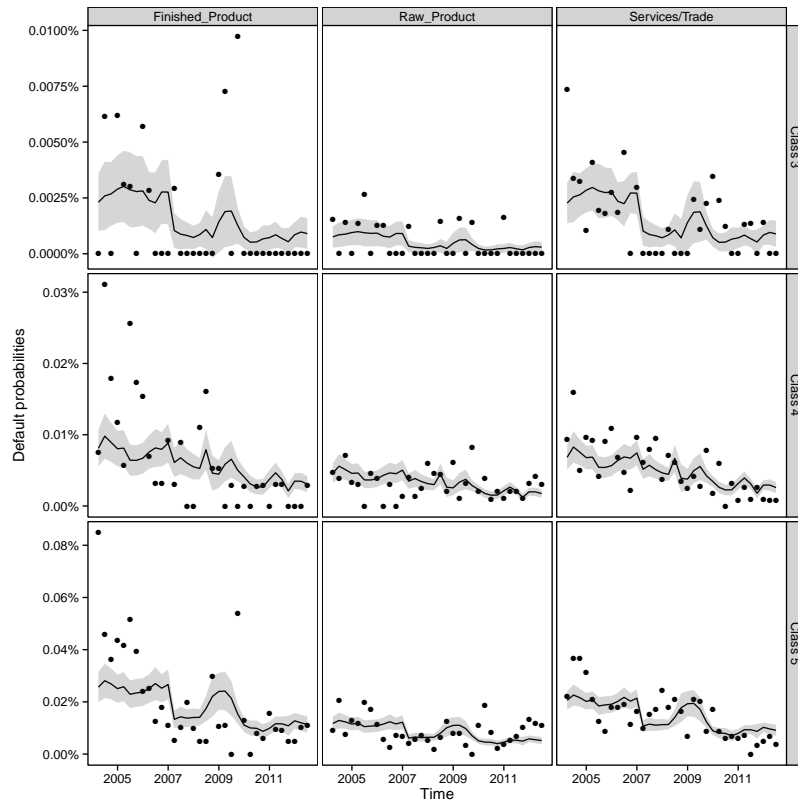


Figure 4.4: Estimation des probabilités de transition trimestrielles pour le secteur Services/Commerce. La première ligne représente les améliorations de la qualité de crédit pour les classes 2 à 5. La seconde ligne correspond aux probabilités de dégradation depuis les classes 1 à 4.



(a) Défauts *protracted*.



(b) Défauts *insolvency*.

Figure 4.5: Estimation trimestrielle des probabilités de (a) défaut *protracted* et de (b) défaut *insolvency* pour les *ratings* 3 à 5, avec les intervalles de confiance à 95 % relatifs à l'incertitude sur les paramètres. Les défauts *protracted* sont présentés pour l'ensemble des secteurs. Nous omettons les secteurs Agriculture et Finance/Immobilier par manque d'observations pour les défauts *insolvency*. Les points correspondent aux probabilités de défaut brutes, calculées avec l'estimateur non-paramétrique d'Aalen-Johansen.

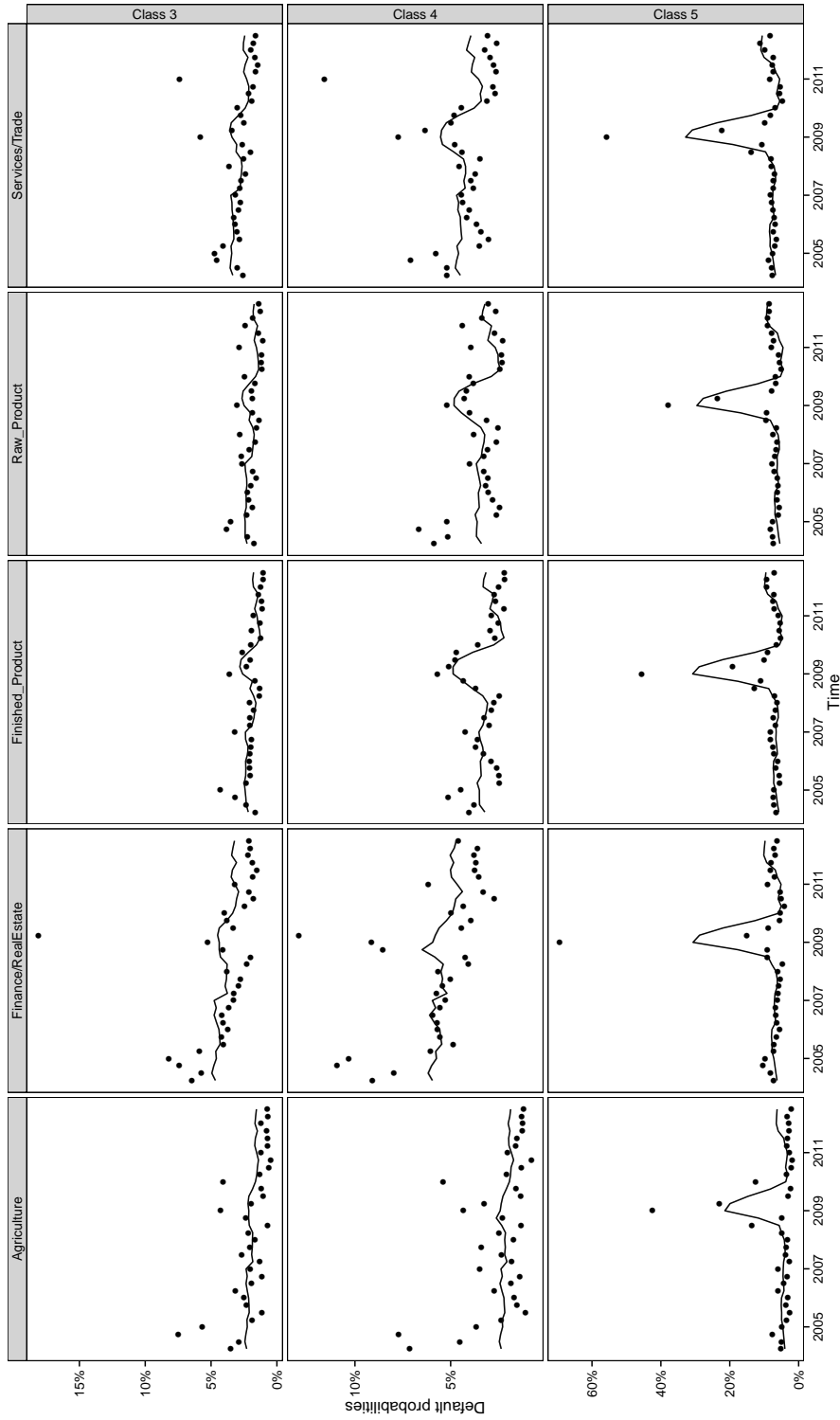


Figure 4.6: Estimation trimestrielle des probabilités de clôture pour l'ensemble des secteurs, avec les intervalles de confiance à 95 % relatifs à l'incertitude sur les paramètres. Les points correspondent aux probabilités de défaut brutes, calculées avec l'estimateur non-paramétrique d'Aalen-Johansen.

### 4.5.2 Résultats *out-of-sample* pour le modèle de migration

Nous examinons à présent les résultats *out-of-sample* du modèle de migration afin d'évaluer la qualité de ses prédictions. En suivant une approche récursive, nous projetons, pour chaque date  $t$  appartenant à la période sur laquelle est effectuée l'analyse *out-of-sample*, les probabilités de transition et de défaut sur chaque période  $[t, t + 1]$  de durée égale à un trimestre, à partir du modèle de migration ajusté sur la fenêtre  $[2004 : 1, t]$ . Cette manière de procéder est largement utilisée dans la littérature économétrique, et plus spécifiquement en crédit (p. ex. Frydman et Schuermann, 2008; Koopman *et al.*, 2008; Stefanescu *et al.*, 2009; Chava *et al.*, 2011; Fei *et al.*, 2012). La période de projection *out-of-sample* s'étend de Septembre 2009 à Juin 2012. Pour calculer les probabilités trimestrielles, il est nécessaire de disposer de la valeur des facteurs macros jusqu'à la fin de la fenêtre d'apprentissage, ainsi que de l'exposition au risque à cette date. Puisque ces informations sont directement disponibles, il est aisé de calculer les probabilités de transition à partir des Équations (4.4) et (4.5).

Pour la gestion des risques, il est important de pouvoir générer, aussi précisément que possible, le nombre de transitions et de défauts survenus au sein du portefeuille. Aussi, nous mesurons la qualité des prédictions en nous focalisant sur l'erreur de prédiction  $\hat{p}_{h,j,k} - \bar{p}_{h,j,k}$ , où  $\hat{p}_{h,j,k}$  correspond à l'estimateur des probabilités de transition (et de défaut) et  $\bar{p}_{h,j,k}$  est obtenu à partir de l'estimateur non-paramétrique dit d'Aalen-Johansen. Nous considérons, pour chaque date  $t$  comprise entre Septembre 2009 et Juin 2012, l'erreur absolue moyenne (MAE) et la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE), en agrégeant l'ensemble des améliorations de *rating*, des dégradations de *rating*, des défauts et des clôtures.

Cette analyse se concentre sur les résultats des modèles M4, M4\* et M5\*, qui ressortaient comme étant les meilleurs modèles, au sens des critères statistiques retenus, dans la section précédente. Ils sont également comparés au modèle M0 sans facteur. Le Tableau 4.10 fournit une présentation des erreurs de prédiction par trimestre pour chacune de ces spécifications. Il compare l'adéquation de ces modèles pour l'ensemble des améliorations et des dégradations de *ratings*, ainsi que les défauts et les clôtures.

De manière générale, les modèles donnent des prédictions relativement proches des probabilités estimées non-paramétriquement. Notons également que la période sur laquelle elles sont mesurées est plus stable que les années qui précèdent. Les probabilités non-paramétriques observées sur la période sont relativement proches des probabilités constantes, estimées sur l'ensemble de la période, ce qui explique pourquoi l'erreur de prédiction du modèle M0 n'est pas aussi importante que ce à quoi il serait possible de s'attendre. Sur ce point, nous sommes limités par la taille de l'échantillon. S'agissant des probabilités liées à une amélioration, les modèles M4 et M4\* fournissent des performances comparables. Celles-ci sont cependant légèrement moins bonnes que celles obtenues avec le modèle M5\*, en particulier à partir du troisième trimestre 2010. Ces trois modèles présentent de mauvaises performances pour le tout premier trimestre de projection. S'agissant des dégradations, l'erreur obtenue pour M5\* est généralement plus faible que pour M4 et M4\*. Comme nous le remarquons dans la section précédente, les probabilités de défaut observées sont peu sensibles à la conjoncture. Ainsi, nos projections obtiennent de bons résultats, hormis pour le modèle M4. Par ailleurs, M5\* est le meilleur de ces modèles s'agissant de la projection des probabilités de clôture. Notons cependant que le niveau des erreurs pour ces dernières est sensiblement plus élevé que pour les autres transitions. Rappelons pour expliquer ce point, qu'un écart était déjà observé pour l'estimation *in-sample*.

Enfin, de manière similaire à ce que font Koopman *et al.* (2008), nous évaluons la métrique

Table 4.10: Résultats *out-of-sample*.

Date	Améliorations			Dégradations			Clôtures			Défauts			Clôtures		
	MAE	RMSE	M4*	MAE	RMSE	M4*	MAE	RMSE	M4*	MAE	RMSE	M4*	MAE	RMSE	M4*
2009:3	9.45e-02	2.81e-01	4.33e-03	7.14e-03	2.94e-03	3.60e-03	2.52e-02	4.56e-02	1.49e-02	3.49e-02	5.00e-03	8.20e-03	4.04e-04	6.46e-04	1.85e-02
2009:4	9.13e-02	2.70e-01	3.32e-03	4.78e-03	2.96e-03	3.63e-03	2.23e-02	3.77e-02	4.57e-03	1.07e-02	4.82e-03	7.13e-03	4.13e-04	8.35e-04	2.38e-02
2010:1	9.86e-02	2.92e-01	3.81e-03	6.75e-03	2.93e-03	3.61e-03	3.03e-02	5.06e-02	1.61e-03	3.09e-03	4.74e-03	7.41e-03	5.37e-04	1.32e-03	1.98e-02
2010:2	9.80e-02	2.91e-01	4.61e-03	7.77e-03	2.94e-03	3.63e-03	2.92e-02	4.83e-02	1.30e-02	2.87e-02	5.69e-03	8.94e-03	5.67e-04	1.08e-03	3.14e-02
2010:3	9.84e-02	2.92e-01	4.41e-03	6.23e-03	2.93e-03	3.64e-03	2.79e-02	4.71e-02	3.11e-03	5.61e-03	4.64e-03	7.62e-03	5.55e-04	1.27e-03	2.18e-02
2010:4	9.66e-02	2.86e-01	4.81e-03	6.56e-03	2.94e-03	3.66e-03	2.90e-02	4.86e-02	2.53e-03	5.60e-03	3.70e-03	4.83e-03	3.66e-04	7.26e-04	1.71e-02
2011:1	9.52e-02	2.83e-01	3.55e-03	5.11e-03	2.94e-03	3.67e-03	2.49e-02	3.86e-02	1.41e-03	2.93e-03	3.27e-03	4.88e-03	4.08e-04	8.41e-04	1.20e-02
2011:2	9.45e-02	2.78e-01	3.57e-03	5.09e-03	2.95e-03	3.70e-03	2.12e-02	3.23e-02	2.48e-03	4.81e-03	3.38e-03	5.28e-03	3.37e-04	6.66e-04	1.23e-02
2011:3	9.56e-02	2.83e-01	2.96e-03	4.16e-03	2.93e-03	3.68e-03	2.29e-02	3.61e-02	1.86e-03	3.26e-03	4.30e-03	7.05e-03	8.37e-04	1.64e-03	1.86e-02
2011:4	9.27e-02	2.76e-01	5.71e-03	7.55e-03	2.88e-03	3.63e-03	1.65e-02	2.81e-02	2.31e-03	4.90e-03	4.96e-03	7.17e-03	5.59e-04	1.07e-03	1.50e-02
2012:1	9.29e-02	2.76e-01	4.56e-03	6.14e-03	2.84e-03	3.58e-03	1.86e-02	2.98e-02	3.32e-03	7.67e-03	4.36e-03	6.27e-03	6.34e-04	1.34e-03	2.10e-02
2012:2	9.45e-02	2.80e-01	2.84e-03	3.85e-03	2.81e-03	3.54e-03	1.77e-02	2.79e-02	2.06e-03	4.92e-03	3.03e-03	4.13e-03	5.86e-04	1.23e-03	1.80e-02
M4															
2009:3	4.40e-02	1.19e-01	5.30e-03	8.35e-03	9.48e-04	2.09e-03	1.76e-02	2.82e-02	4.53e-02	1.18e-02	4.36e-03	6.91e-03	3.88e-04	6.67e-04	1.95e-02
2009:4	2.21e-02	6.53e-02	4.79e-03	7.45e-03	1.47e-03	2.78e-03	2.43e-02	3.60e-02	1.94e-03	4.93e-03	3.66e-03	5.76e-03	7.96e-04	1.37e-03	1.55e-02
2010:1	7.60e-03	2.10e-02	3.65e-03	5.90e-03	8.07e-04	1.71e-03	1.56e-02	1.86e-02	4.09e-03	1.06e-02	5.29e-03	8.65e-03	6.53e-04	1.21e-03	6.13e-03
2010:2	2.26e-03	5.90e-03	6.97e-03	1.10e-02	5.26e-04	1.19e-03	4.00e-02	7.41e-02	3.15e-03	8.27e-03	5.98e-03	9.33e-03	5.78e-04	1.20e-03	1.23e-02
2010:3	2.11e-03	4.36e-03	6.49e-03	1.07e-02	3.90e-04	7.29e-04	3.05e-02	4.87e-02	3.04e-03	8.48e-03	3.71e-03	5.90e-03	3.54e-04	7.92e-04	6.62e-03
2010:4	8.32e-03	2.12e-02	4.52e-03	6.25e-03	7.05e-04	1.71e-03	1.31e-02	2.21e-02	2.30e-03	6.26e-03	3.27e-03	4.74e-03	2.82e-04	5.17e-04	1.58e-02
2011:1	4.06e-03	9.38e-03	3.12e-03	4.44e-03	6.53e-04	1.45e-03	9.31e-03	1.12e-02	9.07e-04	1.85e-03	2.69e-03	3.84e-03	3.19e-04	6.95e-04	1.09e-02
2011:2	3.58e-03	6.75e-03	2.74e-03	4.32e-03	4.41e-04	9.39e-04	7.59e-03	9.62e-03	3.26e-03	6.22e-03	2.43e-03	3.77e-03	3.46e-04	7.62e-04	7.89e-03
2011:3	2.47e-03	4.46e-03	3.62e-03	6.28e-03	4.28e-04	9.20e-04	1.97e-02	3.43e-02	1.62e-03	2.98e-03	3.54e-03	5.87e-03	6.58e-04	1.42e-03	2.03e-02
2011:4	3.12e-03	7.22e-03	5.08e-03	6.73e-03	3.09e-04	6.75e-04	1.39e-02	2.39e-02	1.40e-03	2.90e-03	5.11e-03	7.51e-03	3.18e-04	6.28e-04	1.48e-02
2012:1	2.81e-03	7.04e-03	5.16e-03	7.08e-03	6.02e-04	1.22e-03	1.92e-02	2.97e-02	1.81e-03	3.48e-03	3.57e-03	5.33e-03	4.22e-04	8.07e-04	1.32e-02
2012:2	2.90e-03	6.31e-03	2.96e-03	4.14e-03	3.23e-04	6.80e-04	1.22e-02	1.97e-02	2.28e-03	5.07e-03	2.67e-03	4.00e-03	4.53e-04	9.76e-04	1.58e-02

Note : Cette table fournit les performances *out-of-sample* des modèles M0, M4, M4\* et M5\*. Ces performances sont mesurées à partir de l'erreur absolue moyenne (MAE) et de la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) sur la période [2009 : 3, 2012 : 2] pour les améliorations de *ratings*, les dégradations de *ratings*, les défauts et les clôtures.

utilisée par Jafry et Schuermann (2004) pour analyser de manière agrégée la performance de ces différents modèles, trimestre par trimestre. Cette quantité est définie comme la moyenne des valeurs singulières d'une matrice de migration pour le sous-groupe  $k$ , diminuée de la matrice unité

$$SVD_k(t) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i \left( (\widetilde{\mathbf{p}}_k(t))^\top \widetilde{\mathbf{p}}_k(t) \right)},$$

avec  $\widetilde{\mathbf{p}}_k(t) = \mathbf{p}_k(t) - \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité, et  $\lambda_i(\mathbf{p})$  la fonction retournant la  $i$ -ème valeur propre de la matrice  $\mathbf{p}$ . Les résultats obtenus sont reportés sur la Figure 4.7.

Les résultats de projection évoluent faiblement entre M4, M4\* et M5\* à partir de début 2010. Chacun de ces modèles capture, au moins partiellement la dynamique des probabilités brutes. Certains points, comme la baisse observée à fin 2010, sont cependant mal appréhendés. Comme évoqué précédemment, la prise en compte de ces événements plus atypiques requiert la mise en œuvre d'un modèle plus sophistiqué, fondé par exemple sur des fragilité (p. ex. Koopman *et al.*, 2008; Duffie *et al.*, 2009; Koopman *et al.*, 2011). Cette analyse sera étudiée dans de futures recherches.

### 4.5.3 Estimations du modèle macroéconomique

Dans cette section, nous procédons à l'estimation du modèle économétrique régi par l'Équation (4.7)<sup>21</sup>. Puisque les modèles de séries temporelles pour les facteurs macros et de migration peuvent être estimés séparément, les données retenues pour le premier couvrent une période plus longue, allant de Septembre 1992 à Septembre 2012 (81 observations sur base trimestrielle). Cependant, les données relatives à la création d'entreprise ne sont pas observées sur toute cette période. Par conséquent, nous excluons cette grandeur du modèle de séries temporelles et supposons que cette variable demeure constante dans la projection (celle-ci n'intervient pas dans le modèle M5\*).

Avant de procéder à l'estimation du modèle, nous commençons par vérifier si les facteurs considérés vérifient l'hypothèse d'intégration d'ordre 1 (I(1)) pour les séries univariées ( $UR(t)$ ,  $CPI(t)$ ,  $GDP(t)$ ,  $IP(t)$ ,  $r(t)$ ,  $CAC(t)$ ,  $\sigma(t)$ ). Le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF) est considéré pour détecter la présence de racine unitaire. Nous considérons que ces séries peuvent inclure des termes déterministes (constante ou tendance). Le nombre adéquat de termes retardés (*lags*) est évalué à partir du critère AIC, en autorisant un nombre maximum de retards égal à 10. Les résultats des tests ADF sont reportés dans le Tableau 4.11 à la fois sur les séries en niveau et en différence première. Cette table présente également les résultats pour l'indice des prix à la consommation en différence seconde.

Au vu des résultats sur les racines unitaires, il est raisonnable de considérer que les variables ( $UR(t)$ ,  $\Delta CPI(t)$ ,  $GDP(t)$ ,  $IP(t)$ ,  $r(t)$ ,  $CAC(t)$ ,  $\sigma(t)$ ) sont au moins I(1), ce qui permet de nous tourner vers une formulation VECM. Dans un premier temps, nous sélectionnons le nombre de *lags*, en s'appuyant sur le critère AIC et en supposant que le *lag* maximal est d'ordre 5 compte tenu de la profondeur de l'historique considéré. Un modèle VAR d'ordre 2 est retenu, pour lequel nous considérons une constante et une tendance déterministe. Nous conduisons également des tests univariés et multivariés sur les résidus (normalité, homoscedasticité, autocorrélation) qui sont globalement satisfaisants. Notons cependant que l'analyse des résidus révèle la présence d'autocorrélation pour le logarithme de l'indice d'inflation, ainsi

21. Les résultats sont obtenus en utilisant les *packages* *urca* et *vars*, développés sous le logiciel R, cf. Pfaff (2008) et les références associées.



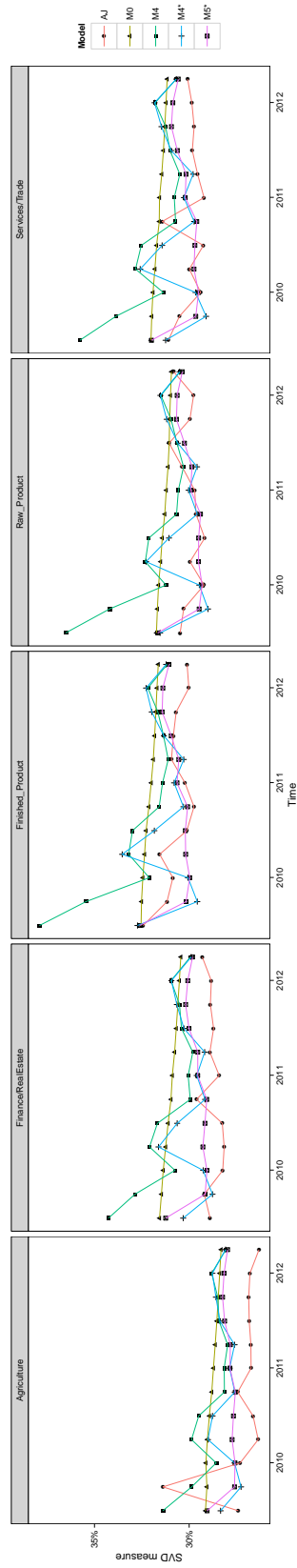


Figure 4.7: Mesure SVD pour les matrices de migration trimestrielles par secteur. La mesure SVD est calculée pour les modèles M0, M4, M4\* et M5\*. L'adéquation du modèle aux données est analysable, en comparant les résultats projetés à la mesure SVD calculée sur les probabilités de transition non-paramétriques.

Table 4.11: Résultats des tests ADF pour les facteurs macros.

Facteur	Termes déterministes	Retard	Statistique de test	Valeurs critiques		
				1%	5%	10%
$UR(t)$	constante, tendance	5	-0.44	-4.04	-3.45	-3.15
$\Delta UR(t)$	constante	4	-4.09	-3.51	-2.89	-2.58
$IPC(t)$	constante, tendance	9	-2.18	-4.04	-3.45	-3.15
$\Delta IPC(t)$	constante	8	-2.181	-3.51	-2.89	-2.58
$\Delta^2 IPC(t)$	constante	7	-5.34	-3.51	-2.89	-2.58
$GDP(t)$	constante, tendance	3	-1.19	-4.04	-3.45	-3.15
$\Delta GDP(t)$	constante	2	-3.51	-3.51	-2.89	-2.58
$IP(t)$	constante, tendance	2	-1.97	-4.04	-3.45	-3.15
$\Delta IP(t)$	constante	1	-4.78	-3.51	-2.89	-2.58
$r(t)$	constante, tendance	1	-3.71	-4.04	-3.45	-3.15
$\Delta r(t)$	constante	1	-6.08	-3.51	-2.89	-2.58
$CAC(t)$	constante, tendance	1	-1.62	-4.04	-3.45	-3.15
$\Delta CAC(t)$	constante	1	-5.74	-3.51	-2.89	-2.58
$\sigma(t)$	constante, tendance	1	-4.37	-4.04	-3.45	-3.15
$\Delta \sigma(t)$	constante	8	-3.98	-3.51	-2.89	-2.58

Note : Les tests de Dickey-Fuller augmenté (ADF) sont calculés sur des séries univariées suivant un modèle  $AR(p)$  d'ordre  $p$ , déterminé à partir du critère AIC.

que pour le logarithme du taux de chômage. Ce problème peut être résolu en considérant, par exemple, un modèle de type VARMA (*Vector autoregressive moving-average*), mais cette solution ne sera pas étudiée dans ce chapitre. De plus, les hypothèses de normalité des résidus sont violées pour la production industrielle, les rendements et la volatilité des actions qui sont des grandeurs difficiles à appréhender avec un simple modèle autorégressif.

Dans un second temps, une analyse de la cointégration des facteurs macros est réalisée. Nous déterminons le nombre de relations de cointégration  $r$  à partir des tests de cointégration de Johansen (*trace statistic* et *maximum eigenvalue statistic*) et reportons les résultats dans le Tableau 4.12.

Table 4.12: Tests de cointégration de Johansen.

Trace statistic			Valeurs critiques		
$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Statistique de test	10%	5%	1%
$r = 0$	$r \geq 1$	220.18	141.01	146.76	158.49
$r \leq 1$	$r \geq 2$	155.77	110.42	114.90	124.75
$r \leq 2$	$r \geq 3$	107.24	83.20	87.31	96.58
$r \leq 3$	$r \geq 4$	65.33	59.14	62.99	70.05
$r \leq 4$	$r \geq 5$	34.73	39.06	42.44	48.45

Maximum eigenvalue statistic			Valeurs critiques		
$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Statistique de test	10%	5%	1%
$r = 0$	$r \geq 1$	64.41	46.32	49.42	54.71
$r \leq 1$	$r \geq 2$	48.54	40.91	43.97	49.5
$r \leq 2$	$r \geq 3$	41.90	34.75	37.52	42.36
$r \leq 3$	$r \geq 4$	30.60	29.12	31.46	36.65
$r \leq 4$	$r \geq 5$	18.00	23.11	25.54	30.34

Note : Ce tableau présente les résultats des tests de cointégration de Johansen pour le modèle VAR(2) avec une constante non contrainte et une tendance contrainte.

Les tests de cointégration de Johansen suggèrent un rang  $r = 3$  à 5 % pour la statistique de test *maximum eigenvalue* et  $r = 4$  à 1 % pour la statistique de test de *trace*. Il convient de noter que trois relations de cointégration ne sont pas confirmées par le test de *trace*. Puisque

celui-ci est plus robuste, en particulier lorsque les hypothèses de normalité des résidus ne sont pas satisfaites, nous nous référons aux résultats de ce test et considérons  $r = 4$  relations de cointégration.

Nous procédons à présent à l'estimation du modèle VECM (cointégré), relatif au modèle VAR(2) retenu précédemment. La plupart des modèles macroéconométriques, utilisés par les banques centrales ou les superviseurs nationaux, intègrent des contraintes sur les paramètres prévues par des équilibres de long terme (p. ex. Pesaran *et al.*, 2006). Toutefois, la recherche de telles relations d'équilibre, dictées par la théorie économique, est largement en dehors du cadre de ce chapitre. Nous nous limitons pour cette application à la normalisation de Johansen (Johansen, 1995), qui est une méthode classique pour contraindre les paramètres du modèle. Les résultats obtenus par maximum de vraisemblance sont présentés dans le Tableau 4.13.

Puisque nous n'imposons pas de restriction au paramètre  $\hat{\beta}$ , celui-ci ne devrait pas forcément être interprétable. Les résultats obtenus peuvent cependant être commentés. La première relation de cointégration décrit l'équation du PIB réel en fonction des taux d'intérêt (effet négatif) et de la volatilité des actions (effet négatif). Le signe du coefficient d'inflation est positif mais sa magnitude est très faible. Dans la seconde relation, la production industrielle est affectée négativement par le taux d'intérêt et positivement par le taux d'inflation. Le taux de chômage dépend à long terme des mêmes facteurs mais avec des coefficients de signe opposé. Le signe associé à la volatilité des actions semble cohérent. La dernière équation se focalise sur l'indice action qui est affecté fortement et négativement par le taux d'intérêt et le taux d'inflation. De plus, l'effet sur cet indice de la volatilité des actions semble réaliste.

## 4.6 Application à la gestion des risques

Dans cette section, nous nous intéressons aux implications des résultats précédents pour la gestion des risques. Les modèles de migration et de séries temporelles pour les facteurs macros peuvent être utilisés conjointement pour projeter les nombres de défauts (*protracted* et *insolvency*) et de transitions au sein du portefeuille de *buyers*. Le modèle pour les facteurs est utilisé dans un premier temps comme générateur de scénarios économiques, puis le modèle de migration s'ajuste à partir du lien estimé entre les matrices de migration et les facteurs générés, dans le même esprit que les travaux conduits par Pesaran *et al.* (2006). Puisque que nous ne mesurons pas les pertes occasionnées en cas de défaut, nous ne sommes pas capable de combiner cette information avec la survenance du défaut, ce qui permettrait d'estimer la distribution des pertes. Cependant, d'un point de vue pratique, un gestionnaire, disposant *a minima* des pertes moyennes en cas de défaut, pourrait aisément déduire cette distribution grâce à de notre modèle de migration. Ainsi, ce dernier pourrait être utilisé comme composant d'un modèle interne ou bien comme un outil de *stress tests* utile pour l'ORSA. Cependant, les praticiens devront être conscients que les processus utilisés pour générer les facteurs macros suivent des lois gaussiennes, ce qui est critiquable pour l'étude de scénarios extrêmes. Des applications récentes (p. ex. Creal *et al.*, 2014) fondées sur l'utilisation de fragilités dynamiques peuvent permettre d'améliorer ce point.

Dans notre application, nous considérons un portefeuille fictif, constitué de 100 000 *buyers* qui suivent la même répartition que les données étudiées à la fin de la période d'observation, soit à fin Septembre 2012. Nous projetons en groupe fermé la distribution du nombre de défauts pour un horizon fixé  $T$  avec un pas trimestriel. Nous observons initialement 943 *buyers* dans la classe 1, 3 207 *buyers* dans la classe 2, 25 855 *buyers* dans la classe 3, 49 299

Table 4.13: Paramètres du modèle VECM.

Paramètres de long terme $\hat{\beta}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$			
$GDP(t-1)$	1.000	0.000	0.000	0.000			
	—	—	—	—			
$IP(t-1)$	0.000	1.000	0.000	0.000			
	—	—	—	—			
$UR(t-1)$	0.000	0.000	1.000	0.000			
	—	—	—	—			
$CAC(t-1)$	0.000	0.000	0.000	1.000			
	—	—	—	—			
$\Delta CPI(t-1)$	-0.840	-32.150	-9.696	207.418			
	(0.065)	(0.110)	(0.002)	(0.000)			
$r(t-1)$	21.612	16.199	-133.544	409.110			
	(1.837)	(3.120)	(0.060)	(0.000)			
$\sigma(t-1)$	0.327	-0.055	-1.813	4.911			
	(0.291)	(0.494)	(0.009)	(0.000)			
Tendance	-0.001	0.002	-0.015	0.050			
	(0.229)	(0.388)	(0.007)	(0.000)			
Paramètres de chargement $\hat{\alpha}$	$\Delta GDP(t)$	$\Delta IP(t)$	$\Delta UR(t)$	$\Delta CAC(t)$	$\Delta^2 CPI(t)$	$\Delta r(t)$	$\Delta \sigma(t)$
$\alpha_1$	0.148	0.428	-1.012	3.841	-0.075	0.023	-5.455
	(0.067)	(0.240)	(0.319)	(1.937)	(0.066)	(0.015)	(1.073)
$\alpha_2$	-0.030	-0.125	0.042	-0.744	0.019	-0.007	1.262
	(0.013)	(0.047)	(0.062)	(0.377)	(0.013)	(0.003)	(0.209)
$\alpha_3$	0.018	0.028	-0.187	0.349	-0.028	0.001	-0.329
	(0.009)	(0.033)	(0.044)	(0.267)	(0.009)	(0.002)	(0.148)
$\alpha_4$	-0.004	-0.016	-0.010	-0.109	-0.005	-0.001	0.149
	(0.002)	(0.006)	(0.007)	(0.045)	(0.002)	(0.000)	(0.025)
Paramètres $\hat{\Psi}$	$\Delta GDP(t)$	$\Delta IP(t)$	$\Delta UR(t)$	$\Delta CAC(t)$	$\Delta^2 CPI(t)$	$\Delta r(t)$	$\Delta \sigma(t)$
Constante	-1.733	-4.762	13.233	-45.048	0.973	-0.256	63.173
	(0.829)	(2.955)	(3.927)	(23.853)	(0.810)	(0.180)	(13.210)
$\Delta GDP(t-1)$	-0.167	0.497	0.576	-4.575	0.278	-0.011	4.357
	(0.217)	(0.774)	(1.029)	(6.248)	(0.212)	(0.047)	(3.460)
$\Delta IP(t-1)$	0.123	0.410	-0.638	3.048	0.038	0.009	-2.098
	(0.062)	(0.222)	(0.295)	(1.794)	(0.061)	(0.014)	(0.994)
$\Delta UR(t-1)$	-0.038	-0.030	0.122	0.115	-0.006	-0.009	0.139
	(0.028)	(0.100)	(0.133)	(0.807)	(0.027)	(0.006)	(0.447)
$\Delta CAC(t-1)$	0.006	0.013	0.019	-0.020	0.008	-0.001	-0.280
	(0.005)	(0.016)	(0.022)	(0.131)	(0.004)	(0.001)	(0.072)
$\Delta^2 CPI(t-1)$	0.175	0.201	0.015	6.783	0.234	0.092	-1.197
	(0.133)	(0.475)	(0.631)	(3.832)	(0.130)	(0.029)	(2.122)
$\Delta r(t-1)$	0.349	-0.597	-3.375	4.496	-0.145	0.393	-4.497
	(0.548)	(1.953)	(2.596)	(15.765)	(0.535)	(0.119)	(8.730)
$\Delta \sigma(t-1)$	0.007	0.019	-0.031	0.008	0.019	0.002	-0.130
	(0.007)	(0.026)	(0.034)	(0.209)	(0.007)	(0.002)	(0.116)

Note : Ce tableau décrit les paramètres estimés du modèle VECM, avec les écarts-types entre parenthèses. Il s'agit des paramètres de chargement  $\alpha$ , des paramètres de long terme  $\beta$ , des constantes, des tendances déterministes et de la matrice de paramètres  $\Psi$ .

*buyers* dans la classe 4, 20 600 *buyers* dans la classe 5 et 96 *buyers* en situation de défaut *protracted*.

À partir du modèle de séries temporelles et du modèle de migration M5\*, nous simulons les matrices de transition futures (avec événement de clôture), puis reconstruisons le portefeuille de *buyers* à chaque trimestre, en utilisant la loi multinomiale, comme décrit dans la Section 4.3.4. Nous simulons 100 000 tirages pour les facteurs en générant des innovations gaussiennes. Bien que le modèle M5\* ne dépende directement que de 3 variables, l'effet des autres facteurs est pris en compte par le biais des relations estimées dans le cadre du modèle VECM. Pour chaque tirage, nous retirons de l'échantillon les *buyers* devenus insolvable ou étant clôturés. Dans le cas d'un défaut *protracted*, les probabilités de transition à partir de cet état sont considérées constantes et prennent en compte l'état qui précède le défaut, *via* la matrice de transition donnée par le Tableau 4.4. Par ailleurs, les transitions des états 1 et 2 vers le défaut, et de l'état 5 vers l'état 1 sont supposées constantes et sont données par le Tableau 4.3.

La Figure 4.8 présente le nombre de défauts et de clôtures prédit par les modèles M5\* et M0 (référence sans facteur), pour différents horizons  $T = 2, 4, 8, 12$  trimestres. Nous remarquons que le modèle M0 ne comprend qu'une source de risque mutualisable.

La différence entre les modèles M0 et M5\* est clairement visible dès le second trimestre s'agissant des clôtures, puisque le modèle M5\* comprend plus d'incertitude. En revanche, les distributions des nombres de défauts sont relativement proches pour les deux modèles. Nous observons en particulier une convergence des résultats au bout de 12 trimestres. Ceci confirme le fait que les probabilités de défaut sont peu sensibles à l'environnement lorsque l'on considère la possibilité qu'à l'assureur d'annuler des contrats. Dans ces circonstances, les évolutions les plus importantes du nombre de défauts interviennent lorsque l'environnement dégrade la qualité de crédit du portefeuille. En considérant que les actions des gestionnaires demeurent aussi efficaces, cette analyse révèle que leur capacité à immuniser le portefeuille est réellement importante.

Nous étudions à présent plusieurs chocs survenant durant le premier trimestre et intervenant en parallèle des variations aléatoires de l'environnement :

- un choc de  $-2,58\sigma$ <sup>22</sup> sur le log du PIB réel ( $GDP(t)$ ) ;
- un choc de  $-2,58\sigma$  sur le log de la production industrielle ( $IP(t)$ ) ;
- un choc de  $+2,58\sigma$  sur le niveau des taux d'intérêt souverains à 10 ans ( $r(t)$ ) ;
- un choc de  $+2,58\sigma$  sur le niveau de la volatilité du CAC40 ( $\sigma(t)$ ).

La Figure 4.9 illustre les résultats obtenus. Pour comparaison, cette figure représente également la distribution des nombres de défauts et de clôtures obtenus avec les modèles M0 et M5\* non choqués.

Le choc sur le log de la production industrielle a un impact immédiat sur le nombre de clôtures, ce qui confirme les résultats observés dans les Tableaux 4.8 et 4.9. L'effet de ce facteur est en particulier accentué pour les plus mauvais *ratings*. Compte tenu de la forte corrélation entre la production industrielle et le PIB, la réponse au choc sur le log du PIB réel est proche du précédent. Notons que ces effets s'atténuent entre 2 et 3 ans. Une augmentation de la volatilité produit des effets plus modérés, s'annulant au bout de 2 ans. À l'inverse, le nombre de clôtures n'est pas immédiatement touché par la hausse des taux, mais la réponse intervient quelques trimestres après, produisant une détérioration de la qualité de crédit, ainsi qu'un effet

22. Un choc égal à  $2,58 \times$  l'écart-type est approximativement équivalent à un quantile à 99,5 % d'une loi normale, ce qui correspond au niveau de confiance utilisé dans Solvabilité II.

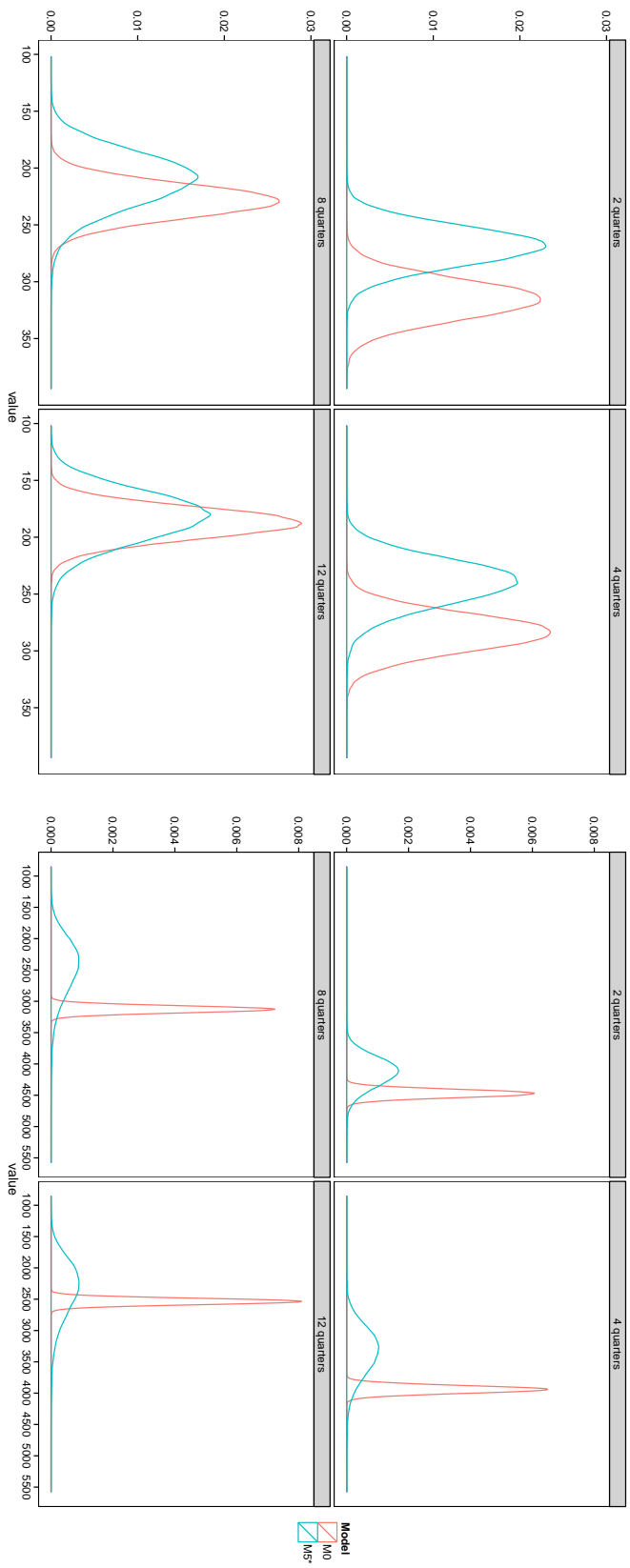


Figure 4.8: Distribution du nombre de défauts et de clôtures obtenues avec les modèles M0 et M5\*. Les sous-figures représentent la distribution du nombre de défauts (à gauche) et de clôtures (à droite) pour différents horizons temporels.

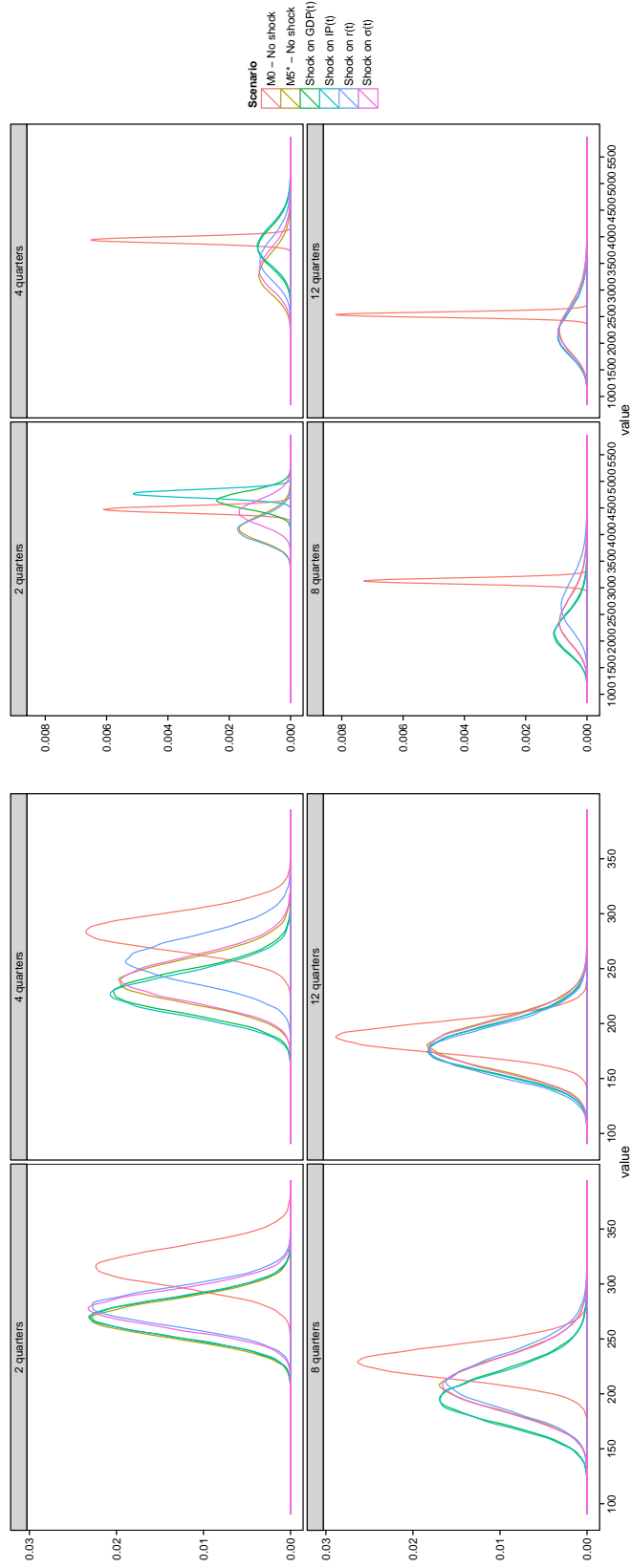


Figure 4.9: Distributions des nombres de défauts (à gauche) et de clôtures (à droite), prédites par M5\* pour différents horizons et différentes situations stressées. Les résultats des modèles M0 et M5\* sans choc sont présentés pour comparaison.

de second ordre dû aux relations de cointégration. L'effet des chocs sur le nombre de défauts est relativement limité, compte tenu de l'absorption provoquée par les annulations. En effet, alors que les chocs considérés produisent une baisse de la qualité de crédit, les annulations, activées par prudence, ont tendance à compenser, voire à réduire le nombre de défauts. Hormis pour le choc à la hausse sur les taux d'intérêt, la variance du nombre de défauts semble peu affectée par les chocs.

Pour finir, nous analysons comment évoluent ces distributions pour des quantiles élevés. Pour chaque scénario, nous calculons la moyenne empirique, la *value-at-risk* (VaR) à 99.5 % et la *conditional tail expectation* (CTE) au même niveau de confiance. Les résultats sont reportés dans le Tableau 4.14.

Conformément aux résultats précédents, les chocs sur le log du PIB réel et de la production industrielle produisent des effets importants sur les clôtures. Cependant, l'écart entre la moyenne et la VaR décroît, ce qui indique que le propension à annuler des contrats est plus forte et moins incertaine. Puisque nous ne considérons pas de nouvelles affaires dans ces projections, une augmentation du nombre d'annulations au départ de la projection conduit à réduire la proportion de *buyers* avec un mauvais *rating*. Ceci réduit le risque global du portefeuille au terme de la projection. Ainsi, avec la réduction de l'exposition au risque, le nombre d'annulations au terme de la projection peut être plus faible dans un cas avec choc que dans la situation de référence. Le choc le plus sévère sur les défauts (une hausse d'environ 5 % de la VaR et de la CTE) est observé après 4 trimestres, en réponse à une augmentation des taux d'intérêt. Un résultat légèrement plus faible est observé pour la volatilité du CAC40.

*In fine*, nos résultats sur le portefeuille de *buyers*<sup>23</sup> illustrent clairement l'importance de la capacité qu'a l'assureur à annuler les contrats les plus risqués dans les situations où l'environnement est stressé.

## 4.7 Conclusion

La modélisation et la gestion des risques en assurance crédit ont été rarement décrites dans la littérature empirique. Néanmoins, de manière similaire à d'autres institutions financières, ces assureurs doivent gérer des risques de crédit qui les exposent aux fluctuations de l'environnement économique et financier. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à un cadre économétrique, permettant de lier la dynamique du risque de crédit à des facteurs de risques macroéconomiques et financiers. Cela permet de réajuster la qualité de crédit du portefeuille de *buyers* lorsque la conjoncture évolue. Notre approche reste relativement simple et s'appuie sur un modèle de régression ordinal, reposant sur des facteurs macroéconomiques, et un modèle VAR de séries temporelles, vu comme générateur de scénarios économiques.

Un tel cadre est utile pour les gestionnaires de l'assureur, puisqu'il donne une évaluation des conséquences de chocs économiques sur la situation du portefeuille. Étant donné que notre modèle permet des projections sur plusieurs périodes, l'assureur crédit peut utiliser notre approche dans le cadre de ses exercices d'ORSA, ou comme un élément participant au développement d'un modèle interne pour l'évaluation du capital requis par Solvabilité II.

Un assureur crédit dispose d'une large marge de manœuvre pour piloter le risque de son portefeuille, en réduisant les limites de risque d'un contrat ou simplement en l'annulant. Après avoir estimé, puis vérifié la robustesse du modèle, nous avons analysé plus spécifiquement les

---

23. Nous obtenons des résultats allant dans la même direction, lorsque la situation initiale du portefeuille contient d'avantage de *buyers* bien notés.



Table 4.14: Moyenne, VaR et CTE pour différents chocs et horizons temporels.

	T=2 trimestres			T=4 trimestres			T=8 trimestres			T=12 trimestres		
	Moyenne	VaR 99.5%	CTE 99.5%	Moyenne	VaR 99.5%	CTE 99.5%	Moyenne	VaR 99.5%	CTE 99.5%	Moyenne	VaR 99.5%	CTE 99.5%
Nombre de défauts												
M0	316	362	369	284	329	335	229	269	275	188	224	229
M5*	269	315	321	240	298	307	211	280	290	182	244	253
M5* - Choc sur $GDP(t)$	270	316	322	230	285	293	199	268	278	179	241	250
M5* - Choc sur $IP(t)$	270	317	323	228	282	290	198	266	277	179	241	250
M5* - Choc sur $r(t)$	280	325	332	259	318	327	213	285	296	177	240	249
M5* - Choc sur $\sigma(t)$	278	324	331	242	300	309	210	279	289	182	244	254
Nombre de clôtures												
M0	4 472	4 641	4 661	3 941	4 100	4 120	3 128	3 270	3 287	2 537	2 666	2 683
M5*	4 136	4 806	4 905	3 347	4 459	4 615	2 480	3 919	4 136	2 354	3 808	4 051
M5* - Choc sur $GDP(t)$	4 652	5 098	5 164	3 838	4 898	5 042	2 226	3 415	3 609	2 262	3 631	3 861
M5* - Choc sur $IP(t)$	4 768	4 964	4 989	3 876	4 930	5 090	2 197	3 335	3 515	2 264	3 614	3 827
M5* - Choc sur $r(t)$	4 108	4 737	4 824	3 622	4 758	4 915	2 765	4 254	4 513	2 278	3 649	3 857
M5* - Choc sur $\sigma(t)$	4 430	5 069	5 154	3 441	4 553	4 711	2 467	3 884	4 103	2 336	3 757	3 992

Note : Ce tableau fournit la moyenne empirique, la *value-at-risk* (VaR) et la *conditional tail expectation* (CTE), associées aux distributions simulées (100 000 simulations) du nombre de défauts et de clôtures observés aux dates  $T = 2, 4, 8, 12$  trimestres. Les résultats sont décomposés par scénario : chocs aléatoires sur M0 et M5\*, un choc de  $-2.58\sigma$  sur le log du PIB réel, un choc de  $-2.58\sigma$  sur le log de la production industrielle, un choc de  $+2.58\sigma$  sur le niveau des taux souverains à 10 ans et un choc de  $+2.58\sigma$  sur la volatilité du CAC40.

effets de ces actions de gestion, combinées aux évolutions de *ratings*. Empiriquement, nous remarquons que ces actions induisent, dans les données, un effet de sélection significatif. En effet, en clôturant une large part des contrats les plus risqués, nous observons que ces actions limitent sensiblement les effets de la crise de 2008-2009, avec une réaction très rapidement en réponse à la survenance de chocs. En reproduisant ces comportements, notre analyse indique que ces actions permettent de contrôler le nombre de défauts, ainsi que la détérioration de la qualité de crédit du portefeuille. Cependant, il est très difficile de jauger l'effet réel de ces chocs sur les contrats ayant été annulés, puisqu'il semble que l'attitude des gestionnaires soit conservatrice. En conséquence, nous ne pouvons pas mesurer la véritable protection qu'offre cette capacité. Une autre question intéressante, laissée à de futures recherches, serait de projeter conjointement les nombres de défauts et les expositions en montant.

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes attachés à la question de l'inférence statistique de modèles multi-états utilisés en assurance, en gardant à l'esprit les contraintes induites par la réglementation prudentielle Solvabilité II concernant le rôle de l'actuaire.

Après avoir réintroduit dans le premier chapitre, les liens entre modèles multi-états et le provisionnement des garanties individuelles, notamment en assurance de personnes, puis les différentes techniques d'inférence adaptées aux données des assureurs (soumises à censure), nous avons proposé dans le second chapitre une méthodologie non-paramétrique, certes classique mais méconnue des praticiens, pour estimer les lois d'incidence par pathologie dans un état de dépendance. Il s'agit d'un moyen de mieux appréhender l'hétérogénéité des risques couverts et de tenir compte de certaines clauses contractuelles (p. ex. délais de carence). De plus, la méthodologie que nous développons a l'avantage d'être relativement simple à mettre en œuvre. Elle est aussi plus cohérente que celles utilisées dans la pratique. En outre, les techniques non-paramétriques retenues dans ce chapitre permettent de garantir une meilleure adéquation aux données.

Le troisième chapitre cherche à prolonger ces réflexions lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas vérifiée. Il s'intéresse pour cela à des méthodes d'estimation non-paramétriques applicables pour certaines formes de modèles multi-états, comprenant un état sain et un groupe d'états intermédiaires précédant le décès. D'un point de vue pratique, ce formalisme fournit des estimateurs pour les probabilités de transition dans le cadre de garanties d'assurance pour la dépendance lourde. Nous avons également étudié les propriétés asymptotiques de ces estimateurs. Une analyse de performance des estimateurs du type  $\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = h)$  est réalisée sur données simulées où nous obtenons de bonnes performances lorsque l'hypothèse de Markov n'est pas vérifiée. En revanche, elles sont plus discutables lorsque cette hypothèse est satisfaite, les estimateurs traditionnels étant préférables dans ces circonstances. L'introduction d'une mesure d'association locale, déduite des travaux récents sur les modèles à risques concurrents bivariés, permet de caractériser la relation de dépendance entre la durée de vie en bonne santé et la durée de vie totale selon la cause d'entrée en invalidité. Elle trouve son utilité dans ce chapitre pour déterminer les périodes sur lesquelles ces deux durées interagissent fortement, c'est-à-dire pour les périodes sur lesquelles nos estimateurs des probabilités de transition fournissent de meilleures performances que ceux conçus pour le cadre markovien.

Ce travail permet de dégager plusieurs pistes de recherche. De manière assez directe, il est possible d'améliorer la qualité des estimateurs non-paramétriques que nous proposons en développant des techniques de lissage. En l'absence de covariable, les travaux de Amorim *et al.* (2011) sont par exemple une direction très naturelle. La prise en compte de mécanismes de censure non-indépendants par le biais d'approches IPCW, comme celles développées par de Uña-Álvarez et Meira-Machado (2015), devrait également se généraliser aux modèles multi-états considérés dans ce chapitre. Des généralisations au cas avec troncature à gauche, qui n'est

pas étudié dans ce travail, pourraient également être envisagées.

D'autre part, nos solutions, s'appuyant sur l'estimateur d'Aalen-Johansen associés aux modèles à risques concurrents, se réfèrent à des techniques de *bootstrap* non-paramétrique (Efron, 1979) pour le calcul des matrices de variance-covariances asymptotiques, dont la forme est complexe. Cette solution, retenue par commodité, est critiquable puisque l'estimateur obtenu par ce mode de *bootstrap* ne reflète pas correctement ces matrices de variance-covariances, dû fait de la censure. Aussi, une perspective d'amélioration serait, selon les tests que l'on souhaite mettre en œuvre (p. ex. comparaison d'échantillons), de spécifier et d'étudier les propriétés d'autres approches.

Le rapprochement que nous effectuons entre modèles multi-états non-markoviens et modèles à risques concurrents bivariés apporte un nouveau point de vue pour l'inférence non-paramétriquement des modèles étudiés dans le troisième chapitre. Plusieurs perspectives pourraient être dégagées. En effet, nos travaux suggèrent que la mesure d'association introduite pourrait être paramétrée, ce qui constituerait un moyen pour spécifier facilement des approches semi-paramétriques Scheike et Sun (2012).

Dans ce chapitre, nous avons supposé que les individus étaient tous indépendants. Hors, il est connu que les durées de vie de deux individus en couple ne sont pas indépendantes (cf. Gouriéroux et Lu, 2015, pour une analyse récente). De la même manière (p. ex. Duée et Rébillard, 2006), la survie des personnes âgées touchées de dépendance semble varier au sein des couples. Des corrélations peuvent également apparaître au sein d'une même famille<sup>24</sup>. Elles sont généralement appréhendées par le biais de copules ou de fragilité partagée, que ce soit pour l'analyse de survie ou dans le cadre multi-états. Toutefois, à l'inverse de l'analyse de survie multivariées (Lopez, 2012), aucun modèle non-paramétrique en présence de censure à notre connaissance n'a encore été développé dans le cadre multi-états pour analyser la trajectoire de vie de couples ou simplement tester l'adéquation aux données d'un modèle paramétrique. Ceci nous semble appeler des développements utiles.

Le dernier chapitre de cette thèse s'est concentré sur un point différent en étudiant la mise en place de modèles multi-états en temps discret pour lesquels les probabilités de transition sont générés par un processus externe. Dérivé des approches utilisées en économétrie pour le risque de crédit, nous avons spécifié un modèle en assurance crédit pour ajuster le niveau des matrices de transition en fonction de facteurs macro-économiques et financiers. Cela permet à un gestionnaire de capter l'effet systématique de facteurs exogènes et ainsi de mieux contrôler la qualité de crédit de son portefeuille. Par ailleurs, le fait de pouvoir projeter celle-ci sur plusieurs périodes et de conduire des *stress-tests* constitue un apport intéressant pour la mise en œuvre de l'ORSA.

Plusieurs points nécessiteraient des améliorations et peuvent être envisagés pour de futures recherches. Tout d'abord, le comportement des gestionnaires constitue un mécanisme de censure provoquant un biais de sélection dont il est difficile d'estimer l'effet. En dehors des périodes de crise, il est notamment non discernable des sorties dues au normal du contrat. Pour améliorer notre approche, une analyse plus précise des critères retenus par les gestionnaires et de jeux de données alternatifs pour estimer l'effet de la sélection opérée s'avère nécessaire.

D'autre part, ce chapitre s'appuie sur une hypothèse d'indépendance entre firmes, conditionnement à certains facteurs observables. Cette dernière devrait, dans les prochains travaux, être étudiée plus finement afin de déterminer si l'introduction de fragilités dynamiques ou

---

24. Ce type d'approche individuelle se généralise difficilement en très grande dimension (cf. p. ex. les modèles pandémiques où des mécanismes de contagion sont formalisés à un niveau agrégé.)

---

de mécanismes de contagion endogène (auto-excitation) s'avère nécessaire, à l'instar des approches récentes utilisées pour le risque de crédit obligataire. En particulier, la méthodologie retenue par Creal *et al.* (2014) permet de combiner facteurs observables et facteurs latents, tout en restant suffisamment flexible pour l'application de *stress-tests*. Elle peut constituer une piste possible pour affiner notre modèle de crédit.



---

## Bibliographie

- AALEN, O. O. et JOHANSEN, S. (1978). An Empirical Transition Matrix for Non-Homogeneous Markov Chains Based on Censored Observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 5(3): 141–150.
- AGRESTI, A. (2002). *Categorical Data Analysis*. Numéro Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., 2 édition.
- AHCAN, A., MEDVED, D., OLIVIERI, A. et PITACCO, E. (2014). Forecasting mortality for small populations by mixing mortality data. *Insurance : Mathematics and Economics*, 54:12–27.
- ALHO, J. et SPENCER, B. (2005). *Statistical Demography and Forecasting*. Springer Series in Statistics. Springer.
- ALLIGNOL, A., BEYERSMANN, J., GERDS, T. et LATOUCHE, A. (2014). A competing risks approach for nonparametric estimation of transition probabilities in a non-Markov illness-death model. *Lifetime Data Analysis*, pages 1–19.
- AMORIM, A. P., de UÑA-ÁLVAREZ, J. et MEIRA-MACHADO, L. (2011). Presmoothing the transition probabilities in the illness–death model. *Statistics & Probability Letters*, 81(7): 797–806.
- ANDERSEN, P. K., ABILDSTROM, S. Z. et ROSTHØJ, S. (2002). Competing risks as a multi-state model. *Statistical Methods in Medical Research*, 11(2):203–215.
- ANDERSEN, P. K., BORGAN, Ø., GILL, R. D. et KEIDING, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag New York Inc.
- ANDERSEN, P. K. et KEIDING, N. (2002). Multi-state models for event history analysis. *Statistical Methods in Medical Research*, 11(2):91–115.
- ANDERSEN, P. K. et KEIDING, N. (2012). Interpretability and importance of functionals in competing risks and multistate models. *Statistics in Medicine*, 31(11-12):1074–1088.
- ANDERSEN, P. K. et PERME, M. P. (2008). Inference for outcome probabilities in multi-state models. *Lifetime data analysis*, 14(4):405–431.
- ARNOLD-GAILLE, S., BOUMEZOUED, A., HARDY, H. L. et KAROUI, N. E. (2015). Cause-of-Death Mortality : What Can Be Learned From Population Dynamics ?
- ARNOLD-GAILLE, S. et SHERRIS, M. (2013). Forecasting Mortality Trends Allowing for Cause-of-Death Mortality Dependence. *North American Actuarial Journal*, 17(4):273–282.
- ARO, H., DJEHICHE, B. et LÖFDAHL, B. (2015). Stochastic modelling of disability insurance in a multi-period framework. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2015(1):88–106.
- AZIZPOUR, S., GIESECKE, K. et SCHWENKLER, G. (2014). Exploring the Sources of Default Clustering. Stanford University Working Paper Series.
- BALTER, A. et PELSSER, A. (2015). Pricing and Hedging in Incomplete Markets with Model Ambiguity. SSRN Scholarly Paper ID 2459405, Social Science Research Network, Rochester, NY.

- 
- BANDEEN-ROCHE, K. et LIANG, K. Y. (2002). Modelling multivariate failure time associations in the presence of a competing risk. *Biometrika*, 89(2):299–314.
- BANDEEN-ROCHE, K. et NING, J. (2008). Nonparametric estimation of bivariate failure time associations in the presence of a competing risk. *Biometrika*, 95(1):221–232.
- BANGIA, A., DIEBOLD, F. X., KRONIMUS, A., SCHAGEN, C. et SCHUERMAN, T. (2002). Ratings migration and the business cycle, with application to credit portfolio stress testing. *Journal of Banking & Finance*, 26(2-3):445–474.
- BARRIEU, P., BENSUSAN, H., EL KAROUI, N., HILLAIRET, C., LOISEL, S., RAVANELLI, C. et SALHI, Y. (2012). Understanding, modelling and managing longevity risk : key issues and main challenges. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012(3):203–231.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2004). The New Basel Capital Accord, International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards : A Revised Framework. Basel Committee on Banking Supervision Consultative Document, Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- BENSUSAN, H. (2010). *Risques de taux et de longévité : Modélisation dynamique et Applications aux produits dérivés et à l'assurance-vie*. Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, Paris.
- BENSUSAN, H., EL KAROUI, N., LOISEL, S. et SALHI, Y. (2012). Partial Splitting of Longevity and Financial Risks : The Longevity Nominal Choosing Swaptions. Working paper.
- BERNSTEIN, P. L. (1998). *Against the Gods : The Remarkable Story of Risk*. John Wiley & Sons Inc, 2 édition.
- BERR, C., BALARD, F., BLAIN, H. et ROBINE, J.-M. (2012). How to define old age : successful aging and/or longevity. *Médecine/sciences*, 28(3):281–7.
- BEYERSMANN, J., SCHUMACHER, M. et ALLIGNOL, A. (2011). *Competing Risks and Multistate Models with R*. Use R! Springer.
- BEYERSMANN, J., TERMINI, S. D. et PAULY, M. (2013). Weak Convergence of the Wild Bootstrap for the Aalen–Johansen Estimator of the Cumulative Incidence Function of a Competing Risk. *Scandinavian Journal of Statistics*, 40(3):387–402.
- BIAGINI, F., GROLL, A. et WIDENMANN, J. (2013). Intensity-based premium evaluation for unemployment insurance products. *Insurance : Mathematics and Economics*, 53(1):302–316.
- BIFFIS, E., BLAKE, D., PITOTTI, L. et SUN, A. (2015). The Cost of Counterparty Risk and Collateralization in Longevity Swaps. *Journal of Risk and Insurance*.
- BLAKE, D., CAIRNS, A. J. G. et DOWD, K. (2006). Living with Mortality : Longevity Bonds and Other Mortality-Linked Securities. *British Actuarial Journal*, 12(1):153–197.
- BLANCHET, D. et LE GALLO, F. (2013). Baby-boom et allongement de la durée de vie : quelles contributions au vieillissement ? Insee Analyses 12, Insee.
- BLANPAIN, N. et CHARDON, O. (2010). Projections de population à l'horizon 2060, un tiers de la population âgé de plus de 60 ans. Insee Première 1320, Insee.



- BOOTH, H. et TICKLE, L. (2008). Mortality Modelling and Forecasting : a Review of Methods. *Annals of Actuarial Science*, 3(1-2):3–43.
- BOREL-MATHURIN, F., DARPEIX, P.-E., GUIBERT, Q. et LOISEL, S. (2015). Main Determinants of Profit Sharing Policy in the French Life Insurance Industry. PSE Working Papers 2015-16, Paris School of Economics, Paris.
- BÖRGER, M., FLEISCHER, D. et KUKSIN, N. (2014). Modeling the Mortality Trend under Modern Solvency Regimes. *ASTIN Bulletin*, 44(01):1–38.
- BUCHARDT, K., MØLLER, T. et SCHMIDT, K. B. (2014). Cash flows and policyholder behaviour in the semi-Markov life insurance setup. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 1–29.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D. et DOWD, K. (2006). A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty : Theory and Calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4):687–718.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D. et DOWD, K. (2008). Modelling and management of mortality risk : a review. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2008(2-3):79–113.
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D., DOWD, K. et KESSLER, A. (2014). Phantoms never die : Living with unreliable mortality data. Working paper, Heriot-Watt University.
- CAJA, A. (2014). *Contribution à la mesure des engagements et du besoin en capital pour un assureur crédit*. Ph.D. thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, Lyon.
- CAJA, A. et PLANCHET, F. (2014). Modelling cycle dependence in credit insurance. *Risks* 2, 1:74–88.
- CAMBOIS, E. et JUSOT, F. (2007). Ampleur, tendance et causes des inégalités sociales de santé et de mortalité en Europe : une revue des études comparatives. *Bulletin épidémiologique hebdomadaire*, (2-3):10–14.
- CAMBOIS, E., LABORDE, C. et ROBINE, J.-M. (2008). La "double peine" des ouvriers : plus d'années d'incapacité au sein d'une vie plus courte. *Population & Sociétés* 441, Ined.
- CARNES, B. A. et OLSHANSKY, S. J. (1997). A biologically motivated partitioning of mortality. *Experimental Gerontology*, 32(6):615–631.
- CARRIÈRE, J. F. (1994). Dependent decrement theory. *Transactions of the Society of Actuaries*, 46:45–74.
- CHAVA, S. et JARROW, R. A. (2004). Bankruptcy Prediction with Industry Effects. *Review of Finance*, 8(4):537–569.
- CHAVA, S., STEFANESCU, C. et TURNBULL, S. (2011). Modeling the Loss Distribution. *Management Science*, 57(7):1267–1287.
- CHEN, B., YI, G. Y. et COOK, R. J. (2011). Progressive multi-state models for informatively incomplete longitudinal data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(1):80–93.

- 
- CHEN, M.-c. et BANDEEN-ROCHE, K. (2005). A Diagnostic for Association in Bivariate Survival Models. *Lifetime Data Analysis*, 11(2):245–264.
- CHENG, Y. et FINE, J. P. (2008). Nonparametric estimation of cause-specific cross hazard ratio with bivariate competing risks data. *Biometrika*, 95(1):233–240.
- CHENG, Y., FINE, J. P. et BANDEEN-ROCHE, K. (2010). Association analyses of clustered competing risks data via cross hazard ratio. *Biostatistics*, 11(1):82–92.
- CHENG, Y., FINE, J. P. et KOSOROK, M. R. (2007). Nonparametric Association Analysis of Bivariate Competing-Risks Data. *Journal of the American Statistical Association*, 102(480): 1407–1415.
- CHRISTIANSEN, M. C. (2008). A sensitivity analysis concept for life insurance with respect to a valuation basis of infinite dimension. *Insurance : Mathematics and Economics*, 42(2):680–690.
- CHRISTIANSEN, M. C. (2012). Multistate models in health insurance. *Advances in Statistical Analysis*, 96(2):155–186.
- CHRISTIANSEN, M. C., DENUIT, M. et LAZAR, D. (2012). The Solvency II square-root formula for systematic biometric risk. *Insurance : Mathematics and Economics*, 50(2):257–265.
- CHRISTIANSEN, M. C. et NIEMEYER, A. (2014). Fundamental Definition of the Solvency Capital Requirement in Solvency II. *ASTIN Bulletin*, 44(03):501–533.
- CHRISTIANSEN, M. C., NIEMEYER, A. et TEIGISZEROVÁ, L. (2015). Modeling and forecasting duration-dependent mortality rates. *Computational Statistics & Data Analysis*, 83:65–81.
- CMIR12 (1991). The Analysis of Permanent Health Insurance Data. Rapport technique, Continuous Mortality Investigation Bureau, The Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries.
- COMMENGES, D. et JOLY, P. (2004). Multi-state Model for Dementia, Institutionalization, and Death. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 33(6):1315–1326.
- COMMISSION EUROPÉENNE (2015). Règlement Délégué (EU) 2015/35 du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L.12/1.
- COMMISSION EUROPÉENNE et COMITÉ DE POLITIQUE ÉCONOMIQUE (2014). The 2015 Ageing Report : underlying Assumptions and Projection Methodologies. European Economy, Commission Européenne, Bruxelles.
- CORDEIRO, I. M. F. (2002). A multiple state model for the analysis of permanent health insurance claims by cause of disability. *Insurance : Mathematics and Economics*, 30(2):167–186.
- COUDERC, F. et RENAULT, O. (2005). Time-to-default : Life cycle, global and industry cycle impacts. Research Paper No. 142, University of Geneva.
- COURBAGE, C. et ROUDAUT, N. (2011). Long-term care insurance : The French example. *European Geriatric Medicine*, 2(1):22–25.

- COVELLO, V. T. et MUMPOWER, J. (1985). Risk Analysis and Risk Management : An Historical Perspective. *Risk Analysis*, 5(2):103–120.
- COX, D. R. (1972). Regression Models and Life-Tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 34(2):187–220.
- COX, S. H. et LIN, Y. (2007). Natural hedging of life and annuity mortality risks. *North American Actuarial Journal*, 11(3):1–15.
- CREAL, D., SCHWAAB, B., KOOPMAN, S. J. et LUCAS, A. (2014). Observation-Driven Mixed-Measurement Dynamic Factor Models with an Application to Credit Risk. *Review of Economics and Statistics*, 96(5):898–915.
- CRIMMINS, E. M. et BELTRÁN-SÁNCHEZ, H. (2011). Mortality and morbidity trends : is there compression of morbidity? *The Journals of Gerontology Series B : Psychological Sciences and Social Sciences*, 66(1):75–86.
- CROIX, J.-C., PLANCHET, F. et THÉRON, P.-E. (2015). Mortality : A statistical approach to detect model misspecification. *Bulletin Français d'Actuariat*, 15(29):115–130.
- CROUHY, M., GALAI, D. et MARK, R. (2000). A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking & Finance*, 24(1–2):59–117.
- CURRIE, I. D. (2014). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 0(0):1–28.
- CZADO, C. et RUDOLPH, F. (2002). Application of survival analysis methods to long-term care insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(3):395–413.
- DABROWSKA, D. (1995). Estimation of transition probabilities and bootstrap in a semiparametric markov renewal model. *Journal of Nonparametric Statistics*, 5(3):237–259.
- DABROWSKA, D. M. (2012). Estimation in a semi-Markov transformation model. *The International Journal of Biostatistics*, 8(1):Article–15.
- DABROWSKA, D. M., SUN, G.-w. et HOROWITZ, M. M. (1994). Cox Regression in a Markov Renewal Model : An Application to the Analysis of Bone Marrow Transplant Data. *Journal of the American Statistical Association*, 89(427):867–877.
- DAHL, M. et MØLLER, T. (2006). Valuation and hedging of life insurance liabilities with systematic mortality risk. *Insurance : Mathematics and Economics*, 39(2):193–217.
- D'AMICO, G., GUILLEN, M. et MANCA, R. (2009). Full backward non-homogeneous semi-Markov processes for disability insurance models : A Catalunya real data application. *Insurance : Mathematics and Economics*, 45(2):173–179.
- D'AMICO, G., JANSSEN, J. et MANCA, R. (2010). Initial and Final Backward and Forward Discrete Time Non-homogeneous Semi-Markov Credit Risk Models. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 12(2):215–225.
- DAS, S. R., DUFFIE, D., KAPADIA, N. et SAITA, L. (2007). Common Failings : How Corporate Defaults Are Correlated. *The Journal of Finance*, 62(1):93–117.

- 
- DATTA, S. et SATTEN, G. A. (2001). Validity of the Aalen–Johansen estimators of stage occupation probabilities and Nelson–Aalen estimators of integrated transition hazards for non-Markov models. *Statistics & Probability Letters*, 55(4):403–411.
- DATTA, S. et SATTEN, G. A. (2002). Estimation of Integrated Transition Hazards and Stage Occupation Probabilities for Non-Markov Systems Under Dependent Censoring. *Biometrics*, 58(4):792–802.
- de UÑA-ÁLVAREZ, J. et MEIRA-MACHADO, L. (2015). Nonparametric estimation of transition probabilities in the non-Markov illness-death model : A comparative study. *Biometrics*.
- DE WREEDE, L. C., FIOCCO, M. et PUTTER, H. (2011). mstate : An R Package for the Analysis of Competing Risks and Multi-State Models. *Journal of Statistical Software*, 38(7).
- DEES, S., di MAURO, F., PESARAN, M. H. et SMITH, L. V. (2007). Exploring the international linkages of the euro area : a global VAR analysis. *Journal of Applied Econometrics*, 22(1):1–38.
- DELÉGLISE, M. P., HESS, C. et NOUET, S. (2009). Tarification, provisionnement et pilotage d’un portefeuille Dépendance. *Bulletin Français d’Actuariat*, 9(17):70–108.
- DELWARDE, A. et DENUIT, M. (2005). *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*. Assurance Audit Actuariat. Economica, Paris.
- DENUIT, M. et ROBERT, C. (2007). *Actuariat des assurances de Personnes - Modélisation, tarification et provisionnement*. Assurance Audit Actuariat. Economica, Paris.
- DIETSCH, M. et PETEY, J. (2002). The credit risk in SME loans portfolios : Modeling issues, pricing, and capital requirements. *Journal of Banking & Finance*, 26(2–3):303–322.
- DIETSCH, M. et PETEY, J. (2004). Should SME exposures be treated as retail or corporate exposures? A comparative analysis of default probabilities and asset correlations in French and German SMEs. *Journal of Banking & Finance*, 28(4):773–788.
- DIMITROVA, D. S., HABERMAN, S. et KAISHEV, V. K. (2013). Dependent competing risks : Cause elimination and its impact on survival. *Insurance : Mathematics and Economics*, 53(2):464–477.
- DOLIGNON, C. (2011). Facteurs explicatifs des évolutions récentes des défaillances d’entreprises : une analyse économétrique. *Économie & prévision*, 197(1):161–167.
- DUCHATEAU, L. et JANSSEN, P. (2007). *The Frailty Model*. Statistics for Biology and Health. Springer, New York.
- DUÉE, M. et RÉBILLARD, C. (2006). La dépendance des personnes âgées : une projection en 2040. Données sociales : La société française, pages 613–619. Insee, Paris, 2006 édition.
- DUFFIE, D., ECKNER, A., HOREL, G. et SAITA, L. (2009). Frailty Correlated Default. *The Journal of Finance*, 64(5):2089–2123.
- DUFFIE, D., SAITA, L. et WANG, K. (2007). Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates. *Journal of Financial Economics*, 83(3):635–665.

- DUFFIE, D. et SINGLETON, K. J. (2003). *Credit Risk : Pricing, Measurement, and Management*. Princeton University Press.
- DUPÂQUIER, J. (1997). L'invention de la table de mortalité. *L'Homme*, 37(141):167.
- EFRON, B. (1979). Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26.
- EIOPA (2015a). Orientations sur la valorisation des provisions techniques. Orientation technique EIOPA-BoS-14/166 FR, Eiopa.
- EIOPA (2015b). Orientations sur l'utilisation de modèles internes. Orientation technique EIOPA-BoS-14/180 FR.
- EL KAROUI, N., LOISEL, S. et SALHI, Y. (2015). Minimax Optimality in Robust Detection of a Disorder Time in Poisson Rate.
- FEI, F., FUERTES, A.-M. et KALOTYCHOU, E. (2012). Credit Rating Migration Risk and Business Cycles. *Journal of Business Finance & Accounting*, 39(1-2):229–263.
- FENG, D., GOURIÉROUX, C. et JASIAK, J. (2008). The ordered qualitative model for credit rating transitions. *Journal of Empirical Finance*, 15(1):111–130.
- FERRI, S. et OLIVIERI, A. (2000). Technical bases for LTC covers including mortality and disability projections. In *Proceedings of the 31th International ASTIN Colloquium*, pages 135–155, Porto Cervo.
- FIGLEWSKI, S., FRYDMAN, H. et LIANG, W. (2012). Modeling the effect of macroeconomic factors on corporate default and credit rating transitions. *International Review of Economics & Finance*, 21(1):87–105.
- FINE, J. P. et GRAY, R. J. (1999). A Proportional Hazards Model for the Subdistribution of a Competing Risk. *Journal of the American Statistical Association*, 94(446):496–509.
- FINE, J. P., JIANG, H. et CHAPPELL, R. (2001). On semi-competing risks data. *Biometrika*, 88(4):907–919.
- FISCHER, K., KETTUNEN, J., WÜRTZ, P., HALLER, T., HAVULINNA, A. S., KANGAS, A. J., SOININEN, P., ESKO, T., TAMMESOO, M.-L., MÄGI, R., SMIT, S., PALOTIE, A., RIPATTI, S., SALOMAA, V., ALA-KORPELA, M., PEROLA, M. et METSPALU, A. (2014). Biomarker Profiling by Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy for the Prediction of All-Cause Mortality : An Observational Study of 17,345 Persons. *PLoS Med*, 11(2):e1001606.
- FOGLIA, A. (2008). Stress Testing Credit Risk : A Survey of Authorities' Approaches. Bank of Italy Occasional Paper No. 37, Bank of Italy.
- FONG, J. H., SHAO, A. W. et SHERRIS, M. (2015). Multistate Actuarial Models of Functional Disability. *North American Actuarial Journal*, 19(1):41–59.
- FOUCHER, Y. (2007). *Modèles semi-markoviens - Application à l'analyse de l'évolution de pathologies chroniques*. Ph.D. thesis, Université Montpellier I, Montpellier.

- 
- FOUCHER, Y., MATHIEU, E., SAINT-PIERRE, P., DURAND, J.-F. et DAURÈS, J.-P. (2005). A semi-Markov model based on generalized Weibull distribution with an illustration for HIV disease. *Biometrical Journal. Biometrische Zeitschrift*, 47(6):825–833.
- FRACHOT, A. et GOURIEROUX, C. (1995). *Titrisation et remboursements anticipés*. Economica, Paris.
- FRIES, J. F. (1980). Aging, natural death, and the compression of morbidity. *New England journal of medicine*, 303(3):130–135.
- FRIES, J. F., BRUCE, B. et CHAKRAVARTY, E. (2011). Compression of Morbidity 1980-2011 : A Focused Review of Paradigms and Progress. *Journal of Aging Research*, 2011:e261702.
- FRYDMAN, H. (1995). Nonparametric Estimation of a Markov ‘Illness-Death’ Process from Interval- Censored Observations, with Application to Diabetes Survival Data. *Biometrika*, 82(4):773–789.
- FRYDMAN, H. et SCHUERMAN, T. (2008). Credit rating dynamics and Markov mixture models. *Journal of Banking & Finance*, 32(6):1062–1075.
- GAGLIARDINI, P. et GOURIÉROUX, C. (2005). Stochastic Migration Models with Application to Corporate Risk. *Journal of Financial Econometrics*, 3(2):188–226.
- GARRATT, A., LEE, K., PESARAN, M. H. et SHIN, Y. (2003). A Long run structural macroeconomic model of the UK. *The Economic Journal*, 113(487):412–455.
- GAUZÈRE, F., COMMENGES, D., BARBERGER-GATEAU, P., LETENNEUR, L. et DARTIGUES, J.-F. (1999). Maladie et dépendance - Description des évolutions par des modèles multi-états. *Population*, 54(2):205–222.
- GEORGIADIS, S. (2013). *Estimation des systèmes semi-markoviens à temps discret avec applications*. Ph.D. thesis, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne.
- GILL, R. D. (1980). Nonparametric estimation based on censored observations of a Markov renewal process. *Probability Theory and Related Fields*, 53(1):97–116.
- GLIDDEN, D. V. (2002). Robust Inference for Event Probabilities with Non-Markov Event Data. *Biometrics*, 58(2):361–368.
- GOFFARD, P.-O. et GUERRAULT, X. (2015). Is it optimal to group policyholders by age, gender, and seniority for BEL computations based on model points? *European Actuarial Journal*, 5(1):165–180.
- GOOLEY, T. A., LEISENRING, W., CROWLEY, J. et STORER, B. E. (1999). Estimation of failure probabilities in the presence of competing risks : new representations of old estimators. *Statistics in medicine*, 18(6):695–706.
- GOURIÉROUX, C. et LU, Y. (2015). Love and death : A Freund model with frailty. *Insurance : Mathematics and Economics*, 63:191–203.
- GOVORUN, M. (2013). *Pension and Health Insurance : Phase-Type Modeling*. Ph.D. thesis, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles.

- GRIBKOVA, S. et LOPEZ, O. (2015). Non-parametric Copula Estimation Under Bivariate Censoring. *Scandinavian Journal of Statistics*.
- GUIBERT, Q., CAJA, A. et PLANCHET, F. (2015). Influence of Economic Factors on the Credit Rating Transitions and Defaults of Credit Insurance Business. Les cahiers de recherche de l'ISFA 2015-5, Institut de Science Financière et d'Assurances, Lyon.
- GUIBERT, Q., JUILLARD, M., NTEUKAM TEUGUIA, O. et PLANCHET, F. (2014). *Solvabilité prospective en assurance : Méthodes quantitatives pour l'ORSA*. Assurance Audit Actuariat. Economica, Paris.
- GUIBERT, Q. et PLANCHET, F. (2014). Construction de lois d'expérience en présence d'évènements concurrents – Application à l'estimation des lois d'incidence d'un contrat dépendance. *Bulletin Français d'Actuariat*, 13(27):5–28.
- GUIBERT, Q. et PLANCHET, F. (2015). Non-Parametric Inference of Transition Probabilities Based on Aalen-Johansen Integral Estimators for Acyclic Multi-State Models : Application to LTC Insurance. Preprint, Institut de Science Financière et d'Assurances, Lyon.
- GUIBERT, Q., PLANCHET, F. et JUILLARD, M. (2010). Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes. *Bulletin Français d'Actuariat*, 10(20):5–34.
- HABERMAN, S. (1983). Decrement tables and the measurement of morbidity : I. *Journal of the Institute of Actuaries*, 110:361–381.
- HABERMAN, S. (1984). Decrement tables and the measurement of morbidity : II. *Journal of the Institute of Actuaries*, 111:73–86.
- HABERMAN, S. et PITACCO, E. (1998). *Actuarial Models for Disability Insurance*. Chapman and Hall/CRC, 1 édition.
- HALLORAN, M. E., BERRY, D. et MILLER, W., éditeurs (2000). *Statistical Models in Epidemiology, the Environment, and Clinical Trials*, volume 116 de *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Springer New York, New York, NY.
- HELMS, F., CZADO, C. et GSCHLÖSSL, S. (2004). Calculation of LTC Premiums based on direct estimates of transition probabilities. Discussion paper 393, Sonderforschungsbereich 386 der Ludwig-Maximilians-Universität München.
- HELWICH, M. (2008). *Durational effects and non-smooth semi-Markov models in life insurance*. Ph.D. thesis, University of Rostock, Rostock.
- HOEM, J. M. (1969). Markov Chain Models in Life Insurance. *Blätter der DGVMF*, 9(2):91–107.
- HOEM, J. M. (1972). Inhomogeneous semi-Markov processes, select actuarial tables, and duration-dependence in demography. *Population Dynamics*, pages 251–296.
- HOEM, J. M. (1977). A Markov chain model of working life tables. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1977(1):1–20.

- 
- HOLZMÜLLER, I. (2009). The United States RBC Standards, Solvency II and the Swiss Solvency Test : A Comparative Assessment. *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice*, 34(1):56–77.
- HOUGAARD, P. (1995). Frailty models for survival data. *Lifetime Data Analysis*, 1(3):255–273.
- HOUGAARD, P. (1999). Multi-state Models : A Review. *Lifetime Data Analysis*, 5(3):239–264.
- HOUGAARD, P. (2001). *Analysis of Multivariate Survival Data*. Statistics for Biology and Health. Springer-Verlag New York Inc.
- HU, Y.-T., KIESEL, R. et PERRAUDIN, W. (2002). The estimation of transition matrices for sovereign credit ratings. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1383–1406.
- HUNT, A. et BLAKE, D. (2014). A General Procedure for Constructing Mortality Models. *North American Actuarial Journal*, 18(1):116–138.
- HYNDMAN, R. J. et ULLAH, S. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates : A functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10):4942–4956.
- ÇINLAR, E. (1969). Markov Renewal Theory. *Advances in Applied Probability*, 1(2):123–187.
- JACKSON, C. H. (2011). Multi-State Models for Panel Data : The msm Package for R. *Journal of Statistical Software*, 38(8).
- JAFRY, Y. et SCHUERMAN, T. (2004). Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices. *Journal of Banking & Finance*, 28(11):2603–2639.
- JAKUBOWSKI, J. et NIEWEGLOWSKI, M. A. (2010). A Class of F-Doubly Stochastic Markov Chains. *Electronic Journal of Probability*, 15(0).
- JANSSEN, J. et de DOMINICIS, R. (1984). Finite non-homogeneous semi-Markov processes : Theoretical and computational aspects. *Insurance : Mathematics and Economics*, 3(3):157–165.
- JANSSEN, J. et MANCA, R. (2006). *Applied Semi-Markov Processes*. Springer.
- JANSSEN, J. et MANCA, R. (2007). *Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability*. Springer-Verlag New York Inc.
- JARROW, R. A., LANDO, D. et TURNBULL, S. (1997). A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies*, 10(2):481–523.
- JARROW, R. A. et TURNBULL, S. (1995). Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *The Journal of Finance*, 50(1):53–85.
- JEVTIĆ, P. et REGIS, L. (2015). Assessing the solvency of insurance portfolios via a continuous-time cohort model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 61:36–47.
- JOHANSEN, S. (1991). Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models. *Econometrica*, 59(6):1551.
- JOHANSEN, S. (1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press.



- JONES, B. L. (1993). Modelling multi-state processes using a Markov assumption. *Actuarial Research Clearing House*, 1:239–248.
- JONES, B. L. (1994). Actuarial calculations using a Markov model. *Transactions of the Society of Actuaries*, 46:227–250.
- JUSELIUS, K. (2006). *The Cointegrated VAR Model : Methodology and Applications*. Oxford University Press.
- KAAS, R., GOOVAERTS, M., DHAENE, J. et DENUIT, M. (2009). *Modern Actuarial Risk Theory : Using R*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, Berlin ; New York, 2nd ed. 2008 édition.
- KADAM, A. et LENK, P. (2008). Bayesian inference for issuer heterogeneity in credit ratings migration. *Journal of Banking & Finance*, 32(10):2267–2274.
- KAISHEV, V. K., DIMITROVA, D. S. et HABERMAN, S. (2007). Modelling the joint distribution of competing risks survival times using copula functions. *Insurance : Mathematics and Economics*, 41(3):339–361.
- KALASHNIKOV, V. et NORBERG, R. (2003). On the sensitivity of premiums and reserves to changes in valuation elements. *Scandinavian actuarial journal*, 2003(3):238–256.
- KAMEGA, A. et PLANCHET, F. (2011). Modélisation prospective en l’absence de données sur les tendances passées et mesure des risques associés. *Assurances et Gestion des Risques*, 80(2).
- KAPLAN, E. L. et MEIER, P. (1958). Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Journal of the American Statistical Association*, 53(282):457–481.
- KAVVATHAS, D. (2001). Estimating credit rating transition probabilities for corporate bonds. Working paper, University of Chicago.
- KEIDING, N. (1990). Statistical Inference in the Lexis Diagram. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 332(1627):487–509.
- KEIDING, N. (1991). Age-Specific Incidence and Prevalence : A Statistical Perspective. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*, 154(3):371–412.
- KEIDING, N. (2006). Event history analysis and the cross-section. *Statistics in Medicine*, 25(14):2343–2364.
- KEMP, M. (2009). *Market Consistency : Model Calibration in Imperfect Markets*. Wiley, 1 édition.
- KIM, C.-J. et NELSON, C. R. (1998). Business Cycle Turning Points, A New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model With Regime Switching. *Review of Economics and Statistics*, 80(2):188–201.
- KLEIN, J. P. et MOESCHBERGER, M. L. (2003). *Survival Analysis*. Springer, 2nd édition.

- 
- KLEIN, J. P., VAN HOUWELINGEN, H. C., IBRAHIM, J. G. et SCHEIKE, T. H., éditeurs (2013). *Handbook of Survival Analysis*. Handbooks of Modern Statistical Methods. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- KOOP, G., PESARAN, M. H. et POTTER, S. M. (1996). Impulse response analysis in nonlinear multivariate models. *Journal of Econometrics*, 74(1):119–147.
- KOOPMAN, S. J., KRÄUSSL, R., LUCAS, A. et MONTEIRO, A. (2009). Credit cycles and macro fundamentals. *Journal of Empirical Finance*, 16(1):42–54.
- KOOPMAN, S. J., LUCAS, A. et MONTEIRO, A. (2008). The multi-state latent factor intensity model for credit rating transitions. *Journal of Econometrics*, 142(1):399–424.
- KOOPMAN, S. J., LUCAS, A. et SCHWAAB, B. (2011). Modeling frailty-correlated defaults using many macroeconomic covariates. *Journal of Econometrics*, 162(2):312–325.
- KOOPMAN, S. J., LUCAS, A. et SCHWAAB, B. (2012). Dynamic Factor Models With Macro, Frailty, and Industry Effects for U.S. Default Counts : The Credit Crisis of 2008. *Journal of Business & Economic Statistics*, 30(4):521–532.
- LAGAKOS, S. W., SOMMER, C. J. et ZELEN, M. (1978). Semi-Markov models for partially censored data. *Biometrika*, 65(2):311–317.
- LANDO, D. (1998). On cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research*, 2(2-3):99–120.
- LANDO, D. et SKØDEBERG, T. M. (2002). Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking & Finance*, 26(2-3):423–444.
- LE BRAS, H. (2000). *Naissance de la mortalité*. Hautes études. Gallimard - Seuil, Paris.
- LEE, R. D. et CARTER, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419):659–671.
- LEOW, M. et CROOK, J. (2014). Intensity models and transition probabilities for credit card loan delinquencies. *European Journal of Operational Research*, 236(2):685–694.
- LEVANTESI, S. et MENZIETTI, M. (2012). Managing longevity and disability risks in life annuities with long term care. *Insurance : Mathematics and Economics*, 50(3):391–401.
- LIMNIOS, N. et OPRIŞAN, G. (2001). *Semi-Markov Processes and Reliability*. Statistics for Industry and Technology. Springer-Science+Business Media, LLC, Birmingham, 1 édition.
- LO, S. M. S. et WILKE, R. A. (2010). A copula model for dependent competing risks. *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)*, 59(2):359–376.
- LOADER, C. (1999). *Local Regression and Likelihood*. Statistics and Computing Series. Springer-Verlag New York Inc.
- LOPEZ, O. (2012). A generalization of Kaplan-Meier estimator for analyzing bivariate mortality under right-censoring and left-truncation with applications to model-checking for survival copula models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 51(3):505–516.

- LÜTKEPOHL, H. et KRÄTZIG, M. (2004). *Applied time series econometrics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York.
- LUCIANO, E. et REGIS, L. (2014). Efficient versus inefficient hedging strategies in the presence of financial and longevity (value at) risk. *Insurance : Mathematics and Economics*, 55:68–77.
- LUCIANO, E., REGIS, L. et VIGNA, E. (2012). Single and cross-generation natural hedging of longevity and financial risk. *Carlo Alberto Notebooks*, (257).
- LUND, J. (2000). Sampling Bias in Population Studies—How to Use the Lexis Diagram. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27(4):589–604.
- LUSSON, F. (2013). L'équilibre actuariel de long terme en assurance dépendance en France. *Revue d'Analyse Financière*, (47).
- LÉVY, P. (1954). Processus semi-markoviens. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume 3, pages 416–426.
- MALIK, M. et THOMAS, L. C. (2012). Transition matrix models of consumer credit ratings. *International Journal of Forecasting*, 28(1):261–272.
- MARTINUSSEN, T. et SCHEIKE, T. H. (2006). *Dynamic Regression Models for Survival Data*. Statistics for Biology and Health. Springer.
- MATHIEU, E., FOUCHER, Y., DELLAMONICA, P. et DAURES, J. P. (2007). Parametric and Non Homogeneous Semi-Markov Process for HIV Control. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 9(3):389–397.
- MCCULLAGH, P. (1980). Models for Ordinal Data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 42(2):109–142.
- MCKENDRICK, A. G. (1925). Applications of Mathematics to Medical Problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44:98–130.
- MCNEIL, A. J. et WENDIN, J. P. (2007). Bayesian inference for generalized linear mixed models of portfolio credit risk. *Journal of Empirical Finance*, 14(2):131–149.
- MEIRA-MACHADO, L., de UÑA-ÁLVAREZ, J. et CADARSO-SUÁREZ, C. (2006). Nonparametric estimation of transition probabilities in a non-Markov illness–death model. *Lifetime Data Analysis*, 12(3):325–344.
- MEIRA-MACHADO, L., de UÑA-ÁLVAREZ, J., CADARSO-SUÁREZ, C. et ANDERSEN, P. K. (2009). Multi-state models for the analysis of time-to-event data. *Statistical methods in medical research*, 18(2):195–222.
- MEIRA-MACHADO, L., de UÑA-ÁLVAREZ, J. et DATTA, S. (2014). Nonparametric estimation of conditional transition probabilities in a non-Markov illness-death model. *Computational Statistics*, pages 1–21.
- MEIRA-MACHADO, L. et ROCA-PARDINAS, J. (2011). p3state.msm : Analyzing Survival Data from an Illness-Death Model. *Journal of Statistical Software*, 38(3):1–18.

- 
- MENVIELLE, G., CHASTANG, J. F., LUCE, D. et LECLERC, A. (2007). Evolution temporelle des inégalités sociales de mortalité en France entre 1968 et 1996 : Etude en fonction du niveau d'études par causes de décès. *Revue d'Épidémiologie et de Santé Publique*, 55(2):97–105.
- MERTON, R. C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, 29(2):449.
- MÖHR, C. (2011). Market-Consistent Valuation of Insurance Liabilities by Cost of Capital. *ASTIN Bulletin*, 41(02):315–341.
- MIMINO, A. M. (2010). Deaths : Preliminary Data for 2008. *National Vital Statistics Reports*, 59(2):1–52.
- MÜLLER, H. G. et WANG, J. L. (1994). Hazard Rate Estimation under Random Censoring with Varying Kernels and Bandwidths. *Biometrics*, 50(1):61–76.
- MONTEIRO, A., SMIRNOV, G. V. et LUCAS, A. (2006). Non-parametric Estimation for Non-homogeneous Semi-Markov Processes : An Application to Credit Risk. Discussion Paper TI 2006-024/2, Tinbergen Institute, Amsterdam.
- MOSTAJABI, F. et DATTA, S. (2013). Nonparametric regression of state occupation, entry, exit, and waiting times with multistate right-censored data. *Statistics in Medicine*, 32(17):3006–3019.
- NELSEN, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2 édition.
- NEVEU, J. (1975). *Discrete Parameter Martingales*. North-Holland / American Elsevier, Amsterdam and New-York.
- NICKELL, P., PERRAUDIN, W. et VAROTTO, S. (2000). Stability of rating transitions. *Journal of Banking & Finance*, 24(1-2):203–227.
- NING, J. et BANDEEN-ROCHE, K. (2014). Estimation of time-dependent association for bivariate failure times in the presence of a competing risk. *Biometrics*, 70(1):10–20.
- NORBERG, R. (1991). Reserves in life and pension insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, (1):3–24.
- NORBERG, R. (2014). Life Insurance Mathematics. In *Wiley StatsRef : Statistics Reference Online*. John Wiley & Sons, Ltd.
- OAKES, D. (1989). Bivariate Survival Models Induced by Frailties. *Journal of the American Statistical Association*, 84(406):487–493.
- OLIVIERI, A. et PITACCO, E. (2001). Facing LTC risks. In *Proceedings of the 32th International ASTIN Colloquium*, Washington.
- OPPENHEIM, A. L. (1977). *Ancient Mesopotamia : Portrait of a Dead Civilization*. University of Chicago Press, 2 édition.

- OUHBI, B. et LIMNIOS, N. (1999). Nonparametric Estimation for Semi-Markov Processes Based on its Hazard Rate Functions. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2(2):151–173.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/1.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2014). Directive 2014/51/UE du 16 avril 2014 modifiant les directives 2003/71/CE et 2009/138/CE et les règlements (CE) no 1060/2009, (UE) no 1094/2010 et (UE) no 1095/2010 en ce qui concerne les compétences de l'Autorité européenne de surveillance (Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles) et de l'Autorité européenne de surveillance (Autorité européenne des marchés financiers). OJ L. 153/1.
- PASSALACQUA, L. (2006). A pricing model for credit insurance. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, LXIX:87–123.
- PASSALACQUA, L. (2007). Measuring Effect of Excess-of-Loss Reinsurance on Credit Insurance Risk Capital. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, LXX:81–102.
- PENG, L. et FINE, J. P. (2006). Nonparametric estimation with left-truncated semicompeting risks data. *Biometrika*, 93(2):367–383.
- PEPE, M. S. (1991). Inference for Events With Dependent Risks in Multiple Endpoint Studies. *Journal of the American Statistical Association*, 86(415):770–778.
- PESARAN, M. H., SCHUERMAN, T., TREUTLER, B.-J. et WEINER, S. M. (2006). Macroeconomic Dynamics and Credit Risk : A Global Perspective. *Journal of Money, Credit and Banking*, 38(5):1211–1261.
- PESARAN, M. H., SCHUERMAN, T. et WEINER, S. M. (2004). Modeling Regional Interdependencies Using a Global Error-Correcting Macroeconometric Model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(2):129–162.
- PFAFF, B. (2008). VAR, SVAR and SVEC Models : Implementation Within R Package vars. *Journal of Statistical Software*, 27(4):1–32.
- PITACCO, E. (2004). Survival models in a dynamic context : a survey. *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(2):279–298.
- PITACCO, E. (2012). Mortality of Disabled People. Technical report.
- PITACCO, E. (2014). *Health Insurance : Basic Actuarial Models*. Springer International Publishing AG, New York.
- PLANCHET, F. et GUIBERT, Q. (2014). L'utilisation des actions du management en assurance dépendance. *L'actuariel*, (11):40–41.
- PLANCHET, F. et THÉRON, P.-E. (2011). *Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles*. Assurance Audit Actuariat. Economica, Paris, 2 édition.

- 
- PLANCHET, F. et TOMAS, J. (2014). Uncertainty on survival probabilities and solvency capital requirement : application to long-term care insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 0(0):1–14.
- PLAT, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance : Mathematics and Economics*, 45(3):393–404.
- PLAT, R. (2011). One-year Value-at-Risk for longevity and mortality. *Insurance : Mathematics and Economics*, 49(3):462–470.
- PLISSON, M. (2009). *Assurabilité et développement de l'assurance dépendance*. Ph.D. thesis, Université Paris Dauphine, Paris.
- PRENTICE, R. L., KALBFLEISCH, J. D., PETERSON, A. V., FLOURNOY, N., FAREWELL, V. T. et BRESLOW, N. E. (1978). The Analysis of Failure Times in the Presence of Competing Risks. *Biometrics*, 34(4):541–554.
- PRITCHARD, D. J. (2006). Modeling disability in long-term care insurance. *North American Actuarial Journal*, 10(4):48–75.
- PYKE, R. (1961a). Markov renewal processes : definitions and preliminary properties. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1231–1242.
- PYKE, R. (1961b). Markov Renewal Processes with Finitely Many States. *The Annals of Mathematical Statistics*, 32(4):1243–1259.
- R CORE TEAM (2015). *R : A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- RENSHAW, A. et HABERMAN, S. (1995). On the graduations associated with a multiple state model for permanent health insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 17(1):1–17.
- RICKAYZEN, B. D. et WALSH, D. P. (2002). A Multi-State Model of Disability for the United Kingdom : Implications for Future Need for Long-Term Care for the Elderly. *British Actuarial Journal*, 8(2):341–393.
- RIVEST, L.-P. et WELLS, M. T. (2001). A Martingale Approach to the Copula-Graphic Estimator for the Survival Function under Dependent Censoring. *Journal of Multivariate Analysis*, 79(1):138–155.
- ROBERT-BOBÉE, I. (2006). Projections de population pour la France métropolitaine à l'horizon 2050. Insee Première 1089, Insee.
- ROBINS, J. M. (1993). Information recovery and bias adjustment in proportional hazards regression analysis of randomized trials using surrogate markers. *In Proceedings of the Biopharmaceutical section*, pages 24–33. American Statistical Association.
- RODRÍGUEZ-GIRONDO, M. et de UÑA-ÁLVAREZ, J. (2012). A nonparametric test for Markovianity in the illness-death model. *Statistics in Medicine*, 31(30):4416–4427.
- ROGERS, A. (1992). Heterogeneity and Selection in Multistate Population Analysis. *Demography*, 29(1):31–38.

- ROTOLO, F., LEGRAND, C. et VAN KEILEGOM, I. (2013). A simulation procedure based on copulas to generate clustered multi-state survival data. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 109(3):305–312.
- SAINT PIERRE, P. (2005). *Modèles multi-états de type Markovien et application à l’asthme*. Ph.D. thesis, Université Montpellier I, Montpellier.
- SALOMON, J. A., WANG, H., FREEMAN, M. K., VOS, T., FLAXMAN, A. D., LOPEZ, A. D. et MURRAY, C. J. (2012). Healthy life expectancy for 187 countries, 1990–2010 : a systematic analysis for the Global Burden Disease Study 2010. *The Lancet*, 380(9859):2144–2162.
- SATOR, N. et SOTHER, G. (2013). Approche Solvabilité 2 et ERM du risque Dépendance. *In Proceeding of the 23th International AFIR Colloquium*, Lyon.
- SATTEN, G. A. et STERNBERG, M. R. (1999). Fitting Semi-Markov Models to Interval-Censored Data with Unknown Initiation Times. *Biometrics*, 55(2):507–513.
- SCHEIKE, T. H. et SUN, Y. (2012). On cross-odds ratio for multivariate competing risks data. *Biostatistics*, 13(4):680–694.
- SCHEIKE, T. H., SUN, Y., ZHANG, M.-J. et JENSEN, T. K. (2010). A semiparametric random effects model for multivariate competing risks data. *Biometrika*, 97(1):133–145.
- SCHRAGER, D. F. (2006). Affine stochastic mortality. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38(1):81–97.
- SHUMWAY, T. (2001). Forecasting Bankruptcy More Accurately : A Simple Hazard Model. *The Journal of Business*, 74(1):101–124.
- SMITH, W. L. (1955). Regenerative Stochastic Processes. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 232(1188):6–31.
- SÁNCHEZ-SELLERO, C., MANTEIGA, W. G. et VAN KEILEGOM, I. (2005). Uniform Representation of Product-Limit Integrals with Applications. *Scandinavian Journal of Statistics*, 32(4):563–581.
- SPITONI, C., VERDUIJN, M. et PUTTER, H. (2012). Estimation and Asymptotic Theory for Transition Probabilities in Markov Renewal Multi-State Models. *The International Journal of Biostatistics*, 8(1).
- STEFANESCU, C., TUNARU, R. et TURNBULL, S. (2009). The credit rating process and estimation of transition probabilities : A Bayesian approach. *Journal of Empirical Finance*, 16(2):216–234.
- STUTE, W. (1993). Consistent Estimation Under Random Censorship When Covariables Are Present. *Journal of Multivariate Analysis*, 45(1):89–103.
- STUTE, W. (1994). The Bias of Kaplan-Meier Integrals. *Scandinavian Journal of Statistics*, 21(4):475–484.
- STUTE, W. (1995). The Central Limit Theorem Under Random Censorship. *The Annals of Statistics*, 23(2):422–439.

- 
- STUTE, W. (1996). Distributional convergence under random censorship when covariables are present. *Scandinavian journal of statistics*, 23(4):461–471.
- STUTE, W. (1999). Nonlinear censored regression. *Statistica Sinica*, 9(4):1089–1102.
- STUTE, W. et WANG, J.-L. (1993). The Strong Law under Random Censorship. *The Annals of Statistics*, 21(3):1591–1607.
- SUZUKAWA, A. (2002). Asymptotic properties of Aalen-Johansen integrals for competing risks data. *Journal of the Japan Statistical Society*, 32:77–93.
- TOMAS, J. (2011). A Local Likelihood Approach to Univariate Graduation of Mortality. *Bulletin Français d'Actuariat*, 11(22):105–153.
- TOMAS, J. (2013). *Quantifying biometric life insurance risks with non-parametric smoothing methods*. Ph.D. thesis, Faculty of Economics and Business, Amsterdam.
- TOMAS, J. et PLANCHET, F. (2013). Multidimensional smoothing by adaptive local kernel-weighted log-likelihood : Application to long-term care insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 52(3):573–589.
- TOMAS, J. et PLANCHET, F. (2014). Constructing entity specific projected mortality table : adjustment to a reference. *European Actuarial Journal*, 4(2):247–279.
- TOURAINÉ, C. (2013). *Modèles illness-death pour données censurées par intervalle : application à l'étude de la démence*. Ph.D. thesis, Université Bordeaux 2, Bordeaux.
- TSIATIS, A. (1975). A non identifiability aspect of the problem of competing risks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(1):20–22.
- van der VAART, A. W. et WELLNER, J. A. (2000). *Weak Convergence and Empirical Processes : With Applications to Statistics*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag New York Inc., New York, 2nd édition.
- VARADHAN, R., XUE, Q.-L. et BANDEEN-ROCHE, K. (2014). Semicompeting risks in aging research : methods, issues and needs. *Lifetime Data Analysis*, pages 1–25.
- VASILEIOU, A. et VASSILIOU, P.-C. G. (2006). An inhomogeneous semi-Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Advances in Applied Probability*, 38(1):171–198.
- VAUPEL, J. W. (2010). Biodemography of human ageing. *Nature*, 464(7288):536–542.
- VAUPEL, J. W., MANTON, K. G. et STALLARD, E. (1979). The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality. *Demography*, 16(3):439–454.
- VEDANI, J., EL KAROUI, N., LOISEL, S. et PRIGENT, J.-L. (2014). Alternative scheme for European life insurance economic valuations : a product-specific market-consistency criterion. Rapport technique.
- von FOERSTER, H. (1959). Some Remarks on Changing Populations. In STOHLMAN, J., éditeur : *The Kinetics of Cellular Proliferation*, pages 382–407. Grune and Stratton.



- WANG, W. et WELLS, M. T. (2000). Model Selection and Semiparametric Inference for Bivariate Failure-Time Data. *Journal of the American Statistical Association*, 95(449):62–72.
- WENDIN, J. (2006). *Bayesian methods in portfolio credit risk management*. Ph.D. thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zürich, Zürich.
- WENDIN, J. et MCNEIL, A. J. (2006). Dependent credit migrations. *Journal of Credit Risk*, 2(3):87–114.
- WÜTHRICH, M. V. et MERZ, M. (2013). *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance*. Springer Finance. Springer édition.
- XING, H., SUN, N. et CHEN, Y. (2012). Credit rating dynamics in the presence of unknown structural breaks. *Journal of Banking & Finance*, 36(1):78–89.
- XU, J., KALBFLEISCH, J. D. et TAI, B. (2010). Statistical Analysis of Illness–Death Processes and Semicompeting Risks Data. *Biometrics*, 66(3):716–725.
- YEE, T. W. (2010). The VGAM Package for Categorical Data Analysis. *Journal of Statistical Software*, 32(10):1–34.
- ZHENG, M. et KLEIN, J. P. (1995). Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula. *Biometrika*, 82(1):127–138.

---

# Table des figures

1	Diagramme de Lexis original <i>cohorte-âge</i> (à gauche) et diagramme de Lexis <i>temps-âge</i> (à droite). Source : Keiding (1990), repris de l'article original de Lexis datant de 1875. . . . .	2
2	Projection des SCR futurs (moyens) en fonction du délai de réajustement du tarif d'un contrat de dépendance lourde prévoyant 1 euro de prestation. Le SCR est évalué pour un nouveau cotisant de 60 ans en tenant compte du risque de souscription et de défaut associé à un traité de réassurance en quote-part à 50 %. 13	13
1.1	Exemple de d'échéancier pour un contrat temporaire décès. . . . .	20
1.2	Représentation en temps discret d'une garantie temporaire décès par un modèle à 2 états. . . . .	21
1.3	Exemple de garantie d'assurance vie à 4 états. . . . .	22
1.4	Exemple de garantie incapacité-invalidité à 4 états. . . . .	22
1.5	Exemple de garantie dépendance à $n + 2$ états. . . . .	23
1.6	Exemple de chemin parcouru au cours de la durée de vie d'un individu pour un modèle multi-états quelconque à 3 états $\{e_0, e_1, e_2\}$ . . . . .	27
1.7	Modèle à risques concurrents à 2 états. . . . .	32
1.8	Modèle <i>illness-death</i> . . . . .	43
1.9	Exemple de modèle multi-états acyclique. . . . .	45
1.10	Comparaison dans le Cas 1 des estimateurs des fonctions d'incidence cumulés (trait plein) et des fonctions de répartition (pointillé) de $T_{01}$ (à gauche) et $T_{02}$ (à droite) estimées par Kaplan-Meier. La Figure (a) correspond à $\theta = 0,001$ et la Figure (b) correspond à $\theta = 0,8$ . . . . .	56
1.11	Comparaison dans le Cas 2 des estimateurs des fonctions d'incidence cumulés (trait plein) et des fonctions de répartition (pointillé) de $T_{01}$ (à gauche) et $T_{02}$ (à droite) estimées par Kaplan-Meier. La Figure (a) correspond à $\theta = 0,001$ et la Figure (b) correspond à $\theta = 0,8$ . . . . .	57
1.12	Comparaison dans le Cas 3 des estimateurs des fonctions d'incidence cumulés (trait plein) et des fonctions de répartition (pointillé) de $T_{01}$ (à gauche) et $T_{02}$ (à droite) estimées par Kaplan-Meier. La Figure (a) correspond à $\theta = 0,001$ et la Figure (b) correspond à $\theta = 0,8$ . . . . .	58
2.1	Modèle multi-états associé à l'incidence en dépendance. . . . .	68
2.2	Taux d'incidence en dépendance estimés selon l'approche multi-états. Les bandes grises représentent les intervalles de confiance à 95 %. . . . .	74

2.3	Taux d'incidence lissés, résidus et résidus de Student du lissage par causes concurrentes. . . . .	76
2.4	Taux d'incidence simulés par <i>bootstrap</i> et intervalle de confiance à 95 % associés. 78	
2.5	Coefficients de variation des taux d'incidence. . . . .	79
2.6	Distribution des provisions techniques en fonction de l'âge de l'assuré cotisant. . 80	
2.7	Positionnement des taux d'incidence multi-états par rapport aux bornes $b_j^-$ et $b_j^+$ . . . . .	81
2.8	Écarts relatifs sur les provisions entre les méthodes d'estimation marginale et multi-états. . . . .	82
2.9	Taux d'incidence en dépendance estimés selon l'approche multi-états par sexe. Les bandes grises représentent les intervalles de confiance à 95 %. . . . .	84
3.1	Exemple de modèle multi-états acyclique avec deux niveaux de risques concurrents imbriqués. . . . .	89
3.2	Forme du modèle multi-états étudié pour l'analyse sur données simulées. . . . .	103
3.3	Forme du modèle multi-états retenu pour les données d'assurance dépendance. . 108	
3.4	Probabilités de transition estimées (pointillés) de l'état de bonne santé $a_0$ vers un état de dépendance $e_1, \dots, e_4$ , ainsi que les taux d'incidence en dépendance associés (trait plein). Les intervalles de confiance asymptotique à 95 % sont obtenus par <i>bootstrap</i> à partir de 500 rééchantillonnages. . . . .	109
3.5	Surface des taux de décès mensuels estimés pour des assurés dépendants ((a) Pathologies neurologiques, (b) Pathologies diverses, (c) Cancers en phase terminale et (d) Demence). . . . .	110
4.1	Relation triangulaire en assurance crédit. . . . .	125
4.2	Taux de clôture pour chaque classe de <i>rating</i> (classe 1 à 5). . . . .	135
4.3	Répartition du portefeuille par <i>rating</i> sur la période d'observation. . . . .	136
4.4	Estimation des probabilités de transition trimestrielles pour le secteur Services/Commerce. La première ligne représente les améliorations de la qualité de crédit pour les classes 2 à 5. La seconde ligne correspond aux probabilités de dégradation depuis les classes 1 à 4. . . . .	151
4.5	Estimation trimestrielle des probabilités de (a) défaut <i>protacted</i> et de (b) défaut <i>insolvency</i> pour les <i>ratings</i> 3 à 5, avec les intervalles de confiance à 95 % relatifs à l'incertitude sur les paramètres. Les défauts <i>protracted</i> sont présentés pour l'ensemble des secteurs. Nous omettons les secteurs Agriculture et Finance/Immobilier par manque d'observations pour les défauts <i>insolvency</i> . Les points correspondent aux probabilités de défaut brutes, calculées avec l'estimateur non-paramétrique d'Aalen-Johansen. . . . .	152
4.6	Estimation trimestrielle des probabilités de clôture pour l'ensemble des secteurs, avec les intervalles de confiance à 95 % relatifs à l'incertitude sur les paramètres. Les points correspondent aux probabilités de défaut brutes, calculées avec l'estimateur non-paramétrique d'Aalen-Johansen. . . . .	153
4.7	Mesure SVD pour les matrices de migration trimestrielles par secteur. La mesure SVD est calculée pour les modèles M0, M4, M4* et M5*. L'adéquation du modèle aux données est analysable, en comparant les résultats projetés à la mesure SVD calculée sur les probabilités de transition non-paramétriques. . . . .	157

---

4.8	Distribution du nombre de défauts et de clôtures obtenue avec les modèles M0 et M5*. Les sous-figures représentent la distribution du nombre de défauts (à gauche) et de clôtures (à droite) pour différents horizons temporels. . . . .	162
4.9	Distributions des nombres de défauts (à gauche) et de clôtures (à droite), prédites par M5* pour différents horizons et différentes situations stressés. Les résultats des modèles M0 et M5* sans choc sont présentés pour comparaison. .	163



# Liste des tableaux

2.1	Description des causes d'entrée en dépendance. . . . .	73
2.2	Paramètres de lissage par le modèle Whittaker-Henderson. . . . .	76
2.3	Évaluation de la qualité du lissage. . . . .	77
2.4	Risque d'estimation moyen sur les taux d'incidence. . . . .	80
2.5	Définition des permutations testées. . . . .	82
3.1	Paramètres de simulation pour les deux scénarios de censure. . . . .	103
3.2	Analyse de performance pour le scénario de censure modérée. . . . .	105
3.3	Analyse de performance pour le scénario de censure moyenne. . . . .	106
3.4	Mesure d'association estimée. . . . .	111
4.1	Statistiques descriptives sur l'échantillon sélectionné. . . . .	134
4.2	Nombre de transitions directes observées. . . . .	137
4.3	Matrices moyennes des probabilités de transition trimestrielles. . . . .	139
4.4	Matrices moyennes d'ordre 2 des probabilités de transitions issues de l'état $P$ . . . . .	140
4.5	Variabes macroéconomiques et financières utilisées dans le modèle de migration. . . . .	143
4.6	Paramètres estimés pour différentes spécifications du modèle de migration avec l'hypothèse de transitions parallèles. . . . .	145
4.7	Critères d'information et performances des différents modèles de migration. . . . .	147
4.8	Paramètres estimés pour le modèle de migration M5* (État initiaux 1 et 2). . . . .	148
4.9	Paramètres estimés pour le modèle de migration M5* (État initiaux 3, 4 et 5). . . . .	149
4.10	Résultats <i>out-of-sample</i> . . . . .	155
4.11	Résultats des tests ADF pour les facteurs macros. . . . .	158
4.12	Tests de cointégration de Johansen. . . . .	158
4.13	Paramètres du modèle VECM. . . . .	160
4.14	Moyenne, VaR et CTE pour différents chocs et horizons temporels. . . . .	165