

Contribution à la mesure des engagements et du besoin en capital pour un assureur crédit

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 4 septembre 2014

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon 1

(sciences de gestion)

par

Anisa CAJA

Composition du Jury

Rapporteurs : Jean-François GAJEWSKI, Professeur à l'Université de Savoie
Jean-Paul LAURENT, Professeur à l'Université Paris 1

Examineurs : Jean-François DECROOCQ, Statisticien Economiste ENSAE
Frédéric PLANCHET, Professeur à l'Université Lyon 1 (directeur de thèse)
Christian ROBERT, Professeur à l'Université Lyon 1

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, Monsieur Frédéric Planchet, pour son aide, ses encouragements et son optimisme pendant ces années. Merci Frédéric pour toutes nos discussions et aussi d'avoir utilisé vos aptitudes de psychologue quand il le fallait.

Je remercie Monsieur Jean-François Gajewski et Monsieur Jean-Paul Laurent d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail ; j'en suis honorée. Je vous remercie pour le temps que vous avez consacré à la lecture de la thèse et pour vos remarques pertinentes.

Je remercie Jean-François Decroocq d'avoir cru en la stagiaire que j'étais, en me confiant un sujet suffisamment intéressant et large pour en faire une thèse. Je te remercie d'avoir accepté d'être examinateur dans le jury.

Je remercie Christian Robert d'avoir accepté d'être examinateur de cette thèse. Je te suis reconnaissante pour les échanges que nous avons eus au cours de ces années et les réponses précises que tu as toujours données aux questions que j'ai pu te poser. C'était toujours très éclairant.

Je remercie l'équipe pédagogique de l'ISFA de m'avoir aidée quand j'en ai eu besoin. Grâce à vous j'ai beaucoup appris. Cette dernière année où j'ai pu enseigner à vos côtés était très enrichissante pour moi et j'en garderai toujours un bon souvenir.

Merci Anne pour ton aide pendant mon année d'ATER ; grâce à toi j'ai enseigné des sujets passionnants.

Merci Areski d'avoir pris le temps de discuter et d'avoir partagé tes connaissances avec moi.

Merci à Monsieur Augros d'avoir cru en moi l'année où j'ai postulé à l'ISFA.

Merci Béatrice pour avoir partagé ton expérience avec moi.

Merci Diana pour ta bonne humeur.

Merci Didier pour tes précieux conseils et ta bienveillance.

Merci Esterina pour ta gentillesse et tes sourires contagieux.

Merci Nabil. Nos discussions m'ont beaucoup aidé dans les moments difficiles. Je t'en suis très reconnaissante.

Merci Pierre pour toutes les fois où tu m'as fait rire.

Merci Ragnar d'avoir toujours été disponible pour m'aider.

Merci Stéphane pour ton sens de l'humour et tes histoires singulières.

Merci Véronique d'avoir pris le temps de répondre à mes questions, cela m'a permis de progresser considérablement.

Je remercie également les autres professeurs, notamment Alexis, Denis et Nicolas, pour leur sympathie et leur aisance à m'intégrer dans l'équipe.

Je remercie tous les anciens et nouveaux doctorants que j'ai pu croiser à l'ISFA. Vous avez tous su, chacun à sa façon, me prodiguer une aide précieuse et de très bons conseils, qui m'ont permis de finir ce travail. Certains ont été d'excellents collègues, d'autres sont devenus des amis proches, mais vous avez tous su m'aider quand j'en avais besoin.

Merci Abdou pour les discussions enrichissantes ainsi que pour ta bonne humeur.

Merci Alain pour ton soutien, nos discussions vives et de m'avoir remonté le moral quand cela n'allait pas.

Merci Andrés d'avoir cru en moi et de m'avoir motivée, de m'avoir aidée. C'était agréable d'avoir quelqu'un qui partage le même rythme de travail pendant la thèse.

Merci Ibra d'avoir su me soutenir pendant les périodes difficiles. Merci aussi d'avoir été un collègue irréprochable pendant mon année d'ATER.

Merci Ines d'être toujours de bonne humeur et pour les bons moments qu'on a partagés.

Merci Julien V. d'être toi, enthousiaste, amoureux de la vie et original dans tellement de domaines, d'avoir été attentif et attentionné envers moi.

Merci Manel pour ton éternelle gentillesse et toutes les fois où tu m'as aidée.

Merci Quentin d'avoir accepté de collaborer avec moi. Merci pour le travail fourni, tes idées et ta patience.

Merci Reda de toujours trouver des sujets de discussions originaux. J'apprends beaucoup grâce à toi.

Merci Soffana pour les bons moments que nous avons passés ensemble. Cela m'a rendu la vie plus belle quand le moral n'était plus là.

Merci Yahia pour tes conseils éclairés tout domaine confondu.

Je remercie également Alexandre L., Christophe, Elias, Huy, Julien A., Julien T., Khalil, Rudy, Sawssen et Xavier pour le temps passé à leurs côtés et les conversations que nous

avons pu avoir.

Je remercie le personnel administratif de l'ISFA pour leur aide précieuse quand j'en ai eu besoin.

Je remercie particulièrement Patricia d'avoir toujours été disposée à m'aider.

Je remercie Samy pour les bons moments partagés autour d'une tasse de Yogi Tea.

Merci à Anne-Laure, Bart, Benoît, Francisco, Francesca, Fabrizio, Jean-Charles, Nadine, Paul, Ronan, qui m'ont fourni une aide inestimable, chacun à sa façon lors de ces années de thèse.

Merci Donatien pour m'avoir toujours fait voir la recherche d'un point de vue alternatif et d'avoir toujours été un ami fidèle.

Je remercie ma famille et mes amis de m'avoir soutenue et permis de mener à bien ce projet.

Falemnderit Drivaldë per mbeshtetjen qe me ke dhene.

Falemnderit Elira per vendosmerine tende qe arrin shume mire ta komunikosh dhe per ndihmen qe me ke dhene.

Falemnderit Filjor qe ndoshta pa e ditur me dhe nje shtyse te madhe per te shkuar deri ne fund.

Falemnderit Roel per ndihmen qe me ke dhene keto vite.

Falemnderit mami, babi per sakrificat qe keni bere per mua dhe shpresoj te jeni po aq te lumtur sa une qe po mbaroj me ne fund studimet.

Falemnderit Alba qe ma ben jeten me te bukur dhe me motivon kurdo me besimin qe ke te une.

Shpresoj, nena, te jesh krenare per mua, sic jam e sigurt do ishte dhe gjyshi, qe me ne fund mbarova. Je dédie cette thèse à mon grand-père dont la bienveillance et l'attachement m'ont donné la force d'aller jusqu'au bout de ce travail.

Falemnderit B.E.V. per gjithcka. Pa ndihmen tende kjo dite nuk do te kishte ardhur kaq shpejt. Falemnderit per besimin qe ke te une ne cdo suate.

Eric, je ne pourrais jamais vous remercier suffisamment pour ce que vous avez fait pour moi. Je vous serai pour toujours reconnaissante. Vous m'avez redonné de la force à tellement de moments où j'en étais dépourvue. Merci.

Merci Mathias d'exister et de m'avoir fait prendre conscience de ce qui est important dans la vie.

Résumé

Les nouvelles normes de régulation Solvabilité 2 ont un impact très important sur l'assurance crédit. L'objectif de cette directive est que les compagnies d'assurance mesurent mieux les différents risques auxquels elles font face, afin qu'elles constituent suffisamment de capital pour faire face à des situations de crise.

Notre travail se concentre sur une activité d'assurance assez particulière : l'assurance de crédit. Dans le cadre de Solvabilité 2, majoritairement, les assureurs de crédit s'orienteront vers le développement de modèles internes, afin d'avoir une meilleure estimation de leurs exigences en capital. Notre étude a pour objectif de proposer, ou de donner des pistes d'amélioration d'un type de modèle interne.

Nous présentons tout d'abord de manière générale, ce qu'est le métier d'assureur crédit et nous aborderons ensuite le sujet d'un modèle interne. Nous présenterons alors celui que l'on aura choisi d'utiliser, un modèle multifacteurs associé à l'approche Merton. Nous comparerons également les méthodes d'intégration des corrélations entre contreparties des normes Solvabilité 2 avec celle du modèle interne.

Nous essaierons ensuite d'affiner le modèle interne afin de tenir compte d'une caractéristique importante de l'assurance crédit : la gestion des garanties (limites), qui comme nous le verrons induit une baisse des exigences en capital. Pour cela, nous introduirons la prise en compte de cycles de crédit pour le calcul de pertes, un modèle non plus monopériodique, comme c'est habituellement le cas, mais à deux périodes. Nous présenterons ensuite les résultats obtenus à l'aide de ce modèle. Nous exposerons alors une approche alternative en la méthode d'approximation linéaire par morceaux via des simulations de Monte Carlo (PLMC). Il s'agit ici de passer d'un modèle discret à un modèle continu. Nous comparerons ensuite les structures de dépendance Gaussienne et de Student afin de voir ce que le changement de cette structure induirait pour les exigences en capital.

Nous nous intéresserons finalement au problème de la recherche de quantiles élevés, et des études de convergence de nos variables.

Pour cela nous introduirons tout d'abord la mesure du prix de marché du risque, et nous présenterons une estimation de ce prix de marché du risque, plus spécifiquement pour le risque de taux. Ceci nous permettra d'obtenir la dynamique des taux en univers risque-neutre.

Nous aborderons ensuite la question du calcul de Best Estimate, dans un cadre de dépendance entre les risques de taux et de crédit. Le calcul du SCR suivra.

Nous discuterons d'une approche alternative permettant le calcul de l'exigence en capital, approche propre aux modèles structurels et qui permettrait de se passer de simulations pour ce calcul.

Finalement, nous concluons notre étude en exposant les différents enjeux de cette thèse ainsi que les contributions apportées, et les problématiques rencontrées au cours des travaux.

Table des matières

Introduction	5
I Contexte de l'étude et état des lieux	8
1 Présentation de l'assurance crédit	9
1.1 L'assurance crédit : de quoi s'agit-il ?	9
1.2 Types de risques assurés	11
1.3 Atténuation des risques	12
1.4 Mesurer le risque	13
1.4.1 La perte en cas de défaut	13
1.4.2 Probabilités de défaut	15
1.4.3 Corrélation entre défauts	16
1.5 Modèle multi-facteurs	19
2 Prise en compte de l'assurance-crédit dans Solvabilité 2	24
3 Présentation d'un modèle interne	27
3.1 Modélisation du défaut	27
3.2 Modélisation des pertes	28
3.3 Présentation sous forme matricielle	29
3.4 Positionnement du modèle interne par rapport à KMV et Solvabilité 2	32
3.4.1 Calcul de probabilités de transitions et défauts dans KMV	32
3.4.2 Corrélation entre contreparties dans le modèle interne et dans Solvabilité 2	36
4 Données utilisées et mise en œuvre informatique	39
4.1 Données disponibles	39
4.1.1 Données de transitions	39
4.1.2 Données de défaut	40
4.1.3 Données d'expositions	42
4.2 Analyse des probabilités de transition et défaut	42
4.2.1 Taux de défaut	43
4.2.2 Matrices de transitions mensuelles	45
4.3 Implémentation logicielle	47

II	Propositions d'améliorations du modèle interne	50
1	Prise en compte des cycles de crédit pour le calcul des pertes	53
1.1	Une nouvelle modélisation - Prise en compte des actions du management	54
1.1.1	Première période	55
1.1.2	Deuxième période	55
1.2	Paramètres du modèle	56
1.2.1	Matrices de transitions et probabilités de défaut	56
1.2.2	Variations d'expositions et UGDs conditionnels	58
1.3	Calcul mathématique des pertes	59
1.3.1	Perte de la première période	59
1.3.2	Changements dans le portefeuille au cours de la première période	59
1.3.3	Pertes de la seconde période	60
1.3.4	Identification du changement de régime	61
1.4	Algorithme et simulations	63
1.5	Données et résultats	64
1.5.1	Données et estimations de paramètres	64
1.5.2	Resultats	66
1.6	Présentation d'une approche alternative : Méthode PLMC	69
1.6.1	Première étape	70
1.6.2	Deuxième étape	71
2	Analyse de la structure de dépendance	73
2.1	Méthodologie	74
2.1.1	Loi de la perte agrégée	74
2.1.2	Simulations	74
2.1.3	Seuils de défaut	74
2.2	Résultats	75
2.2.1	Student à 3 degrés de liberté	75
2.2.2	Comparaisons entre des Students à différents ddl	78
3	La mesure du prix de marché du risque	82
3.1	Le rôle du prix de marché de risque dans les modèles	83
3.1.1	Le cadre standard	83
3.1.2	Lien avec les déflateurs	85
3.2	Modélisation directe du prix de marché de risque	87
3.2.1	Un cadre monofactoriel général	87
3.2.2	Application numérique	89
4	Calcul de Best Estimate dans un cadre de dépendance entre risque de taux et risque de crédit	96
4.1	Modélisation des transitions	96
4.1.1	Spécification du portefeuille d'acheteurs et hypothèses de base	97
4.1.2	Modélisation des facteurs macroéconomiques et des probabilités de transition	97
4.1.3	Estimation des paramètres du modèle	99
4.1.4	Variables macroéconomiques retenues et leurs estimations . . .	99

4.1.5	Estimation des probabilités de transition	99
4.1.6	Calcul des réserves	99
4.1.7	Rappels sur les processus gaussiens markoviens autorégressifs .	101
4.2	Calcul de Best Estimate	102
4.3	Calcul de besoin en capital (SCR)	106
5	Calcul sans simulations de quantiles élevés dans un modèle à fac-	
	teurs	108
5.1	Distribution de la perte	108
5.2	Calcul de la VaR	110
5.2.1	Dérivées de la VaR	110
5.2.2	Calcul de la dérivée seconde - Cadre multifactoriel	112
	Conclusion	115

Introduction

Notre travail se concentre sur une activité d'assurance assez particulière : l'assurance de crédit. Un assureur crédit propose aux entreprises de les assurer en cas de défaut de paiement de leurs clients. Les risques inhérents à l'activité d'assurance crédit sont alors nombreux, mais il existe une hiérarchie entre ces risques comme nous allons le voir. Comme tout assureur l'assureur crédit est soumis à un risque de réserve, c'est à dire le risque qu'il n'ait pas suffisamment de fonds pour honorer les engagements qu'il a souscrits auprès des assurés. En assurance crédit ce risque est fortement lié au risque de souscription, ainsi qu'au risque opérationnel. Le risque opérationnel de mauvaise gestion des limites (qu'il est préférable d'inclure dans le risque de souscription car difficile à identifier séparément) est important. Lors de la dernière crise, il a causé de grandes pertes aux acteurs de ce marché ; cependant aujourd'hui les assureurs crédits ont pris conscience de ce risque. Le risque de catastrophe est aussi important pour un assureur crédit, et dans son cas une catastrophe serait la faillite simultanée de grandes compagnies sur lesquelles il a des garanties. Le risque de marché n'est quant à lui pas significatif dans ce type d'activité, car l'assureur fait surtout des placements obligataires. Il est également soumis à un risque politique puisqu'il peut assurer des Etats. Pour une introduction aux problématiques d'assurance-crédit, consulter par exemple [71]. Voir [19] pour plus d'informations sur la réaction d'un assureur crédit face aux risques qu'il encourt.

Les nouvelles normes de régulation Solvabilité 2 (cf. [50]), ont un impact très important sur l'assurance crédit. L'objectif de cette directive est que les compagnies d'assurance mesurent mieux les différents risques auxquels elles font face, afin qu'elles immobilisent suffisamment de capital pour faire face à des situations de crise. Les compagnies sont ainsi obligées de comprendre les risques auxquels elles sont les plus exposées, ceux qui les mettent le plus en danger s'ils sont mal compris ou mal mesurés. Dans ce contexte, elles peuvent utiliser ce qu'on appelle la "formule standard" pour mesurer leurs exigences en capital (les fonds propres minimaux qu'elles devront constituer), mais souvent elles ont besoin de ce qu'on appelle un modèle interne, qui sera construit "sur mesure" pour tenir compte des spécificités de l'activité d'un assureur donné. Voir [13], pour des présentations plus poussées de divers modèles internes.

La directive Solvabilité 2 a ainsi accentué l'importance de tous ces risques dans les standards légaux, donc les assureurs crédits doivent répondre à ces nouvelles exigences. La méthode générale, appelée communément "formule standard", proposée par ces règlements afin de calculer le capital économique d'une entreprise, bien que relativement simple d'application, est souvent loin d'être assez fine pour constituer une approximation raisonnable des capitaux propres légaux que doit conserver l'en-

treprise. C'est pour cela que majoritairement, les assureurs de crédit, s'orienteront vers le développement de modèles internes. Voir [44] pour plus d'informations sur l'impact de la réglementation Solvabilité 2 sur l'assurance crédit.

La question se pose alors de savoir quel est le modèle interne optimal pour l'assureur, celui qui modélise et restitue au mieux les risques sous-jacents à son activité, celui qui est suffisamment prudent, sans pour autant contraindre l'assureur à mettre de côté "trop" de capital, étant donné le coût que cela représente. Notre travail a pour objectif de donner des propositions, ou ouvrir la réflexion à des réponses à cette question.

Pour cela nous commencerons tout d'abord par présenter de manière générale, ce qu'est le métier d'assureur crédit, les risques que ce type d'assureur couvrira, la manière qu'il aura de gérer ces risques, de les réduire, ou bien les paramètres fondamentaux, intervenant dans la mesure du risque en assurance crédit. Nous aborderons ensuite le sujet d'un modèle interne, puisque nous chercherons principalement au cours de cette étude à optimiser ces types de modèles afin de trouver un bon équilibre entre la complexité du modèle et une bonne adéquation aux risques portés. Nous présenterons donc tout d'abord le modèle interne que l'on aura choisi d'utiliser au cours de ce travail, principalement au travers de la manière qu'il aura de modéliser les défauts et les pertes, ce qui sera une importante préoccupation pour nous. Dans le cadre du risque de crédit en général, (consulter par exemple [17], [40] ou encore [33]), les modèles multifacteurs sont souvent utilisés. En effet, le risque est divisé en deux parties, qui n'auront pas les mêmes conséquences si elles sont mal évaluées : le risque systématique et le risque individuel ou diversifiable. Le risque systématique, non diversifiable car toutes les compagnies y sont soumises à différents degrés, est celui qui préoccupe le plus les assureurs crédit, car c'est celui qui est responsable des corrélations dans son portefeuille. Et les corrélations peuvent mener à de grandes pertes, car plusieurs entreprises du portefeuille peuvent faire défaut en même temps. Le modèle interne que nous présenterons et dont nous chercherons à améliorer certains aspects, est un modèle multifacteur. Ce modèle sera combiné avec l'approche de Merton (cf. [62]).

Nous essaierons par la suite de comparer ce modèle à divers modèles généraux utilisés en assurance de crédit, tel que le modèle KMV par exemple (cf [92], [18]). Nous comparerons également les méthodes d'intégration des corrélations entre contreparties des normes Solvabilité 2 (cf. [14]) avec celle du modèle interne.

Nous présenterons alors une application numérique de ce modèle.

Pour cela nous exposerons tout d'abord la manière dont nous avons exploité nos données, et surtout quelles étaient ces données (données de transitions, de défauts, d'expositions). Nous analyserons ensuite les probabilités de transitions et de défauts, qui vont être au cœur de notre problématique. Ce sont ces données qui seront par la suite utilisées dans nos applications numériques. Nous présentons ensuite la structure de base de l'algorithme que nous utilisons pour simuler les pertes propres à l'assureur, et estimer ses engagements.

Nous essaierons ensuite d'affiner le modèle interne afin de tenir compte d'une caractéristique importante de l'assurance crédit : la gestion des garanties (limites), qui comme nous le verrons induit une baisse des exigences en capital. L'assureur crédit change les niveaux de garantie qu'il accorde en fonction du risque de perte

encouru, et notamment très rapidement après les premiers signaux d'une crise, il baisse drastiquement les garanties accordées pour limiter les pertes dues à un grand nombre de faillites (inversement, il augmente les garanties si la conjoncture est favorable). Pour cela, nous introduirons tout d'abord la prise en compte de cycles de crédit pour le calcul de pertes, à savoir la prise en compte des actions du management de l'entreprise, et donc l'introduction d'un modèle non plus mono-périodique comme c'est le cas habituellement (avec une période d'un an imposée par les normes Solvabilité 2) mais à deux périodes (et donc potentiellement multi-périodique).

Nous discuterons pour cela tout d'abord des paramètres à prendre en compte au sein de ce nouveau modèle plus fin (matrices de transitions, probabilités de défauts). Nous aborderons ensuite le calcul mathématique des pertes pendant les différentes périodes de l'année, en tenant compte du changement qui s'opérera au sein du portefeuille en fin de chaque période, étant donné qu'on tiendra compte des décisions du management de la compagnie. Nous présenterons ensuite l'algorithme que nous utiliserons afin de simuler ces pertes, et, couplé aux données que nous présenterons, les résultats que nous avons obtenus à l'aide de ce modèle. Nous présenterons alors une approche alternative en la méthode d'approximation linéaire par morceaux via des simulations de Monte Carlo (PLMC) (cf. [93]). Il s'agit ici de passer d'un modèle discret à un modèle continu. Cette méthode est une proposition d'amélioration, sachant que cela représenterait en l'état actuel des choses, un temps de calcul encore plus important.

Nous comparerons ensuite les structures de dépendance Gaussienne et de Student afin de voir ce que le changement de cette structure induirait pour les exigences en capital. Comme nous le verrons la copule de Student pour les très petits degrés de liberté augmente d'une façon significative l'exigence en capital.

Nous aborderons enfin le problème du calcul de Best Estimate et d'exigence en capital (SCR), dans le cadre d'un modèle où le risque de crédit et le risque de taux ne sont pas indépendants. Nous présenterons tout d'abord ce qu'est la mesure du prix de marché du risque (cf. [10]), et nous présenterons une estimation de ce prix de marché du risque, plus spécifiquement pour le risque de taux. Ceci nous permet d'avoir la dynamique des taux en univers risque-neutre. Le risque de taux est en effet évalué dans cet univers lors du calcul de Best Estimate. Nous aborderons ensuite la question des calculs de Best Estimate (cf. [9]), dans un cadre de dépendance entre les risques de taux et de crédit. Ce cadre fait intervenir les lois conditionnelles des facteurs du risque de crédit par rapport facteurs de risque de taux. Le calcul de SCR suit le calcul de BE, dans un cadre simulateur. Nous verrons une approche alternative pour calculer l'exigence en capital, approche propre aux modèles à facteurs et qui nous permettrait de nous passer de simulations pour ces calculs. Finalement, nous concluons notre étude en exposant les différents enjeux de cette thèse ainsi que les contributions apportées, et les problématiques rencontrées au cours des travaux.

Publications : Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :

1. "La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance?", Caja, A. and Planchet, F., Assurances et gestion des risques, 2010, [10],
2. "Modelling cycle dependence in credit insurance",Caja, A. and Planchet, F., Risks, 2014, [11].

Première partie

Contexte de l'étude et état des lieux

Chapitre 1

Présentation de l'assurance crédit

L'assurance-crédit étant une branche très spécifique du secteur des assurances, une présentation de ce métier s'impose. C'est le but de ce chapitre. Nous verrons dans un premier temps quel est l'objet de l'assurance crédit, quels sont ses clients, quelles sont les sources des risques auxquels un assureur crédit doit faire face. Ensuite nous présenterons comment l'assureur gère ces risques. Différentes modélisations du risque de défaut et du risque de corrélation sont ensuite introduites. Le lecteur intéressé pourra consulter [71] pour une présentation détaillée de ce type d'assurance.

1.1 L'assurance crédit : de quoi s'agit-il ?

Lorsqu'une entreprise A ("le fournisseur") accorde un délai de paiement à une entreprise B ("le client") pour une marchandise ou une prestation de service qu'elle lui a livrée, elle lui consent un *crédit inter-entreprises*. Pendant ce délai, l'entreprise A dispose d'une créance sur l'entreprise B, également appelée *encours client* du point de vue de A et *encours fournisseur* du point de vue de B.

Le crédit inter-entreprises est une source de financement importante pour toute entreprise et il joue un rôle considérable dans le bien-être économique d'un pays. Cependant, il expose les entreprises qui l'accordent à un risque, le risque de ne jamais voir leur créance réglée. En effet, les entreprises ont généralement des moyens pour le moins restreints de connaître la solvabilité de leurs clients, et peuvent alors être sujettes au défaut de paiement du crédit consenti. Des études montrent qu'en Europe 20% des entreprises font faillite à cause d'impayés et qu'il y a une progression de 7% des créances irrécouvrables (cf. [67]).

Mais le crédit inter-entreprises reste fondamental pour le développement d'une entreprise, donc il serait hors de question d'arrêter complètement l'accord de délais de paiement à ses clients, au risque de ne plus en avoir. Cela limiterait les relations commerciales et aurait des conséquences affreuses sur l'économie d'un pays. C'est là où l'assurance crédit intervient, comme un mécanisme qui rend aux entreprises la confiance en ce mode de financement. En effet, l'assureur crédit entre en tant que tierce partie dans la relation entre le fournisseur et le client, de manière à enlever tout aléa de paiement en contrepartie d'une prime d'assurance. Formel-

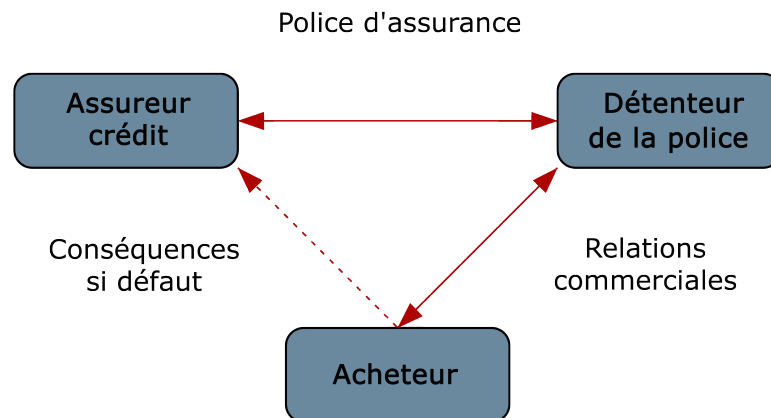


FIGURE 1.1 – Triangle de relations dans l'assurance crédit

lement, l'entreprise A, dans le but de se protéger contre la défaillance de B, peut souscrire à un contrat avec un assureur crédit afin que ce dernier couvre le crédit inter-entreprises que A a accordé à B. Grâce à l'assurance crédit, un fournisseur protège son compte client, qui représente jusqu'à 40% de ses actifs. En France, les assureurs crédit couvrent 320 Milliard d'euros, soit 1/4 du crédit inter-entreprises, selon le Ministère de l'économie, de l'industrie et de l'emploi, données pour l'année 2007 (cf. [32]).

Le mécanisme d'assurance crédit peut être représenté comme ci-dessous :

Il y a un transfert du risque du fournisseur A, l'assuré, vers l'assureur crédit, moyennant une prime d'assurance. L'assureur crédit devant maintenant faire face au risque de défaut de paiement du client B, il est amené à porter un jugement sur la solvabilité de B. Toutefois il est important de souligner qu'il n'y a pas de relation contractuelle entre l'assureur et le client B, elle existe uniquement entre l'assureur et le fournisseur A. Cependant le client B est la source de risque et il est important que l'assureur soit de façon permanente renseigné sur la santé financière de B, afin qu'il puisse évaluer le risque.

Le jugement de l'assureur sur la solvabilité de B intéresse A, qui reste le fournisseur de B et qui sera amené à effectuer d'autres transactions avec celui-ci, compte tenu de l'expertise de l'assureur-crédit, dont l'évaluation des risques d'insolvabilité est au cœur du métier. Au cas où le client B serait peu solvable, alors il aura intérêt à diminuer le volume des transactions. L'assurance crédit est aussi également une aide au pilotage pour beaucoup d'entreprises.

Maintenant que nous connaissons mieux l'objet du métier d'assureur crédit, nous

allons introduire les différents risques auxquels l'assureur doit faire face lors de l'exercice de son métier.

1.2 Types de risques assurés

Le défaut de paiement d'un client peut arriver pour deux raisons :

- soit parce que l'entreprise est devenue insolvable,
- soit parce que l'entreprise n'a pas pu payer dans les délais impartis.

Ces risques sont appelés *risques commerciaux*.

En général la couverture concerne les biens livrés et les prestations de service effectuées, mais il existe aussi une protection "sur mesure" qui peut concerner les travaux en cours ou encore les contrats exécutoires.

Les entreprises qui exportent peuvent aussi se protéger contre un certain nombre de *risques politiques* qui empêcheraient, ou retarderaient, le paiement. On peut citer par exemple :

- le risque de déclenchement d'une guerre ou d'une guerre civile dans le pays où le client se situe ;
- l'annulation du contrat par le gouvernement du pays du client ;
- une réglementation, comme un embargo ou des quotas, empêchant l'importation des biens.

Un acheteur peut faire l'objet de plusieurs contrats, car plusieurs de ses fournisseurs peuvent avoir souscrit des contrats d'assurance pour se protéger contre le défaut de paiement de celui-ci.

En cas de défaut de l'acheteur, le fournisseur déclare le sinistre auprès de l'assureur crédit, et celui-ci doit alors indemniser l'assuré dans la limite de la somme assurée.

Pour une présentation détaillée des risques encourus par un assureur-crédit, consulter également [13]. Les risques auxquels un assureur crédit fait face sont donc assez importants, et peuvent vite mettre sa solvabilité en danger si celui-ci ne gère pas bien ces risques au quotidien. Pour cela l'assureur crédit dispose d'un moyen assez efficace, qui devrait le protéger aussi en cas de crise quand le nombre de défauts simultanés explose. Il s'agit de la gestion des garanties qu'il délivre, aussi appelée gestion des limites. La mauvaise gestion des limites mettrait l'assureur en grave danger, comme vu avec la COFACE lors du déclenchement de la dernière crise en 2008, durant laquelle l'entreprise a été frappée de plein fouet par l'insuffisance de ses estimations. Voir [24] et [21] pour plus d'explications sur l'impact de la crise sur la Coface.

Nous présenterons maintenant plus en détail ce mécanisme assez particulier, qui a lui seul fait une grande différence entre le métier d'assureur crédit et d'autres types d'assureurs.

1.3 Atténuation des risques

Lorsqu'un contrat d'assurance est conclu entre l'assureur et le fournisseur A avec comme objet une garantie sur l'encours du client B, l'assureur décide du montant de l'encours qu'il va couvrir. C'est en fonction du montant assuré, et du risque d'insolvabilité du client, qu'une prime d'assurance est calculée. Le montant de garantie peut couvrir l'intégralité de l'encours demandé ou non, ceci dépend du risque sous-jacent. Une fois que le montant de cette garantie a été décidé, elle peut être diminuée, voire annulée, si l'assureur estime que la solvabilité du client B est dégradée. On appelle ceci la *capacité de l'assureur crédit d'atténuer les risques*. Si toutefois l'assureur est amené à baisser la garantie, l'assuré en est informé et il peut choisir de baisser le montant de ses transactions futures avec le client B, qui est devenu plus risqué. Il peut aussi interrompre toute transaction et chercher d'autres clients.

En période de crise, où la solvabilité de la plupart des entreprises baisse considérablement, les assureurs crédits peuvent donc baisser ou annuler plusieurs garanties, en accélérant le processus de crise et en aggravant ses conséquences. Cette capacité à baisser la couverture qui constitue un avantage substantiel pour l'assureur, devient alors un inconvénient majeur pour l'économie toute entière.

Au début de la dernière crise, en novembre 2008, le gouvernement français a décidé de réagir pour éviter les conséquences de la réduction des encours garantis par les assureurs-crédit. Afin de préserver la confiance dans les relations entre fournisseurs et clients, l'État a ainsi décidé d'offrir une solution de couverture pour les risques que les assureurs ne veulent plus couvrir. Ainsi des dispositifs complémentaires de couverture, le Complément d'Assurance-crédit Public (CAP) et le CAP+ ont été proposés. Ces dispositifs sont proposés aux entreprises françaises ou européennes, dont le client, qui fait l'objet du contrat, est une PME ou entreprise de taille intermédiaire située en France. Ces dispositifs sont distribués par les assureurs crédit afin de réaliser des économies d'échelle et pour bénéficier de leur expertise.

- Le CAP est disponible s'il y a eu réduction de la garantie depuis le 1er octobre 2008, ou si l'assureur n'accorde pas une garantie sur la totalité de l'encours demandé sur un nouveau client ou un nouvel assuré. Pour éviter tout phénomène d'éviction, la couverture publique dans le cas du CAP n'est disponible que pour autant que l'assureur reste exposé, et à concurrence de cette exposition. La garantie ne couvre que 50% de l'exposition initiale de l'assureur. Même si le CAP est distribué par les assureurs crédit, ces derniers se réassurent auprès de la Caisse Centrale de Réassurance, une SA détenue à 100% par l'État, pour les garanties supplémentaires qu'ils accordent dans le cadre du CAP.
- Le CAP+ se voit comme une extension du CAP, qui concerne les risques considérés comme non-assurables par les assureurs crédit. Il est accessible à toutes les entreprises qui se sont vues notifier une annulation de leur garantie sur un client donné, lorsque l'assureur crédit pense que la probabilité de défaut à un

an du client est comprise entre 2% et 6%. Ceci est fait dans un souci de bonne gestion de l'argent public. Le CAP+ est disponible depuis le 1er mai 2010. Le Fonds de sécurisation du crédit inter-entreprises a été instauré avec une capacité de souscription de 5 Milliards d'euros de risques d'assurance-crédit. Les assureurs-crédit assurent la commercialisation du CAP+ et transfèrent en totalité les engagements correspondants à ce fonds.

A coté de ces deux dispositifs qui concernent les entreprises clientes situées en France, un autre dispositif visant à couvrir les risques de non-paiement encourus dans le cadre de l'export à court terme a été mis en place.

Ces dispositifs étatiques étaient valables jusqu'en décembre 2010. Depuis janvier 2011 ce sont les entreprises qui ont pris le relais, en proposant des garanties équivalentes, mais cette fois-ci ce sont elles qui portent le risque, sur leurs fonds propres ([29]). Donc les assureurs crédits proposent leurs versions de contrats CAP/CAP+ et leurs équivalents pour l'export, comme on peut le voir sur leurs pages respectives (consulter par exemple [59], [56]). Il est ainsi possible pour les entreprises de couvrir la quasi-intégralité de leurs clients, à un coût plus élevé pour les clients à risque, mais qu'elle ne souhaite pas perdre.

La question se pose alors de savoir comment un assureur crédit mesure les risques auxquels il fait face, risques qui sont devenus encore plus importants avec les dispositifs CAP/CAP+. Ceci est nécessaire pour assurer la solvabilité de l'assureur.

1.4 Mesurer le risque

Afin d'évaluer le risque de crédit d'un portefeuille, un assureur crédit a besoin de connaître la perte en cas de défaut, la probabilité de défaut de chaque client, ainsi que la corrélation entre les défauts de différents clients. Regardons dans un premier temps chacun de ces points, avant de présenter un modèle classique utilisé en assurance crédit, un modèle multifacteurs de type KMV.

1.4.1 La perte en cas de défaut

Pour l'assureur il est fondamental de connaître le montant auquel s'élèveraient ses pertes dans le cas de défaut d'un acheteur. Pour cela il a besoin de connaître son exposition en cas de défaut, ainsi que la perte effective qu'il devraient supporter en cas de défaut. Regardons plus précisément les définitions de ces quantités de perte, et les différences entre les deux.

L'exposition en cas de défaut - Exposure at Default (EAD)

L'*exposition en cas de défaut* est définie comme l'encours effectif garanti à l'instant de défaut. Le montant des encours garantis est précisé lors de la conclusion du contrat, et peut ensuite être modifié en fonction de la solvabilité du client. En général le montant des garanties est réduit plusieurs fois par an, et il est alors important de calculer le ratio entre l'encours garanti lors de la conclusion du contrat, et l'encours garanti à l'instant du défaut, qui va mesurer le degré d'anticipation de l'aggravation

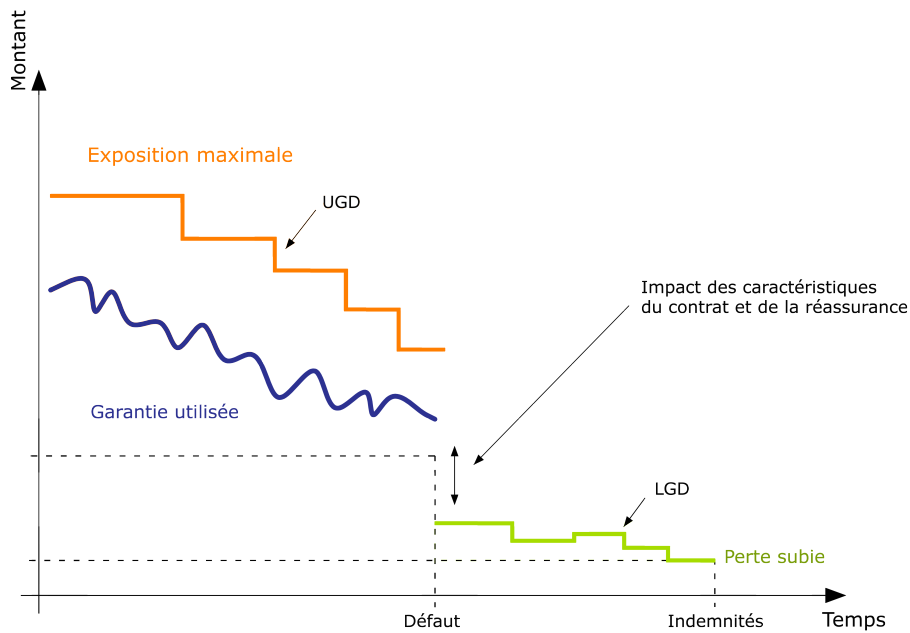


FIGURE 1.2 – Évolution des encours garantis

du risque. En effet, si l'assureur a bien été informé de la situation financière de l'entreprise et a bien anticipé le défaut, alors ce ratio devrait être petit, et même nul dans le meilleur des cas. Dans ce dernier cas la garantie est annulée juste avant le défaut de paiement du client, donc l'assureur n'a pas de perte à supporter, ce qui implique que la gestion du risque a été très efficace. Le ratio ci-dessus est appelé Usage Given Default (UGD) et il est donc donné par la formule :

$$\text{UGD} = \frac{\text{Encours garantis à l'instant de défaut}}{\text{Encours garantis à la conclusion du contrat}} \quad (1.1)$$

On a donc cette formule pour l'exposition en cas de défaut :

$$\text{EAD} = \text{Encours garanti lors de la conclusion du contrat} \times \text{UGD}.$$

Comme il a été mentionné dans la section 1.3, lorsque la garantie est diminuée, l'assuré reçoit un signal le prévenant de la dégradation de solvabilité de son client. De plus, le montant des garanties sur l'encours de ce client est diminué. C'est pour ces raisons que l'assuré va diminuer le montant des transactions avec son client. Voici un résumé de tout cela en images :

Perte en cas de défaut

Une fois que l'exposition en cas de défaut a été calculée, *la perte en cas de défaut* (Loss given Default-LGD) peut être calculée. En effet, très souvent ce n'est pas

toute l'exposition en cas de défaut qui sera à la charge de l'assureur. Ce dernier dispose de moyens assez efficaces qui lui permettent de limiter ses pertes effectives. Les premières mesures sont prises dès la signature du contrat, en y ajoutant des clauses comme :

- le pourcentage non assuré,
- des franchises,
- la garantie annuelle, qui n'est rien d'autre qu'une franchise qui s'applique à la somme des sinistres déclarés ou des indemnités reçues par un assuré durant une année. Si cette somme est supérieure à la garantie annuelle, alors l'excédent est payé, sinon l'assuré ne reçoit pas d'indemnité.
- une clause de responsabilité maximale qui correspond au montant maximal des indemnités qu'un assureur crédit paiera durant une période donnée.

Outre les clauses qui permettent de limiter les pertes, l'assureur crédit peut avoir recours à ces deux mécanismes qui cette fois-ci, ne sont pas spécifiés dans le contrat :

- la réassurance, qui est assez classique pour tout contrat d'assurance ;
- l'assureur arrive à se faire rembourser une partie des indemnités qu'il a payées à l'assuré. Cela définit le taux de recouvrement.

Remarque 1. Dans la suite de notre travail nous nous intéressons aux pertes représentées par l'EAD. Nous mesurons donc les pertes avant l'application des différents mécanismes qui contribuent à sa réduction. La raison derrière cela, est que nous nous concentrons sur la gestion des limites, et cette information est entièrement incluse dans l'EAD ; dans le LGD, elle se trouve diluée parmi les autres moyens de réduire les pertes effectives pour un assureur.

Dans ce qui précède nous avons donné une description des moyens de gestion des contrats d'assurance, qui nous permet de calculer le montant de pertes en cas de défaut. Il est également important de connaître la probabilité avec laquelle l'assureur fera face à ses pertes. Ceci relève de l'estimation des probabilités de défaut.

1.4.2 Probabilités de défaut

Ici nous allons donner la définition de l'événement "défaut" pour un assureur-crédit.

Il y a trois types d'événements de défaut.

1. **Insolvabilité** - L'événement de défaut est la reconnaissance légale de l'insolvabilité ;
2. **L'ouverture d'un fichier sinistre** - L'événement de défaut est l'ouverture d'un dossier sinistre pour le client, soit parce que l'assuré déclare un sinistre, soit parce qu'un procès en interne commence, par exemple quand un fichier est transféré du département crédit vers le département sinistre ;
3. **Indemnisation** - Le défaut est défini par la déclaration d'un sinistre qui a déjà été indemnisé par l'assureur crédit.

En général, la probabilité de défaut est estimée sur un an, comme la fréquence de défauts. Une estimation basique de la probabilité de défaut sera alors :

$$PD = \frac{\text{nombre de clients ayant fait défaut pendant les 12 derniers mois}}{\text{nombre de clients au début des 12 mois}} \quad (1.2)$$

Dans notre travail nous allons estimer des probabilités de défauts pour des périodes inférieures à un an (cf. 1, 4).

Il y a donc 3 types d'événements de défaut, et donc une probabilité de défaut pour chacun de ces événements. Ces probabilités peuvent être sensiblement différentes et le choix de travailler avec une d'entre-elles dépend alors de ce que l'on souhaite étudier. Selon le principe de prudence, après avoir calculé les capitaux nécessaires pour couvrir les pertes correspondantes à chaque événement de défaut, le capital le plus conséquent sera alors choisi.

Remarque 2. La probabilité de défaut d'un client dépend de la solvabilité de celui-ci. Les clients sont regroupés en *classes de notation* suivant leur solvabilité, et une probabilité de défaut est alors attribuée à chaque classe. L'hypothèse sous-jacente est très forte, puisqu'en faisant ceci on suppose que les classes de risque sont homogènes, c'est-à-dire que non seulement la solvabilité actuelle pour les clients d'une même classe est la même, mais aussi qu'elle évoluera de la même façon pour tous.

1.4.3 Corrélation entre défauts

Les probabilités de défaut individuelles sont importantes à connaître. Cependant, dans le cas de grands portefeuilles d'assurance crédit, il est important de savoir de quelle manière les risques sont-ils reliés les uns aux autres. Il y a deux types de dépendance. On distingue tout d'abord les entreprises qui sont en relation commerciale l'une avec l'autre, et on appelle ce risque *risque de contagion*. Il y a aussi le risque de dépendance qui résulte de la situation semblable des entreprises, si elles sont dans le même pays ou la même région, le même secteur etc.

Afin d'évaluer le risque auquel l'assureur crédit fait face, il est crucial de correctement prendre en compte le risque de dépendance. En effet, un portefeuille composé d'entreprises qui sont peu risquées, mais dépendantes l'une de l'autre, est globalement très risqué.

Illustration

Soient 1 et 2, deux entreprises qui travaillent dans le même secteur. Soit D_i la variable de Bernoulli indiquant si l'acheteur $i = 1, 2$ fait défaut. Soit ρ le coefficient de corrélation annuel entre les deux compagnies.

On définit la probabilité de défaut p_i qui est telle que $p_i = \mathbb{P}(D_i = 1)$ pour $i = 1, 2$ et p_{12} est la probabilité de défaut conjointe, donc $p_{12} = \mathbb{P}(D_1 = 1, D_2 = 1)$. Le coefficient de corrélation entre les défauts des deux firmes est donné par la formule :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(D_1, D_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(D_1)}\sqrt{\mathbb{V}(D_2)}} \quad (1.3)$$

$$= \frac{\mathbb{E}(D_1 D_2) - \mathbb{E}(D_1)\mathbb{E}(D_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(D_1)}\sqrt{\mathbb{V}(D_2)}} \quad (1.4)$$

$$= \frac{p_{12} - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}} \quad (1.5)$$

Supposons par exemple que les deux probabilités de défaut p_1 et p_2 pour l'année N sont toutes les deux égales à 2%, et que la corrélation entre les défauts est $\rho = 0.1$. Alors la probabilité de défaut conjoint des deux entreprises est $p_{12} = 0.24\%$. Imaginons deux scénarii pour $N + 1$:

1. Les probabilités de défaut individuelles p_1 et p_2 augmentent et sont maintenant égales à 0.4, et la corrélation mesurée par ρ reste la même.
2. Les probabilités de défaut individuelles p_1 and p_2 croissent et deviennent égales à 0.4, et la corrélation devient $\rho = 0.2$. Ce cas de figure est plus plausible que le premier parce qu'en général, quand la solvabilité baisse, la corrélation entre défauts tend à croître.

Dans le cas (1) la probabilité de défaut conjointe sera $p_{12} = 0.544\%$, alors qu'en (2) $p_{12} = 0.928\%$. Ainsi, ne pas prendre en compte la corrélation aurait amené à une sous-estimation de la probabilité conjointe de défaut de la moitié, ce qui est considérable.

La modélisation de la corrélation entre défauts

Les corrélations de défaut sont difficiles, pour ne pas dire impossibles, à mesurer directement. Une façon de déduire les corrélations entre défauts, serait de connaître les probabilités individuelles de défaut, ainsi que la corrélation entre actifs. Ceci semble assez cohérent puisqu'une entreprise a des chances de faire défaut si la valeur de l'actif tombe au-dessous d'un certain seuil. Cette approche est une approche structurelle, appelée aussi approche de type Merton (cf. [62]). Le lecteur intéressé pourra également consulter [17] pour une présentation détaillée de ce type de modèles. Deux entreprises feront donc défaut si la valeur de leurs actifs respectifs baissent au-dessous de certains seuils. La simultanéité de ces diminutions d'actifs et leur montant, définit la corrélation des actifs des deux compagnies.

Une manière de faire est de supposer que la distribution jointe des défauts est une copule Gaussienne, dont le coefficient de corrélation est celui entre les actifs des deux entreprises. On note δ_{ij} le coefficient de corrélation entre les actifs des deux entreprises i et j , et ρ_{ij} la corrélation entre les défauts de i et j .

On note S_i et S_j les valeurs d'actifs correspondantes, et d_i et d_j les seuils de défauts correspondants. On suppose que $S_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ et $S_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j)$.

p_i et p_j sont les probabilités individuelles de défaut, telles que $p_i = \mathbb{P}(S_i < d_i)$ et $p_j = \mathbb{P}(S_j < d_j)$. $p_{ij} = \mathbb{P}(S_i < d_i, S_j < d_j)$ est la probabilité de défaut joint. Avec la copule Gaussienne on a :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(S_i < d_i, S_j < d_j) \tag{1.6}$$

$$= \mathcal{N}_2(\mathcal{N}^{-1}(p_i), \mathcal{N}^{-1}(p_j), \delta_{ij}) \tag{1.7}$$

$$= \int_{-\infty}^{d_j} \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{2\pi\sigma_i\sigma_j\sqrt{1-\delta_{ij}^2}} \exp\left(-\frac{z}{2(1-\delta_{ij}^2)}\right) ds_i ds_j \tag{1.8}$$

où

$$z = \frac{(s_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} - 2 \frac{\delta_{ij}(s_i - \mu_i)(s_j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j} + \frac{(s_j - \mu_j)^2}{\sigma_j^2} \quad (1.9)$$

On note \mathcal{N}_2 la copule Gaussienne¹. La mesure des corrélations entre actifs est donc un facteur important si l'on cherche à connaître la probabilité jointe de défaut.

Après avoir calculé la probabilité de défaut joint, on peut obtenir la corrélation entre défauts de i et j avec la formule donnée précédemment :

$$\rho_{ij} = \frac{p_{ij} - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}} \quad (1.10)$$

$$= \frac{\mathcal{N}_2(\mathcal{N}^{-1}(p_i), \mathcal{N}^{-1}(p_j), \delta_{ij}) - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}} \quad (1.11)$$

Cependant, afin de faire ce calcul, la corrélation entre actifs doit être connue. Le problème est qu'elle n'est pas directement observable.

On donne ici trois manières possibles pour approcher la corrélation entre actifs.

Utilisation des corrélations d'actifs de marché pour déduire des corrélations de défauts

L'utilisation des corrélations d'actifs en tant que substitut pour les corrélations entre défauts est devenue une pratique courante sur le marché. L'hypothèse sous-jacente est que les rendements doivent être le reflet de la valeur de l'entreprise sous-jacente, et donc deux compagnies avec des rendements fortement corrélés devraient avoir des actifs (du bilan) fortement corrélés également. Néanmoins, d'après [22], les rendements incluent beaucoup de bruits, tels que ceux engendrés par les bulles, et sont affectés par les effets d'offre et de demande (tarissement des liquidités) qui ne sont pas liés aux fonds de l'entreprise. La relation entre ces actifs et ces rendements n'est pas linéaire. C'est pourquoi leurs coefficients de corrélation linéaire seront différents, ce qui fait des corrélations d'équité de piètres substituts aux corrélations d'actifs.

Déduire la corrélation entre actifs à partir des défauts

Ici (cf. [92]) il faudrait calculer la probabilité de défaut individuel et joint. Pour avoir la probabilité de défaut joint on utilise la formule.

$$p_{ij} = \sum_t w_t^{ij} \frac{D_t^i D_t^j}{N_t^i N_t^j} \quad (1.12)$$

1. La copule Gaussienne ne représente pas nécessairement la vraie relation entre les défauts de deux compagnies. L'approche avec ces copules devient difficile à implémenter si on étudie le défaut joint de plus de deux compagnies, et ce n'est donc pas l'approche choisie dans le modèle interne.

où w_t^{ij} sont les poids représentant l'importance relative de l'échantillon de l'année t , c'est-à-dire $w_t^{ij} = \frac{N_t^i N_t^j}{\sum_k N_k^i N_k^j}$, D_t^i et D_t^j sont les nombres de défauts pour l'année t dans les groupes auxquels les firmes i et j appartiennent. N_t^i et N_t^j sont les nombres d'acheteurs au début de l'année t dans les groupes auxquels les entreprises i et j appartiennent respectivement. Ensuite, en faisant l'hypothèse que les valeurs d'actifs suivent une distribution Gaussienne, et leur distribution jointe une copule Gaussienne, on peut estimer la corrélation entre actifs, mesurée par le coefficient δ_{ij} , telle qu'on obtienne $p_{ij} = N_2(d_i, d_j, \delta_{ij})$.

1.5 Modèle multi-facteurs

Les modèles à facteurs sont des modèles très utilisés en risque de crédit, car ils permettent d'introduire de la corrélation entre plusieurs contreparties. Pour une introduction à ces modèles consulter par exemple [33]. Dans un modèle à facteurs, ou modèle multifacteurs, on suppose avoir une variable latente et le défaut est défini comme l'événement où la variable latente tombe au-delà d'un certain seuil. Cette variable latente est généralement appelée rendement d'actif, parce que le défaut est dans ce cas défini de manière semblable à celle de Merton (cf [62]), qui le définit comme l'instant où la valeur de la firme tombe en-dessous de la valeur de ses dettes.

Un modèle à facteurs explique le rendement d'actif en fonction de la valeur d'un ensemble de facteurs à risque. On note Z_i le rendement d'actif de l'acheteur i et $\{R_\nu | \nu = 1, \dots, k\}$ les facteurs à risques. Alors le modèle est :

$$Z_i = \omega_{i1}R_1 + \omega_{i2}R_2 + \dots + \omega_{ik}R_k + \epsilon_i = \sum_{\nu=1}^k \omega_{i\nu}R_\nu + \epsilon_i \quad (1.13)$$

où $\omega_{i\nu}$ est la sensibilité du rendement d'actif de i à la variation du facteur ν .

ϵ_i est le facteur de risque spécifique, où encore facteur de risque idiosyncratique de l'acheteur i . Il est assimilable à un terme d'erreur dans une régression, représentant la part du rendement qui n'est pas expliquée par les facteurs. On suppose $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

1. $\forall \nu \in \{1, \dots, k\} \rho(R_\nu, \epsilon_i) = 0$, *i.e.* le facteur de risque spécifique n'est pas corrélé aux risques systématiques ;
2. $\forall i \neq j \rho(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$, *i.e.* les facteurs spécifiques de deux acheteurs différents ne sont pas corrélés.

Un modèle à facteurs est spécifié pour chaque acheteur. Ceci signifie que chaque acheteur a son propre risque spécifique, et que son risque global dépend également des facteurs systémiques, communs à tous les acheteurs. Pour cette raison les corrélations entre les facteurs de risque systémiques R_ν (avec les poids $w_{i\nu}$ et $w_{j\nu}$) définit la corrélation entre les acheteurs i et j . Elle est définie de manière unique par ces corrélations, car les risques spécifiques ne sont pas corrélés. Ce modèle est assez

pratique, car si l'on connaît la matrice de covariance entre risques systémiques, on peut avoir les corrélations entre les acheteurs.

Ainsi le modèle à facteurs définit la corrélation entre les acheteurs. Mais quels sont exactement ces facteurs ?

Une approche classique - KMV Pour une présentation de ce modèle et de la manière dont il intègre les corrélations consulter [79]. Le modèle KMV se décompose en trois niveaux. Le premier niveau différencie les risques spécifiques et systématiques .

$$Z_i = \alpha_i \phi_i + \epsilon_i \quad (1.14)$$

Dans le deuxième niveau on définit le risque systémique ϕ_i comme une somme pondérée de facteurs liés aux pays et secteur d'activité auxquels la firme est exposée. Ainsi le rendement d'actif s'écrit :

$$Z_i = \alpha_i \left(\sum_{\nu_C=1}^{k^C} \omega_{i\nu_C} R_{\nu_C} + \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_I} R_{\nu_I} \right) + \epsilon_i \quad (1.15)$$

où R_{ν_C} et R_{ν_I} sont les risques systémiques liés aux pays et à l'industrie respectivement, et k^C et k^I les nombres de ces facteurs. Les poids ω dépendent de la part du chiffre d'affaire d'une firme dans un pays ou un secteur particulier.

Le risque systématique, ou non diversifiable, lié à une firme i , est mesuré par un coefficient α_i , et le risque spécifique, ou diversifiable, par ϵ_i . α_i est estimé par régression linéaire et est relié au R^2 de la régression de la série temporelle du rendement d'actif Z_i sur les facteurs de risque systémique ϕ_i . Ainsi :

$$R^2 = \frac{\mathbb{V}(\alpha_i \phi_i)}{\mathbb{V}(Z_i)} \quad (1.16)$$

On a également :

$$\alpha = \sqrt{\frac{R^2}{\mathbb{V}(\alpha_i \phi_i)}} \mathbb{V}(Z_i) \quad (1.17)$$

Pour des entreprises de petite taille, les données de marché sur leur rendement d'actif ne sont pas disponibles. Ainsi leur R^2 peut être donné en fixant celui de firmes semblables, dont le R^2 est connu. Une entreprise semblable est une entreprise de même taille, située dans le même pays et travaillant dans le même secteur.

Dans le troisième niveau, les facteurs de risque pays et industrie sont exprimés comme somme de facteurs systémiques et idiosyncratiques. On a :

$$R_{\nu_C} = \sum_{f=1}^F \omega_{f\nu_C} R_f + \epsilon_{\nu_C} \quad (1.18)$$

$$R_{\nu_I} = \sum_{f=1}^F \omega_{f\nu_I} R_f + \epsilon_{\nu_I} \quad (1.19)$$

où R_f sont les facteurs de risque communs pour les facteurs systémiques de pays et d'industrie.

Ces facteurs communs sont divisés en trois groupes et sont indépendants les uns des autres. Leurs effets sont mesurés par des coefficients de sensibilité, notés $\omega_{f\nu_I}$ et $\omega_{f\nu_C}$. Les facteurs communs sont classifiés comme suit :

- Les facteurs liés à l'économie globale, qui tiennent compte de l'effet de l'économie globale ;
- Les facteurs régionaux, qui capturent les effets économiques régionaux par grande zone géographique ;
- Les facteurs sectoriels, qui capturent les effets de l'industrie après avoir éliminé les facteurs globaux et économiques. Les secteurs sont définis en correspondance à des types de services ou de biens produits, comme la technologie, le médical, l'extraction, etc.

Chaque pays et industrie est plus ou moins influencé par ces facteurs. L'économie globale d'un pays est une composante de l'économie mondiale, donc en fonction de son ouverture au reste du monde, son économie sera influencée par l'allure de l'économie mondiale.

L'effet de l'économie globale sur une industrie en particulier, dépend de l'objet de l'industrie, vu que les comportements des personnes envers différents biens ne sont pas les mêmes en temps de crise ou de croissance. La région où le pays est situé joue un rôle important, car elle peut impliquer que le pays est sujet par exemple à différents phénomènes naturels. Le rendement d'une industrie dépend également de la région où elle est principalement située. Les industries spécifiques à une certaine région (comme le tabac pour les pays de l'Amérique Latine, ou l'extraction de pétrole pour les pays du Moyen Orient), et qui sont frappés par une catastrophe naturelle, vont beaucoup plus souffrir des conséquences. Les rendements des secteurs qui sont les plus développés dans un pays vont influencer son économie, et d'un autre côté, les rendements d'une industrie dépendent très fortement des secteurs reliés à celle-ci.

Toutefois, chaque pays et industrie ont leur spécificités, qui doivent être prises en compte dans le modèle.

Notre but est de modéliser les corrélations entre défauts, et pour ce faire, nous avons présenté une méthode passant par les rendements d'actifs. La modélisation de ces derniers par des modèles à facteurs, nous permet de calculer les corrélations assez simplement. On a uniquement besoin de la matrice de covariance des risques systémiques. En effet, avec cette dernière, la corrélation entre les actifs i et j est donnée par :

$$\rho(Z_i, Z_j) = \frac{Cov(Z_i, Z_j)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}\sqrt{\mathbb{V}(Z_j)}} \quad (1.20)$$

$$= \frac{\alpha_i \alpha_j Cov(\phi_i, \phi_j)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}\sqrt{\mathbb{V}(Z_j)}} \quad (1.21)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z_i) = \alpha_i^2 \left(\sum_{\nu_C=1}^{k^C} \omega_{i\nu_C}^2 \mathbb{V}(R_{\nu_C}) + \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_I}^2 \mathbb{V}(R_{\nu_I}) \right. \\ \left. + 2 \sum_{\nu_p=1}^{k^C} \sum_{\nu_q=1}^{k^I} \omega_{i\nu_p} \omega_{i\nu_q} Cov(R_{\nu_p}, R_{\nu_q}) \right) + \mathbb{V}(\epsilon_i) \quad (1.22) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Cov(Z_i, Z_j) = \\ \alpha_i \alpha_j \left(\sum_{\nu_C=1}^{k^C} \sum_{\nu_C=1}^{k^C} \omega_{i\nu_C} \omega_{j\nu_C} \mathbb{V}(R_{\nu_C}) + \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_I} \omega_{j\nu_I} \mathbb{V}(R_{\nu_I}) \right. \\ \left. + \sum_{\nu_C=1}^{k^C} \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_C} \omega_{j\nu_I} Cov(R_{\nu_C}, R_{\nu_I}) + \sum_{\nu_C=1}^{k^C} \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_I} \omega_{j\nu_C} Cov(R_{\nu_C}, R_{\nu_I}) \right) \quad (1.23) \end{aligned}$$

La spécification de la structure de corrélation entre les risques systémiques implique que l'on peut travailler avec la corrélation entre actifs. Pour relier cela aux corrélation entre défauts, il faut faire une hypothèse sur la dynamique des rendements d'actifs, et également des hypothèses sur les facteurs systémiques et idiosyncratiques. L'hypothèse la plus commune, et sous laquelle nous travaillerons, est que les rendements d'actifs sont gaussiens.

Remarque 3. La valeur des actifs n'est pas connue, elle sera modélisée par une variable latente qui suivra une loi normale centrée réduite. Il y aura défaut, avec une certaine probabilité estimée par ailleurs, si cette variable latente tombe au dessous d'un certain seuil. En pratique, le seuil de défaut sera calculé comme le quantile, de niveau la probabilité de défaut, d'une loi normale centrée réduite.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'assurance-crédit, ses caractéristiques, et la nécessité que l'assureur gère bien les risques, sous peine de devenir insolvable en peu de temps en mauvaise conjoncture. Nous avons discuté de l'importance d'une bonne gestion des limites (garanties accordées) (cf. 1.3, 1.2), et des outils à sa disposition

pour mesurer ses risques. Les corrélations entre acheteurs semblent être un facteur crucial que l'assureur doit obligatoirement prendre en compte, pour ne pas sous-estimer ses risques. Dans le cadre de la directive Solvabilité 2 les assureurs doivent faire face à leurs engagements envers les assurés. Pour cela les assureurs doivent bien connaître les risques auxquels ils sont exposés, et bien estimer les capitaux qui seront nécessaires pour absorber des chocs sur ces risques, des situations où ces derniers deviendraient très importants.

Chapitre 2

Prise en compte de l'assurance-crédit dans Solvabilité 2

Le projet de refonte de la réglementation prudentielle "assurances" en Europe, "Solvabilité 2", initié par la Commission européenne et dont l'élaboration a été confiée à l'EIOPA (alors CEIOPS) en 2004 a finalement abouti le 13 novembre 2013 avec le vote de la directive "Omnibus 2". La complexité de ce projet est illustrée par les nombreuses années de travail et de débats qu'il a engendrées dans toute l'Europe, la réalisation de 5 études d'impact quantitatives (la première lancée en 2005) et une date d'entrée en vigueur reportée à plusieurs reprises :

1. du premier octobre 2009 au premier octobre 2012 lorsque la directive a été votée en novembre 2009,
2. au premier janvier 2014 avec une directive " Quick Fix " car aucun accord n'avait été conclu sur Omnibus 2 en octobre 2012,
3. au premier janvier 2016 à l'occasion de l'accord du trilogue sur Omnibus 2, avec une période transitoire de mise en place de 16 ans.

Ce nouveau cadre prudentiel marque le passage de systèmes locaux basés sur un ensemble de limitations explicites de prise de risque (au travers d'interdictions) et de calculs forfaitaires de l'exigence minimale de capital à un dispositif harmonisé construit autour d'un contrôle des risques par le capital (rien n'est a priori interdit mais tout a un coût explicite en fonds propres) dans le cadre d'une valorisation "économique" du bilan. En principe, l'assureur doit donc produire un "bilan économique" en valeur de marché et déterminer le niveau minimal des fonds propres en référence au contrôle de la probabilité de ruine associée au bilan économique qui doit être inférieure à 0,5 %. En pratique, face à la complexité opérationnelle associée à ce type de calcul, le régulateur met à la disposition des organismes d'assurance un cadre de calcul, le "modèle standard" qui propose des modalités de calcul du besoin en capital (Solvency Capital Requirement, SCR) simplifiées et aussi génériques que possible. Ce modèle est structuré selon une décomposition par risque, sur le modèle suivant :

L'assurance-crédit entre dans le module non-vie (SCR.9.) où elle est identifiée comme une ligne d'affaires spécifique (numéro 6) dans SCR.9.15. Dans ce modèle, le calcul du besoin en capital est effectué en agrégeant un capital pour le risque de réserve et un pour le risque de primes, chacun de ces capitaux unitaires étant

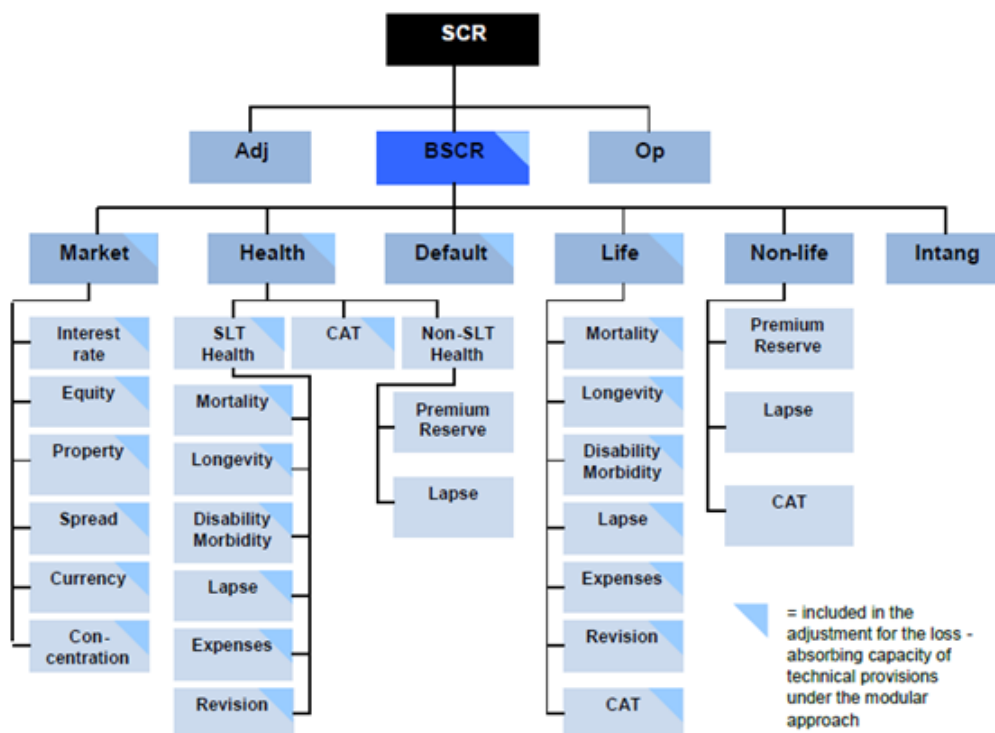


FIGURE 2.1 – Structure pour le calcul du besoin en capital dans le modèle standard

calculés en multipliant une mesure de volume (le montant best estimate des engagements ou l'exposition) par un coefficient associé à la volatilité de la branche. Les hypothèses sous-jacentes à ce calcul sont que le risque est distribué selon une loi log-normale (cf. [50]). La dépendance entre les contreparties est donc très mal considérée dans ce modèle. Les sections SCR.9.131. à SCR.9.135 viennent compléter cette évaluation pour le risque CAT en assurance-crédit, lié à des défauts concomitants de contreparties présentant des expositions élevées, mais cela reste une approche très pauvre pour capturer la réalité des risques portés par l'assureur. De ce fait, la formule standard n'est utilisée que par les petits acteurs ou les assureurs exerçant une activité d'assurance-crédit à titre accessoire. Les trois intervenants majeurs du secteur (ATRADIUS, COFACE et EULER HERMES) ont développé un modèle spécifique de calcul (un " modèle interne ") prenant en compte les spécificités de leur activité.

L'analyse des risques portés par un assureur crédit permet de dégager les principales caractéristiques suivantes :

- Le risque financier ne constitue pas un enjeu majeur dans un contexte de risque de court terme et compte tenu d'investissements majoritairement en obligations bien notées ;
- L'enjeu se situe au niveau des risques de souscription et du risque opérationnel, ce dernier étant significatif du fait de l'importance de la gestion des limites dans les contrats pour limiter les conséquences d'une dégradation du contexte économique (cf. Chapitre 1).
- Le risque opérationnel de mauvaise gestion des limites (qu'il est préférable

d'inclure dans le risque de souscription car difficile à identifier séparément) est important, comme les pertes de l'assureur COFACE en 2008 l'ont montré (cf. [24], [21]).

- Le risque de souscription est par ailleurs exposé à la concurrence et la politique de résiliation doit être solide pour s'adapter rapidement à la conjoncture.

C'est pourquoi l'attention est focalisée dans la présente thèse sur le risque de souscription et la prise en compte des actions du management (via la gestion des limites de risque) dans le calcul des engagements et du besoin en capital.

Conclusion

Comme nous venons de le voir, dans le cadre de Solvabilité 2, il serait sensé que les assureurs crédit développent un modèle interne pour calculer leurs exigences en capital à leur juste valeur. Et c'est un fait, les grands acteurs de ce marché ont développé des modèles internes. Ainsi ils peuvent mieux prendre en compte leurs spécificités, et les particularités de ce métier : la gestion des limites, donc le fait de pouvoir prendre plus ou moins de risques en fonction de la conjoncture, ainsi que le risque de corrélation entre acheteurs, qui est très élevé pour un assureur crédit. Dans le prochain chapitre 3, nous allons donc présenter un modèle interne pour un assureur crédit, voir par quel biais les corrélations entre acheteurs sont modélisées et ce que les modèles multifacteurs présentés en 1.5 apportent dans la modélisation de ces corrélations, et donc du risque pour l'assureur. La prise en compte plus spécifiquement de la gestion des limites sera, quant à elle, introduite dans le chapitre 1.

Chapitre 3

Présentation d'un modèle interne

Comme nous venons de le voir dans le chapitre précédent, la directive Solvabilité 2 avec son modèle standard ne prend pas bien en compte les corrélations entre défauts. Appliqué par un assureur crédit, ce modèle sous-estimerait les exigences en capital de ce dernier. Si le modèle standard n'est pas applicable, la mise en place d'un modèle interne s'impose. Le présent chapitre introduira un modèle interne de base en assurance crédit. Ici il sera question dans un premier temps de modèles multifacteurs pour modéliser les défauts, et les pertes. En effet comme nous l'avons vu dans 1.5, ces modèles peuvent être utilisés pour introduire de la corrélation entre contreparties, et entre acheteurs dans le cas de l'assurance crédit. Nous comparerons ensuite le modèle interne que nous présenterons avec le modèle KMV 1.5, et aussi avec la modélisation standard des corrélations dans Solvabilité 2.

3.1 Modélisation du défaut

Les défauts sont modélisés avec un modèle de Merton multifactoriel. C'est un modèle de Merton (regarder [63], [18], [41], [40]) car un client (acheteur) sera en défaut si une valeur latente, appelée la capacité à payer et notée Z , devient inférieure à un certain seuil d . Dans le modèle de Merton initial, cette valeur latente est la valeur des actifs de la compagnie, qui est en défaut si celle-ci est inférieure à la valeur du passif. La probabilité que l'acheteur n soit en défaut est donc :

$$p_n = \mathbb{P}(Z_n \leq d_n)$$

Le paramètre ici estimé n'est pas le seuil de défaut, car nous travaillons avec une variable latente, mais les probabilités de défaut p_n .

Remarque 4. En pratique, comme vu dans 1.4.2, les probabilités de défaut sont données pour chaque classe de notation, supposées homogènes. Ainsi, les acheteurs d'une même classe auront la même probabilité de défaut. Ces probabilités de défauts sont estimées à partir d'un historique de défauts pour chaque classe de notation (historique que nous verrons dans 4.1.2). Quant à l'appartenance d'un acheteur à une classe de notation, ceci est fait par un système de *scoring*, en fonction des connaissances qu'a l'assureur sur la solvabilité de l'acheteur à un instant donné.

La modélisation de défaut comporte plusieurs facteurs car la variable latente Z_n est définie comme la somme du risque systématique et du risque individuel porté

par l'acheteur. Voir [33], [34], [75], [80], [43] pour plus d'informations sur les modèles à un ou plusieurs facteurs et les copules associées. Dans notre cas nous avons :

$$Z_n = \varrho_n {}^t w_n R + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n$$

avec

- R est le vecteur de risque systématique de distribution Gaussienne $N(0, \Sigma)$, avec Σ la matrice de covariance. Dans notre cas il s'agit d'une matrice de type $(105, 105)$;
- ε_n est le risque idiosyncratique (individuel) de l'acheteur n et suit une distribution Gaussienne standard $N(0, 1)$;
- ε_n et R sont indépendants ;
- w_n est le vecteur constitué des poids des facteurs de risque dans R pour l'acheteur n ;
- ϱ_n décrit la corrélation entre l'acheteur n et le risque systématique (économie) ; plus ϱ_n est grand, plus la corrélation avec le risque systématique, et donc entre les compagnies, est élevée.

Dans le modèle à plusieurs facteurs, les paramètres à estimer sont la matrice de covariance Σ , ϱ_n et les poids w_n . En pratique, l'estimation de Σ , ϱ_n semble être la partie la plus difficile mais ce ne sera pas l'objet de notre étude. Pour l'estimation d'une matrice de corrélation, plus précisément la matrice GCorr dans le modèle KMV, consulter par exemple [58], et pour l'estimation des ϱ_n , voir [8]. Ces modèles sont assez pratiques lors de leur utilisation, car en conditionnant les variables latentes par rapport au risque systémique, elles sont indépendantes, car le seul risque restant est le risque idiosyncratique. Nous verrons dans 5 comment cette particularité des modèles structurels permet de faire des calculs de quantiles élevés des pertes pour l'assureur, sans faire de simulations.

Il est également important de remarquer que Z_n n'étant pas une variable Gaussienne standard avec la définition ci-dessus, et étant donné que ces dernières sont plus aisément manipulables, on utilisera à la place la définition suivante de Z :

$$Z_n = \varrho_n \frac{{}^t w_n R}{\|{}^t w_n M\|} + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n$$

où M est telle que $\Sigma = {}^t M M$ (après la décomposition de Cholesky de Σ).

Ainsi une fois les probabilités de défaut estimées, les seuils sont calculés avec la formule $d_n = \Phi^{-1}(p_n)$.

Après avoir vu la modélisation des défauts, regardons à présent la modélisation des pertes.

3.2 Modélisation des pertes

Dans cette section nous utilisons les notions définies en 3.2.

Un acheteur en défaut génèrera une perte. Cette perte sera égale au montant assuré, défini comme étant le minimum entre le montant des factures et l'exposition de l'assureur à l'acheteur.¹

$$\text{Loss}_n = \min(\text{Montant des factures}_n; \text{Exposition}_n)$$

1. Le montant maximum que l'assureur garantit en cas de défaut d'un acheteur n

Le montant assuré est inconnu de l'assureur crédit jusqu'à ce que le défaut apparaisse. Ceci est vrai car l'exposition de l'assureur sur un acheteur donné peut changer avec le temps, donc à l'instant du défaut, instant inconnu, elle ne sera sans doute pas la même que lors de la conclusion du contrat. Par ailleurs, le montant des factures de l'assuré envers l'assureur peuvent varier avec le temps. Ces situations sont décrites dans 1.4.1. Il est donc important d'introduire le paramètre *UGD* -Usage Given Default (Utilisation en Cas de Default)- défini par la formule suivante, *Usage Given Default* :

$$UGD = \frac{Montant\ assuré_n}{Exposition_n}$$

UGD_n est un autre paramètre que l'assureur doit modéliser et estimer. Etant donné l'UGD, l'assureur estime la perte due à l'acheteur n par :

$$L_n = UGD_n \times Exposition_n$$

si l'acheteur n fait défaut.²

La perte finale de l'assureur sera :

$$L = \sum_{n=1}^N L_n = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_n < d_n\}} UGD_n \times Exposition_n \quad (3.1)$$

$$= \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\left\{ \varepsilon_n < \frac{d_n - \rho_n S_n}{\sqrt{1 - \rho_n^2}} \right\}} UGD_n \times Exposition_n \quad (3.2)$$

3.3 Présentation sous forme matricielle

La présentation du modèle interne sous la forme ci-dessus n'est pas celle que nous utiliserons pour l'écriture d'un programme informatique pour le calcul des pertes. Pour cette raison nous résumons ici les variables utilisées dans le modèle interne et les relations entre elles, sous forme matricielle.

Soit N le nombre d'acheteurs dans le portefeuille, et n l'indice de l'acheteur n , pour $n=1, \dots, N$.

Soit I le nombre de classes de notation, et i l'indice de la classe i , pour $i=1, \dots, I$.

Soit p_i la probabilité de défaut associée à la classe i . On suppose que les probabilités de défaut de tous les acheteurs de la classe i sont égales à p_i .

Soit Z_n l'indice de la capacité à payer de l'acheteur n et $\mathbf{Z} = {}^t(Z_1 \dots Z_N)$ le vecteur de toutes les capacités à payer des acheteurs dans le portefeuille.

2. Celle-ci ne sera pas la perte finale, car d'autres éléments du contrat comme les clauses de réassurance ou encore des franchises, sont prises en compte. Nous ne tiendrons pas compte de ces clauses ici, car nous nous intéressons uniquement à ce que la modification de la structure par terme des probabilités dans l'année et les modifications d'expositions dues à la gestion des limites impliquent sur le montant des pertes, *ceteris paribus* (toutes choses égales par ailleurs).

Soit $\mathbf{R} = {}^t(R_1 \dots R_K)$ le vecteur des facteurs de risques systématiques. On suppose qu'il suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ où Σ est une matrice de variance covariance. L'indice parcourant les risques systématiques sera noté k .

Soit $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} & \dots & w_{1K} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} & \dots & w_{nK} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{N1} & \dots & w_{Nk} & \dots & w_{NK} \end{pmatrix}$ la matrice des poids associés aux risques systématiques pour tout acheteur. w_{nk} est le poids associé au risque systématique k pour l'acheteur n .

Soit $\varepsilon = {}^t(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N)$ le vecteur des risques systématiques liés à chaque acheteur. On suppose que $\varepsilon \sim N(0; \mathbf{Id}_N)$ où \mathbf{Id}_N est la matrice identité de taille N .

Soit $\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \varrho_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \varrho_N \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients associés aux risques systématiques pour chaque acheteur.

Soit $\sqrt{1 - \varrho^2} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \varrho_1^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{1 - \varrho_n^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sqrt{1 - \varrho_N^2} \end{pmatrix}$

Le modèle choisi pour représenter la capacité à payer est un modèle structurel multifactoriel. On l'appelle multifactoriel car le nombre de facteurs systématiques est supérieur à 1. Ce modèle s'écrit, avec les notations précédentes :

$$\mathbf{Z} = \varrho \mathbf{W} \mathbf{R} + \sqrt{1 - \varrho^2} \varepsilon \quad (3.3)$$

Les variables aléatoires (v.a) dans le vecteur \mathbf{R} sont corrélées. Puisqu'il est plus facile de travailler avec des variables indépendantes, on en fait apparaître dans l'équation de la capacité à payer et il suffira ensuite de les corrélérer en multipliant avec la matrice M obtenue après décomposition de Cholesky de $\Sigma = {}^t M M$.

Donc $R = M I$ où $I \sim N(0; \mathbf{Id}_K)$. En remplaçant dans la formule 3.3, on obtient :

$$Z = \varrho W M I + \sqrt{1 - \varrho^2} \varepsilon \quad (3.4)$$

Ceci revient à dire qu'on transforme les facteurs de risque systématique \mathbf{R} en les rendant indépendants pour obtenir \mathbf{I} , mais en contrepartie la matrice des poids n'est plus \mathbf{W} , mais $\mathbf{W} M$.

$$\mathbf{WM} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K w_{1k}m_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^K w_{1k}m_{kk} & \dots & \sum_{k=1}^K w_{1k}m_{kK} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^K w_{nk}m_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^K w_{nk}m_{kk} & \dots & \sum_{k=1}^K w_{nk}m_{kK} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^K w_{Nk}m_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^K w_{Nk}m_{kk} & \dots & \sum_{k=1}^K w_{Nk}m_{kK} \end{pmatrix}$$

Le vecteur des capacités à payer sera alors :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \left(\varrho_1 \sum_{l=1}^k \sum_{k=1}^K w_{1k}m_{kl}I_l \right) \\ \dots \\ \varrho_1 \sum_{l=1}^k \sum_{k=1}^K w_{nk}m_{kl}I_l \\ \dots \\ \varrho_N \sum_{l=1}^k \sum_{k=1}^K w_{Nk}m_{kl}I_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \varrho_1^2} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n \\ \dots \\ \sqrt{1 - \varrho_N^2} \varepsilon_N \end{pmatrix}$$

Donc la capacité à payer de l'acheteur n s'écrit $Z_n = \varrho_n \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K w_{nl}m_{lk}I_k + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n$.

Comme il est plus facile de travailler avec des variables de variance égale à 1, alors en utilisant les propriétés du modèle structurel spécifié ci-dessus, il suffit de réduire la variance de la variable représentant le risque systématique $\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K w_{nl}m_{lk}I_k$. On peut le faire facilement en divisant par l'écart-type de cette variable, qui est égal à $\sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\sum_{l=1}^K w_{nl}m_{lk} \right)^2}$.

On note $V_n = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{l=1}^K w_{nl}m_{lk} \right)^2$.

On définit de nouveaux poids $\frac{\sum_{l=1}^K w_{nl}m_{lk}}{\sqrt{V_n}} = \xi_{nk}$ pour tout $n = 1, \dots, N$ et pour tout $k = 1, \dots, K$. ξ_{nk} qui sera le poids devant le risque I_k pour l'acheteur n .

Dans la suite on note $S_n = \sum_{k=1}^K \xi_{nk}I_k \sim N(0, 1)$ pour tout $n = 1, \dots, N$.

Donc

$$Z_n = \varrho_n S_n + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n \quad (3.5)$$

$$= \varrho_n \sum_{k=1}^K \xi_{nk} I_k + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n \quad (3.6)$$

On a bien $Z_n \sim N(0, 1)$ pour $n = 1, \dots, N$.

Dans le modèle interne, la probabilité de défaut est donnée par l'expression :

$$\mathbb{P}(Z_j < d_j) = \mathbb{P}(\rho_j \sum_{\nu=1}^k w_{j\nu} R_\nu + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_j < d_j) = p_j \quad (3.7)$$

où d_j est un seuil de défaut qui représente la dette.

Les pertes seront calculées ensuite par des simulations de Monte Carlo, en utilisant la formule des pertes vue dans 3.2.

Avec les pertes ainsi calculées, deux quantités sont calculées dans le cadre de Solvabilité 2 : le Best Estimate (BE) et l'exigence en capital (ou encore Capital Economique, SCR). Nous définissons ces deux quantités ci-dessous.

Définition 5. Le *Best Estimate* est l'espérance des pertes futures actualisées (4 pour plus de détails). Il sert à calculer les provisions qui seront égales au Best Estimate plus une marge pour risque ([50]).

Définition 6. L'exigence en capital (SCR) est calculée à partir du quantile à 99.5% des pertes, auquel on soustrait le Best Estimate.

Nous ferons des calculs de Best Estimate et SCR dans les différents chapitres de ce travail.

3.4 Positionnement du modèle interne par rapport à KMV et Solvabilité 2

Différents modèles de risque de crédit existent sur le marché ; KMV, CreditMetrics, CreditRisk, CreditPortfolioView en font partie et gagnent du terrain. Leur but est de mieux connaître le risque d'insolvabilité de contreparties, pour prévoir un défaut futur de celles-ci (cf. [17]). Nous comparerons ici l'approche risque de crédit dans KMV avec notre approche modèle interne. Le modèle sous-jacent pour les variables latentes étant le même, les corrélations sont modélisées de la même façon. Pour cette raison nous allons ici nous concentrer sur la façon dont les probabilités de défaut sont calculées. Dans un deuxième temps, nous nous focaliserons sur les corrélations entre contreparties quand nous comparerons ces dernières dans modèle interne avec celles de l'approche "formule standard" dans Solvabilité 2.

3.4.1 Calcul de probabilités de transitions et défauts dans KMV

Le modèle KMV (consulter par exemple [17], [18][79], regarder aussi 1.5) s'inspire du modèle de Merton et utilise ainsi une approche structurelle pour définir des catégories de Distance-to-Default (DD) à laquelle la contrepartie appartient. Ensuite cette DD est reliée aux probabilités courantes de défaut, estimées par les Expected Default Frequency (EDF) pour chaque contrepartie, et ceci grâce à une base de données regroupant les défauts. La particularité du modèle KMV est qu'il n'utilise pas les données historiques pour donner la probabilité de défaut d'une firme, qui est une fonction de la classe de notation dans laquelle elle se trouve. EDF est une fonction de la structure de capital de la firme, de la volatilité des rendements d'actions, et de la valeur actuelle de son actif. Ceci fait que l'EDF est spécifique à la firme et peut être associé à n'importe quel système de notation afin d'en déduire la classe de notation équivalente d'une firme. EDF peut donc être associé à des classes de notation cardinales, alors que les agences de notation proposent des classes de notation

ordinales. Une autre particularité du modèle KMV est qu'il ne fait pas de référence spécifique aux probabilités de transition, mais celles-ci sont déjà incorporées dans la fonction EDF. L'événement de défaut est implicitement relié à la valeur de l'actif de la firme. Alors, en fonction de la structure de capital de la firme et du processus stochastique régissant la valeur de l'actif de la firme, les probabilités de défaut à différents horizons peuvent être déduites.

KMV s'utilise plus facilement pour des firmes évaluées sur les marchés, la valeur de l'actif étant fixée sur le marché. Les probabilités de défaut sont calculées en trois étapes :

1. estimation de la valeur de marché et de la volatilité de l'actif de la firme
2. calcul de la DD
3. déduction de l'EDF à partir de la DD

Estimation de la valeur de l'actif et de la volatilité du rendement de l'actif

La dynamique de la valeur de l'actif est une donnée importante à déterminer car elle joue un rôle essentiel dans l'évaluation du risque de crédit d'une contrepartie. L'hypothèse faite couramment est que ce rendement est lognormal (consulter [17]). De plus, la distribution du rendement de l'actif est assez stable dans le temps, dû à la volatilité de ce rendement qui est relativement constante. Si le passif de la firme était négocié sur un marché, il aurait été assez facile d'en déduire la valeur de l'actif et son rendement. Cependant ce n'est pas le cas de toutes les contreparties. C'est pour cette raison que KMV propose la manière suivante de contrecarrer ce problème. KMV suppose que le passif d'une firme se compose de l'actif, dont la valeur est observable sur le marché, la dette à court terme, la dette à long terme et les actions de priorité. Cette hypothèse permet à KMV d'utiliser l'approche de Merton "augmentée", selon laquelle la valeur de l'equity, E , peut être exprimée comme la valeur d'un call sur la valeur de l'actif.

$$E = C(V_a, \sigma_a, K, c, r)$$

où C représente la valeur d'un call avec comme paramètres : V_a , valeur de l'actif, σ_a , la volatilité de l'actif, K est la valeur seuil, c'est-à-dire la valeur du passif, c est le taux des coupons payés et r le taux sans risque.

L'idée de KMV est de résoudre les deux équations suivantes (f et g étant deux fonctions à 5 variables), pour trouver la valeur de l'actif V_a et ensuite σ_a :

$$E = f(V_a, \sigma_a, K, c, r) \tag{3.8}$$

$$\sigma_E = g(V_a, \sigma_a, K, c, r) \tag{3.9}$$

Comme expliqué plus haut, E est observable sur les marchés. Consulter [17] pour voir comment ces deux équations sont résolues et les valeurs V_a et σ_a sont trouvées.

Calcul de la DD

KMV a observé que les firmes font défaut quand la valeur de leur actif est quelque part au milieu entre la valeur du passif et la valeur de la dette à court terme (cf.

[17]). Cependant dans la littérature sur le modèle de Merton, le défaut survient au moment où la valeur de l'actif de la firme passe au-dessous de la valeur de sa dette. C'est pourquoi le calcul des probabilités de défaut comme queue de la distribution de la valeur de l'actif en-dessous de la valeur totale de la dette, n'est sans doute pas une mesure appropriée de la probabilité de défaut.

Pour cette raison KMV calcule les valeurs de DD avant de calculer les probabilités de défaut.

Définition 7 (Distance-to-default (DD)). DD est le nombre d'écart-types entre la moyenne de la distribution de la valeur de l'actif et un seuil critique, "le point de défaut", défini comme la valeur par du passif, incluant la dette à court terme jusqu'à l'horizon, additionnée à la moitié de la dette à long-terme.

$$DD = \frac{\mathbb{E}(S_1) - DPT}{\sigma_a}$$

où DPT est le point de défaut et il est donné par $DPT = \text{dette à court terme} + \frac{1}{2} \text{dette à long terme}$.

Sous l'hypothèse de rendements lognormaux, la DD est donnée par la formule :

$$DD = \frac{\log \frac{S_0}{DPT_T} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sqrt{T}} \quad (3.10)$$

avec S_0 la valeur de l'actif en t_0 , DPT_T le point de défaut à horizon T , μ est le rendement espéré net sur l'actif et σ la volatilité annualisée. $\mathbb{P}(V_1 > DPT) = \Phi(-DD)$.

Déduction des probabilités de défaut à partir de DD

Cette étape consiste à ajuster les DD aux probabilités de défaut actuelles, à un horizon donné. Ces probabilités sont appelées Expected Default Frequencies (EDFs). Le lien entre les DD et les EDFs est fait grâce à une base de données de défauts d'un grand nombre d'entreprises. Les firmes avec un certain niveau de DD à un instant donné sont rassemblées et la fréquence des défauts à un an de ces dernières est calculée. Voici comment la DD sert à calculer la EDF d'une firme.

Une fois la DD associée à un EDF, ces derniers sont reliés à des classes de notation traditionnelles. Par exemple, pour un EDF de 0.4%, la classe correspondante est BB+.

EDF et défauts Les EDFs sont utiles comme prédicteurs de la dégradation de l'état de crédit d'une entreprise (cf. [17]). Ils augmentent fortement quand la situation financière d'une firme commence à dégrader pour aller jusqu'au défaut. Les études KMV montrent que la pente des EDFs augmente fortement entre 1 et 2 ans avant défaut. En plus, les variations de EDF aident à anticiper au moins un an à l'avance la rétrogradation d'une contrepartie par une agence de notation. Un autre

avantage des EDFs est que contrairement aux statistiques de défauts historiques, ils ne sont pas biaisés pendant les périodes de cycle de crédit haut ou bas. La DD peut augmenter ou baisser pendant les périodes de croissance de l'économie, en fonction de la situation financière de l'entreprise en question.

EDF et notation Dans une classe de notation, les probabilités de défaut des contreparties dans la classe sont groupées autour de la médiane. Cependant, le taux de défaut moyen dans chaque classe est considérablement plus grand que le taux de défaut d'une firme typique. Ceci se produit parce que chaque classe de notation comprend un groupe de firmes qui ont des probabilités de défaut beaucoup plus grandes, à cause du fait que les taux de défaut changent exponentiellement quand le risque de défaut augmente.

Comparaison entre KMV et le modèle interne

Dans notre modèle interne présenté en 3.1, selon la remarque 4, les acheteurs se voient attribuer un rating en fonction de leur risque d'insolvabilité. Pour cela des données du bilan sont utilisées mais l'approche n'est pas la même que celle décrite ici pour le calcul des DDs. Cependant le principe reste le même, le rating de l'acheteur en t représente un type de distance à défaut, la distance qui sépare le rating actuel de l'état de défaut. Des historiques de probabilités de défaut par classe sont utilisés pour déduire des probabilités de défaut pour une classe de notation donnée. Cette étape s'approche du calcul des EDF, où un historique est utilisé : dans un cas on calcule combien d'entreprises font défaut parmi celles avec un certain rating, et dans l'autre cas combien d'entreprises font défaut dans l'année parmi celles avec un certain DD. Cependant ces modèles calculent de façon différentes les probabilités de défauts car l'EDF estimé sert ensuite à trouver le rating de l'entreprise. Et dans le rating les probabilités de défauts ne sont pas les mêmes pour toutes les entreprises. Alors que dans notre modèle interne, c'est le cas. Donc la problématique semble s'être inversée. Dans le cas de KMV, on part de la DD et on a une EDF qui estime la probabilité de défaut, puis on discrétise cette EDF pour créer des classes de notation, alors que dans le modèle interne, on part d'une notation, et avec l'historique des défauts pour cette notation, nous avons la probabilité de défaut pour la classe. Le but de ces modèles n'est pas le même, dans un cas le modèle interne est un modèle qui est utilisé pour modéliser les défauts et donc les pertes pour un assureur crédit, alors que KMV est un modèle qui a une vision plus fine du portefeuille, pour regarder les probabilités de défaut individuelles. Si les acheteurs dans le modèle interne avaient des probabilités de défaut différentes, cela serait complexe à gérer du point de vue opérationnel, et le coût informatique serait important pour l'assureur. Concentrons-nous à présent sur les corrélations implicites dues au modèle multifacteur avec la modélisation des corrélations entre contreparties dans Solvabilité 2. Ceci revient à étudier la concentration des défauts.

3.4.2 Corrélation entre contreparties dans le modèle interne et dans Solvabilité 2

Quand on travaille avec des portefeuilles de gros volumes la modélisation de la corrélation entre les parties devient un facteur clé pour avoir une estimation fiable de la distribution des pertes. Il y a différentes manières de modéliser la corrélation, mais la plus commune, celle qui est également choisie par les régulateurs dans le dispositif Solvabilité 2 (consulter [50]), est celle de l'introduction d'une partie systémique du risque de défaut. Le risque systémique représente les facteurs auxquels toutes les contreparties sont soumises, même si à différents degrés. Il y a plusieurs façons de modéliser le risque systématique.

Dans le dispositif Solvabilité 2, il s'agit d'une variable aléatoire, notée S , qui suit la loi suivante :

$$\mathbb{P}(S \leq x) = x^\alpha \text{ avec } 0 \leq x \leq 1 \quad (3.11)$$

où α est un paramètre de forme.

Dans le modèle interne le risque systémique est donné par un vecteur aléatoire avec comme objectif d'identifier plusieurs sources de risque, en mettant en place un modèle à facteurs. Les sources de risque sont alors divisées en trois parties :

- Les facteurs de l'économie globale,
- Les facteurs régionaux,
- Les facteurs sectoriels.

Formellement, ces facteurs de risque systémiques, suivent une loi gaussienne de variance propre à chaque facteur et le vecteur des facteurs, noté $\mathbf{R} = {}^t(R_1 \dots R_k)$ suit une loi gaussienne multivariée $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. Les facteurs sont corrélés les uns aux autres, et c'est justement cette corrélation qui va impliquer une corrélation entre les contreparties dans le portefeuille. Alors comment ces facteurs de risque sont intégrés dans la probabilité de défaut d'une contrepartie et dans la corrélation entre elles ?

Dans Solvabilité 2, une probabilité conditionnelle au risque systémique est définie par la formule suivante :

$$p_{|S} = b + (1 - b)S^{\kappa/b} \quad (3.12)$$

où κ est un paramètre de forme et b la probabilité de défaut de référence, *i.e.* lorsque $S = 0$. Donc elle est une variable aléatoire.

Dans le modèle interne, la probabilité de défaut est donnée par l'expression :

$$\mathbb{P}(Z_j < d_j) = \mathbb{P}(\rho_j \sum_{\nu=1}^k w_{j\nu} R_\nu + \sqrt{1 - \rho_j^2} \varepsilon_j < d_j) = p_j \quad (3.13)$$

Z_j étant la variable latente qui modélise la capacité de payer une dette (ATP) d'une contrepartie j , ε_j est le risque idiosyncratique propre à la contrepartie et d_j est un seuil de défaut qui représente la dette.

L'hypothèse suivante est faite sur le risque idiosyncratique :

$\forall i \in J, \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ and $\forall i \neq j, \varepsilon_i \perp \varepsilon_j$.

La probabilité de défaut conditionnelle est alors :

$$p_{|S} = \mathbb{P} \left(\sum_{\nu=1}^k w_{j\nu} R_{\nu} + \varepsilon_j < d_j \mid \mathbf{R} \right) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_j) - \rho_j \frac{\sum_{\nu=1}^k w_{j\nu} R_{\nu} - \mathbb{E}(\sum_{\nu=1}^k w_{j\nu} R_{\nu})}{\sigma(\sum_{\nu=1}^k w_{j\nu} R_{\nu})}}{\sqrt{1 - \rho_j^2}} \right) \quad (3.14)$$

Donc ici la probabilité conditionnelle est un quantile d'une variable aléatoire gaussienne. Ce qui correspondrait à la PD de référence b serait alors

$$\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \quad (3.15)$$

Dans les deux modèles $b > p$.

Quant à la covariance entre les défauts de deux contreparties i et j , dans Solvabilité 2 elle est donnée par la formule :

$$Cov(i, j) = \frac{\alpha(1 - b_i)(1 - b_j)}{\alpha + \frac{\kappa}{b_i} + \frac{\kappa}{b_j}} - (p_i - b_i)(p_j - b_j) \quad (3.16)$$

alors que dans le modèle interne on calcule plutôt la covariance entre les capacités à payer des contreparties i et j . Elle est égale à :

$$\begin{aligned} Cov(Z_i, Z_j) = & \rho_i \rho_j \left(\sum_{\nu_C=1}^{k^C} \sum_{\nu_C=1}^{k^C} \omega_{i\nu_C} \omega_{j\nu_C} \mathbb{V}(R_{\nu_C}) + \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_I} \omega_{j\nu_I} \mathbb{V}(R_{\nu_I}) \right. \\ & \left. + \sum_{\nu_C=1}^{k^C} \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_C} \omega_{j\nu_I} Cov(R_{\nu_C}, R_{\nu_I}) + \sum_{\nu_C=1}^{k^C} \sum_{\nu_I=1}^{k^I} \omega_{i\nu_I} \omega_{j\nu_C} Cov(R_{\nu_C}, R_{\nu_I}) \right) \quad (3.17) \end{aligned}$$

On ne peut pas donner une formule fermée pour la covariance dans le cas du modèle interne, cependant, voici une formule qui permettrait de la calculer numériquement par une méthode de Monte Carlo :

$$Cov(i, j) = \mathbb{E} \left((p_{|S}^i - b_i)(p_{|S}^j - b_j) \right) - (p_i - b_i)(p_j - b_j) \quad (3.18)$$

où l'espérance est calculée par rapport au vecteur aléatoire \mathbf{R} , et b_i et b_j sont donnés par la formule 3.15.

Dans le cadre de l'assurance crédit, le modèle à facteurs semble assez adapté si on le compare au modèle proposé par Solvabilité 2. En effet ce modèle permet de donner des poids à chaque facteur de risque systémique en fonction de leur impact sur une contrepartie donnée. L'application du modèle Solvabilité 2 demande l'estimation des paramètres de la fonction de répartition du risque systémique et de la

probabilité conditionnelle, c'est-à-dire α et κ . En outre, ce modèle ne permet pas de donner une interprétation économique aux paramètres et reste de ce point de vue purement probabiliste.

Cependant, l'un de ses avantages est qu'il semble plus facile de faire un conditionnement par rapport aux cycles économiques, en jouant sur les deux paramètres α et κ , alors que dans le modèle interne, il faudrait modifier la matrice de variance-covariance Σ , ce qui pour l'instant n'est pas le cas et semble assez complexe (estimation d'une matrice 107×107 qui en plus doit avoir certaines propriétés caractéristiques).

Dans le modèle interne, après avoir affecté des poids à chaque facteur, le risque systémique est donné par $\sum_{\nu=1}^k w_{j\nu} R_{\nu}$ qui est une variable gaussienne. Dans le modèle Solvabilité 2, la loi du facteur de risque systémique est une loi qui pourrait permettre de mieux tenir compte d'événements extrêmes.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle interne en assurance crédit. Nous avons ensuite comparé deux volets de ce modèle interne avec d'autres modèles de risque de crédit sur le marché. Après avoir présenté comment les probabilités de défaut sont estimées dans KMV, nous avons comparé ces estimations avec celles utilisées dans le modèle interne ; nous avons conclu que ces approches sont en effet très différentes. Les classes de rating dans KMV sont composés d'entreprises dont les probabilités de défaut ne sont pas les mêmes, alors que dans le modèle interne une seule probabilité de défaut est donnée par rating. Nous en avons conclu que pour un assureur crédit, le fait d'avoir des probabilités de défaut et transition différentes pour les acheteurs d'un même rating poserait problème du point de vue pratique d'implémentation du modèle interne. Lors de la comparaison entre les corrélations dans le modèle Solvabilité 2 avec celles du modèle interne, nous avons conclu que le modèle interne introduisait les corrélations entre acheteurs d'une façon plus adaptée que le modèle standard. De plus, ses paramètres sont interprétables, ils ont un sens économique ; son utilisation est donc propice au pilotage des politiques d'entreprises par les gestionnaires. Les paramètres du modèle interne sont nombreux, et il est important qu'ils soient bien estimés afin que les pertes modélisées soient réalistes. Pour estimer une variable, il est important d'avoir des données sur la variable en question, données que nous présenterons dans le chapitre qui suit. La mise en œuvre informatique du modèle interne l'accompagnera.

Chapitre 4

Données utilisées et mise en œuvre informatique

Après avoir présenté le modèle interne, nous nous concentrons ici sur des problématiques plus pratiques de mise en œuvre. Nous allons introduire ici les paramètres du modèle interne en présentant des statistiques descriptives. Nous verrons ainsi des historiques de taux de défaut ainsi que des matrices de transitions entre classes de notation. On parlera d'UGDs qui mesurent la manière dont l'exposition varie jusqu'à l'instant du défaut. Ensuite, nous présenterons l'implémentation informatique du modèle interne et l'utilisation de ces données. Mais avant, commençons par un aperçu des données disponibles, celles qui vont être en amont de l'estimation des paramètres et de la mise en œuvre informatique. Ces données, issues d'un portefeuille réel et anonymées, ont permis de réaliser les applications numériques.

4.1 Données disponibles

Les données qui ont été utilisées pour cette étude peuvent se regrouper en trois types :

- Les données de transitions entre les ratings ;
- Les données de défaut dû à l'insolvabilité des acheteurs ou au retard de paiement ;
- Les expositions de l'assureur sur les acheteurs.

Avant de regarder plus en détail les données de chaque type, il convient de préciser que ce qu'on appelle portefeuille d'un assuré est l'ensemble de ses clients, et les caractéristiques de ce portefeuille sont étudiées pour mieux comprendre les risques auxquels l'assureur fait face. Pour un assureur crédit, la source de son risque ne sont pas ses clients, mais les clients de ses clients, donc les acheteurs. C'est bien dans ce sens que nous emploierons le terme "portefeuille".

4.1.1 Données de transitions

Nous avons à notre disposition une base de donnée très volumineuse comportant plus de 3 millions de lignes et 120 colonnes. Pour extraire des informations de cette

base assez conséquente il a fallu quelque temps, afin d'être équipé d'un matériel informatique suffisamment puissant pour pouvoir la traiter. Voici sa structure :

<i>ID</i>	1/02/2003	1/04/2003	...	01/12/2012
<i>i1</i>	NA	3	...	5
<i>i2</i>	6	5	...	8
<i>i3</i>	7	7	...	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Cette base contient toutes les informations sur le rating des acheteurs sur lesquels l'assureur a eu au moins pendant un mois, une exposition positive, c'est-à-dire une probabilité non nulle d'avoir une perte si l'acheteur fait défaut. Donc chaque ligne *i* représente l'historique de transitions entre ratings de l'acheteur *i*, on peut voir par quels ratings il est passé chaque mois. Il y a peu de lignes qui sont complètes, car les acheteurs peuvent entrer ou sortir en fonction des décisions du management, qui étudie leur solvabilité; il y a donc une quantité non négligeable de données manquantes.

Les acheteurs peuvent se voir attribuer 10 notes différentes, de 1 à 10 (1 étant la meilleure note et 10 la plus mauvaise), ainsi qu'une note NA en cas d'indécision du management. qui regroupe des acheteurs de nature assez hétérogène, et qui mériterait une étude très approfondie, mais qui ne sera pas faite ici. D'après nos études, la distribution des notes dans cette classe semble suivre celle du portefeuille, donc lors du traitement des données nous avons utilisé cette dernière hypothèse comme hypothèse de travail. A la base du calcul des matrices de transitions, entre ratings, se trouve une matrice qui compte ces ratings, en voici un exemple :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	D
1	32939	900	329	182	299	37	8	0	0	0	0
2	1025	192192	4918	1855	6057	386	95	24	2	0	3
3	376	4165	735756	14610	31450	2377	708	104	15	0	14
4	274	1844	12695	2214030	43049	13359	3212	574	21	2	64
5	130	740	3562	28025	10884254	110475	44934	8582	106	5	644
6	44	264	1251	5219	84318	12978966	133452	25634	469	26	3975
7	6	37	291	927	8007	148438	5704135	38965	744	59	3600
8	2	1	16	42	461	8916	23624	817266	2408	47	723
9	0	1	1	11	35	391	1312	597	40079	19	45
10	0	0	0	2	3	12	70	15	39	2628	0

Ces données sur les transitions des acheteurs entre ratings, sont à la base du calcul des matrices de transitions, qui seront utilisées dans les modèles qui suivront. Cependant il appartient à l'entreprise détenant les données de les utiliser ou pas, et ces données de transitions n'ont pas d'utilisation spécifique dans le cadre du modèle interne classique; celui-ci travaille uniquement avec des probabilités de défaut.

4.1.2 Données de défaut

Les données de défaut sont à la base du calcul des probabilités de défaut. Elles se présentent initialement sous la forme d'un fichier "sinistres", qui regroupe tous les défauts depuis au moins l'année 2003. A chaque fois le type de défaut est indiqué, s'il s'agit donc d'un défaut dû à l'insolvabilité de l'acheteur (*Insolvency default*), ou d'un défaut prolongé, donc dû à un retard de paiement (*Protracted default*). Nous avons ensuite assemblé ces données avec les données de transitions. La base de données qui sera utilisée pour le calcul de matrices de transitions devient :

<i>ID</i>	1/02/2003	1/04/2003	...	01/12/2012
<i>i1</i>	<i>NA</i>	3	...	<i>I</i>
<i>i2</i>	6	5	...	8
<i>i3</i>	7	<i>P</i>	...	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Le simple croisement du fichier contenant les sinistres et les données de transitions, était impossible à faire sans un ordinateur très puissant, et sans passer par le langage C++.

Voici un aperçu des taux de défaut mensuels de septembre 2004 à décembre 2012 (les données précédentes n'apparaissant pas car causes de "bruit").

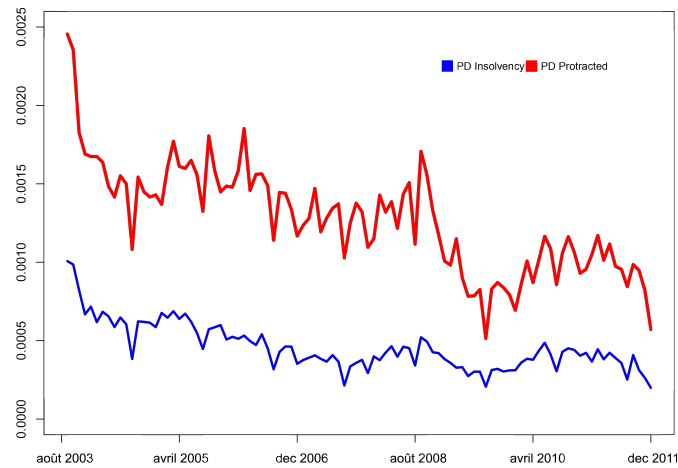


FIGURE 4.1 – Probabilités de défaut d’insolvabilité et de défauts prolongés sept.2004-dec.2012

Ce graphique nous donne un aperçu des grandeurs des taux de défaut mais aussi du fait que ceux-ci fluctuent considérablement avec le temps, et qu’ils ont tendance à décroître. Ceci laisse à penser que la gestion des acheteurs serait plus efficace. Sauf que penser cela, serait oublier qu’entre 2004 et 2012 il y a eu la plus importante des crises financières, qui se transforme en crise économique, et qui voit le nombre de défauts s’accroître considérablement (pic sur le graphique pour les deux taux). On voit ensuite l’efficacité de l’assureur à faire face à la crise. En quelques mois le choc initial est absorbé alors qu’une reprise faible semble seulement s’annoncer en 2014.

Les données de défauts seront aussi utiles pour estimer les UGDs (Usage Given Default), qui seront estimés comme les rapports entre expositions sur l’acheteur à l’instant du défaut et ses expositions en début d’année civile. Cependant pour calculer les UGDs il faut donc les données sur les expositions.

4.1.3 Données d'expositions

Rappelons qu'une exposition, dans notre contexte d'assurance crédit, sera la somme maximale que l'assureur devra déboursier en cas de défaut d'un acheteur. Nous avons réussi à collecter les données sur les expositions des acheteurs depuis 2002. Ces données ont été mises dans un fichier similaire à celui des données de transitions, mais avec des montants d'exposition au lieu des transitions entre ratings. Les données d'exposition peuvent être croisées avec les données de défaut, pour donner des estimations d'UGDs par rating. C'est également grâce à ces données que nous avons pu estimer des coefficients d'augmentation ou de diminution d'exposition par temps de crise ou de croissance. Ces coefficients qui mesurent l'impact du management sur le portefeuille, s'avèrent jouer un rôle important lors des estimations des pertes de l'assureur. (Dans la même logique que ce que nous avons expliqué sur les taux de défauts).

Voici par exemple les UGDs qui sont utilisés lors du calcul des engagements de l'assureur dans les chapitres suivants. Ces UGDs ont été obtenus par estimation, comme un taux moyen de baisse de l'exposition à l'instant du défaut, et une fois les défauts groupés par grade. Une discussion ultérieure avec le management a permis de rectifier certaines estimations qui ne semblaient pas cohérentes.

<i>Grade</i>	<i>UGD_P</i>	<i>UGD_I</i>
1	1.5%	10%
2	3.28%	0.2%
3	6.86%	30.55%
4	12.98%	33.13%
5	15.98%	35%
6	31.66%	38.05%
7	38.33%	46.25%
8	47.17%	63.92%
9	86.52%	73.13%
10	90%	100%

On voit par exemple que les UGDs lors de défauts d'insolvabilités sont toujours plus grands que ceux lors de défauts prolongés, sauf pour le grade 9. Ceci voudrait dire que pour un même acheteur, s'il devenait insolvable il y aurait plus de pertes que s'il était en défaut à cause d'un retard de paiement. Le retard de paiement semble plus facilement prévisible que l'insolvabilité d'un acheteur.

Après avoir vu les données disponibles, regardons plus en détail les taux de défaut et matrices de transitions entre ratings avec une étude statistique des historiques de défauts et transitions.

4.2 Analyse des probabilités de transition et défaut

Les taux de défaut et de transition ont été analysés afin de pouvoir en tirer des comportements stables dans le temps et de trouver des variables qui expliquent la variation des taux.

4.2.1 Taux de défaut

Un rating représentatif?

Voici la série temporelle des taux de défaut pour les ratings 3 à 8. Cette série semble avoir un comportement assez erratique.

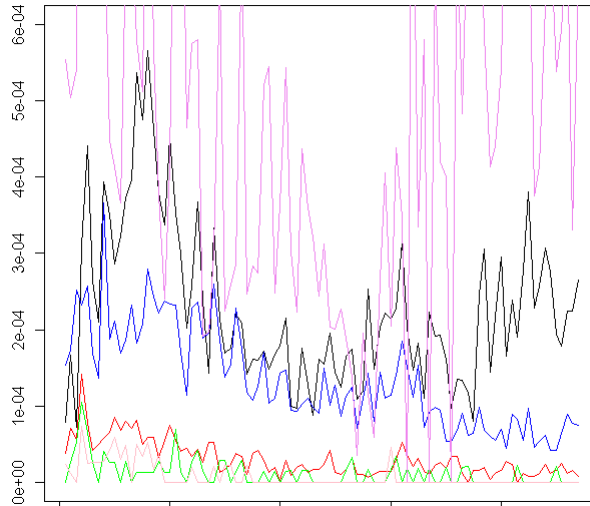


FIGURE 4.2 – Taux de défaut pour les ratings 3 à 8 (du bas vers le haut)

Nous avons choisi de faire une étude de séries temporelles sur un des ratings mais pour cela, il faut d'abord en choisir un qui soit suffisamment représentatif du portefeuille. A cette fin, nous regardons les corrélations entre probabilités de défaut pour les différents ratings. Elles sont décrites dans le tableau ci-dessous :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0000	0.4829	0.3445	0.4400	0.4526	0.4555	0.3302	0.0052	0.0420
0.4829	1.000	0.4328	0.6542	0.4994	0.5039	0.2297	0.0970	0.2360
0.3445	0.4328	1.000	0.5502	0.5477	0.2790	0.3112	0.0243	0.2178
0.4400	0.6542	0.5502	1.000	0.7060	0.5533	0.3026	0.1326	0.1882
0.4526	0.4994	0.5477	0.7060	1.000	0.5808	0.1685	0.1324	0.2727
0.4555	0.5039	0.2790	0.5533	0.5808	1.000	0.3748	0.2580	0.0211
0.3302	0.2297	0.3112	0.3026	0.1685	0.3748	1.000	0.0884	0.0760
0.0052	0.0970	0.0243	0.1326	0.1324	0.2580	0.0884	1.000	-0.1015
0.0420	0.2360	0.2178	0.1882	0.2727	0.0211	0.0760	-0.1015	1.000

En jaune sont surlignées les corrélations supérieures à 0,5.

On constate que la corrélation la plus forte est celle entre les taux de défauts des grades 5 et 6 avec 0.7060. Les taux de défaut des grades 6 et 7 sont eux aussi bien corrélés avec 0.5808, 5 et 3 avec 0.6542, 5 et 4, et 3 et 7. Il semblerait donc que le grade 5 soit bien corrélé avec les autres grades, ou en tout cas les grades moyens, 3,4,6 et 7. On pourrait donc choisir ce grade comme représentatif, et ainsi mener une étude statistique. Les autres grades extrêmes sont faiblement corrélés avec les grades moyens, sachant que les grades 9 et 10 sont même négativement corrélés, peut-être

dû au va-et-vient des acheteurs entre ces deux classes, en particulier sachant que ce sont celles qui ont le risque de défaut le plus élevé, et qui sont en situation de défaut avéré ou presque.

On peut donc retenir le grade 5 comme étant représentatif, et faire une analyse sur la série temporelle des taux de défauts de ce rating.

Analyse des taux de défaut avec une régression

Nous mènerons notre étude avec les taux de défaut du grade 5. Le but ici sera de trouver un modèle économétrique linéaire qui expliquerait au mieux les probabilités de défaut. Nous notons pd la série des taux de défaut.

L'histogramme des taux de défaut est donné dans 4.2.1 avec un ajustement lognormal.

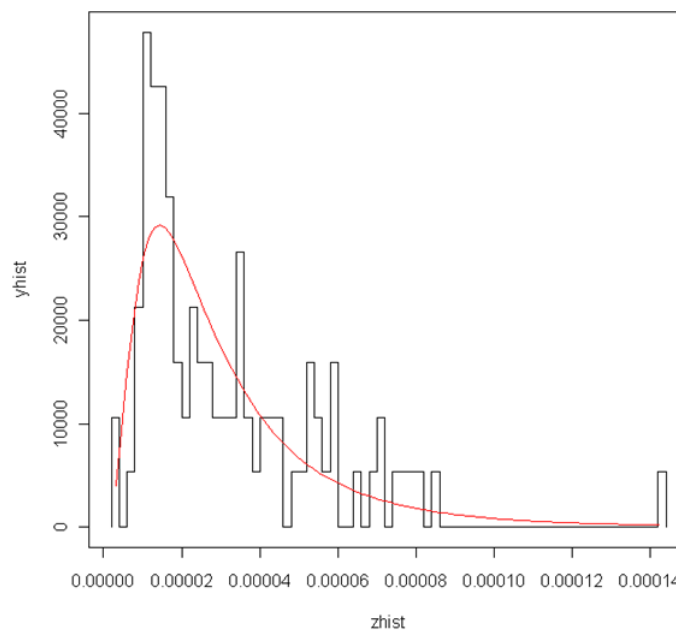


FIGURE 4.3 – Histogramme des taux de défaut

Nous nous concentrons au début sur le lien entre probabilités de défaut et PIB (série trimestrielle obtenue sur *OCDE.Stat* [66]).

Le résultat de la régression des probabilités de défaut sur le pib et pib^2 :

$lm(formula = pd \sim pib + c)$

	Coefficients :	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t)
(Intercept)		2.407e-05	3.826e-06	6.290	1.09e-08 ***
pib		4.331e-03	1.484e-03	2.919	0.00442 **
pib^2		8.001e-01	4.580e-01	1.747	0.08401 .
Signif. codes : 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1					

Residual standard error : 2.287e-05 on 91 degrees of freedom
 Multiple R-squared : 0.08578, Adjusted R-squared : 0.06569
 F-statistic : 4.269 on 2 and 91 DF, p-value : 0.01690

Les deux variables sont significatives mais le modèle n'est pas suffisamment explicatif de l'évolution des probabilités de défaut vu la valeur très faible du R^2 (mesure de la qualité d'ajustement linéaire). Donc le seul PIB ne suffit pas pour expliquer les pds.

Nous pouvons alors essayer d'autres modèles, avec d'autres variables explicatives, comme le taux à long terme, cours d'actions, production, export, import, balance commerciale extérieure, chômage, indice des prix à la consommation, indice des prix de production et leurs lags. Les données mensuelles ont été obtenues dans le site de l'OCDE [66].

Après avoir essayé plusieurs modèles, celui qui semble présenter le meilleur équilibre entre pouvoir explicatif et parcimonie, est le modèle qui régresse la variable pd sur le pib, le cours des actions (Mensuel, Indice (base 2005 = 100) sur [66]) et l'indice des prix à la production (Indices des Prix à la production, industries manufacturières, (base 2005 = 100) sur [66]). Voici le résultat de la régression :

lm(formula = pd ~ pib + cours des actions + indice des prix à la production)

Coefficients :	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.068e-04	6.328e-05	11.170	< 2e-16 ***
pib	8.955e-08	5.225e-08	1.714	0.09 .
cours actions	-5.011e-07	8.108e-08	-6.180	1.83e-08 ***
ipp	-6.107e-06	5.806e-07	-10.519	< 2e-16 ***

Signif. codes : 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error : 1.482e-05 on 90 degrees of freedom

Multiple R-squared : 0.6288, Adjusted R-squared : 0.6165

L'autocorrélogramme des résidus de cette régression est représenté dans la Figure 4.2.1.

Il semblerait qu'il y ait de la saisonnalité, même si les niveaux de corrélation ne sont pas significatifs car ils ne dépassent pas le seuil.

Après avoir étudié le périodogramme des résidus, et régressé sur les pics obtenus, les périodes n'étaient pas significatives.

Cependant ces résidus ne sont pas gaussiens selon le test de Shapiro-Wilk, qui donne une p-value < 0,01.

4.2.2 Matrices de transitions mensuelles

Avec les données de transitions et de défauts, on peut calculer des matrices de transitions entre ratings. Ultérieurement dans ce travail, nous nous intéresserons au lien entre taux de défaut, transition et crises (cf. 1). Nous présentons ici les premiers résultats que nous avons obtenus en travaillant sur les périodes de croissance et celle de récession. Une période de croissance sera pour nous une période lors de laquelle le

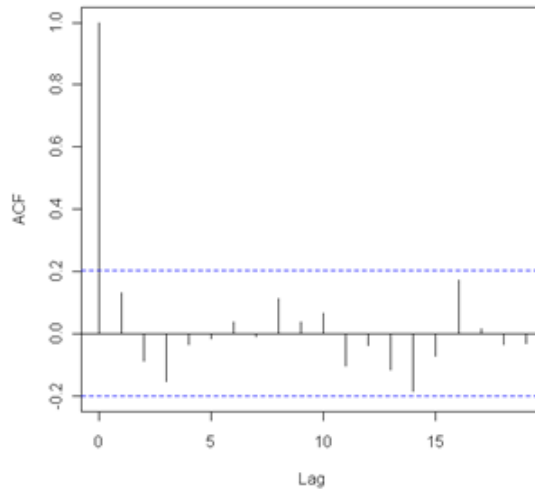


FIGURE 4.4 – Autocorrélogramme des résidus de la régression

PIB croît, et une période de récession une période lors de laquelle il diminue.¹ Nous avons ainsi pu calculer des matrices de transitions mensuelles. La matrice mensuelle moyenne pour les périodes de récession est donnée en annexe.

Nous pouvons voir que les acheteurs ont tendance à rester dans la classe où il se trouvent en début de période. Cependant malgré la période de transition mensuelle, donc assez courte, la probabilité qu'ils aillent vers d'autres classes n'est pas négligeable. En regardant la probabilité de défaut, nous constatons qu'elle est croissante avec les grades, ce qui est cohérent. Une particularité de cette matrice de transition est que la probabilité de défaut du grade 10, donc le plus risqué, est nulle, sans doute car les entreprises qui s'y trouvent ont déjà fait défaut, ou qu'il n'y a pas d'expositions là-dessus. Il y a cependant des acheteurs de cette classe qui vont vers d'autres grades, en particuliers vers 5, 6 et surtout 7, qui sont les grades moyens, où il y a le plus d'acheteurs.

La matrice de transition moyenne en croissance présente les mêmes caractéristiques que celle de récession.

Étudions à présent les différences de coefficients entre ces deux matrices. En théorie on devrait trouver que les probabilités de *upgrading*, c'est-à-dire les probabilités de passer à des classes moins risquées, devraient être supérieures dans la matrice de croissance ; celles de *downgrading*, donc les probabilités de passer à une classe plus risquée, devraient être plus élevées dans la matrice de récession.

En faisant la différence entre les deux matrices que nous avons calculées, nous nous apercevons qu'il n'y a pas de tendance qui se dégage quant aux *downgradings* et *upgradings*.

Nous avons ensuite distribué la probabilité de transiter vers le grade *NA* sur les

1. Le PIB étant donné de façon trimestrielle, nous avons fait l'hypothèse que ces variations mensuelles étaient égales, pour les mois d'un même trimestre.

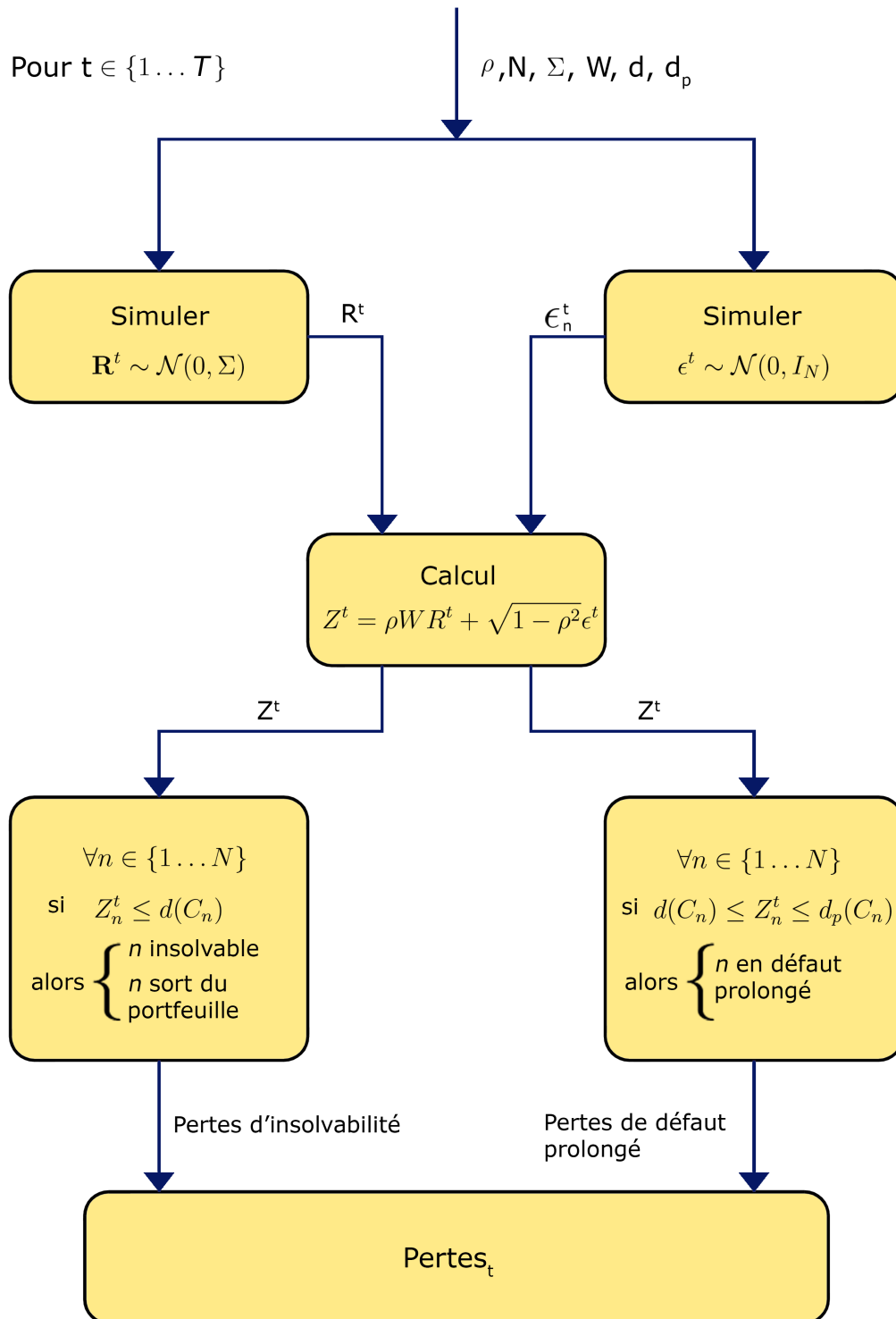
autres classes, car la présence de cette note peut fausser les résultats. Nous voyons alors (matrice en annexes) une certaine tendance qui s'approche de celle qu'on devrait théoriquement observer.

Maintenant que les NAs ont été redistribués, on voit mieux que la probabilité de rétrogradation est plus grande en temps de récession. Nous pouvons remarquer qu'il s'agit surtout de la probabilité d'être rétrogradé vers les ratings voisins. Pour les probabilités d'*upgradings*, la même règle s'applique mais il y a un peu plus d'exceptions. Si nous regardons les différences de probabilités de défaut, nous voyons que les probabilités de défaut en récession sont plus grandes qu'en croissance, cependant pas pour les grades 1 à 3, et pour le grade 10. Il s'agit ici d'une spécificité de ces grades, qui n'ont pas beaucoup d'effectifs, et aussi de la gestion des contrats par l'assureur, qui réagit assez rapidement en temps de récession et limite les défauts, et aura plus tendance à prendre des risques en période de croissance, surtout sur les bons ratings. Nous avons maintenant un meilleur aperçu des caractéristiques des matrices de transitions, et nous voyons que même si une tendance se dégage quant à leur structure, celle-ci n'est pas exactement conforme à la théorie sur les matrices stochastiques appliquée au matrices de ratings. Ceci est particulièrement dû à la gestion particulière des contrats par l'assureur crédit. Notre but sera de tenir compte de cette spécificité lors du calcul des engagements, dans le chapitre suivant.

Maintenant que nous avons présenté les données en entrée du modèle interne, analysons la structure du programme informatique qui le reproduit.

4.3 Implémentation logicielle

Un programme qui reproduit le modèle interne a été écrit sous le logiciel R. Ce programme reprend toutes les composantes du modèle interne intéressantes pour notre étude, et il a été développé afin de tester d'autres propositions de modèles internes (voir Chapitre 1). Les composantes du modèle interne, comme la réassurance ou les franchises, qui ne faisaient pas l'objet de notre étude n'ont pas été incluses, comme précisé dans 3.2. Ce programme R est un modèle interne en miniature qui peut être utilisé par la suite pour faire d'autres études de ce genre. Il calcule les pertes pour un portefeuille de plusieurs centaines d'acheteurs, en tenant compte de leur pays, secteur, exposition, rating. D'autres fonctionnalités peuvent s'y rajouter si besoin. Le logigramme en 4.3 utilise les notations dans 3.3.



Logigramme de la mise en oeuvre du modèle interne

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les données que nous avons à notre disposition pour estimer les paramètres en entrée du modèle interne (données de transitions, de défaut, d'expositions). Nous avons ensuite mené une étude de la corrélation entre les taux de défaut des différents ratings, ainsi que la corrélation de ces taux de défaut avec différents facteurs macroéconomiques. En effet, il y a un lien certain entre les taux de défaut et l'état de l'économie, comme nous en discutons aussi en 4.1.2. Cependant, dans le cadre de l'assurance crédit, ce lien est complexe et difficile à prendre en compte, spécifiquement dans le modèle interne. Nous avons alors, à l'aide de cette étude, analysé l'un des ratings de manière plus poussée à l'aide de séries temporelles, afin de trouver un modèle économétrique linéaire décrivant le mieux les probabilités de défaut. Enfin, l'étude des matrices de transitions mensuelles nous permettent de confirmer l'idée que la gestion des contrats par l'assureur crédit a bel et bien un impact non négligeable sur le modèle. Dans le prochain chapitre nous verrons différentes propositions pour améliorer le modèle interne, en particulier une qui prend en compte les cycles. C'est par cela que nous commencerons.

Deuxième partie

Propositions d'améliorations du modèle interne

Cette partie présente des améliorations du modèle interne de base que nous avons décrit à la section 3. Avec les améliorations présentées ici, nous ferons des calculs de Best Estimate et SCR, afin de constater si les améliorations proposées ont ou non un impact, et le cas échéant, comment se traduit-il.

Nous introduirons tout d'abord deux méthodes rendant le modèle interne capable de prendre en compte deux phénomènes fondamentaux pour un assureur crédit. Il paraît souhaitable pour un modèle de tenir compte des fluctuations de l'économie et notamment de se prémunir contre les conséquences des crises. Pour un assureur crédit, ce premier point impliquerait une augmentation significative des capitaux de solvabilité en période de crise, afin de faire face au nombre élevé d'entreprises faisant défaut.

Cela permettrait une meilleure anticipation des imprévus, et il donc serait judicieux et préconisable dans le cadre des dispositions Solvabilité II d'implémenter une méthode qui en tiendrait compte.

Si ce premier point est commun à tous les assureurs et à tout organisme soumis au risque de contrepartie, le deuxième phénomène est propre à l'assurance crédit. Il s'agit de la capacité d'atténuer le risque, que nous avons aussi abordée en 1.3. En effet lors de la souscription d'un contrat, il y a une limite définie pour un client concerné par le contrat, indiquant le montant maximal que l'assureur va rembourser à l'assuré en cas de faillite de son client. Cette limite a vocation à baisser si l'analyste crédit qui suit l'affaire juge que la situation financière de la société est dégradée. De surcroît, la limite peut être annulée si l'entreprise est soupçonnée de défaut proche. De ce fait, même si une entreprise fait défaut, si la limite pour cette entreprise a été annulée, il n'y aura pas de conséquence pour l'assureur, donc il n'y a pas lieu d'augmenter les capitaux. C'est ce qu'on appelle *capacité d'un assureur crédit d'atténuer le risque*. Rappelons que le fonctionnement de ce mécanisme est schématiquement représenté dans la Figure 1.4.1. Il serait intéressant de prendre en compte et de mesurer cette capacité faisant que la perte espérée pour un assureur crédit n'augmente pas de la même façon (vitesse) que celle d'un assureur quelconque.

Les méthodes ont pour but d'implémenter ces deux points dans le modèle interne. Alors que dans la première méthode, la prise en compte de ces deux points est explicite, elle sera implicite dans la seconde grâce à la structure par terme de probabilité de défaut.

Dans un deuxième chapitre nous aborderons le thème de la structure de dépendance entre risques systémiques (introduits dans 3). Nous relâcherons l'hypothèse selon laquelle les risques systémiques sont modélisés comme un vecteur gaussien, et regarderons comment les engagements de l'assureur changent si le vecteur de risques systémiques suit une loi de Student multivariée.

Le troisième chapitre introduit le prix de marché du risque, cette variable permettant de passer d'une évaluation en univers risque neutre à un univers réel et vice versa. Nous estimerons le prix de marché du risque de taux afin d'obtenir des prix de Zéro Coupons. En assurance, l'évaluation en univers risque neutre est utile pour le calcul de Best Estimate, qui représente les provisions de l'assureur, c'est-à-dire ce que l'assureur doit mettre de côté pour faire face aux engagements qu'il a déjà souscrits.

C'est de ce dernier, et également de calcul SCR, dont il sera question dans le quatrième chapitre. Nous présenterons alors une façon de calculer le Best Estimate dans un cadre de dépendance entre risque de taux et de crédit. On relâchera l'hypothèse d'indépendance habituellement faite, car en estimant les probabilités de transition et de défaut nous nous apercevons que le taux d'intérêt est une variable importante, étant donné que ses variations influencent les transitions entre ratings.

Le dernier chapitre présentera deux approches complémentaires qui pourraient être utilisées pour calculer le SCR dans le cadre d'un modèle multifactoriel sans faire de simulations.

Chapitre 1

Prise en compte des cycles de crédit pour le calcul des pertes

L'assurance crédit est affectée par les fluctuations cycliques du marché et du crédit, et ce d'une manière assez inhabituelle. En effet, l'impact des défauts est important au commencement d'une crise, mais par la suite l'influence de ces fluctuations diminue en un temps relativement bref. Les entreprises commerciales ont besoin d'un assureur crédit pour faire face au cas où leurs clients ne paieraient pas leurs factures en temps et en heure, où le risque de devenir insolvable rapidement deviendrait donc important. Elles souscrivent ainsi à une police d'assurance leur garantissant que tout ou partie des factures leur sera remboursée par l'assureur le cas échéant. Toutes les compagnies sont aptes à souscrire à ces polices d'assurance contre le défaut de paiement, et donc aussi bien les petites que les grandes sont assurées. Ainsi, l'assureur crédit prend en charge le risque d'insolvabilité ou de défaut prolongé¹, ce qui le rend très sensible aux cycles du crédit, et éventuellement du marché. Même si le risque que l'assureur supporte est toujours un risque de crédit, celui-ci est différent du risque de crédit issu des marchés financiers. Tout d'abord du fait de la diversité des sources de risque ; les compagnies en défaut peuvent provenir de secteurs très différents, des petites entreprises de proximité aux géantes multinationales. Deuxièmement, le risque n'est pas coté, il n'y a ni offre ni demande. Ainsi, l'assureur crédit doit gérer son portefeuille au travers des cycles, ce qui fait que son aversion au risque et les actions gestionnaires ne seront pas les mêmes au cours de cette période. Nous essaierons de prendre ceci en compte. Un certain nombre de recherches essaient de découvrir s'il y a coïncidence des cycles de crédit et de marché, mais il semblerait qu'il n'y ait pas de réponse arrêtée à cette question (voir par exemple [54], [53] et leurs références). Ces deux cycles semblent obéir à certaines lois macro-économiques, comme l'illustre la partie 4.1, et les variations de PIB pourraient expliquer au moins partiellement les mouvements cycliques du crédit. La différence entre ces deux cycles ne sera de toute façon pas fondamentale dans ce qui suit. Il est possible de travailler avec n'importe lequel pour autant que l'on distingue les périodes d'amélioration de celles de ralentissement, puisqu'il y a significativement plus de défauts dans ces dernières, et tant que l'hypothèse du caractère

1. Il y a défaut prolongé si la période de règlement de facture dure plus longtemps que celle qui a été négociée initialement.

markovien des processus est réaliste. Le problème sera pour nous de distinguer le point critique, où le nombre de défauts change radicalement, c'est-à-dire les changements de régime de défauts. Lorsque le cycle chute, on peut remarquer que le nombre d'entreprises insolvable ou incapables de payer leurs factures augmente de manière considérable. Par conséquent l'assureur devrait rembourser des montants colossaux et risquerait de devenir insolvable lui-même, ce qui serait probablement le cas si les assureurs de crédit ne pouvaient pas limiter leurs pertes en réduisant leur exposition aux firmes (clientes du marché de l'assurance) dont la rentabilité de crédit diminue. Dans ce cas, l'assureur prévient l'assuré dont le montant accordé a diminué que ses clients pourraient ne plus être solvables, et qu'il devrait lui-même réduire ses échanges commerciaux avec ces-derniers. D'un autre côté, quand l'assureur pense que les conditions économiques sont plus favorables, il prendra plus de risque et augmentera les garanties. Voir [71] pour une introduction à l'atténuation des risques en assurance de crédit. Le grand nombre d'entreprises en défaut au même moment en début de crise impacte l'assureur crédit assez considérablement (si ce dernier n'a pas correctement anticipé le commencement de cette crise). Cependant, une fois que le nombre de défauts a augmenté et que l'on observe les conséquences de la crise, l'assureur crédit peut réduire son exposition aux firmes risquées - il y a un compromis réalisé entre une perte d'argent immédiate et une perte de crédibilité future, synonyme de perte de richesse à venir - et réduire ses pertes. En résumé, l'assureur peut accroître ou réduire le risque qu'il supporte, ce qui est plus compliqué pour les banques par exemple. Ces raisons montrent l'importance pour un assureur crédit de savoir prédire l'état futur de la situation économique, et pour les équipes actuarielles de déterminer un capital de risque basé sur cette situation. L'assureur calcule son Capital Economique pour une période d'un an. Dans les modélisations actuelles, la capacité à modifier les expositions et le portefeuille ne sont pas prises en compte, ce qui mène à une surestimation du capital. La raison derrière ceci est que les conséquences d'une réduction à l'exposition en temps de crise sont plus importantes que celles dues à l'augmentation de l'appétence au risque en période de prospérité. Notre étude présente un moyen de prendre en compte les cycles dans notre modèle interne, et introduit les augmentations et diminutions d'exposition. Dans la première partie, nous présenterons le modèle de référence où tous les paramètres sont fixés. La deuxième partie consistera en l'introduction d'un modèle à deux périodes, permettant de s'adapter au cycle. Dans la dernière partie nous appliquerons ce modèle au portefeuille d'une assurance de crédit et comparerons les valeurs du Capital Economique dans les deux cas. La première partie de ce chapitre est tirée en partie de l'article [11].

1.1 Une nouvelle modélisation - Prise en compte des actions du management

La modélisation présentée en 3 est mono-périodique, ce qui signifie que tous les paramètres, ainsi que les variables considérées sont définies sur une période. La capacité à payer est la capacité à payer mono-périodique, s'il y a défaut, il y a un défaut unique sur la période... Etant donné que nous ne savons pas exactement

lorsqu'ils vont se produire, nous supposons que tous les défauts sont réalisés en fin de période. En pratique, la période sur laquelle nous travaillerons est l'année puisque les capitaux sont calculés sur une base annuelle. Nous voulons introduire la possibilité pour l'assureur de gérer ses expositions au cours de l'année. Il peut en effet réduire, voire même supprimer, son exposition aux acheteurs dont la solvabilité diminue, ce qui a un impact sur ses capitaux. Ainsi, grâce à ce type de gestion, les capitaux de l'assureur de crédit devraient plus faibles que ceux estimés avec un modèle mono-périodique, ce que nous aimerions prendre en compte. Nous avons déjà eu un aperçu des conséquences de ce type de gestion du portefeuille dans la section 4.2.1, lorsque nous avons vu que les taux de défaut avaient fortement baissés, 6 mois après avoir explosé sous l'effet de la crise de 2008. Nous introduirons pour cela une étape de mi-période, ce qui créera un modèle à deux périodes, que l'on pourra aisément transposer en modèle multi-périodique. Travailler sur une base semestrielle est suffisant et cohérent en assurance de crédit, étant donné que cela correspond au temps de réaction moyen. Cela signifie que six mois après le début d'une crise, les manœuvres de gestion ont déjà été mises en place, et donc les expositions aux entreprises très risquées ont été drastiquement réduites, voire supprimées. On peut ainsi considérer que les caractéristiques du portefeuille changent également tous les six mois. Les capitaux estimés par ce modèle devraient donc être plus réalistes.

Nous présenterons tout d'abord l'idée conductrice du modèle, et exposerons par la suite les paramètres à estimer. L'idée principale est ici de séparer la période unique en deux sous-périodes.

1.1.1 Première période

Les paramètres sont déterminés pour la première période. Les probabilités de défaut sont les plus intéressantes pour le moment, puisqu'elles contiennent des informations sur la phase du cycle de la période en cours. Cependant si nous prenons des périodes "trop longues" pour faire le calcul de ces probabilités de défaut, il est possible que nous ne remarquions pas les phases de récession, dues à la gestion des contrats après le "déclenchement" d'une crise.

A la fin de la période, nous calculons le nombre d'insolvables et nous déterminons, d'après un certain critère, s'il est plus probable que la phase du cycle soit haute ou basse. Nous donnerons plus de détails sur ce critère dans la partie suivante.

Nous calculons alors les pertes liées aux défauts d'insolvabilité et aux défauts prolongés. La solvabilité des acheteurs peut changer à la fin de cette période, et leur catégorie peut s'en retrouver largement modifiée pour la seconde, alors que dans le modèle mono-périodique, les acheteurs ne pouvaient changer de rating qu'à la fin de l'unique période.

1.1.2 Deuxième période

Au début de la seconde période, nous avons donc un nouveau portefeuille étant donné que les acheteurs peuvent avoir changé de catégorie, et que certains d'entre eux ont même pu être exclus du portefeuille. Les expositions ont donc également pu être modifiées depuis le début de la première période si la solvabilité est amoindrie,

ce qui était impossible dans le modèle mono-périodique. La phase du cycle dans la deuxième période peut être haute ou basse. Afin d'inférer cela pour cette phase, nous pouvons regarder le cycle de la première période, une fois celle-ci passée et lorsque nous aurons de l'information sur ce qui s'est produit (au moins le nombre de défauts). La dépendance entre la première et la deuxième période est modélisée par une chaîne de Markov ; les deux états de la chaîne seront {Croissance, Récession}. Dans ce qui suit la croissance sera aussi appelée *phase haute du cycle* et la récession *phase basse du cycle*. Les probabilités de transition d'une chaîne de Markov suffisent à la définition de la chaîne². Il nous faudra donc estimer cette matrice de transition. De nombreux exemples existent dans la littérature, par exemple [5] où il est question d'étudier les cycles du marché.

Les pertes de la seconde période sont ensuite ajoutées à celles de la première.

1.2 Paramètres du modèle

Les paramètres que nous devons estimer pour les périodes de récession et d'expansion sont les suivants, pour des états hauts ou bas du cycle :

- Matrice de transition entre les *ratings*, avec les probabilités de défaut en dernière colonne, notées P_l and P_h ;
- Un vecteur de probabilité de défaut prolongé pour chaque catégorie, π_l et π_h ;
- Un vecteur avec les UGDs pour chaque catégorie, UGD_l et UGD_h ;
- Un vecteur (ou une matrice) de coefficients reflétant les variations des expositions, c_l et c_h .

Les paramètres de la première période devraient être déterminés, les probabilités de défaut d'insolvabilité et les matrices de transition entre ratings devraient être données également.

Le fait de trouver des estimateurs de qualité serait d'un grand intérêt pour de futurs travaux. Une approche cohérente consisterait en l'utilisation d'une Chaîne de Markov Cachée (ou Chaîne de Markov avec changement de régime) (voir [46], [5], [47]). D'autres articles présentent des techniques d'estimation (sur les cycles du crédit, du marché ou sur d'autres facteurs) [15], [38], [51],[54],[64], [57]. Nous avons également mené une étude sur l'estimation des matrices de transitions conditionnelles à des facteurs macroéconomiques. Les résultats de cette estimation seront présentés dans le dernier chapitre, où nous nous intéresserons aux calculs de Best Estimate et de quantiles dans le cadre d'un modèle multifactoriel, conditionnellement indépendant par rapport à des facteurs macroéconomiques.

1.2.1 Matrices de transitions et probabilités de défaut

Matrices de transition

Nous avons, dans le cadre de cette étude, utilisé des estimateurs définis dans [57], et repris dans [51]. L'hypothèse de travail est que les matrices de transitions entre ratings sont homogènes sur les périodes de croissance et récession. Cette hypothèse est assez réaliste si les périodes hautes et basses du cycle décrivent parfaitement les

2. si les conditions initiales sont données

transitions entre ratings. Ceci peut donc être réducteur par rapport à la réalité qui est bien plus complexe. Cependant le comportement de l'assureur est assez homogène lors des périodes de crise et de croissance : lors des premières il est averse au risque, et lors des secondes il prendra des risques. Ces comportements devraient donc traduire des caractéristiques propres aux matrices de transition.

Après avoir distingué les périodes de cycle bas et de cycle haut, nous les avons groupées, le but étant de trouver les matrices de transition pour une période en cycle bas et une autre pour le cycle haut.

En temps continu, une chaîne de Markov est décrite par une matrice génératrice Λ , qui est telle que la matrice de transition entre 0 et t , P_t , est donnée par l'équation :

$$P_t = \exp t\Lambda$$

Afin que P_t soit une matrice de transition de chaîne de Markov, donc une matrice stochastique³, il y a des conditions pour qu'une matrice soit génératrice :

$$\lambda_{ij} \geq 0 \text{ et } \lambda_{ii} = - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$$

Donc ces entrées doivent être positives et la somme des coefficients en ligne doit être nulle.

Nous allons donc estimer une matrice génératrice pour les périodes de cycle bas, notée Λ_B et une autre pour les périodes de cycle haut Λ_H .

Un estimateur de Λ est donné par (cf. [51]) :

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{T_{ij}}{\int_0^t E_s^i ds}, \forall i, j$$

où T_{ij} est le nombre de transitions de la classe i à la classe j entre 0 et t , et E_s^i est l'effectif de la classe i à l'instant t . En calculant cette intégrale, nous connaissons donc le temps que les acheteurs auront passé dans le rating i .

Etant donné que nos données sont discrètes, car nous n'avons pas la date exacte d'entrée ou de sortie d'une classe, nous adapterons la formule de l'estimateur ci-dessus pour avoir l'estimateur du générateur en cycle $c \in \{\text{Croissance, Récession}\}$. Nous aurons alors, après avoir groupé les périodes de même cycle :

$$\hat{\lambda}_{ij}^c = \frac{T_{ij}}{\sum_{k \in 1 \dots n^c} E_k^i ds}, \forall i, j$$

avec n^c qui présente la longueur de la série des données pour le cycle $c \in \{\text{Croissance, Récession}\}$. Nous supposons que les entrées et sorties d'une classe se font à la fin de la période de discrétisation (le mois dans notre cas) Nous adaptons une formule en continu, à un cas discret, ce qui génère une certaine erreur. Cependant le mois est une période assez courte pour supposer que nous ne perdons que peu d'information, car il n'y a pas beaucoup de changements d'états pour un même acheteur en intra-mensuel.

3. La somme des coefficients en ligne est égale à 1 et les coefficients sont positifs.

En ayant Λ^c , nous pouvons calculer la matrice de transition à k mois pour le cycle c , comme

$$P_k^c = \exp k\Lambda^c$$

La dernière colonne de cette matrice donne la transition vers l'état de défaut d'insolvabilité.

Probabilité de défaut prolongé

D'une façon similaire à ce qui a été fait pour les matrices de transition, la probabilité de défaut prolongé p_i^c pour la classe i en cycle c , est estimée par :

$$p_i^c = \frac{D_i}{\sum_{k \in 1 \dots n^c} E_k^i ds}$$

où D_i est le nombre de défauts prolongés dans la classe i pendant le cycle c .

1.2.2 Variations d'expositions et UGDs conditionnels

Variation d'expositions en fonction du cycle

Les expositions de l'assureur ne seront pas les mêmes en phase haute et basse du cycle, car comme expliqué plus haut son degré d'aversion au risque ne sera pas la même. Ceci se traduit par le fait qu'il peut faire sortir des acheteurs de son portefeuille s'ils sont considérés comme "trop" risqués, donc annuler toute garantie qui impliquerait une perte si cet acheteur fait défaut. Ainsi, si défaut il y a, il n'y aura pas d'impact, d'où une baisse des taux de défaut quelques temps après le début d'une crise. Le contraire est vrai pour les périodes d'expansion, où l'assureur prend plus de risques.

Sans aller jusqu'à annuler toute garantie sur un acheteur considéré à risque, l'assureur peut baisser cette garantie d'un certain pourcentage. L'idée sera ici de donner une estimation de ce pourcentage.

L'UGD est l'utilisation de la garantie en cas de défaut, alors que la variable que l'on cherche à estimer ne sera pas liée à une notion de défaut. On cherche à savoir comment vaire l'exposition des acheteurs qui seront toujours dans le portefeuille à la fin de la première période.

Pour cela nous avons divisé l'année civile en deux⁴, et pour chaque période ainsi créée, nous déterminons s'il s'agit d'une période de cycle bas ou cycle haut. Puis nous calculons pour chaque rating, une variation d'exposition moyenne pour chaque type de cycle.

UGDs conditionnels

Des UGDs pour chaque phase de cycle ont été calculés.

Les UGDs sont calculés avec les données sur les expositions et les défauts. Pour chaque année civile, nous divisons l'année en deux et pour chaque sous période, nous déterminons le cycle. Nous faisons la moyenne du ratio entre l'exposition à l'instant de défaut et l'exposition en début de période, pour chaque rating.

4. Etant donnée que les capitaux se calculent pour des portefeuilles au 1 janvier.

1.3 Calcul mathématique des pertes

Soit N le nombre total d'acheteurs dans le portefeuille. Soit L_n l'exposition de l'acheteur n au début de la période. Soit G_n la catégorie de l'acheteur n au début de la période, $G_n \in \{1, \dots, J\}$ où J est le nombre de ratings.

1.3.1 Perte de la première période

La perte totale à la fin de la première période sera :

$$\text{Loss}_1 = \sum_{n=1}^N L_n \times \text{UGD}(G_n) \times [Z_n \leq d(G_n)]$$

où $[.]$ désigne le crochet d'Iverson⁵

Remarque : Dans la formule, nous avons UGD_{G_n} car les UGDs sont estimés par catégorie et probabilité de défaut. En pratique, on calcule $d(G_n)$ pour chaque catégorie comme le quantile d'une variable Gaussienne standard, $d(G_n) = \Phi^{-1}(p_{G_n})$ ⁶.

1.3.2 Changements dans le portefeuille au cours de la première période

Soit def le nombre de défauts de la première période, $\text{def} = \sum_{n=1}^N [Z_n \leq d(G_n)]$. Si le taux de défaut $\frac{\text{def}}{N} = \sum_{n=1}^N \frac{[Z_n \leq d(G_n)]}{N}$ remplit un certain critère, on suppose alors que l'état de la première période était E_l , ou E_h dans le cas contraire. Nous développerons ce point plus avant dans la partie 1.3.4.

Concernant les transitions entre catégories, les mêmes principes que pour les défauts s'appliquent : les seuils de défaut sont calculés en utilisant les matrices de transition P et en supposant que Z est une variable Gaussienne standard.

La probabilité d'un acheteur n de passer de $G_n = i$ à $j \in \{1, \dots, J\}$ est la suivante :

$$\mathbb{P}(d_{i,j+1} \leq Z \leq d_{ij}) = \Phi(d_{ij}) - \Phi(d_{i,j+1}) = p_{ij}$$

avec $d_{i,j+1} \leq d_{ij}$.

Les seuils d_{ij} de passage de i à j sont calculés par :

$$\forall j \in \{J, \dots, 1\}, d_{ij} = \Phi^{-1} \left(\sum_{k=j}^{J-1} p_{ik} + p_i \right) \quad (1.1)$$

5. Le crochet d'Iverson est égal à 1 si la condition dans le crochet est vérifiée et 0 sinon, comme la fonction indicatrice. L'avantage de cette écriture est qu'elle est plus compacte que celle d'une fonction indicatrice.

6. Φ désigne la fonction de répartition d'une Gaussienne centrée réduite, comme c'est le cas de Z_n .

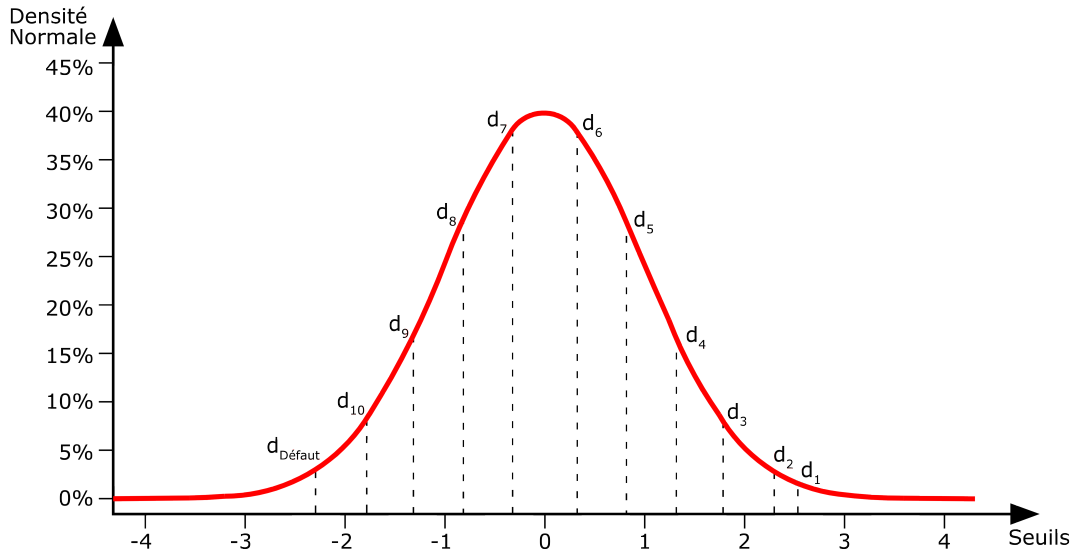


FIGURE 1.1 – Seuils de défaut et transitions comme quantiles d’une loi normale

avec $J = 10$ dans notre cas.

À la fin de la première période, la structure du portefeuille aura changé : les acheteurs en défaut ont quitté le portefeuille et les autres ont pu changer de catégorie, ce qui implique que leurs caractéristiques, comme par exemple la probabilité de défaut, change pour la seconde période.

1.3.3 Pertes de la seconde période

La matrice de transition de la seconde période est donnée conditionnellement à l’état du cycle dans la première période.

$$P_2 = \begin{cases} P_h, & \text{de probabilité } \mathbb{P}(E_2 = h|E) \\ P_l, & \text{de probabilité } \mathbb{P}(E_2 = l|E) \end{cases}$$

La probabilité de défaut prolongé sera choisie aléatoirement, conditionnellement à la première période, et donc :

$$\pi_2 = \begin{cases} \pi_h, & \text{de probabilité } \mathbb{P}(E_2 = h|E) \\ \pi_l, & \text{de probabilité } \mathbb{P}(E_2 = l|E) \end{cases}$$

Nous calculons alors le nouveau seuil de défaut avec la formule 1.1 pour les états hauts et bas du cycle, et nous avons alors simplement à choisir entre les deux.

Les pertes de la seconde période sont données par la formule :

$$\text{Loss}_2 = \sum_{n=1}^{N-\text{def}} L_n^2 \times \text{UGD}(E, G_n^2) \times [Z_n^2 \leq d^2(G_n^2)]$$

où L_n^2 est l'exposition de l'acheteur n au début de la deuxième période. Elle est supposée être égale à $c_n \times L_n$ où c_n est un coefficient reflétant l'augmentation ou la diminution de l'exposition de la catégorie n .

L'estimation des coefficients c_n est extrêmement importante. Ils peuvent être déterminés par le biais des déclarations de sinistres passées et en observant la manière dont l'exposition des acheteurs en défaut a évolué au cours de l'année précédant le défaut. On pourrait s'attendre à ce que dans les états hauts, l'exposition augmente, et qu'elle diminue dans les états bas. Idéalement, nous pourrions estimer une matrice C de coefficients reflétant l'évolution de l'exposition des acheteurs changeant de catégorie. Cependant, afin d'avoir plus d'observations, et par conséquent une estimation plus fiable, nous choisissons de considérer un vecteur de coefficients traduisant l'évolution de l'exposition des acheteurs en fonction de leur catégorie au début de la période. La perte totale de l'année est alors $\text{Loss} = \text{Loss}_1 + \text{Loss}_2$.

1.3.4 Identification du changement de régime

Si le taux de défaut dans la première période est suffisamment élevé, donc si $\sum_{n=1}^N \frac{[Z_n \leq d(G_n)]}{N} > \text{def}^*$, alors E_l est plus probable que E_h (E_h est plus probable sinon).

Hypothèse 8. Le taux de défaut pour un tirage R donné, noté $\frac{\text{def}}{N}$, est un bon estimateur (sans biais et efficace) de la moyenne des probabilités conditionnelles des acheteurs du portefeuille $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p^{n|R}$.

Démonstration. On utilisera le théorème de Kolmogorov (voir Annexe).

On peut l'appliquer à la " suite " de variables aléatoires représentant les défauts conditionnels, c'est-à-dire $X_n = [Z_n \leq d_n | R] = \left[\epsilon_n \leq \frac{d_n - \rho_n R}{\sqrt{1 - \rho_n^2}} | R \right]$ pour $n = 1, \dots, N$.

Ces variables sont bien indépendantes des (ϵ_n) pour $n = 1, \dots, N$.

On choisit $a_n = n$ pour $n = 1, \dots, +\infty$.

La première hypothèse est vérifiée.

$$\mathbb{E}([Z_n \leq d_n | R])^2 = \mathbb{V}([Z_n \leq d_n | R]) + (\mathbb{E}([Z_n \leq d_n | R]))^2 \quad (1.2)$$

$$= p^{n|R}(1 - p^{n|R}) + (p^{n|R})^2 = p^{n|R} < 1 \quad (1.3)$$

La deuxième hypothèse est vérifiée car nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{V}([Z_n \leq d_n | R])}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^{n|R}(1 - p^{n|R})}{n^2} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} < +\infty \quad (1.4)$$

Alors

$$\frac{\sum_{n=1}^N [Z_n \leq d_n | R] - \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N [Z_n \leq d_n | R] \right)}{N} \longrightarrow 0 \text{ a.s.}$$

Ensuite en utilisant :

$$\frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N [Z_n \leq d_n | R] \right) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P} (Z_n \leq d_n | R) \quad (1.5)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p^{n|R} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [Z_n \leq d_n | R] - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p^{n|R} \longrightarrow 0 \text{ a.s.} \quad (1.7)$$

Le taux de défaut observé pour un R donné est donc un estimateur convergeant de l'espérance conditionnelle de la moyenne des variables aléatoires de Bernoulli représentant les défauts. Cet estimateur est sans biais et efficace. □

Remarque 9. La somme des probabilités conditionnelles de défaut individuel sera toujours supérieure en cycle bas par rapport au cycle haut.

Ceci est dû au fait que si $p_n^r > p_n^e$ alors $\Phi^{-1}(p_n^r) = d_n^r > \Phi^{-1}(p_n^e) = d_n^e$.

Ainsi

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{P} \left(\varepsilon_n \leq \frac{d_n^r - \varrho_n w_n R}{\sqrt{1 - \varrho^2}} | R \right) > \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{P} \left(\varepsilon_n \leq \frac{d_n^e - \varrho_n w_n R}{\sqrt{1 - \varrho^2}} | R \right)$$

Donc, conditionnellement à R , le nombre de défauts sera toujours plus grand en cycle bas qu'en cycle haut. Parfois, pour certaines observations de R , la différence entre les deux probabilités conditionnelles ne sera pas très importante, mais d'autres fois elle pourra être très marquée. Ainsi, le vecteur R traduit une certaine structure de corrélation entre les acheteurs, toujours plus importante en récession qu'en expansion. Le graphique suivant représente une approximation de la distribution des défauts pour les cycles hauts en noir, et bas en rouge.

On peut remarquer que les deux fonctions de densité se coupent en un point. Cela signifie qu'en ce point, la probabilité de★ d'avoir ce nombre de défauts en cycle bas est la même qu'en cycle haut. Pour les nombres de défauts tels que $\text{def} < \text{def}^\star$, la probabilité qu'ils viennent d'un cycle en état haut est plus importante que celle qu'ils viennent d'un cycle en état bas, et inversement pour $\text{def} > \text{def}^\star$. Nous pouvons également calculer les probabilités a posteriori d'être en cycle haut ou bas. Les données utilisées par le modèle proviennent des probabilités de défaut qui contiennent des informations sur l'état du cycle. D'après la loi précédente, nous pouvons « décoder » cette information, et après application de cette dernière, nous saurons si ces probabilités seront plus hautes en cycle haut ou bas. En pratique, ceci est déduit du nombre de cas de « chutes » en état de cycle bas, noté x_l , et en état de cycle haut, x_h . Si $x_h > x_l$, les probabilités du modèle « décrivent » un état économique plus proche d'un état de cycle haut que d'un état de cycle bas.

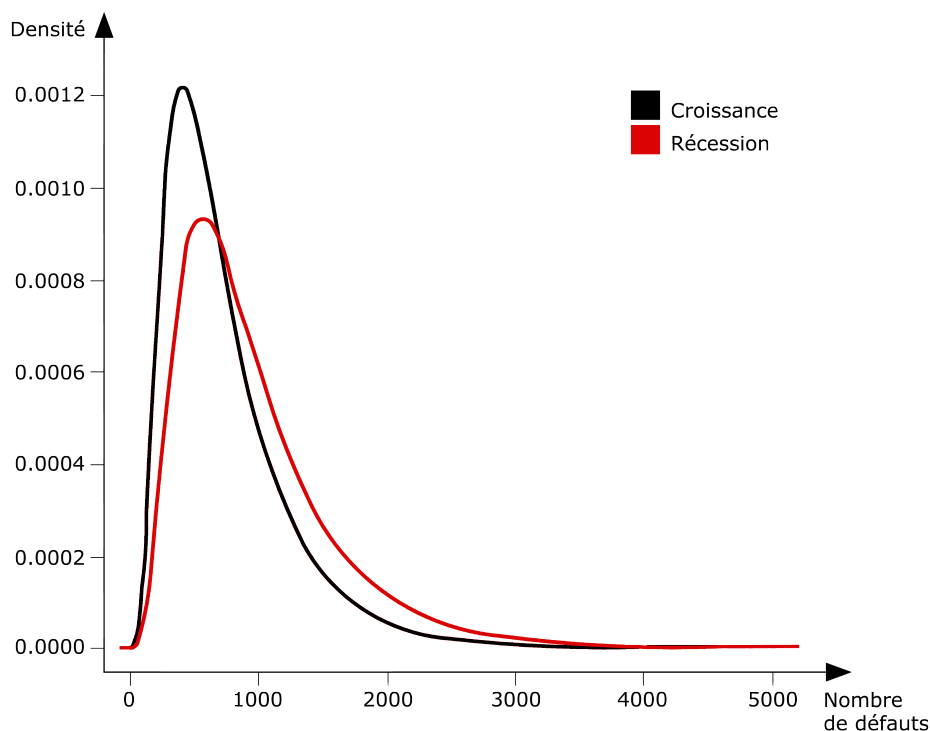


FIGURE 1.2 – Approximations des lois de probabilités du nombre de défauts

1.4 Algorithme et simulations

Il n'y a pas de formule à proprement parler pour les quantiles de perte et il faut donc se servir de simulations de Monte Carlo afin de les trouver. Dans cette partie, nous décrivons l'algorithme et les simulations nécessaires à la détermination numérique de la distribution des pertes. On suppose les seuils de défauts obtenus par :

Pour chaque simulation $t = \{1, \dots, T\}$

1. Simuler R^t suivant une Gaussienne multivariée $N(0, \Sigma)$.
2. Simuler N Gaussiennes centrées réduites indépendantes ε_n^t pour $n \in 1 \dots N$
3. Les capacités à payer pour chaque acheteur sont calculées par

$$Z_n^t = \varrho_n \frac{{}^t w_n R^t}{\| \langle {}^t w_n M \rangle \|_2} + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n^t$$

4. Pour tout acheteur n si $Z_n^t \leq d(G_n)$ alors l'acheteur n est insolvable et sort du portefeuille.
5. Pour tout acheteur n si $d^{G_n} \leq Z_n^t \leq D^{(G_n)}$ l'acheteur n est en défaut prolongé.
6. Les pertes sont égales à la somme des pertes pour défauts prolongés et d'insolvabilité.

7. Pour tout acheteur n qui n'a pas fait défaut, si $d(G_n)_{j+1} \leq Z_n^t \leq d(G_n)_j$, l'acheteur n va de G_n vers le rating j pour $j \in \{1, \dots, J\}$
8. def est le nombre d'acheteurs insolvable.
9. \mathcal{P}_t est le nouveau portefeuille à la fin de la période.

Si $def < def^*$ alors E_h , sinon E_l .

Soit u un tirage d'une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Si $u < \mathbb{P}(E_2 = h|E)$ alors $E_2 = h$, sinon $E_2 = l$.

1. Simuler $R^{t'}$ suivant une Gaussienne multivariée $N(0, \Sigma)$.
2. $N - def$ gaussiennes centrées réduites $\varepsilon_n^{t'}$ for $n \in 1 \dots N - def$
3. Calculer les capacités à payer

$$Z_n^{t'} = \varrho_n \frac{{}^t w_n R^{t'}}{\| \langle {}^t w_n M \rangle \|_2} + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n^{t'}$$

4. Pour tout acheteur n si $Z_n^{t'} < d_{(G_n)}^2$ alors l'acheteur n est insolvable.
5. Pour tout acheteur n si $d_{(G_n)}^2 \leq Z_n^{t'} \leq D_{(G_n)}^2$ l'acheteur n est en défaut prolongé.
6. La perte est égale à la somme des pertes des différents défauts.

1.5 Données et résultats

1.5.1 Données et estimations de paramètres

Nous avons estimé les paramètres d'après les taux historiques mensuels d'un portefeuille d'assureur de crédit entre 2005 et 2012, que nous avons présenté dans la section 4.1. Le portefeuille était composé d'entreprises établies en France, et auxquelles l'assureur de crédit était positivement exposé pendant au moins un mois au cours de cette période. Etant donné qu'il y avait aux alentours de 2 million de compagnies dans notre base de donnée, il aurait fallu des machines possédant au moins 16 Go de RAM afin d'estimer les paramètres, et pas moins de 32 machines calculant simultanément pour simuler les pertes afin d'avoir les résultats dans un délai raisonnable. Le programme utilisé repose sur une version adapté de celui vu en 4.3. Nous avons choisi d'utiliser les cycles du marché comme principale variable de nos calculs. Nous avons donc estimé les matrices de transition semestrielles, en temps de récession et d'expansion.

Paramètres estimés

Le but de cette étude est de proposer un modèle permettant d'avoir un capital de solvabilité plus réaliste, prenant en compte les actions de gestion, qui ont un impact important dans le cas d'une récession et limitent les pertes de l'assureur. Nous savons qu'il existe d'autre méthodes plus précises afin d'estimer les matrices de transition ou les UGDs. Cependant, travailler avec une base de données si importante a été utile, et nos estimations se sont révélées plutôt satisfaisantes, et cohérentes avec nos attentes.

Matrices de transitions

Les résultats pour les matrices de transitions de 6 mois sont les suivants :

$P_h =$

79.057%	10.896%	2.930%	1.628%	4.638%	0.613%	0.162%	0.074%	0.001%	0.000%	0.000%
1.270%	76.223%	7.127%	2.736%	10.581%	1.491%	0.347%	0.212%	0.010%	0.002%	0.000%
0.129%	1.440%	76.903%	5.552%	13.504%	1.795%	0.464%	0.198%	0.011%	0.002%	0.000%
0.045%	0.315%	2.168%	86.068%	8.213%	2.435%	0.591%	0.157%	0.007%	0.001%	0.000%
0.005%	0.028%	0.147%	1.182%	91.872%	4.427%	1.871%	0.450%	0.014%	0.001%	0.002%
0.002%	0.009%	0.045%	0.214%	2.624%	91.625%	4.415%	1.024%	0.032%	0.002%	0.009%
0.000%	0.003%	0.025%	0.085%	0.737%	10.576%	85.311%	3.143%	0.092%	0.008%	0.020%
0.001%	0.002%	0.013%	0.042%	0.404%	5.574%	14.769%	78.190%	0.956%	0.036%	0.014%
0.000%	0.026%	0.048%	0.172%	0.424%	3.498%	11.585%	4.805%	79.021%	0.419%	0.003%
0.000%	0.001%	0.006%	0.220%	0.084%	2.063%	10.839%	1.529%	4.509%	80.747%	0.003%
0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	100.000%

$P_b =$

70.451%	15.179%	7.499%	3.570%	2.335%	0.871%	0.085%	0.006%	0.002%	0.001%	0.001%
2.554%	75.522%	12.343%	5.197%	3.188%	0.989%	0.171%	0.014%	0.011%	0.005%	0.006%
0.185%	2.164%	81.448%	9.907%	4.401%	1.528%	0.325%	0.029%	0.009%	0.003%	0.001%
0.028%	0.212%	1.809%	83.782%	10.419%	3.112%	0.580%	0.047%	0.008%	0.001%	0.001%
0.002%	0.015%	0.125%	0.914%	92.148%	5.425%	1.229%	0.129%	0.009%	0.001%	0.003%
0.001%	0.003%	0.025%	0.124%	4.708%	91.191%	3.475%	0.429%	0.027%	0.007%	0.011%
0.000%	0.001%	0.015%	0.049%	0.833%	12.934%	84.166%	1.813%	0.145%	0.021%	0.023%
0.000%	0.000%	0.005%	0.020%	0.398%	5.685%	8.074%	83.667%	2.060%	0.066%	0.026%
0.000%	0.001%	0.031%	0.122%	0.488%	5.466%	7.134%	18.550%	67.807%	0.324%	0.078%
0.000%	0.000%	0.003%	0.012%	0.615%	4.213%	1.039%	3.149%	17.652%	73.314%	0.004%
0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	100.000%

UGDs

Les estimations pour les UGDs, utilisées ensuite pour les calculs, sont les suivantes :

Grade	UGD_r	UGD_e
1	0.146%	0.132%
2	0.1479%	0.133%
3	0.149%	0.137%
4	8.745%	8.22%
5	13.93%	12.99%
6	20.51%	18.95%
7	27.06%	24.63%
8	27.57%	24.75%
9	32.51%	24.88%
10	40.01%	25.00%

En récession les UGDs sont plus grands qu'en croissance. Comme évoqué précédemment, cela s'explique par le fait qu'en récession, les expositions baissent.

Variations d'expositions

Regardons les variations d'expositions que nous avons estimées :

Grade	e_r	e_c
1	1	1
2	0.9833	1.0350
3	0.9921	1.0565
4	0.9703	1.0560
5	0.9195	1.0164
6	0.8286	1.0241
7	0.8574	1.0763
8	0.6950	1.1251
9	1	2.6916
10	1	1

Les expositions augmentent en cycle haut et diminuent en cycle bas, ce qui confirme ce que l'on pensait quant à l'aversion au risque de l'assureur. Les hausses et baisses d'expositions ne sont donc pas régulières, et n'augmentent ni ne diminuent avec les ratings. Ceci peut venir du fait que les expositions en période de crise augmentent le plus pour les classes qui les ont vues diminuer en période de récession, comme pour les classes 7,8,9. En période de récession, elles diminuent le plus pour les ratings 6, 7 et 8. C'est comme si lors de la période de récession, les entreprises perdaient un rating et voyaient leurs risques supportés par l'assureur diminuer, et en croissance, une fois leur rating dégradé, l'exposition augmentait considérablement.

Convergence de quantiles

D'après les paramètres que nous avons estimés, nous simulons les pertes avec l'algorithme détaillé en 1.4 et nous voulons voir l'impact de notre modèle sur le Capital Economique. Le graphique de la figure 3.2.2 donne une idée de la convergence du Capital Economique pour des quantiles à 99%.⁷

1.5.2 Resultats

Les densités de perte annuelles 1.5.2 sont obtenues grâce au modèle à deux périodes. Nous avons comparé le modèle mono-périodique soumis à trois hypothèses, la première étant de supposer que le cycle était haut pendant l'année entière, notée *1 période H*, la deuxième où nous étions à mi-chemin entre cycle haut et bas, notée *1 période TTC*, et la troisième où le cycle était bas, notée *1 période L*, au modèle à deux périodes décrit ci-dessus, où la première période a plus de chances d'être en état de cycle haut, notée *2 période H*, et le dernier cas où nous supposons que la

7. Dans la directive Solvabilité 2 il est requis de calculer les quantiles à 0.995 pour l'estimation du Capital Economique, mais ici pour des raisons pratiques, puisque cela demande plus de simulations pour converger, on utilise le quantile à 0.99.

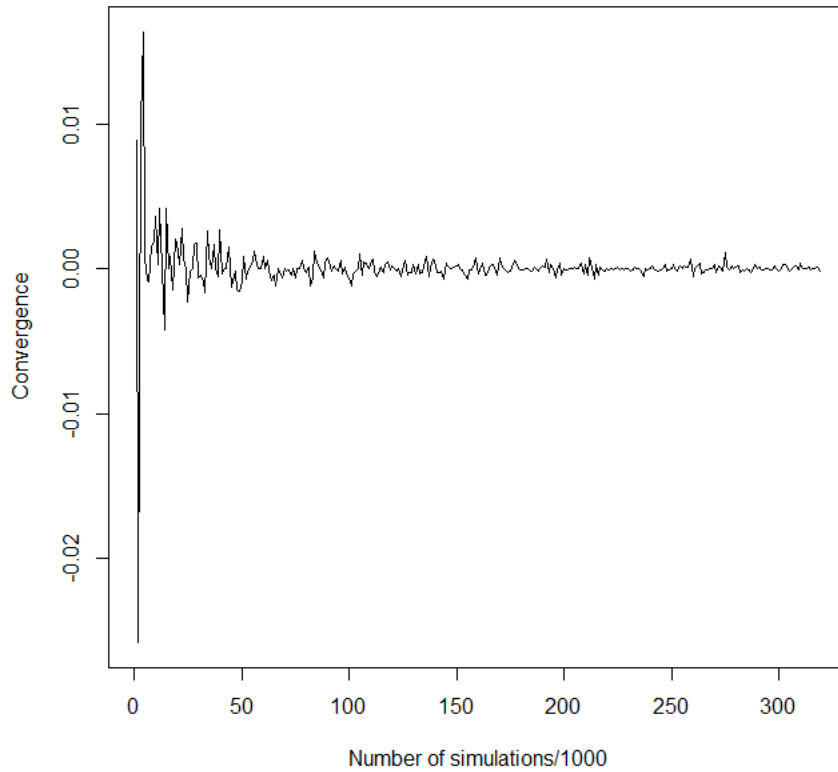


FIGURE 1.3 – Convergence des quantiles à 0.99

première période avait plus de chances d'être en état de cycle bas, notée *2 période L*.

Les variations du Capital Economique, c'est-à-dire *Quantile à 99% - Perte espérée*, sont :

$\frac{\text{CE 2 period L} - \text{CE 1 period L}}{\text{CE 1 period L}}$	-9.3%
$\frac{\text{CE 2 period H} - \text{CE 1 period H}}{\text{CE 1 period H}}$	-1.8%
$\frac{\text{CE 2 period L} - \text{CE 1 period TTC}}{\text{CE 1 period TTC}}$	-3.9%
$\frac{\text{CE 2 period H} - \text{CE 1 period TTC}}{\text{CE 1 period TTC}}$	-9.6%

Tout d'abord, nous remarquons que le Capital Economique déterminé grâce au modèle à deux périodes est toujours plus faible que celui déterminé par le modèle mono-périodique. Dans le cas où le cycle est supposé haut, pour la première période au moins, modéliser les pertes à l'aide du modèle à deux périodes conduit à une réduction de 1.8% du Capital Economique par rapport au modèle mono-périodique sous la même hypothèse. Ceci est dû au fait qu'il y a une possibilité que le cycle

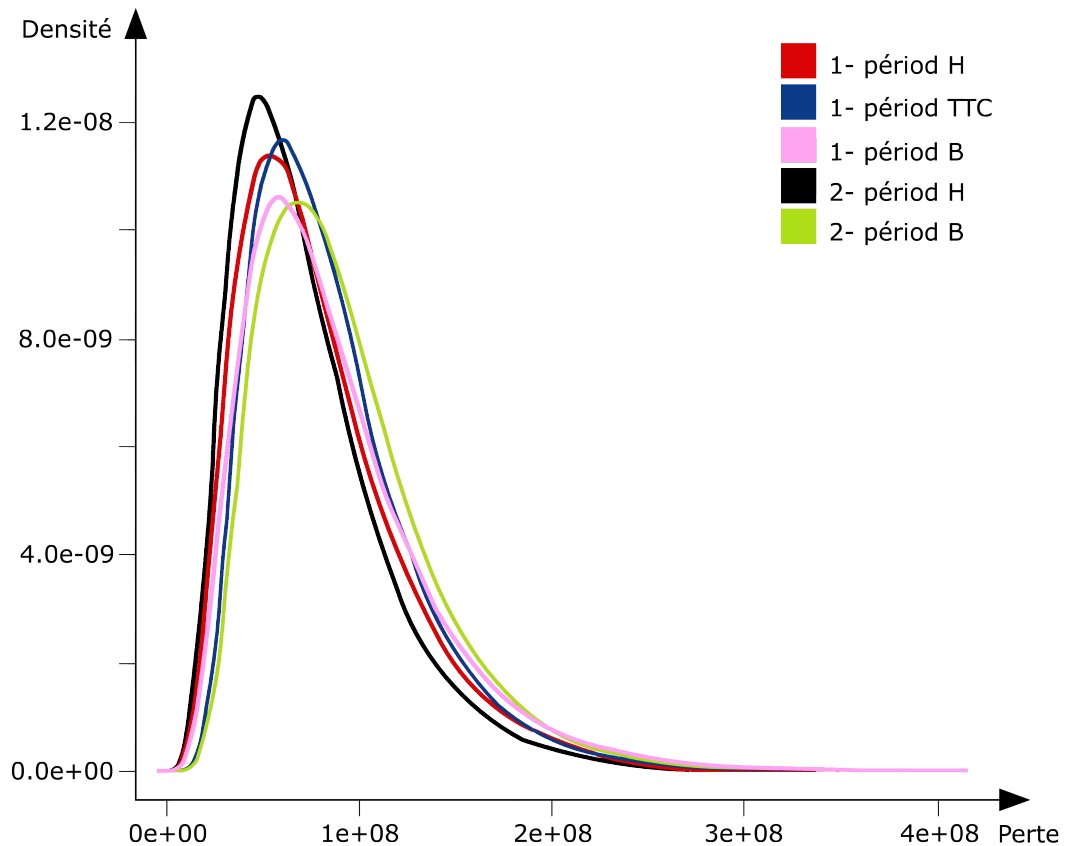


FIGURE 1.4 – Densités de pertes pour les différents modèles

soit bas durant le second semestre, et dans ce cas les expositions de l'assureur diminueront. Si nous le comparons au modèle mono-périodique ou le cycle peut être haut ou bas de manière équiprobable (que nous appellerons « à travers le cycle » par la suite), alors le Capital Economique est de 9.6% inférieur dans le modèle à deux périodes, ce qui est cohérent avec nos attentes. Quand il est attendu que le cycle soit bas au cours du premier semestre, le Capital Economique du modèle à deux périodes est plus faible de 9.3% comparé à celui du modèle mono-périodique où le cycle est bas durant toute l'année. Lorsque nous le comparons au Capital Economique sous l'hypothèse " à travers le cycle ", il est plus faible de 3.9%. Il est logique d'avoir une diminution plus faible sous l'hypothèse " à travers le cycle " que si le cycle était bas toute l'année.

Conclusion

Nous avons présenté dans cette étude, un modèle prenant en compte les cycles du marché et du crédit. Il convient particulièrement bien à l'assurance de crédit puisqu'il prévoit la potentielle réduction des garanties offertes par l'assureur en cas de cycle

bas, et l'augmentation autrement. L'application numérique que nous en avons faite semblerait mettre en exergue le fait que le Capital Economique déterminé à l'aide de notre modèle à deux périodes serait inférieur à celui déterminé par le biais d'un modèle mono-périodique, ce qui peut s'avérer très intéressant. Il permet également à l'assureur de mieux adapter ses capitaux aux cycles du marché, et de faire moins d'erreur d'estimation que dans un modèle mono-périodique. En effet, un modèle plus flexible permet d'avoir un capital économique qui correspondra mieux aux besoins réels de l'assureur. La principale difficulté de ce modèle réside en la découverte de la meilleure variable discriminante, ce qui nous permettra de différencier les états du cycle, et donc les différentes décisions prises par l'assureur. Une fois cette variable trouvée, les matrices de transition de Markov devraient être estimées de manière cohérente. Utiliser la théorie des Chaînes de Markov Cachées afin de trouver une méthode d'estimation de ces matrices requerra un travail plus poussé.

1.6 Présentation d'une approche alternative : Méthode PLMC

La méthode PLMC -Piecewise linear approximation via Monte Carlo simulation- permettrait de rester dans un cadre cohérent avec le modèle interne présenté en (3), tout en faisant varier les paramètres dans l'année.

La variable qui modélise la *capacité à payer* est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance σ^2 . Notre but est d'intégrer dans le modèle interne une structure par terme intra-annuelle de probabilités de défaut, et il faut donc faire des hypothèses sur l'évolution de la capacité à payer durant d'une année.

Hypothèse 10. En s'appuyant sur le fait que la variable à un an doit être gaussienne de variance σ^2 ⁸, on suppose que le processus de la capacité à payer est un mouvement brownien de variance $t\sigma^2$ pour $t < 1$, que l'on note $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Remarque 11. Cette hypothèse implique entre autres que la capacité à payer pour des périodes de l'année de même longueur suit la même loi, et que les capacités à payer de deux périodes différentes sont représentées par des variables indépendantes.

On définit alors le premier temps de passage d'un brownien au-dessous d'une barrière de défaut $d(t)$ (les seuils) supposée ici déterministe :

$$\tau = \inf \{t > 0 \mid W(t) < d(t)\}.$$

Si la barrière est linéaire de la forme

$$c(t) = \alpha + \beta t \tag{1.8}$$

avec $\alpha > x_0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors la densité de la loi du temps d'arrêt est [93]

8. Ici on présente le cas général où la variance est σ^2 , même si dans notre cas $\sigma^2 = 1$

$$\begin{aligned}
f_c(t | t_0, x_0) &= \frac{\alpha - x_0}{\sqrt{2\pi (t - t_0)^3}} e^{-(\alpha + \beta(t - t_0) - x_0)^2 / (2(t - t_0))} \\
&= \frac{\alpha - x_0}{(t - t_0)^{\frac{3}{2}}} \phi\left(\frac{\alpha + \beta(t - t_0) - x_0}{\sqrt{t - t_0}}\right)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

La formule ci-dessus est connue sous le nom *formule de Bachelier-Lévy*.

Si une barrière est linéaire par morceaux, c'est-à-dire de la forme :

$$c(t) = \alpha_i + \beta_i t \text{ pour } t \in [t_{i-1}, t_i] \text{ et } i \geq 1 \tag{1.10}$$

avec $t_i = t_0 + hi$, $h > 0$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. En posant $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta_i t_i$, la fonction $t \mapsto c(t)$ est continue sur $[t_0, +\infty[$. On note $c_i = c(t_i)$ les noeuds de c pour $i \geq 0$. La fonction de densité de la transition du Brownien W par les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n aux instants t_1, t_2, \dots, t_n contrainte par la barrière absorbante linéaire par morceaux c sur $[t_{i-1}, t_n]$, et sachant que $W_{t_0} = x_0 < \alpha_1$, est :

$$\begin{aligned}
& p_{a,c}(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots, t_n, x_n | t_0, x_0) \\
&= \prod_{i=1}^n p_{a,c}(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}) \\
&= \prod_{i=1}^n (1 - e^{-2(c_i - x_i)(c_{i-1} - x_{i-1}) / (t_i - t_{i-1})}) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi (t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \leq c_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $x_0 < c_0$ et $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ donnés et fixes.

Donc

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(W_{t_1} \in C_1, \dots, W_{t_n} \in C_n, \tau > t_n | W_{t_0} = x_0) \\
&= \int_{C_1} \dots \int_{C_n} p_{a,c}(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots, t_n, x_n | t_0, x_0) dx_1 \dots dx_n
\end{aligned} \tag{1.12}$$

On cherche une approximation linéaire par morceaux, notée c , de la barrière inconnue b . L'idée de l'algorithme d'approximation (PLMC) est de calculer la probabilité que le premier temps de passage au dessous de la barrière c soit dans l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, et de l'égaliser à la probabilité de passage à travers la "vraie" barrière b dans le même intervalle. Les équations suivantes permettent de déterminer les coefficients $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, pour chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, pour $i \geq 1$. L'algorithme peut être divisé en deux étapes :

1.6.1 Première étape

On détermine la valeur de β_1 dans 1.10, telle que la probabilité de passage à travers c soit la même que la probabilité de passage à travers b dans l'intervalle $[0, t_1]$.

Pour nous, la probabilité de passage à travers la vraie barrière est la probabilité de défaut pendant l'intervalle $[0, t_1]$. On cherche donc la valeur de la pente β_1 telle que :

$$\int_0^{t_1} f_c(t) dt = p_{t_1} \quad (1.13)$$

où p_{t_1} est la probabilité de défaut durant $[0, t_1]$ et $f_c(t)$ est donnée par 1.9.

Remarque 12. α_1 est l'ordonnée à l'origine et on peut supposer qu'elle est nulle si la probabilité de défaut instantanée est nulle.

1.6.2 Deuxième étape

Une fois obtenus $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, avec $n \geq 1$, on pose $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n t_n$, et on détermine la valeur de β_{n+1} telle que la probabilité de passage de W en-dessous de la barrière approximative c dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ soit égale à la probabilité de passage de W en-dessous de la vraie barrière b dans le même intervalle de temps. On cherche β_{n+1} tel que

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{-\infty}^{c_n} \dots \int_{-\infty}^{c_1} \left(f_c(t | t_n, x_n) \prod_{i=1}^n p_{a,c}(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}) \right) dx_1 \dots dx_n dt = p_{[t_n, t_{n+1}]} \quad (1.14)$$

où $p_{[t_n, t_{n+1}]}$ est la probabilité de défaut dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, $f_c(t | t_n, x_n)$ est la fonction de densité du premier temps de passage de W en-dessous de la barrière $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}t$ pour $t > t_n$, étant donné que $W_{t_n} = x_n$; cette densité est donc donnée par la formule 1.9 avec $\alpha = c_n$ et $\beta = \beta_{n+1}$.

Remarque 13. Cette formule fait intervenir les fonction de transition $p_{a,c}$ qui dépendent des paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ déterminés précédemment. Pour calculer la fonction de densité f_c on a besoin de connaître α_{n+1} et β_{n+1} . Mais $\alpha_{n+1} = \alpha_n + (\beta_n - \beta_{n+1}) t_n$, la seule inconnue de l'équation est donc β_{n+1} .

En discrétisant la partie gauche de l'équation, on obtient une fonction non-linéaire en β_{n+1} . Pour résoudre l'équation les méthodes numériques standards ne sont plus adaptées, surtout quand n devient grand. C'est pour cette raison que [93] utilisent une adaptation de la méthode de Monte Carlo, proposée dans [89] (ré-écriture de l'intégrale multiple comme l'espérance d'une variable aléatoire qui est exprimée en fonction de plusieurs variables gaussiennes indépendantes).

Une nouvelle variable est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H(\beta_{n+1}; x_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f_c(t | t_n, x_n)) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{\beta_{n+1}(t_{n+1} - t_n) + \alpha_n + \beta_n t_n - x_n}{\sqrt{t_{n+1} - t_n}} \right) \\ &+ e^{-2\beta_{n+1}(\alpha_n + \beta_n t_n - x_n)} \\ &\times \Phi \left(\frac{\beta_{n+1}(t_{n+1} - t_n) - \alpha_n - \beta_n t_n + x_n}{\sqrt{t_{n+1} - t_n}} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

pour $n \geq 1$. L'équation 1.14 peut alors s'écrire :

$$\mathbb{E} \left(H(\beta_{n+1}; X_n) \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq c_i\}} e^{-2(c_i - X_i)(c_{i-1} - X_{i-1})/(t_i - t_{i-1})} \right) \quad (1.16)$$

$$= p_{[t_n, t_{n+1}]} \quad (1.17)$$

où $X_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ sont des variables aléatoires indépendantes. La partie gauche de l'équation ci-dessus peut être estimée avec une méthode de Monte Carlo.

Conclusion

Nous avons présenté ici une amélioration du modèle interne qui permettrait de tenir compte du fait que les défauts peuvent avoir lieu de façon continue et pas uniquement en fin de période. Pour appliquer cette méthode il faudrait expliciter la structure par terme des probabilités de défaut, discrète, et c'est à cette étape là que les cycles de crédit doivent être introduits. Ensuite, en estimant la barrière de défaut de la façon présentée ci-dessus, les instants de défauts peuvent être simulés comme premiers temps de passage au-dessus de la barrière. Cependant ceci demande beaucoup plus de calculs que pour ce qui a été présenté dans 1, qui était déjà lourd du point de vue numérique. C'est pour cela que nous le laissons au stade de proposition. Il resterait à mesurer l'impact réel d'une telle approche sur les pertes estimées. Remarquons que nous pouvons estimer la structure par terme qui est demandée, avec une approche comme dans 4, où nous avons les probabilités de défaut ainsi que les probabilités de transitions pour chaque trimestre. A présent nous nous intéresserons à la structure de dépendance entre risques systémiques dans le modèle à facteur, et à ce que le passage d'une loi normale à une loi de Student multivariée impliquerait pour les pertes.

Chapitre 2

Analyse de la structure de dépendance

La distribution normale multivariée, donc les vecteurs gaussiens, est souvent utilisée pour modéliser les risques systémiques dans la littérature du risque de crédit (voir [33] par exemple). La facilité d'utilisation de la loi normale a aidé au développement de cette littérature. Cependant la loi normale ne présente pas de dépendance de queue, et de ce fait peut sans doute sous estimer les pertes très élevés dues à une très forte concentration de défauts. Afin de tester la validité de l'utilisation de la copule gaussienne dans le cadre de l'assurance crédit, nous avons comparé les résultats de simulations faites avec une loi gaussienne avec celles d'une loi de Student multivariée. Ce chapitre a pour but de présenter cette comparaison.

La copule associée à une distribution de Student multivariée, est la copule de Student. Soit R un vecteur gaussien centré de covariance Σ . Soit \tilde{R} un vecteur de taille n suivant une loi de Student avec ν degrés de liberté, centré et de matrice de covariance $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$. Il peut alors être représenté comme suit (définition similaire au cas univarié) :

$$\tilde{R} = \sqrt{\frac{\nu}{S}}R$$

avec S une variable de loi du Khi-2 avec ν degrés de liberté, indépendante de R . La copule résultante de cette distribution a une dépendance de queue. Si on prend l'exemple d'une loi de Student bivariée, alors la dépendance croît avec le coefficient de corrélation, et baisse si ν augmente. Ceci est dû au fait que plus ν augmente plus la loi de Student s'approche d'une normale. Il a été montré que si on utilise la copule de Student pour modéliser la dépendance entre variables latentes dans les modèles multifactoriels, le nombre de défaut simultanés sera plus grand. Pour plus d'informations sur la loi de Student multivariée et sa copule, consulter [23] ou encore [28].

2.1 Méthodologie

2.1.1 Loi de la perte agrégée

Quand on travaille avec des variables de Student, leur somme n'est plus une Student, et il n'y a pas de résultat analytique dans le cas de la somme de plusieurs variables de Student, ni de variables de Student avec des Gaussiennes. Ceci rend la simulation des défauts plus compliquée numériquement par rapport au cas où le vecteur des risques systémiques est gaussien et que les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes. En effet $\mathbb{P}({}^t wR + \epsilon < d)$ est la probabilité qu'une variable gaussienne prenne des valeurs au dessous de d . Donc d le seuil de défaut sera calculé comme quantile d'une loi normale pour la probabilité de défaut, qui est une entrée du modèle. Si on décide de changer de loi pour le vecteur des risques systémiques, alors $\mathbb{P}({}^t w\tilde{R} + \epsilon < \tilde{d})$ sera la probabilité qu'une variable de loi inconnue prenne des valeurs en dessous d'un certain seuil \tilde{d} . Et ce seuil ne pourra plus être trouvé comme quantile d'une loi connue, pour une probabilité connue. C'est pour cette raison que le seuil devra être estimé numériquement, après avoir fait des tirages de la loi de Student et de lois normales indépendantes. Cette contrainte technique fait que nous devons faire les tirages de loi de Student et ensuite calculer le seuil qui sera propre à chaque groupes d'acheteurs. Un groupe d'acheteurs sera composé des acheteurs qui appartiennent au même rating, même pays, et même industrie. Pour limiter le temps de calcul nous avons décidé de faire nos tests sur un portefeuille plus petit que celui avec lequel nous avons travaillé pour les autres études. Nous avons choisi un sous portefeuille représentatif avec 20% des acheteurs initiaux. Le critère de choix du sous portefeuille a été que celui-ci devrait garder la même distribution entre les ratings que le portefeuille initial.

2.1.2 Simulations

Nous faisons 300 000 simulations pour les pertes dans le cas de la loi de Student et de la loi Gaussienne. Lors d'une simulation de perte, nous faisons un tirage de Student et aussi un tirage de Gaussienne, et pour calculer la capacité à payer $Z = {}^t wR + \epsilon$, nous prenons les mêmes risques individuels ϵ sous les deux hypothèses (ils varient cependant en fonction des simulations). Ceci est fait dans le but de laisser comme seule variable lors des simulations, le changement de loi pour le risque systémique, et après avoir constaté que si on ne "fixait" pas les erreurs, cela introduisait beaucoup de bruit dans les résultats obtenus.

2.1.3 Seuils de défaut

Comme expliqué plus haut, ne connaissant pas de résultat théorique sur la combinaison linéaire de variables de Student entre-elles et/ou avec une gaussienne, nous calculons les seuils de défaut individuels numériquement. Pour cela nous simulons $Z_j = \rho {}^t w_j R + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_j$ et calculons le seuil de défaut comme $d_j = F^{-1}(pd_j)$ où pd_j est la probabilité de défaut de l'acheteur j et F^{-1} est la fonction quantile empirique de Z_j simulé.

Toujours dans un souci de garder comme seule source de variabilité des pertes le changement de loi des risques systémiques, nous décidons de calculer empiriquement les seuils, même dans le cadre gaussien, où ils sont connus.

2.2 Résultats

Dans cette section nous présenterons les résultats de simulations pour des risques systémiques qui suivent une Student à 3 degrés de liberté et comparerons les pertes simulées avec celles où les risques systémiques sont un vecteur Gaussien, de même matrice de covariance, toutes choses égales par ailleurs.

2.2.1 Student à 3 degrés de liberté

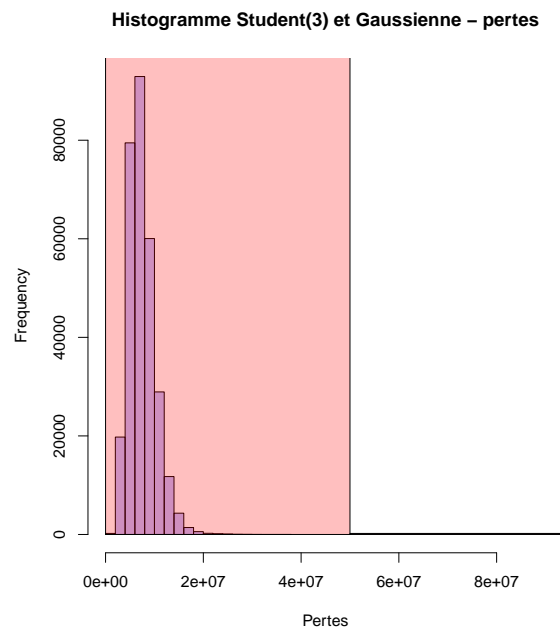


FIGURE 2.1 – Comparaison de pertes lois Student 3ddl et Gaussienne

Dans le tableau ci-dessous, nous trouvons un résumé des variations relatives entre quantiles obtenus sous l'hypothèse Student et ceux sous l'hypothèse Gaussienne.

$$\frac{\text{quantile perte Student 3ddl} - \text{quantile perte Gaussienne}}{\text{quantile perte Gaussienne}}$$

99%	99.01%	99.02%	99.03%	99.04%	99.05%	99.06%	99.07%
0.1827702	0.1856662	0.1896115	0.1916943	0.1957119	0.1994613	0.2034092	0.2077554
99.08%	99.09%	99.1%	99.11%	99.12%	99.13%	99.14%	99.15%
0.2113355	0.2143416	0.2182016	0.2223449	0.2275239	0.2300956	0.2332250	0.2373920
99.16%	99.17%	99.18%	99.19%	99.2%	99.21%	99.22%	99.23%
0.2405690	0.2461006	0.2509736	0.2553148	0.2576539	0.2603655	0.2654317	0.2684305
99.24%	99.25%	99.26%	99.27%	99.28%	99.29%	99.3%	99.31%
0.2716946	0.2751452	0.2797101	0.2832928	0.2881736	0.2901228	0.2955437	0.2982415
99.32%	99.33%	99.34%	99.35%	99.36%	99.37%	99.38%	99.39%
0.3006481	0.3017156	0.3055634	0.3102494	0.3157422	0.3200348	0.3258516	0.3305366
99.4%	99.41%	99.42%	99.43%	99.44%	99.45%	99.46%	99.47%
0.3338649	0.3370669	0.3403635	0.3444778	0.3490316	0.3535542	0.3585594	0.3624506
99.48%	99.49%	99.5%	99.51%	99.52%	99.53%	99.54%	99.55%
0.3663146	0.3694588	0.3732934	0.3754185	0.3782952	0.3878315	0.3921582	0.3959384
99.56%	99.57%	99.58%	99.59%	99.6%	99.61%	99.62%	99.63%
0.4004881	0.4090883	0.4158063	0.4270170	0.4364907	0.4444972	0.4573079	0.4692265
99.64%	99.65%	99.66%	99.67%	99.68%	99.69%	99.7%	99.71%
0.4792926	0.4882566	0.5018024	0.5185917	0.5299602	0.5480605	0.5635935	0.5818268
99.72%	99.73%	99.74%	99.75%	99.76%	99.77%	99.78%	99.79%
0.5996474	0.6142205	0.6369603	0.6602529	0.6894786	0.7031760	0.7262651	0.7526260
99.8%	99.81%	99.82%	99.83%	99.84%	99.85%	99.86%	99.87%
0.7853560	0.8212319	0.8570619	0.8931313	0.9392003	0.9687133	1.0276912	1.0938333
99.88%	99.89%	99.9%					
1.1646481	1.2106336	1.3205773					

On voit qu'on obtient des pertes beaucoup plus élevées avec la copule Student que la copule gaussienne. Le quantile à 99.5%¹ est plus élevé de 37% dans le cas Student par rapport au cas Gaussien. Et les différences relatives augmentent si on passe à des quantiles plus élevés.

Ces pertes élevées s'expliquent par le fait que le nombre de défauts simultanés dans le cas Student est beaucoup plus élevé ou beaucoup plus faible que dans le cas Gaussien. Mais le nombre minimal de défauts qui peuvent être obtenus peut aller jusqu'à 0, alors que le nombre maximal peut monter très vite. C'est pour cette raison que la dépendance de queue supérieure joue un rôle plus important sur le nombre de défauts.

Voici les histogrammes pour les défauts d'insolvabilité et prolongés.

Ils présentent la façon dont ces dépendances de queue supérieure et inférieure se traduiront dans les pertes obtenues. Nous nous intéresserons au quantiles élevés donc nous nous concentrons sur leur étude. Notons toutefois que la situation équivalente se présente pour les quantiles bas de la distribution des pertes.

Le tableau ci-après présente les quantiles de pertes sous l'hypothèse gaussienne pour des probabilités allant de 0.99 à 0.999. La dernière ligne présente la valeur de la fonction de répartition des pertes Student, pour chacun de ces points.

1. Ici, on regarde le quantile à 99.5% et pas celui à 99% car c'est ce qui est préconisé dans Solvabilité 2. Dans 1 nous avons travaillé avec les quantiles à 99% pour avoir une bonne convergence sachant que la convergence se faisait plus lentement à cause des deux périodes.

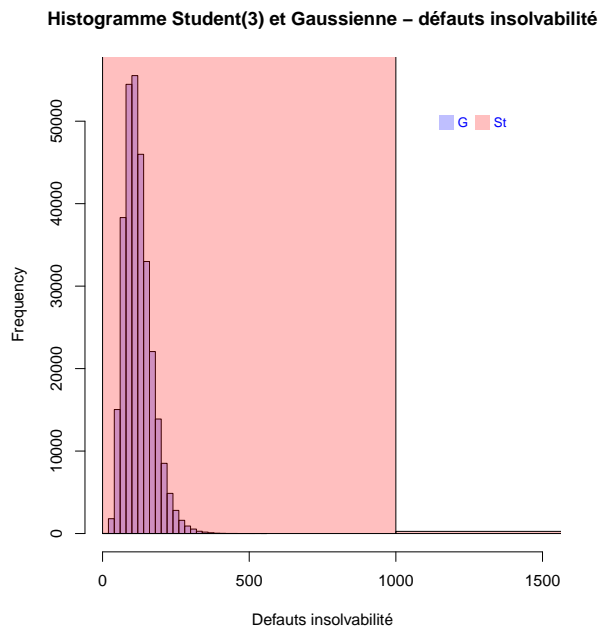


FIGURE 2.2 – Histogrammes des taux de défauts d’insolvabilité- lois de Student 3 ddl et Gaussienne

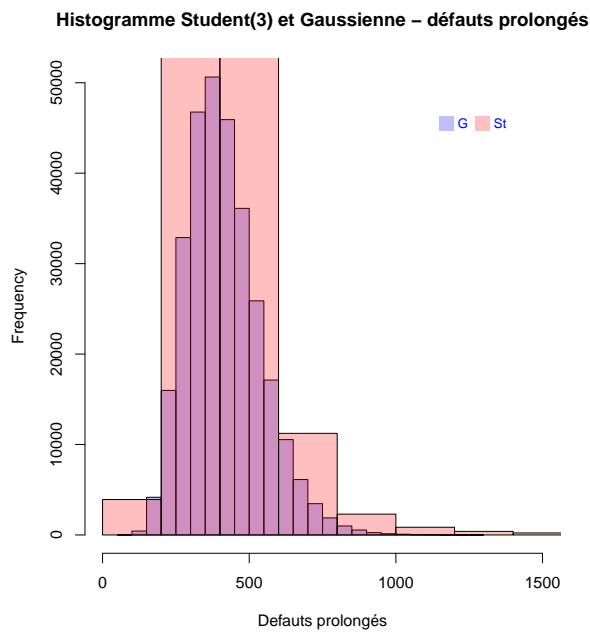


FIGURE 2.3 – Histogrammes des taux de défauts prolongés- lois de Student 3 ddl et Gaussienne

Proba	99%	99.5%	99.9%
$Quantiles_G$	15 703 564	17 367 859	22 773 990
FdR_{St}	98.40%	98.82%	99.42%

Ceci signifie que la VaR à 99.5% (celle qui est calculée habituellement par les compagnies d'assurance) sous l'hypothèse gaussienne correspond à une VaR à 98.82% sous l'hypothèse de Student. Donc on baisse de quantile comme on s'y attendait, mais maintenant cette baisse est mesurée.

2.2.2 Comparaisons entre des Students à différents ddl

Les copules de Student, présentant une dépendance de queue inférieure et supérieure, génèrent des défauts simultanés qui sont sur une plage plus étendue comparés à ceux produits par la copule Gaussienne. Nous avons pu constater ceci dans les graphiques précédents. Nous avons fait d'autres simulations de pertes avec d'autres degrés de liberté pour la Student multivarié, ici nous présentons les cas avec 3, 5 et 10 ddl. Les graphiques ci-dessous donnent les histogrammes des pertes et des défauts obtenus sous ces hypothèses.

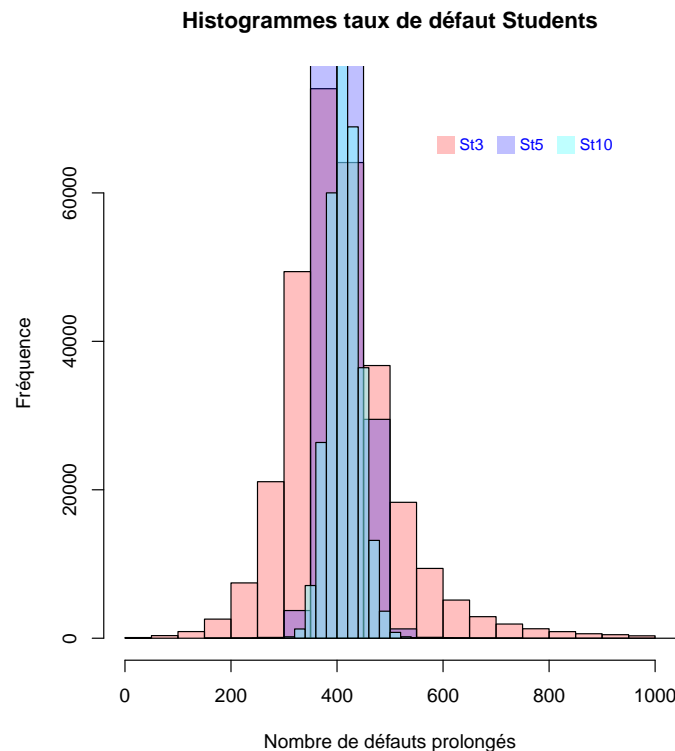


FIGURE 2.4 – Comparaison entre histogrammes des taux de défauts prolongés

Ces histogrammes semblent montrer que plus le ddl est petit, plus le nombre de défauts est dispersé. Le cas $\nu = 3$ est le cas le plus extrême qu'on puisse envisager pour une Student multivarié, donc le plus éloigné de l'hypothèse Gaussienne. L'histogramme donne un aperçu de la dispersion que nous avons dans le cas le plus extrême comparé à d'autres cas qui s'approchent de l'hypothèse Gaussienne. La convergence semble avoir des incidences assez rapidement dans notre cas ; déjà

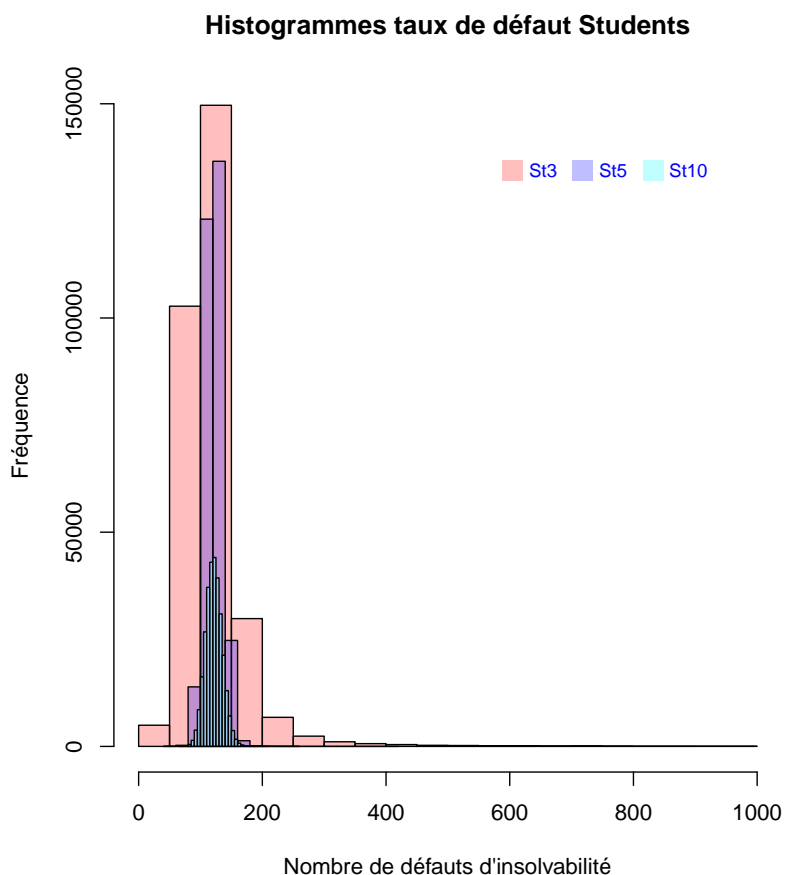


FIGURE 2.5 – Comparaison entre histogrammes des taux de défauts d’insolvabilité

pour $\nu = 10$ les histogrammes des défauts sous l’hypothèse Student et Gaussienne se confondent presque entièrement.

Dans la figure 2.6, nous pouvons voir que les pertes, quant à elles, semblent avoir la même distribution dans les cas $\nu = 5$ et $\nu = 10$, malgré la distribution des défauts d’insolvabilité qui n’est pas la même.

Remarquons que la somme des défauts sur toutes les simulations est la même, donc la moyenne est la même pour toutes les variables que nous sommes en train d’étudier, cependant la loi de probabilité ne semble pas être la même. Il y a quand même convergence en loi des défauts et pertes quand $\nu \rightarrow +\infty$ vers les loi des défauts et pertes dans le cas Gaussien. Et la condition $\nu \rightarrow +\infty$ semble se réaliser assez rapidement dans notre cas, car pour $\nu = 10$ il semble y avoir convergence.

Regardons donc ce qu’il en est des quantiles élevés dans le cas de l’hypothèse Student à $\nu = 5$ ddl.

Histogrammes des montants de perte Students

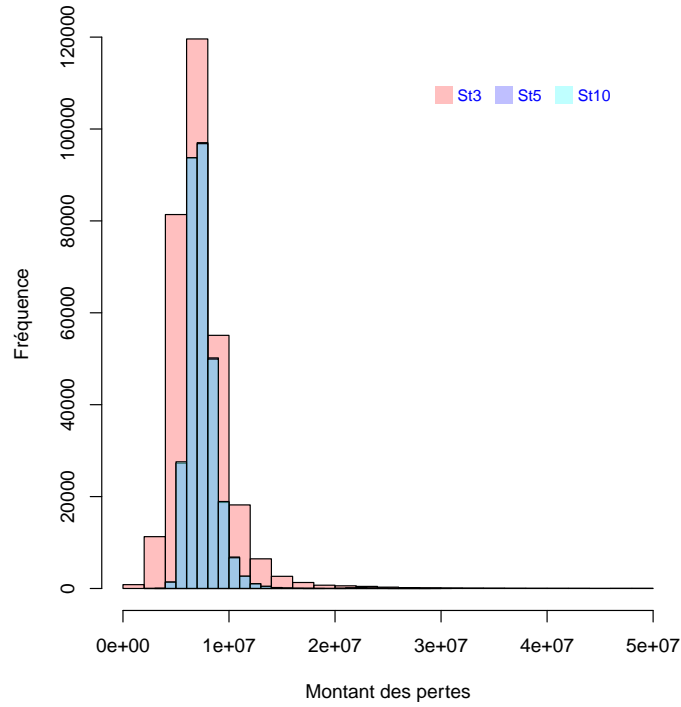


FIGURE 2.6 – Comparaison entre histogrammes des pertes

99.5%	99.51%	99.52%	99.53%	99.54%
-3.463204e-03	-3.241772e-03	-3.592122e-03	-3.301340e-03	-2.476522e-03
99.55%	99.56%	99.57%	99.58%	99.59%
-3.160439e-03	-3.078469e-03	-2.333244e-03	-2.400878e-03	-2.376710e-03
99.6%	99.61%	99.62%	99.63%	99.64%
-2.224162e-03	-1.604698e-03	-1.598997e-03	-1.343770e-03	-1.031240e-03
99.65%	99.66%	99.67%	99.68%	99.69%
-1.030645e-03	-6.779114e-04	1.549936e-04	-2.807574e-03	-2.928747e-03
99.7%	99.71%	99.72%	99.73%	99.74%
-1.918701e-03	-6.871517e-04	-7.404794e-04	-9.036640e-04	9.117709e-04
99.75%	99.76%	99.77%	99.78%	99.79%
7.547570e-04	4.731537e-04	4.884563e-04	6.945449e-04	1.821344e-03
99.8%	99.81%	99.82%	99.83%	99.84%
-7.037538e-05	-3.691413e-03	-1.016307e-03	1.030801e-02	4.642744e-03
99.85%	99.86%	99.87%	99.88%	99.89%
1.238469e-02	6.248264e-04	5.697809e-03	6.333436e-03	3.151049e-03
99.9%	99.91%	99.92%	99.93%	99.94%
1.412919e-03	-8.431018e-04	-4.454238e-06	5.414141e-04	5.126887e-04
99.95%	99.96%	99.97%	99.98%	99.99%
1.149560e-03	-2.821262e-03	-2.637190e-03	-2.220687e-03	1.647742e-03
100%				
2.230824e-02				

Si dans le cas $\nu = 3$ les quantiles au dessus de 99% étaient toujours plus grands dans le cas Student comparé au cas Gaussien, pour le cas $\nu = 5$ ce n'est qu'à partir du quantile à 99.83% que ceci est vrai. Pour les probabilités inférieures à 99.83% ce sont les quantiles sous l'hypothèse gaussienne qui sont plus grands.

Nous pouvons donc dire que l'hypothèse de risques systémiques Student aura comme incidence d'augmenter les quantiles plus grands de 99.83%, et pour 99.5% nous allons donc diminuer de quantile par rapport au cas gaussien. Par contre pour les quantiles très élevés nous voyons que les quantiles Student sont plus grands que les quantiles gaussiens. Quant à la plus grande perte obtenue, celle-ci est de 2% plus grande que le cas Gaussien. Cependant les valeurs ici pour les très grands quantiles sont à prendre avec précaution car il peut y avoir des problèmes de convergence à ces niveaux très élevés, à cause du manque de simulations suffisantes.

Ceci dit, la tendance des quantiles à être plus grands ou plus petits semble claire. Les différences sont cependant assez faibles. Dans le cas de la copule avec $\nu = 10$ les différences le sont encore plus.

Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la structure de dépendance des facteurs systémiques. Après avoir relâché l'hypothèse de vecteur de risques systémiques gaussiens, nous avons vu que dans le cadre de la dépendance de Student, et uniquement pour de petits degrés de liberté, la dépendance de Student est plus prudente que la dépendance Gaussienne. Cependant, afin de faire une étude plus poussée sur la structure de dépendance qui serait la plus adaptée, il faudrait avoir plus de données sur les pertes et sur les probabilités de défaut que nous n'en avons actuellement. Remarquons que nous aurions aussi pu choisir de changer de structure de dépendance, tout en gardant les mêmes marginales qu'avant, c'est-à-dire des Gaussiennes avec une méthode NORTA (comme proposé dans [71]). Cependant, vu que l'impact de changement de dépendance *et* de marginales devient très rapidement faible en augmentant les degrés de liberté, ceci n'a pas été étudié. D'autres lois multivariées peuvent aussi être testées, mais le problème principal reste comme nous l'avons mentionné, le manque de données sur les pertes ou les défauts, afin de juger des lois marginales et des dépendances les plus adaptées.

Chapitre 3

La mesure du prix de marché du risque

Introduction

Dans le cadre du dispositif Solvabilité 2, la modélisation de l'actif est utilisée pour obtenir deux informations de nature différente (cf. [69])

1. Estimer la distribution de la marge actif-passif à un horizon donné (un an) ;
2. Calculer des provisions dans une logique market consistent, notamment sur des portefeuilles d'épargne ou, plus généralement, sur les portefeuilles pour lesquels il existe un dispositif de participation aux bénéfices.

La logique market consistent retenue par ce référentiel pour la détermination du niveau des provisions, implique que le niveau best estimate des provisions soit homogène à un prix, précisément le prix de la couverture financière qu'il est possible de mettre en œuvre dans le cas d'un passif couvrable (cf. [69]). De ce fait, la description de l'actif risqué doit être effectuée à la fois d'un point de vue statistique et dans un cadre risque neutre (cf. [12]). Le passage de l'un à l'autre de ces points de vue est possible en introduisant la notion de prix de marché du risque. Ainsi, la description complète de l'actif à modéliser se compose alors de deux éléments :

1. la dynamique observable des facteurs de risque sous-jacent à l'actif risqué ;
2. la structure du prix de marché du risque qui, ajoutée à la dynamique des facteurs de risque, permet de calculer le prix de l'actif.

Cette problématique fait l'objet de nombreuses publications, on pourra par exemple consulter [26] ou [91]. On peut noter que l'analyse du prix de marché du risque est a priori intimement liée à la nature du risque modélisé : risque de taux, de crédit, risque action, etc. En pratique, la détermination du prix de marché du risque, inobservable, est effectuée en analysant la prime de risque, qui est l'excès de rendement par rapport au taux sans risque offert par un support risqué. La littérature sur le sujet est abondante et on pourra consulter par exemple [61],[4] ou encore [16]. Dans le présent article, on revient dans un premier temps sur le rôle du prix de marché du risque dans le cadre des modèles de diffusion, puis on analyse le lien avec l'approche plus économique de la prime de risque telle qu'elle est introduite dans le CAPM et l'APT (cf.[78]). Enfin, on examine en détail la question de l'estimation empirique

des primes de risque dans la perspective de leur utilisation pour le calibrage d'un déflateur (cf. [84]). Ce chapitre est tiré de l'article [10].

3.1 Le rôle du prix de marché de risque dans les modèles

On revient ici, à partir de la présentation classique des modèles de taux à facteur, sur la notion de prix de marché du risque et sur les formes qu'il est envisageable de donner à ce prix dans la perspective d'améliorer le cadre de détermination de la courbe des zéro-coupons.

3.1.1 Le cadre standard

On considère l'exemple simple d'un modèle de taux à un facteur supposé être le taux court, par exemple le modèle de Vasicek, dont la dynamique est la suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

En pratique cette dynamique peut être utilisée pour décrire l'évolution du taux court dans l'univers observable ou dans l'univers risque neutre. Dans ce dernier univers, les 3 paramètres (a, b, σ) suffisent à calculer le prix d'un zéro-coupon, alors que dans le premier cas, il convient d'ajouter un paramètre supplémentaire, le "prix de marché du risque" pour déterminer le prix du même zéro-coupon. Le théorème de Girsanov fournit le moyen technique de passer de l'univers historique, dans lequel ce qui nous intéresse est la détermination d'un quantile pour la distribution des pertes, à l'univers risque neutre, dans lequel des prix peuvent être donnés pour un certain actif. Ce passage d'un univers à l'autre est opéré en spécifiant un changement de probabilité. Formellement, le théorème de Girsanov dit que, si W_t est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{P} avec \mathcal{F} sa filtration naturelle et si X_t est un processus adapté à \mathcal{F} et vérifiant la condition de Novikov, alors il existe une mesure \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} , définie sur \mathcal{F}_T par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 ds\right)$$

telle que

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_s ds$$

pour $t \in [0, T]$ soit un mouvement brownien sous \mathbb{Q} . En appliquant le théorème de Girsanov à des actifs financiers, \mathbb{P} sera la probabilité historique et \mathbb{Q} la probabilité équivalente à \mathbb{P} utilisée pour donner un prix à l'actif. Cette probabilité \mathbb{Q} doit être choisie de sorte que les prix actualisés des actifs soient une martingale afin d'assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage. Elle est appelée probabilité risque-neutre.

Comme il a été précisé ci-dessus, le passage entre les deux mesures se fait au moyen d'un processus qui permet d'écrire la densité de Radon-Nykodym. Pour le passage de l'univers historique à l'univers risque-neutre, ce processus s'interprète,

au signe près, comme le prix de marché du risque, noté λ_t . Remarquons cependant que dans le cas continu l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché implique l'existence d'une probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} . La réciproque est vraie seulement dans le cas discret. En outre l'hypothèse de marché complet assure l'unicité de cette probabilité risque neutre, et donc l'unicité de la forme du prix de marché du risque. Ce résultat permet de généraliser l'exemple introductif en observant que la dynamique du facteur considéré pour expliquer la courbe des taux peut être considérée dans l'univers historique ou dans l'univers risque neutre :

$$dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t$$

$$dx_t = (\mu(t, x_t) - \lambda_t\sigma(t, x_t))dt + \sigma(t, x_t)d\tilde{W}_t$$

Dans certains modèles, en fonction de la forme de la prime de risque, il se trouve que les deux dynamiques sont identiques à un changement de paramètre près. On peut incidemment remarquer que le raisonnement ci-dessus permet de retrouver le modèle de Black et Scholes en posant $\lambda_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$ qui conduit à l'équation usuelle dans laquelle le rendement instantané du sous-jacent est remplacé par le taux sans risque dans l'univers risque-neutre, la volatilité étant inchangée. Ainsi, en prenant l'exemple du modèle à un facteur de référence, le modèle de Vasicek (cf. [88]), qui propose de retenir la modélisation du taux court par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

on se trouve bien dans le cadre ci-dessus avec $x_t = r_t$ et l'on trouve que sous \mathbb{Q} cette équation devient :

$$dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

avec $b_\lambda = b - \lambda \frac{\sigma}{a}$. Le processus définissant le taux court est donc un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous les deux probabilités, mais avec des paramètres différents. Il importe donc de préciser dans quel univers la dynamique est posée afin d'utiliser la formule de valorisation avec les paramètres pertinents. Ainsi, on obtient la formule classique pour le prix d'un zéro-coupon de maturité T en $t \in [0, T]$:

$$P(t, T) = \exp\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}(R_\infty - r_t) - (T-t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a(T-t)})^2\right)$$

où $R_\infty = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}$, λ étant le prix de marché du risque. Cette formule peut être lue de deux manières :

- une formule avec 4 paramètres (les 3 de la diffusion plus la prime de risque) dans l'univers historique : (a, b, σ, λ) ;
- une formule avec 3 paramètres dans l'univers risque-neutre : (a, b_λ, λ) .

On peut suivre le même raisonnement avec la modèle classique de Cox, Ingersoll et Ross :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

La prime de risque est déterminée à la fois par les conditions d'équilibre et par la fonction d'utilité. Ici elle dépend de la variable d'état (cf.) :

$$\lambda(t, r) = \frac{\lambda\sqrt{r}}{\sigma}$$

Sous la probabilité risque neutre, la dynamique du taux court devient :

$$dr_t = a_\lambda(b_\lambda - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}$$

avec $a_\lambda = a(1 + \lambda)$ et $b_\lambda = \frac{b}{1 + \lambda}$. L'équation est donc identique à celle de l'univers historique, comme dans le cas du modèle de Vasicek.

Ces deux exemples sont en fait des cas particuliers d'une approche plus générale de modèles factoriels dans laquelle les dynamiques des facteurs sont des processus affines (cf. [91]). Cette contrainte peut être relâchée en octroyant un degré de liberté supplémentaire sur la forme de la prime de risque ; l'idée est alors de conserver la forme affine en probabilité risque neutre, du fait de sa simplicité pour l'obtention de formules fermées des prix de zéro-coupons, et de ne plus imposer cette contrainte dans l'univers historique (cf. [26]).

3.1.2 Lien avec les déflateurs

L'approche d'évaluation de valeurs futures des actifs en univers historique et l'approche de détermination du prix actuel de ces actifs en univers risque-neutre peuvent être combinées par les déflateurs. Les déflateurs sont des facteurs d'actualisation stochastiques et ils sont utilisés comme une technique alternative au passage en probabilité risque-neutre. Une présentation détaillée dans un contexte d'assurance est proposée dans [20]. En effet, il suffit d'avoir la dynamique en univers historique, et d'ajouter à cela le déflateur, pour donner un prix aux actifs. Cette approche permet une certaine cohérence entre les deux approches de recherche d'un quantile et de pricing, puisque les paramètres estimés sont les paramètres historiques et ensuite grâce aux déflateurs, un prix peut être donné. Ce prix est bien entendu le même que celui obtenu en faisant le changement de probabilité de \mathbb{P} à \mathbb{Q} . Les déflateurs permettent d'intégrer explicitement les primes de risque dans le processus de pricing, alors que par le passage en probabilité risque-neutre, les primes de risque sont implicitement contenues dans le changement de mesure de probabilité. Regardons par exemple le cas d'un pricing d'action. La dynamique du prix d'action, S_t , est donnée en univers historique par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

La dynamique en univers risque-neutre a une dérive égale au taux sans risque, et sa volatilité est inchangée :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\tilde{W}$$

En appliquant le lemme d'Itô à ces deux équations, la valeur espérée des actions sera aujourd'hui :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T \Pi_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[S_0 \exp \left(\left(r + \lambda \sigma - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \left(-rT + \lambda W_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T \right) \right]$$

et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) S_T \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \tilde{W}_T \right) \exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \right] = S_0$$

Si la valeur de l'action en t, S_t , est actualisée au juste facteur, alors dans les deux cas la valeur espérée actualisée est égale à la valeur de l'action aujourd'hui, S_0 . L'actualisation dans le cas de l'évaluation en univers risque-neutre se fait au taux sans risque, mais qu'en est-il pour l'actualisation de la valeur espérée calculée avec la mesure de probabilité historique ? Il faudrait dans ce cas ajuster le taux d'actualisation. D'après le théorème de Girsanov, en notant D_T le facteur d'actualisation $\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right)$ et $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ la densité de Radon-Nykodym qui donne le changement de probabilité entre univers historique et univers risque neutre, on a la relation suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(S_T D_T \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (S_T D_T) = S_0$$

et donc $\Pi_T = D_T \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T r_s + \int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right)$ représente le déflateur. Comme il a été rappelé précédemment, le changement de probabilité est donc donné par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right)$$

On peut donc calculer le prix d'un actif tout en restant en univers historique, comme l'espérance de prix actualisée à l'aide du déflateur. L'espérance du déflateur est (si la prime de risque est constante) :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} (\Pi_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(\exp \left(- \int_0^T r_s + \int_0^T \lambda_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(\exp \left(-rT - \lambda W_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T \right) \right)$$

Le prix de l'action est (en supposant que les taux et la prime de risque sont constants) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} (S_T \Pi_T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[S_0 \exp \left(\left(r + \lambda \sigma - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \exp \left(-rT + \lambda W_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T \right) \right] \\ &= S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\lambda \sigma T - \frac{1}{2} \sigma^2 T - \lambda^2 T + (\sigma - \lambda) W_T \right) \right] \\ &= S_0 \exp \left(\lambda \sigma T - \frac{1}{2} \sigma^2 T - \lambda^2 T \right) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left((\sigma - \lambda) W_T \right) \right] \\ &= S_0 \exp \left(\lambda \sigma T - \frac{1}{2} \sigma^2 T - \lambda^2 T \right) \exp \left((\sigma - \lambda)^2 T \right) = S_0 \end{aligned}$$

Donc si on cherche à donner un prix à un actif, on peut utiliser la dynamique en univers historique. Cependant, dans ce cas, outre les paramètres de la dynamique historique, il faudra estimer en plus le prix de marché du risque.

3.2 Modélisation directe du prix de marché de risque

Les modèles explicatifs présentés ci-dessus ne sont pas satisfaisants au sens où ils conduisent à des valeurs théoriques sensiblement différentes des valeurs observées sur les marchés. Ils ont cependant le mérite de fournir un cadre cohérent pour comprendre les mécanismes de base à l'œuvre dans le lien entre le prix de marché du risque et la prime de risque. On présente ici une approche empirique s'appuyant directement sur la description de la forme du prix de marché du risque pour en proposer une estimation. Le modèle proposée par [2] généralise un modèle descriptif à un facteur (l'extension à plusieurs facteurs de risque ne pose pas de difficulté) pour le risque de taux dans un cadre paramétrique.

3.2.1 Un cadre monofactoriel général

On suppose donc que le prix d'une obligation de maturité T est déterminé dans le cadre d'un modèle mono-factoriel de type :

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t$$

On montre alors classiquement qu'il est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0$$

Avec λ le prix de marché du risque. Après avoir estimé la dérive μ et la volatilité σ , il ne nous reste plus qu'à estimer le prix de marché du risque λ . Cependant il n'y a pas d'informations sur le prix du risque dans le processus des taux, donc il faudrait regarder les prix des dérivés de taux pour voir comment le marché évalue ce risque. La manière la plus simple de faire cela est de regarder à la courbe des rendements, car les obligations sont des produits dérivés de taux particuliers. Si on ajoute la condition finale pour un zéro-coupon (ZC), $P(r, t, T) = 1$, alors on peut trouver après quelques calculs (cf. [2]) le développement de Taylor au voisinage de la maturité T :

$$P(r, t, T) \approx 1 - r(T - t) + \frac{1}{2}(T - t)^2(r^2 - \mu + \lambda\sigma) + \dots \text{ si } t \leftarrow T$$

On obtient :

$$\log P(r, t, T)T - t = r + \frac{1}{2}(T - t)(\mu - \lambda\sigma) + \dots \text{ si } t \leftarrow T$$

qui est une approximation d'ordre 2 de la courbe des rendements (yield curve) au voisinage de la maturité zéro-coupon. La pente de la courbe est $\frac{1}{2}(T - t)(\mu - \lambda\sigma)$. On peut utiliser ce résultat ainsi que des séries temporelles pour déterminer empiriquement le prix du risque λ . Ainsi la série obtenue a typiquement l'allure suivante :

On observe que le prix de marché du risque est la plupart du temps négatif. Cela vient du fait que le risque d'une obligation est proportionnel à la sensibilité du

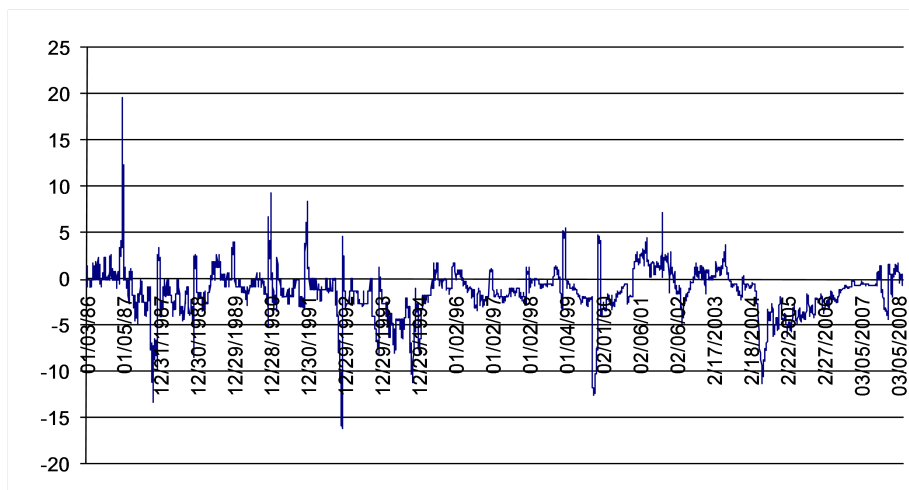


FIGURE 3.1 – Série des prix de marché de risque

prix de l'obligation aux variations de taux, et le prix de ZC évolue inversement par rapport à l'évolution du taux r_t . On note également que le prix de marché du risque n'est pas constant et semble avoir une évolution très erratique. Pour rendre compte de ce phénomène, [2], proposent un modèle stochastique :

$$d\lambda_t = p(\lambda_t)dt + q(\lambda_t)dW_t$$

On peut ensuite procéder à l'estimation de la dérive et de la volatilité de ce processus comme pour le processus de taux. Cependant, maintenant qu'on a modélisé le prix de marché du risque de taux comme un processus stochastique, il convient de définir le prix de marché associé à cette nouvelle source de risque pour pouvoir calculer des prix d'obligations. Plusieurs hypothèses peuvent être émises à propos du prix de marché du risque de prix de marché du risque. Il peut être supposé égal à zéro, constant, dépendre du temps ou être égal au prix de marché du risque de taux calculé précédemment :

- Dire que le prix de marché du risque du prix de marché de risque est nul est une hypothèse simplificatrice qui s'imposerait par le fait qu'il est difficile d'arriver à l'estimer.
- Supposer que le prix de marché du risque est constant revient à dire que les marchés évaluent le risque lié au prix de marché du risque toujours de la même façon. On aurait pu penser ceci du prix de marché du risque de taux, et c'est d'ailleurs cette hypothèse que l'on utilise très souvent pour faciliter les calculs. Toutefois, on a vu que le prix de marché du risque, qu'on suppose constant, est en fait très erratique et peut être modélisé comme un processus stochastique. Donc le prix de marché du risque du prix de marché du risque n'est sans doute pas constant non plus.
- Le prix de marché du risque du prix de marché du risque peut aussi être supposé comme étant une fonction du temps. Il faudrait ensuite calibrer cette fonction à partir d'un historique.
- Le prix de marché du risque est le même pour tous les risques. Le prix de marché du risque du prix de marché du risque est donc égal au prix de marché

du risque estimé précédemment. C'est l'hypothèse retenue dans [2], que nous retiendrons ici également.

Alors, le processus du prix de marché du risque sous la probabilité risque-neutre s'écrit :

$$d\lambda_t = (p(\lambda_t) + \lambda q(\lambda_t))dt + q(\lambda_t)dW_t$$

Le processus de taux suit quant à lui la dynamique suivante en univers risque-neutre :

$$dr = (\mu - \lambda\sigma)dt + \sigma dW_t$$

Le prix d'une obligation est alors solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} - rP + p\sigma q \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \lambda} + \frac{1}{2}q^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + (p + \lambda q) \frac{\partial P}{\partial \lambda} = 0$$

3.2.2 Application numérique

Nous proposons ici de mettre en œuvre l'approche décrite dans la section 5.1 pour estimer le prix de marché du risque et donner des prix de Zéro Coupons. Les données utilisées pour approcher le taux instantané sans risque sont des séries de taux LIBOR 1 mois entre janvier 1986 et avril 2010. L'estimation est réalisée en trois

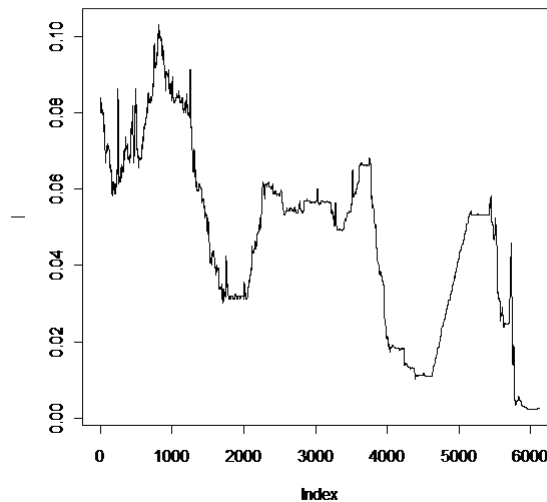


FIGURE 3.2 – Libor 1 mois entre Janvier 1986 et Avril 2010

étapes : l'estimation de la volatilité en faisant l'hypothèse d'une fonction puissance du facteur, puis l'utilisation de la distribution d'équilibre du facteur afin d'estimer la forme de la dérive et enfin la modélisation du prix de marché du risque, lui-même considéré comme aléatoire et dont la dynamique est régie par une équation différentielle stochastique.

Estimation de la volatilité

On détermine les variations journalières du taux, δr . On divise le segment où le taux r prend ses valeurs, c'est-à-dire $[0, 0.11]$ en 11 segments de même longueur $s_i \in \{[0, 0.01], [0.01, 0.02], \dots, [0.10, 0.11]\}$. Ensuite chacun des $\delta r = r_1 - r_2$, où r_1 et r_2 désignent les taux aux dates t_1 et t_2 respectivement telles que $t_1 < t_2$, est attribué à un segment s_i , si $r_1 \in s_i$. Ensuite on fait les moyennes des carrés des δr attribués à chacun des segments. Il y a un lien direct entre cette quantité et la volatilité des taux :

$$\mathbb{E}((\delta r)^2) = \sigma^2 \delta t$$

Si on suppose que la volatilité est une fonction puissance de r , de la forme $\sigma = \nu r^\beta$ alors on a $\mathbb{E}((\delta r)^2) = \nu^2 r^{2\beta} \delta t$. Il faut donc estimer les paramètres ν et β . Pour ce faire, on effectue une régression linéaire des log des moyennes $\mathbb{E}((\delta r)^2)$ de chaque classe de r sur le log des milieux des segments s_i .

$$\log \mathbb{E}((\delta r)^2) = 2 \log \nu + \log \delta t + 2\beta \log r$$

Si on représente sur un graphique les points ayant comme abscisse les log des valeurs des milieux des segments s_i et comme ordonnée les log des moyennes $\mathbb{E}((\delta r)^2)$ faites sur chaque classe respectivement, alors on obtient le nuage de points suivant :

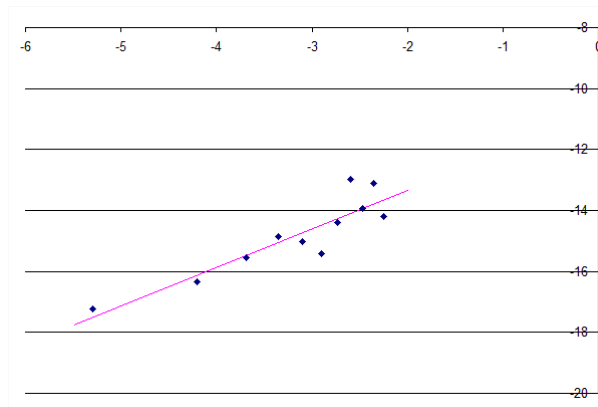


FIGURE 3.3 – Régression pour l'estimation de la volatilité

La droite qui s'ajuste le mieux à ce nuage de points est représentée sur le graphique. C'est la droite de pente 1,27 et d'ordonnée à l'origine -10,8. Sachant que pente = 2β , $\beta = 0.6327$ et ordonnée = $2 \log \nu + \log \delta t$, $\nu = 0.0724$ avec $\delta t = \frac{1}{257}$, on a finalement $\sigma = 0.087r^{0.63}$.

Estimation de la dérive

Une estimation directe de la dérive est délicate, aussi utilise-t-on ici la distribution d'équilibre de r , p_∞ .

L'histogramme des taux rappelle la forme d'une loi log normale, donc on fait un ajustement avec une loi log normale de paramètres : moyenne $\log \bar{r} = -3.2632$ et

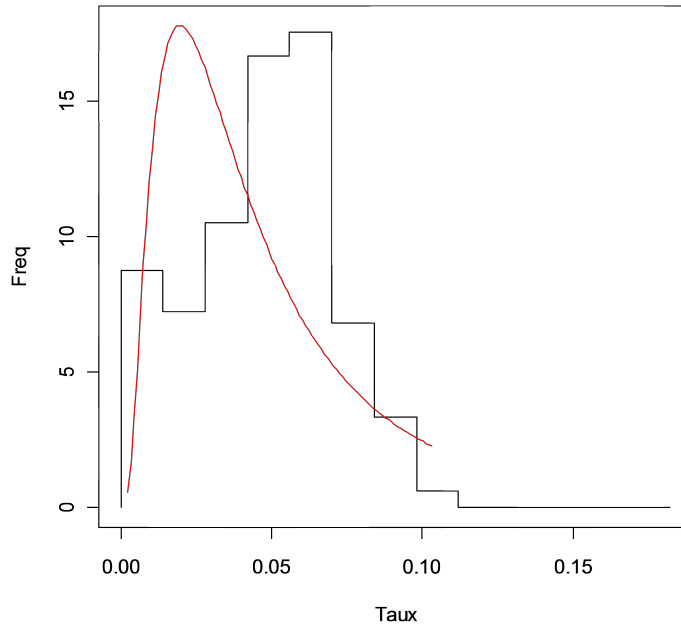


FIGURE 3.4 – Histogramme Libor 1 mois

écart-type $a = 0.8199$. On a alors :

$$p_{\infty} = \frac{1}{ar\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2a^2} \log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right)$$

On peut alors donner la formule de la tendance :

$$\mu(r) = \nu^2 r^{2\beta-1} \left(\beta - 0.5 - \frac{1}{2a^2} \log\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) \right)$$

Estimation du prix de marché du risque de taux

En suivant ce qui a été présenté dans le paragraphe 5.1., on va estimer le prix de marché du risque en utilisant la relation :

$$\log P(r, t, T) T - t = r + \frac{1}{2}(T - t)(\mu - \lambda\sigma) + \dots \text{ si } t \leftarrow T$$

Ceci est donc vrai pour des obligations qui s'approchent de la maturité. On peut alors considérer que r est le taux à 1 mois et ??? le rendement d'une obligation à 3 mois. On peut alors trouver le prix de marché du risque par l'équation :

$$\lambda_t = \frac{2(R_t^1 - R_t^{1,3})}{1/6\sigma} + \frac{\mu}{\sigma}$$

où R_t^1 est le rendement en t d'un ZC de maturité 1 mois (donc le taux à 1 mois) et $R_t^{1,3}$ celui d'un ZC de maturité 2 mois dans un mois (donc le taux *forward* à 2 mois

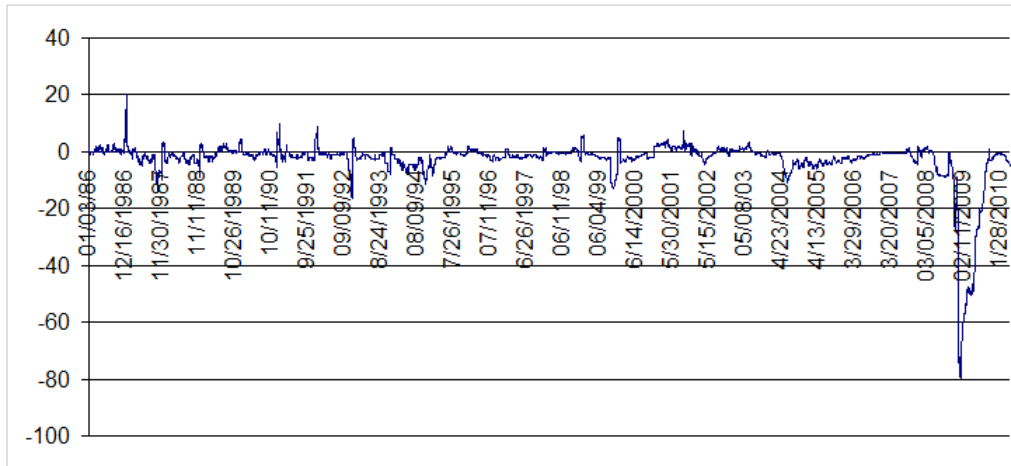


FIGURE 3.5 – Prix de marché du risque 1986 - 2010

dans un mois). On obtient ainsi le processus suivant, de 1986 à 2010 : En limitant à la période 1986-2008 on élimine la période de crise actuelle caractérisée par un prix de marché du risque très fortement négatif, ce qui conduit au graphique suivant : On observe que le prix de marché du risque est le plus souvent négatif, ce qui est

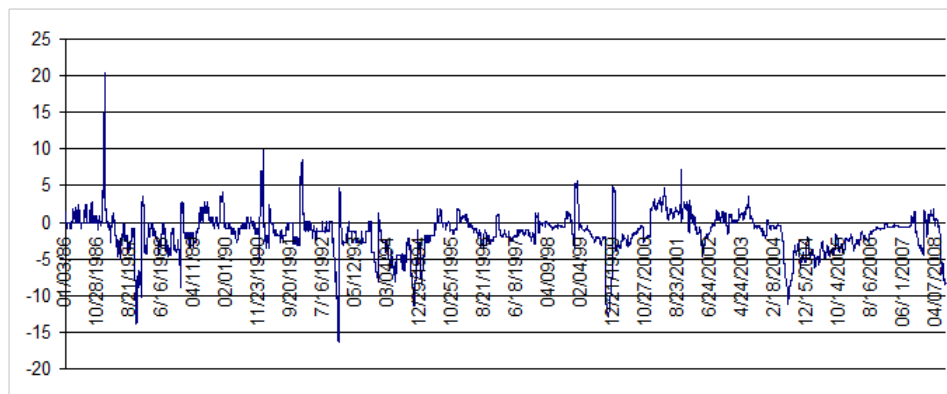


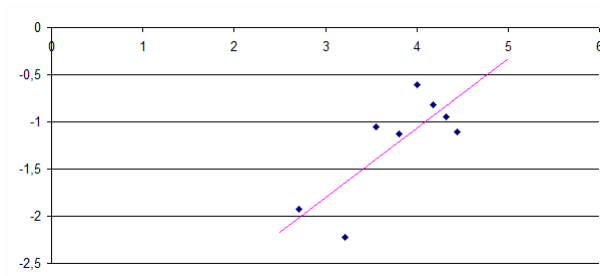
FIGURE 3.6 – Prix de marché du risque 1986 - 2008

théoriquement justifié. Il est aussi très volatile et le prix de marché du risque atteint parfois des pics très bas, surtout entre 2009 et 2010. En tout état de cause, on note à la lumière de ces graphes que l'hypothèse de prix de marché du risque régulier ou constant n'est pas réaliste et doit être relâchée. On est alors conduit à le supposer régi par un processus de diffusion.

Estimation de la volatilité du prix de marché du risque On applique le même procédé que celui décrit en 5.1 mais cette fois-ci au processus. On obtient le nuage de points suivant :

Par la méthode des moindres carrés on obtient la droite qui s'ajuste le mieux à ce nuage de points. C'est la droite de pente 0,5968 et d'ordonnée à l'origine -3,4732.

FIGURE 3.7 –



Sachant que pente = $2m$, $\beta = 0.2984$ et ordonnée = $2 \log l + \log \delta t$, $l = 2.8234$ avec $\delta t = \frac{1}{257}$, on a finalement $(\lambda) = 2.82(\lambda_{max} - \lambda)^{0.3}$. Pour estimer la volatilité nous n'avons pas tenu compte des deux classes extrêmes et nous avons majoré la variation de $\lambda_{max} - \lambda$ d'un jour à l'autre par 1. Ceci a été fait dans un but de stabilisation de l'estimation des paramètres de la variance.

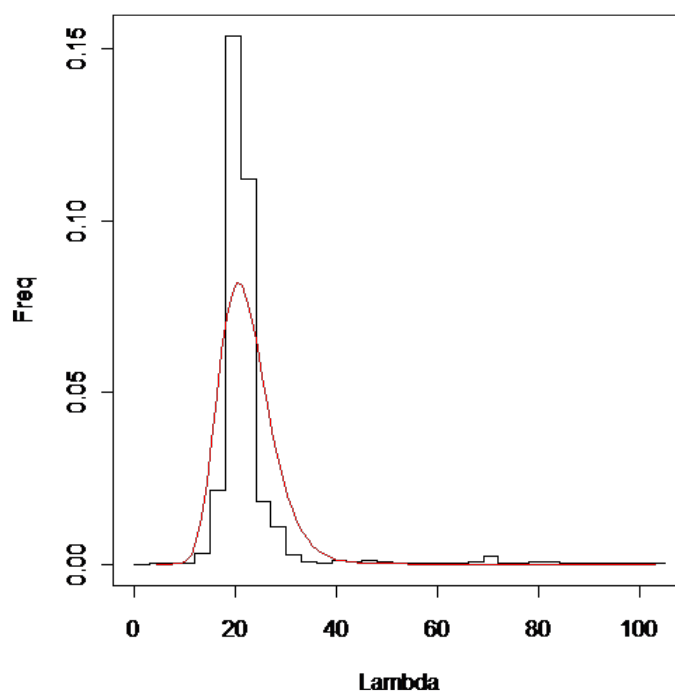


FIGURE 3.8 – Histogramme de $\lambda_{max} - \lambda$

Estimation de la dérive du prix de marché du risque On ajuste une loi log normale à la densité de $\lambda_{max} - \lambda$, où $\lambda_{max} = 20.43$. On choisit ce processus et pas λ parce que ce dernier prend des valeurs négatives qui ne peuvent pas être

considérées comme quantiles d'une loi log normale. L'ajustement est fait par la loi log normale de paramètres : moyenne $\log \bar{\lambda} = 3.1149$ et écart-type $c = 0.2217$. La densité d'équilibre de $\lambda_{max} - \lambda$ s'écrit alors :

$$p_{\infty}(\lambda) = \frac{1}{c(\lambda_{max} - \lambda)\sqrt{ar}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2c^2} \log\left(\frac{\lambda_{max} - \lambda}{\bar{\lambda}}\right)^2\right)$$

La tendance est alors une fonction de λ et est donnée par l'expression :

$$p(\lambda) = l^2(\lambda_{max} - \lambda)^{2m-1} \left(-m + 0.5 - \frac{1}{2c^2} \log\left(\frac{\lambda_{max} - \lambda}{\bar{\lambda}}\right)\right)$$

Application : Construction de courbes de prix de Zéro-Coupon

Une fois les paramètres de la distribution du taux et de la distribution du prix de marché du risque estimés, on peut procéder à la construction de la courbe de taux. Pour cela nous allons procéder par simulation en utilisant les deux diffusions suivantes pour simuler le processus de taux en univers risque neutre :

$$dr_t = (\mu_t - \lambda_t \sigma_t) dt + \sigma_t dW_t$$

$$d\lambda_t = (p_t + \lambda_t q_t) dt + q_t dW_t^2$$

On suppose que les deux browniens W_t et W_t^2 sont indépendants, ce qui revient à dire que les sources de risque du taux et du prix de marché du risque sont différentes et non corrélées. Une fois le processus de taux en risque neutre simulé, le prix d'une obligation Zéro-Coupon peut être calculé par la formule :

$$P(r, t, T) = \mathbb{E}_t \left(\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right)$$

En pratique, la formule ci-dessus est discrétisée et le prix du Zéro-Coupon approché par simulation, en utilisant :

$$P_K(t, T) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \exp \left(- \sum_{i=1}^n r_k(t_i) \right)$$

avec $t = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ une discrétisation de $[t, T]$ et $(r_k(t_i), 1 \leq i \leq n)$ une réalisation d'une trajectoire du taux court. Afin d'avoir la courbe des taux aujourd'hui, il nous faut les prix de ZC de différentes maturités aujourd'hui, donc $P(0, T)$. Ensuite, une fois qu'on a les prix ZC, pour calculer les taux ZC, $R^{t,T}$ on peut utiliser la relation $P(t, T) = \exp(-(T-t)R^{t,T})$ ou, de manière équivalente, $R^{t,T} = -\frac{\log P(t, T)}{T-t}$. La courbe de taux obtenue pour des maturités jusqu'à 30 ans est représentée dans le graphe ci-dessous : On voit que la courbe de taux a une allure concave sur l'horizon de 30 ans. Par exemple le taux à 30 ans est de 3,15.

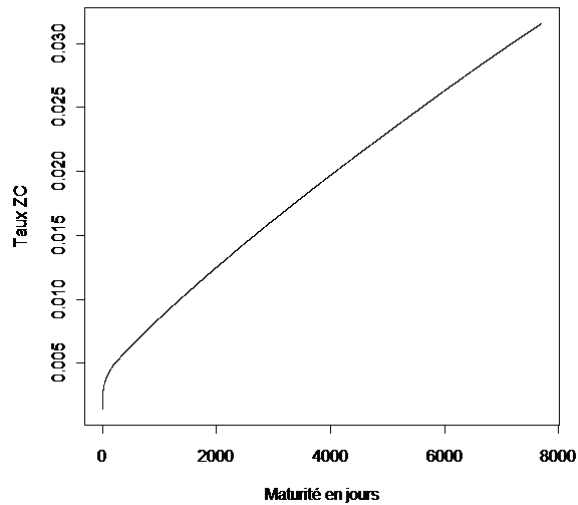


FIGURE 3.9 – Courbe des taux pour des maturités jusqu'à 30 ans

Conclusion

Dans une situation où il faut considérer conjointement la détermination de la distribution observable et les prix, une attention particulière doit être portée à la prime de risque ou au prix de marché du risque et à son évolution dans le temps. D'un point de vue technique le recours aux déflateurs permet d'intégrer cette information de manière rigoureuse dans le processus en s'obligeant à spécifier les prix de marché des sources de risque. D'un point de vue pratique, l'estimation du prix de marché du risque peut être effectuée dans le cadre relativement général d'un processus d'Itô, ce qui permet d'intégrer dans le modèle l'instabilité de ce facteur sans imposer les hypothèses contraignantes souvent effectuées. En contrepartie, le prix des zéro-coupons doit être déterminé numériquement par des techniques de type Monte-Carlo. Les travaux de [20] montrent que les choix effectués pour la modélisation du prix de marché du risque ont des conséquences importantes pour l'estimation des valeurs best estimate des contrats d'assurance-vie en Euros. Dans ce contexte, une réflexion sur ce point doit être menée lors de la mise en place d'un générateur de scénarios économiques, et intégrer au modèle une description explicite des prix de marché du risque prenant en compte leur importante instabilité est un facteur important de qualité des projections effectuées sur l'horizon de calcul de 10 à 30 ans rencontré dans les problématiques d'assurance, tout particulièrement pour le calcul des best estimate des contrats d'épargne. Dans le prochain chapitre nous présenterons le calcul de Best Estimate dans un cadre de dépendance entre risque de taux et risque de crédit. Le risque de taux sera alors projeté en univers risque neutre, et l'approche que nous venons de voir convient à cette situation¹.

1. Nous choisirons cependant une modélisation plus simple, et estimerons un modèle CIR en univers risque neutre. Nous ferons ce choix car l'estimation du modèle de taux n'est pas l'objet principal du prochain chapitre

Chapitre 4

Calcul de Best Estimate dans un cadre de dépendance entre risque de taux et risque de crédit

Dans ce chapitre nous cherchons à estimer le *Best Estimate* (BE) des pertes actualisées d'un assureur crédit, ainsi que le besoin en capital (SCR). Les calculs de BE sont généralement faits en supposant que le processus de taux, donc le facteur d'actualisation, est indépendant des pertes. Ceci impliquerait dans notre cas, que le taux (risque de crédit) serait indépendant des défauts et transitions, alors que nous avons vu (cf [9]) que la variation du taux court était l'un des facteurs qui expliquait le mieux le processus de défaut ou de transition entre *ratings*. Nous travaillons donc ici sous l'hypothèse que les risques de crédit et le risque de taux ne sont pas indépendants. Le risque de crédit est ainsi expliqué par des variables macroéconomiques, dont la série est rendue stationnaire en les modélisant par un processus VAR. La loi des facteurs économiques qui expliquent le risque de crédit est alors connue, et nous pouvons prédire les pertes de l'assureur. Ce chapitre est tiré de l'article [9]

4.1 Modélisation des transitions

Cette section a pour but d'introduire le modèle stochastique qui devrait décrire les transitions entre ratings pour les acheteurs du portefeuille de l'assureur crédit. Le processus de rating est fait en deux étapes :

- Nous supposons que les acheteurs d'un même groupe homogène sont conditionnellement indépendants par rapport à des facteurs de risque endogènes et exogènes.
- Dans un deuxième temps, nous spécifions la dynamique de ces facteurs. Cette dynamique est ensuite utilisée pour induire une dépendance au sein des groupes homogènes.

Le modèle est spécifié en temps discret. Soit $T \in \mathbb{N}$ un horizon fixé. Nous considérons la discrétisation du temps, avec comme pas $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ une filtration générale informative qui satisfait les conditions usuelles de complétude et continuité à droite [25].

4.1.1 Spécification du portefeuille d'acheteurs et hypothèses de base

Nous considérons un portefeuille de K acheteurs observés sur \mathcal{T} et leurs séries de ratings, notées $(Y_k(t))_{t \in \mathcal{T}}$, $k = 1, \dots, K$. Les séries de transitions individuelles sont considérées comme adaptées à \mathbb{F} et prenant des valeurs dans un espace d'états finis $\mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$. Les états de cet espace représentent les ratings de solvabilité décroissantes et le dernier rating est le défaut, noté D .

Soit $(\mathbf{Z}_k(t) = (\mathbf{X}(t), \mathbf{U}_k(t)))_{t \in \mathcal{T}}$ une chaîne discrète, associée au k^{ieme} acheteur, qui comprend les d facteurs macroéconomiques dans \mathbf{X} , $d \geq 1$, et p variables spécifiques à l'acheteur dans \mathbf{U}_k , $p \geq 1$. L'information est connue durant la période pendant laquelle l'acheteur est dans le portefeuille. Nous travaillons donc sous l'ensemble d'informations regroupant celles concernant le risque de crédit ainsi que celles liées à l'environnement macroéconomique. Soit $\mathbb{F}^* = (\mathcal{G}_T \vee \mathcal{F}_t^Y \vee \mathcal{F}_T^U, t \in \mathcal{T})$ la filtration qui représente le cas où la totalité de l'information est connue. Considérons à présent la dynamique des chaînes de rating individuelles.

Hypothèse 14. On suppose que pour le k^{ieme} acheteur le processus discret Y_k suit une chaîne de Markov doublement stochastique, expliquée par les facteurs \mathbf{Z}_k . La chaîne est caractérisée par une matrice de transition $\mathbf{Q}_k(t) = (q_{ij,k}(t) = q_{ij,k}(\mathbf{Z}_k(t)))_{i,j \in \mathcal{R}}$ ¹ pour tout $t \in \mathcal{T}$. On suppose aussi que les processus de rating (Y_1, \dots, Y_K) sont indépendants conditionnellement aux facteurs $(\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_K)$.

Donc, Y_k est une chaîne de Markov sachant $\mathcal{G}_T \vee \mathcal{F}_T^U$ et nous avons

$$q_{ij,k}(t) = \mathbb{P}(Y_k(t+1) = j \mid Y_k(t) = i, \mathbf{Z}_k(t)) . \quad (4.1)$$

4.1.2 Modélisation des facteurs macroéconomiques et des probabilités de transition

Quant aux facteurs macroéconomiques, leur dynamique est modélisée par un processus VAR, d'ordre $m \geq 1$. Ce cadre de travail permet d'assez bien introduire une relation entre variables et il est souvent utilisé en macroéconomie, regarder par exemple [68] et [36].

On suppose donc que les facteurs macroéconomiques sont donnés en t par

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \mathbf{X}(t-i) + \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \boldsymbol{\zeta}(t) , \quad (4.2)$$

avec $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ des vecteurs de type $d \times 1$ de paramètres à estimer, \mathbf{A}_i , $i = 1, \dots, m$, des matrices de type $d \times d$ constantes dans le temps, à estimer, et $\boldsymbol{\zeta}(t)$ un vecteur gaussien centré de taille $(d \times 1)$ avec $\boldsymbol{\Sigma}_x$ sa matrice de covariance.

Vu que les ratings sont naturellement ordonnés, nous choisissons d'utiliser un modèle logit cumulé (consulter [60] or [1, Chapter 7] pour des discussions sur ce type de modèle). Ici les ratings individuels sont déterminés par un score de crédit qui

1. $q_{ij,k}(t)$ correspond à la probabilité de transition d'un acheteur de la classe i vers j pendant $[t, t+1]$.

peut être influencé par des facteurs latents, ou observables. Des approches similaires sont assez utilisées dans la littérature du risque de crédit, surtout pour modéliser le risque de défaut. Par exemple, [65], [49] et [48] utilisent des modèles probit ordonnés pour les transitions entre ratings conditionnellement au cycle des affaires. Plus récemment, plusieurs approches utilisant des facteurs latents ont été développées, par exemple [35], [90], [31], [85], qui traitent de choix de variables observables et problèmes d'hétérogénéité.

Comme vu précédemment, ici nous utilisons uniquement des facteurs observables et supposons que la fonction de répartition conditionnelle satisfait $k = 1, \dots, K$ et $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$

$$\mathbb{P}(Y_k(t) \leq j \mid Y_k(t-1) = i, \mathbf{Z}_k(t)) = g(\mu_{ij} + \boldsymbol{\theta}_{ij}^\top \mathbf{Z}_k(t)), \quad i, j \in \mathcal{R} \quad (4.3)$$

où les $(\mu_{ij})_{j \in \mathcal{R}}$ représentent une suite de seuils inobservés, spécifiques à chaque classe, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_{ij})_{i,j \in \mathcal{R}}$ est un vecteur de paramètres de taille $p + d$ représentant la sensibilité à chaque paramètre et $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction lien. Des choix usuels pour g sont des liens probit ou logit. Cette fonction lien sera spécifiée en fonction de la loi des erreurs, normale dans le cas des probits et logistique dans le cas des logits. Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ est donc propre à chaque classe dans notre cas, car nous supposons que les facteurs n'ont pas les mêmes effets sur tous les ratings. Ceci permet de prendre en compte l'hétérogénéité parmi les transitions.

Pour rendre notre modèle tractable, comme dans [90] et [55], nous considérons que les facteurs observables sont connus en début de période car dans ce cas la prédiction est plus facile à faire. A partir de l'équation (4.3), les probabilités de transitions s'expriment donc pour tout $i \in \mathcal{R}$ and $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} q_{i,1,k}(t) = g(\mu_{i,1} + \boldsymbol{\theta}_{i,1}^\top \mathbf{Z}_k(t)) \\ \vdots \\ q_{ij,k}(t) = g(\mu_{ij} + \boldsymbol{\theta}_{ij}^\top \mathbf{Z}_k(t)) - g(\mu_{i,j-1} + \boldsymbol{\theta}_{i,j-1}^\top \mathbf{Z}_k(t)) \\ \vdots \\ q_{iR,k}(t) = 1 - g(\mu_{i,R-1} + \boldsymbol{\theta}_{i,R-1}^\top \mathbf{Z}_k(t)) \end{cases} \quad (4.4)$$

Notons $\mathcal{K}_{\mathbf{u}}(t) = \{k = 1, \dots, K : \mathbf{U}_k(t) = \mathbf{u}\}$ l'ensemble des acheteurs qui partagent les mêmes variables explicatives spécifiques, comme dans [90] et avec l'hypothèse 14 selon laquelle les $(N_{ij,k}(t), k \in \mathcal{K}_{\mathbf{u}}(t))$ à l'instant t sont conditionnellement indépendants par rapport à \mathbf{Z} et suivent une distribution multinomiale avec comme paramètres le nombre d'acheteurs noté i dans $\mathcal{K}_{\mathbf{u}}(t)$ et les probabilités de transitions définies dans (4.4).

Le processus de rating peut facilement être projeté en considérant $(\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_K(t))$, avec $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, K des variables iid de fonction de répartition g . Il suffit pour cela de remarquer que conditionnellement aux facteurs macroéconomiques, le $k^{\text{ième}}$ acheteur noté i en $t-1$ transite vers j si la condition suivante est remplie :

$$Y_k(t) = j \iff \varepsilon_k(t) \in]\mu_{i,j-1} + \boldsymbol{\theta}_{i,j-1}^\top \mathbf{Z}_k(t), \mu_{ij} + \boldsymbol{\theta}_{ij}^\top \mathbf{Z}_k(t)] ,$$

avec $\varepsilon_k(t)$ le risque idiosyncratique et $\boldsymbol{\theta}_{ij}^\top \mathbf{Z}_k(t)$ l'effet des variables macroéconomiques, qui représentent le risque systémique. Cette spécification est proche du

modèle KMV, qui s'approche du modèle interne que nous avons décrit dans les chapitres précédents.

Pour des informations supplémentaires sur cette spécification et les corrélations de crédit consulter [35] and [90].

4.1.3 Estimation des paramètres du modèle

4.1.4 Variables macroéconomiques retenues et leurs estimations

Les facteurs macroéconomiques retenus pour expliquer les transitions des acheteurs dans les classes (détails dans [9]), sont :

- $O(t)$ les prix du pétrole et $o(t)$ leur logarithme népérien.
- $p(t)$, le logarithme de l'Indice des prix à la consommation (1998 = 100%). $R(t)$, $r(t)$, où $R(t)$ le taux Euribor 3 mois en base annuelle et $r(t) = 0.25 \ln(1 + R(t))$.
- $G(t)$, le PIB Français réel, c'est-à-dire le ratio du PIB et de l'indice des prix à la consommation, $g(t)$ son logarithme népérien.

Les facteurs ont été modélisés avec un modèle VAR comme expliqué plus haut.

Les prix du pétrole ont été modélisés hors du modèle VAR, sous la forme d'un processus AR(2) avec constante et tendance.

$$O(t) = a_{1,O}O(t-1) + a_{2,O}O(t-2) + b_{0,O} + b_{1,O}t + \zeta_O(t),$$

Le modèle VAR pour les autres variables $\mathbf{X}^*(t) = (\Delta p(t), r(t), g(t))$ inclut la variable $O(t)$ comme variable exogène, et il s'écrit sous la représentation VECM :

$$\Delta \mathbf{X}^*(t) = \mathbf{\Pi} \mathbf{X}^*(t-1) + \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{\Psi}_i \Delta \mathbf{X}^*(t-i) + \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 O(t) + \boldsymbol{\zeta}(t), \quad (4.5)$$

où \mathbf{b}_2 est le vecteur des coefficients appliqué au facteur exogène, c'est-à-dire les prix de pétrole. Pour notre modèle il s'avère que $m = 4$ (plus de détails sur l'estimation des coefficients peuvent être trouvés dans l'article [9]).

4.1.5 Estimation des probabilités de transition

Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ et les seuils μ sont estimés. La fonction lien utilisée est la fonction logit, les erreurs suivent donc une loi logistique dont la fonction de répartition est $x \mapsto (1 + \exp\{-x\})^{-1}$.

Nous allons donc à présent mener les calculs de BE dans ce cadre de non indépendance entre risque de taux et risque de crédit.

Pour cela, il nous faudra dans un premier temps faire des rappels sur un certain type de processus gaussiens, les processus gaussiens autorégressifs.

4.1.6 Calcul des réserves

Les réserves (aussi appelées provisions techniques dans Solvabilité 2) ont nécessité l'implémentation de techniques d'évaluations market-consistent, plus de détails dans

[27]. La somme des flux futurs générés des acheteurs du portefeuille à l'instant $t \in \mathcal{T}$ est

$$\Delta B_k(t) = \sum_{i \in \mathcal{R} \setminus \{R\}} (b_k(t) \Delta N_{iR,k}(t) - \pi_k(t) (1 - \Delta N_{iR,k}(t))) 1_{Y_k(t-1)=i}, \quad (4.6)$$

$$\Lambda(t) = \sum_{k=1}^K \Lambda_k(t), \quad (4.7)$$

$$\Lambda_k(t) = \sum_{\tau > t} \delta(t, \tau) \Delta B_k(\tau), \quad (4.8)$$

où $\delta(t, \tau)$ représente le facteur d'actualisation stochastique pour la période $[t, \tau]$. Le risque de taux, par le biais du taux d'actualisation, ainsi que le risque de crédit, par le biais des défauts, influencent alors les flux futurs.

Si l'on se pose la question de l'évaluation de cette somme, il faut remarquer la différence fondamentale qui existe entre portefeuille d'acheteurs et portefeuille obligataire : il n'existe pas de produit dérivé lié au risque de crédit d'un acheteur disponible dans le cadre d'un marché liquide. Nous sommes en présence d'un marché incomplet.

Il existe toutefois des exceptions marginales à ce propos, car il existe des acheteurs qui sont de grandes compagnies, sur lesquelles il existe des Credit Default Swap (CDS) C'est pour cette raison que les techniques classiques de finance mathématique pour passer d'une matrice de transition en univers réel à son équivalent en univers risque neutre, approche basée sur les prix observables, n'est pas applicable, consulter par exemple la méthode JLM [52] ou [87, Chapter 8] introduction.

Comme nous sommes dans une situation de marché incomplet, il y a théoriquement plusieurs mesures martingales équivalentes, et plusieurs approches sont possibles dans ce cas en assurance, consulter par exemple [6] sur le risque de longévité. La première approche consiste à déterminer un prix de marché du risque, généralement constant, regarder [10]. Cette approche est proposée pour déterminer les prix pour des produits dérivés du risque de mortalité [81] ou dérivés climatiques [3]. Le deuxième type d'approche consiste en des méthodes d'évaluation sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, et il faut donc construire un portefeuille autofinancé.

Cependant, ces approches ne sont pas cohérentes avec les techniques admissibles par Solvabilité 2, car elles sont utilisées pour faire de la couverture. Quand les facteurs macroéconomiques utilisés pour prédire le cycle de crédit peuvent être répliqués, alors dans le cadre de notre modèle nous pouvons faire de la couverture. Selon la directive Solvabilité 2, les réserves sont alors calculées comme le best estimate du passif plus une marge pour risque.

Avec l'équation (4.7), le best estimate est évalué en $t \in \mathcal{T}$ comme

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} [\Lambda(t) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{\tau > t} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} [\delta(t, \tau) \Delta B_k(\tau) \mid \mathcal{F}_t], \end{aligned} \quad (4.9)$$

où le risque de taux est évalué sous la probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} , et le risque de crédit (la partie systématique et la partie diversifiable) est évalué sous \mathbb{P} . Comme les filtrations engendrées par le risque de crédit et le risque de taux ne sont pas indépendantes de \mathcal{G}_t , les termes $\delta(t, \tau)$ et $\Delta B_k(\tau)$ dans (4.9) ne peuvent être évalués séparément. Ceci incite à considérer la dépendance entre risque de taux et risque de crédit. Cependant sous l'hypothèse d'indépendance on devrait avoir :

$$V(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{\tau \geq t} P(t, \tau) (b_k(t) \mathbb{P}(Y_k(t) = R, Y_k(t-1) \neq R | \mathcal{F}_t) - \pi_k(t) \mathbb{P}(Y_k(t) \neq R | \mathcal{F}_t)), \quad (4.10)$$

où $P(t, \tau)$ est le prix d'un Zéro Coupon de maturité $\tau \geq t$, en t . Dans (4.10), les probabilités de transition sont calculées en faisant des simulations Monte Carlo avec comme base

$$\Pi_k(t, t+h) = \mathbb{E}[\mathbf{Q}_k(t, t+h) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbf{Q}_k(t, t+h) | \mathbf{Z}_k(t)] \quad (4.11)$$

4.1.7 Rappels sur les processus gaussiens markoviens autorégressifs

Définition 15. Un processus X est dit *gaussien* si toute combinaison linéaire finie de X_t est une variable gaussienne. Ou encore, si pour tout n et $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ avec $a_i, i \in 1 \dots n$ est une variable gaussienne. Un processus gaussien est défini par sa fonction espérance $\mathbb{E}(X_t)$ et sa covariance $Cov(s, t) = \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E}(X_t)(X_s - \mathbb{E}(X_s)))$.

Le processus sera donc centré si sa fonction espérance est nulle pour tout t . (Voir [83] pour plus de détails ou encore [30]).

Soit $X_t = {}^t(X_t^1, \dots, X_t^n)$ un processus gaussien centré autorégressif d'ordre m , donc tel que

$$X_t = \sum_{l=1}^m A_l X_{t-l} + B_l \xi$$

où $A_l \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \forall l \in \{1, \dots, m\}, B_l \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ and $\xi_t \sim N(0, I_n)$. Alors, $\forall t, X(t) \sim N(0, \Sigma)$.

Proposition 16. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un vecteur gaussien de \mathbb{R}^n , de matrice de covariance : $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_Y \end{pmatrix}$ Alors, la distribution de X conditionnellement à $Y = y$ est gaussienne, d'espérance $\mathbb{E}(X) + \Sigma_{XY} \Sigma_Y^{-1}(y - \mathbb{E}(Y))$ et variance $\Sigma_X - \Sigma_{YX} \Sigma_Y \Sigma_{XY}$

(Voir [37] pour plus de détails sur la loi Gaussienne multivariée). Cette proposition nous donne alors la distribution conditionnelle d'un ensemble d'éléments de X , X_i sur l'ensemble complémentaire, X_{-i} . Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 17.

$$\mathcal{L}(X_{-i}(t)|X_i(t) = x_i) = \mathcal{N}(\mathbb{E}(X_{-i}) + \Sigma_{X_{-i}X_i}\Sigma_{X_i}^{-1}(x_i - \mathbb{E}(X_i)), \Sigma_{-i|i})$$

A partir de la forme autorégressive de X , on peut écrire le vecteur $\tilde{X}_{t+1} = (X_{t+1}, X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$ sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ X_t \\ \vdots \\ X_{t-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xi_t$$

ou encore

$$\tilde{X}_{t+1} = \tilde{A}\tilde{X}_t + \tilde{B}\xi_t$$

Remarque 18. A chaque fois que nous utiliserons la notation \tilde{X} ce sera pour faire référence à la forme étendue du processus X discrétisé, c'est-à-dire $\tilde{X}_{t+1} = (X_{t+1}, X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$.

Cette nouvelle écriture, qui décrit tout aussi bien que la première le processus X , nous permet d'obtenir facilement l'espérance et la variance de $\tilde{X}_{t+1} = (X_{t+1}, X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m})$.

Ainsi, si on connaît les valeurs de X jusqu'à l'instant t , le vecteur \tilde{X}_t est constant. Donc la seule variable dans l'équation est $\xi_t \sim N(0, I_n)$.

Proposition 19. $\mathcal{L}(X_{t+1}, X_t, \dots, X_{t-m}) = \mathbb{N}(\tilde{X}_t, \tilde{B}B^t)$

Démonstration. \tilde{X}_{t+1} suit une loi normale car c'est la somme d'une constante $\tilde{A}\tilde{X}_t$ avec un vecteur gaussien $\tilde{B}\xi_t$. Son espérance est donc la somme des espérances. $\mathbb{E}(\tilde{X}_{t+1}) = \mathbb{E}(\tilde{X}_t + \tilde{B}\xi_t) = \mathbb{E}(\tilde{X}_t) = \tilde{X}_t$ car ξ_t est centré.

$$\mathbb{V}(\tilde{X}_{t+1}) = \mathbb{V}(B\xi) = \tilde{B}\mathbb{V}(\xi)\tilde{B}^t = \tilde{B}B^t.$$

□

Et ainsi de suite l'espérance et la variance se définissent récursivement et on a

$$\mathbb{E}(X_{t+i}) = \tilde{A}\mathbb{E}(\tilde{X}_t)$$

et

$$Cov(X_{t+i}) = \tilde{A}Cov(\mathbf{X}_{t+i-1})\tilde{A}^t + \tilde{B}\tilde{B}^t$$

(Pour plus de détails consulter [39])

4.2 Calcul de Best Estimate

Soit R un processus mesurable sous \mathbb{Q} et L une variable aléatoire mesurable sous \mathbb{P} . Dans notre cas, R représente le taux court et L est la variable représentant les pertes, donc définie en fonction des défauts. On suppose ici que le processus de défaut n'est pas indépendant du processus de taux court. Cette hypothèse est importante lors du calcul de BE, car il faut le calculer sous la mesure de probabilité produit

$\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ et $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ ne sont pas séparables. C'est pour cette raison qu'il faut utiliser les espérances conditionnelles (pour une introduction aux espérances conditionnelles consulter [76]).

Soit $\delta_t = e^{-\int_0^t R_s ds}$ le taux d'actualisation lié au taux R .

Le BE est alors défini comme suit :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} \left(\sum_{t=1}^T \delta_t L_t \right)$$

où L_t est le flux sortant à l'instant t et T est l'horizon à partir duquel il n'y a plus d'engagements.

Remarque 20. Ici, pour simplifier la présentation des calculs, nous supposons que la valeur du LGD, donc la perte en cas de défaut, est constante et égale à 1 pour tous les acheteurs. Ceci n'est pas une entrave à la généralité des résultats présentés dans le cas où le LGD est supposé constant. Cependant si le LGD est supposé être une variable aléatoire, les résultats s'en trouvent modifiés et il faudrait préciser sa relation avec les autres variables du modèle.

Ici, nous travaillerons en discrétisant le processus de taux, car le modèle économétrique qui a été estimé est un modèle discret, et nous souhaitons calculer le BE dans le cadre de ce modèle. Le taux d'actualisation sera donc dans notre cas $\delta t = \exp\left(-\sum_{s=1}^T dt R_s\right)$, où dt est le pas de discrétisation

Le BE devient alors :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} \left(\sum_{t=1}^T \delta_t L_t \right) \quad (4.12)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(\sum_{t=1}^T \delta_t L_t | R_1, \dots, R_T \right) \right) \quad (4.13)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\sum_{t=1}^T \delta_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}} (L_t | R_1, \dots, R_T) \right) \quad (4.14)$$

$$= \sum_{t=1}^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\delta_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{S_{t-1}=1, D_i^t=1} | R_1, \dots, R_T \right) \right) \quad (4.15)$$

$$= \sum_{t=1}^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\delta_t \sum_{i=1}^N \mathbb{P} (S_{t-1} = 1, D_i^t = 1 | R_1, \dots, R_T) \right) \quad (4.16)$$

$$= \sum_{t=1}^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\delta_t \sum_{i=1}^N \mathbb{P} (S_{t-1} = 1, D_i^t = 1 | R_1, \dots, R_T) \right) \quad (4.17)$$

avec S_t une variable de Bernoulli qui vaut 1 si l'individu survit jusqu'en $t-1$ et 0 sinon, et D_t une variable de Bernoulli qui vaut 1 s'il y a défaut entre $t-1$ et t et 0 sinon.

L'espérance étant linéaire nous pouvons nous intéresser au BE d'un seul individu et ensuite généraliser avec la formule ci-dessus. On suppose que les probabilités de

défaut sont données par un modèle multifactoriel, et donc par une somme de risques systémiques communs à tous les individus, représentés par le vecteur aléatoire Z_t , et d'un risque idiosyncratique, ϵ qui est propre à chaque individu. Les risques idiosyncratiques $\epsilon_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$ sont des variables réelles indépendantes. La probabilité de défaut d'un individu i est alors la probabilité que la variable latente ${}^t\beta_i Z_t + \epsilon_i$ tombe en dessous d'un seuil d_i .

$$\mathbb{P}(D_i^t = 1) = \mathbb{P}(\beta_i Z_t + \epsilon_i < d_i)$$

où les erreurs suivent une certaine loi.

Z est donc un vecteur aléatoire définie par $\forall t$ par $Z_t = g(X_t)$, avec $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable. Alors, Z_t est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $X_t, \sigma(X)$.

$$\mathbb{E}^{P \times Q}(\delta_t \mathbf{1}_{\beta_i Z_t + \epsilon_i < d_i}) = \mathbb{E}^Q(\mathbb{E}^P(\mathbf{1}_{\beta_i Z_t + \epsilon_i < d_i} | R_1, \dots, R_t))$$

Regardons plus précisément l'espérance conditionnelle et essayons de l'exprimer en fonction des probabilités de défaut.

Mais avant, définissons deux densités :

Définition 21. Soit $f_t : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ la densité de la loi de $\tilde{X}_{-\mathbf{R}}^t | \tilde{R}_t = \tilde{r}_t$.

Alors

$$\mathbb{P}({}^t\beta_i Z_t + \epsilon_i < d_i | R_t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{P}({}^t\beta_i Z_t + \epsilon_i < d_i | X_t) f(x_{-i}(t) | R_t) dx_{-i}$$

Définition 22. Soit $\phi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la densité de \tilde{R}_t sous \mathbb{Q} .

En nous intéressant à présent à l'espérance conditionnelle, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{1}_{S_i^{t-1}=1, D_i^t=1} \middle| \tilde{R}_t\right) \\ &= \int \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{1}_{S^{t-1}=1, D_i^t=1} \middle| \tilde{R}_t, \tilde{X}_{-R}\right) f(\tilde{x}_{-R}^t | R_t) d\tilde{x}_{-R} \\ &= \int \mathbb{P}\left(S_i^{t-1} = 1, D_i^t \middle| \tilde{R}_t, \tilde{X}_{-R}\right) f(\tilde{x}_{-R}^t | R_t) d\tilde{x}_{-R} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Conditionnellement à $\tilde{X}_t = (R_1, \dots, R_t, \tilde{X}_{-R}^t) = (\tilde{R}_t, \tilde{X}_{-R}^t)$ les variables S_{t-1} et D_t sont indépendantes car on a fixé les facteurs systémiques $(Z)_t = \tilde{g}(\tilde{X}_t)$ dont elles dépendaient, et la seule variable indéterminée reste le risque idiosyncratique ϵ qui est indépendant entre individus, mais aussi d'une période sur l'autre. Il faut ainsi calculer ces probabilités de défaut conditionnelles, que l'on peut exprimer comme produit de probabilités, car dépendant *uniquement* des risques idiosyncratiques de

chaque période, qui sont indépendants entre eux. La probabilité de défaut entre $t - 1$ et t d'un individu de classe i , notée PD_t^i , est donnée par :

$$PD_t^i = \mathbb{P} \left(S_i^{t-1} = 1, D_i^t \mid R_1, \dots, R_t, \tilde{X}_{-R} \right) \quad (4.19)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_{t-1} \in \bar{D}} \mathbb{P}(i \mapsto i_1, i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots, i_{t-1} \mapsto D \mid \tilde{X}_t) \quad (4.20)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_{t-1} \in \bar{D}} \mathbb{P}(i \mapsto i_1 \mid \tilde{X}_t) \mathbb{P}(i_1 \mapsto i_2 \mid \tilde{X}_t) \mathbb{P}(i_2 \mapsto i_3 \mid \tilde{X}_t) \dots \mathbb{P}(i_{t-1} \mapsto D \mid \tilde{X}_t) \quad (4.21)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_{t-1} \in \bar{D}} \mathbb{P}(i \mapsto i_1 \mid X_1) \mathbb{P}(i_1 \mapsto i_2 \mid X_3) \mathbb{P}(i_2 \mapsto i_3 \mid X_t) \dots \mathbb{P}(i_{t-1} \mapsto D \mid X_t) \quad (4.22)$$

où \bar{D} est l'ensemble des états de transition autres que le défaut. Ces dernières probabilités sont donc données par la fonction de répartition de ϵ_i .

Donc le BE des pertes actualisées dues à un défaut de l'individu i entre $t - 1$ et t sont :

$$\mathbb{E} (\delta_t L_i^t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(e^{-dt \sum_{s=1}^t R_s} L_i^t \mid \tilde{R} \right) \quad (4.23)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-dt \sum_{s=1}^t R_s} \frac{1}{f(\tilde{R}_t)} \int_{R^{3n}} PD_t^i f(\tilde{X}_t) dx_{\tilde{-R}} \right) \quad (4.24)$$

$$= \int \frac{\phi(\tilde{R}_t)}{f(\tilde{R}_t)} e^{-dt \sum_{s=1}^t R_s} \int PD_t^i f(\tilde{X}_t) d\tilde{x}_{-R} d\tilde{r} \quad (4.25)$$

Le terme $\frac{\phi(\tilde{R}_t)}{f(\tilde{R}_t)} e^{-dt \sum_{s=1}^t R_s}$ est un déflateur, donc la densité de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} multipliée par le taux d'actualisation.

Quant à la dynamique du taux court sous la probabilité \mathbb{Q} , un modèle CIR peut être utilisé pour modéliser ses variations. On sait que dans ce modèle (pour plus de détails, [83]) :

$$c_t R_t \mid R_0 \sim \chi_{\nu=4ab/\sigma^2, \lambda_t=c_t r_0}^2 e^{-at}$$

$$\text{où } c_t = \frac{4a}{\sigma^2(1 - e^{-at})}.$$

Pour calculer le BE, nous pouvons donc procéder de deux manières.

- Une première approche consisterait à faire intégrer numériquement en utilisant la formule 4.23. Mais sachant que la dimension selon laquelle on intégrerait est assez grande, l'erreur risque d'être importante.
- Comme on calcule des espérances sous des lois connues, il est aussi possible d'appliquer la méthode Monte Carlo pour calculer cette espérance. Ce sera la méthode que nous retiendrons.

On peut alors suivre l'algorithme suivant pour calculer le BE :

Algorithme :

1. Tirage d'une loi Khi2 de bons paramètres, après avoir estimé le CIR (voir [86] ou encore [7]). Diviser par c_t pour avoir \hat{r} .

2. Faire un tirage de \hat{x}_R conditionnelle à \hat{r} .
3. Calculer les probabilités de défaut (pour chaque classe) pour le vecteur (\hat{x}_R, \hat{r}) .
4. Calculer la moyenne de ces probabilités de défaut actualisées.
5. Sommer les BE ainsi obtenus pour les différents trimestres.

Les résultats (préliminaires) que nous avons sont les suivants : Sous l'hypothèse de dépendance entre risque de taux et risque de crédit le Best Estimate calculé avec l'algorithme ci-dessus est égal à 171. Alors que, comme nous le verrons dans 4.3, il est égal à 198 dans le cas d'indépendance (donc plus important dans ce cas).

4.3 Calcul de besoin en capital (SCR)

Sous l'actuelle approche formule standard, consulter [27, pp. 224-261] l'assurance crédit est considérée comme une branche de l'assurance non-vie. Les effets du risque systémique et diversifiable ne sont pas distingués.

Dans la suite nous nous intéressons au calcul du besoin en capital, dans le cadre d'un modèle interne. Comme décrit plus haut, les risques auxquels l'assureur crédit est exposé sont les risques de taux et le risque de crédit non diversifiable. Le besoin en capital est déterminé pour refléter la Valeur à Risque-*Value at Risk* - (VaR) en cas d'un événement pouvant causer la ruine de l'assureur, à un niveau de confiance de 99.5% et à horizon un an. Comme dans [45, Section 2], la valuation de la VaR de la distribution de Λ est biaisée car elle néglige la marge pour risque. En conséquence, on utilise l'approximation suivante proposée par [45, Section 3]

$$SCR(t) = \frac{\frac{VaR_{99.5\%}(\chi(t+1))}{V(t)} - 1}{1 - \alpha D(t) \left(\frac{VaR_{99.5\%}(\chi(t+1))}{V(t)} - 1 \right)} \times V(t), \quad (4.26)$$

avec

$$\chi(t) = \frac{\sum_{k=1}^K \Delta B_k(t) + V(t)}{1 + \rho(t)}$$

où (t) est la duration du passif, α est le coup du capital fixé à 6% pour le calcul de la marge pour risque et $\rho(t)$ le rendement de l'actif durant la période $[t, t+1]$. Cette approche est aussi utilisée dans [72], [70] et [73].

La sévérité du risque diversifiable décroît avec le nombre d'acheteurs dans chaque sous-groupe homogène du portefeuille. Il semble raisonnable de penser que cette hypothèse est satisfaite et que ce risque devient négligeable par rapport aux deux autres risques. Ainsi, le risque diversifiable peut être approché par une variable normale, consulter [45, Section 3.2], et la fonction de densité de $\chi(t)$ à l'instant $t \in \mathcal{T}$ est approchée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\chi(t+1) \leq x) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{P}(\chi(t+1) \leq x \mid \mathcal{G}_{t+1} \vee \mathcal{F}_{t+1}^U) \right] \\ &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\Phi \left(\frac{x - \mu_{\chi}(\mathbf{Z}(t+1))}{\sigma_{\chi}(\mathbf{Z}(t+1))} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

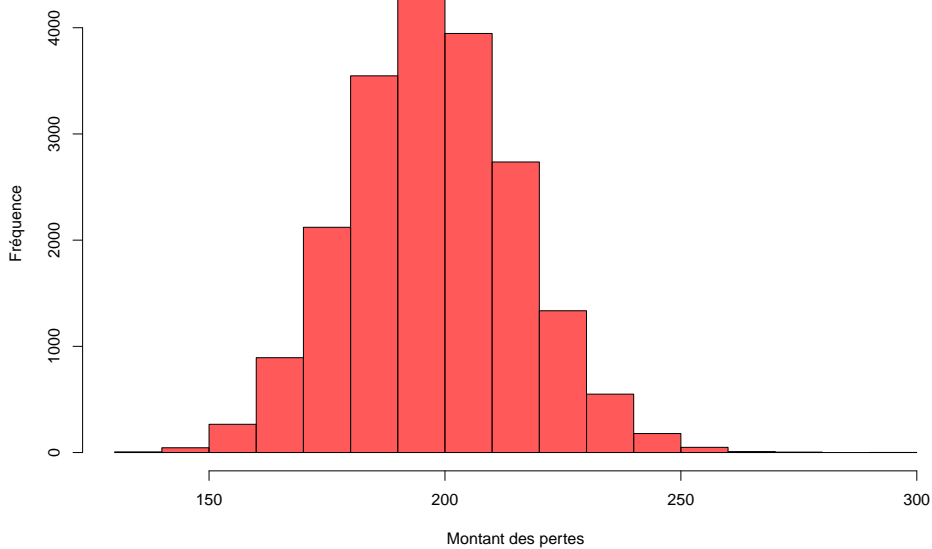


FIGURE 4.1 – Histogramme des pertes pour le calcul du SCR

avec Φ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, et $\mu_\chi(\mathbf{Z}(t+1))$ et $\sigma_\chi(\mathbf{Z}(t+1))$ sa moyenne et écart-type de $\chi(t+1)$ sachant $\mathbf{Z}(t+1)$.

Cette approche permet de réduire le nombre de simulations nécessaires pour le calcul du SCR. Elle nécessite en pratique le calcul des moments de $\chi(t+1)$ sachant $\mathbf{Z}(t+1)$.

Après avoir simulé les pertes dans le modèle décrit dans 4.1, voici dans la Figure, l'historgramme des pertes que nous utilisons pour calculer le quantile à 99,5%.

Le quantile à 99,5% est ici égal à 247 alors que la moyenne des pertes est égale à 198. Le SCR est donc égal à 49.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons réalisé un calcul de Best Estimate dans un cadre de dépendance entre risque de taux et risque de crédit. Pour cela, nous avons décomposé notre approche en plusieurs étapes. Nous avons tout d'abord introduit le modèle stochastique permettant de modéliser les transitions entre ratings pour les acheteurs du portefeuille de l'assureur crédit (modélisation des probabilités de transition, estimation des paramètres...). Nous avons ensuite approché le calcul du Best Estimate lui-même, en justifiant notre choix d'utiliser une méthode de Monte Carlo afin d'obtenir un résultat numérique, puis en décrivant l'algorithme que l'on a implémenté. Pour le calcul du SCR nous avons réalisé des simulations de pertes, et calculé le quantile à 99,5% de ces dernières. Il existe cependant des approches alternatives au calcul de quantiles élevés dans le cadre de modèles multifacteurs, comme le notre. La présentation de ces approches fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 5

Calcul sans simulations de quantiles élevés dans un modèle à facteurs

Le modèle interne 3 est basé sur un modèle à facteurs, donc les défauts et les transitions sont conditionnellement indépendants par rapport au risque systémique. Dans le cadre du chapitre 4, nous avons également travaillé avec un modèle à facteurs. Cependant les calculs de SCR faits jusqu'à maintenant, ont été réalisés avec des simulations de Monte Carlo, ce qui est coûteux en terme de temps et de ressources informatiques. La propriété d'indépendance conditionnelle entre acheteurs dans le cadre d'un modèle à facteurs sera utilisée ici, afin de trouver un moyen relativement aisé et avec le moins de simulations, d'obtenir la distribution de la perte ou les quantiles élevés de la distribution. Ce chapitre s'appuie sur les articles [43] et [75].

5.1 Distribution de la perte

Un acheteur n fait défaut si sa capacité à payer Z_n baisse au-delà d'un seuil d_n , donc si $Z_n < d_n$. En outre, sachant que la probabilité de défaut des acheteurs d'une même classe i est p_i , le défaut est une variable de Bernoulli de probabilité p_i .

En résumé, si on note D_n^t la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 s'il y a défaut entre $t-1$ et t , Z_n^t et d_n^t les valeurs de la capacité à payer et du seuil de défaut pour l'acheteur n pendant la même période, $D_n^t = \mathbf{I}_{\{Z_n^t < d_n^t\}}$ et $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{P}(Z_n < d_n) = p_i$. La variable Z_n n'est pas une gaussienne dans notre cas (4), comme c'était le cas dans les Chapitres 3 et 1. Dans la suite $d_n = d_i$ pour un acheteur n de la classe i , pour $i = 1, \dots, I$.

En supposant que le coefficient LGD_n , qui représente la *perte en cas de défaut* pour chaque acheteur, est constant et égal à 1¹, et en notant L_n la perte liée à l'acheteur n , alors la perte à l'instant t s'écrira :

$$L^t = \sum_{n=1}^N L_n^t = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{D_n^t\}} LGD_n^t$$

1. Voir [82] pour une introduction aux problématiques de LGD et les cas où il n'est pas supposé constant.

(5.1)

Un des intérêts d'utiliser un modèle à facteurs pour la capacité à payer est que les capacités à payer sont conditionnellement indépendantes par rapport aux risques systématiques. Ainsi, en conditionnant par rapport au vecteur \mathbf{X} des risques systématiques (cf. 4), on a indépendance entre les défauts et les transitions sur toutes les périodes, et on a donc aussi les pertes sur différentes périodes. Afin de trouver la loi de la perte on peut calculer la fonction génératrice de cette dernière en $u \in \mathbb{R}$, $G_L(u) = \mathbb{E}[u^L]$.

$$\begin{aligned} G_L(u) = \mathbb{E}[u^L] &= \mathbb{E}\left[u^{\sum_{s=1}^t \delta_s L^s}\right] &= \\ \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[u^{\sum_{s=1}^t \delta_s L^s} \middle| X\right]\right] &(5.2) &= \mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^t \mathbb{E}\left[u^{\delta_s L^s} \middle| X\right]\right] &(5.3) \end{aligned}$$

Après calcul de l'espérance conditionnelle ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[u^{\delta_s L^s} \middle| X\right] = \prod_{n=1}^N \mathbb{E}\left[u^{\delta_s \sum_{n=1}^N L_n^s} \middle| X\right] \quad (5.4)$$

$$= \prod_{n=1}^N \mathbb{E}\left[u^{\delta_s L_n^s} \middle| X\right] \quad (5.5)$$

$$= \prod_{n=1}^N \mathbb{E}\left[u^{\delta_s \mathbf{1}_{D_s^n} + \mathbf{1}_{\bar{D}_s^n}} \middle| X\right] \quad (5.6)$$

$$= \prod_{n=1}^N \left[u^{\delta_s} \mathbb{P}(D_s^n | X) + (\bar{D}_s^n | X)\right] \quad (5.7)$$

$$= \prod_{i=1}^I \left[u^{\delta_s} \mathbb{P}(D_s^i | X) + (\bar{D}_s^i | X)\right]_s^N \quad (5.8)$$

où \bar{D}_s^i est l'événement de survie conditionnelle de l'acheteur n pendant la période $[s-1, s]$, N_s^i est l'effectif dans la classe homogène $i \in 1, \dots, I$ à l'instant s .

$\mathbb{P}(\bar{D}_s^i | X)$ est la probabilité conditionnelle de survie qu'on note $q_s^{i|X}$ et $\mathbb{P}(D_s^i | X)$ est la probabilité conditionnelle de défaut d'un acheteur de la classe i qu'on note $p_s^{i|X}$. $p_s^{i|X} + q_s^{i|X} = 1$. Ces probabilités peuvent être calculées comme dans 4.

Avec ces notations, on a finalement la fonction génératrice de la perte qui s'écrit :

$$G_L(u) = \mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^t \mathbb{E}\left[u^{\delta_s L^s} \middle| X\right]\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^I \left[u^{\delta_s} \mathbb{P}(D_s^i | X) + (\bar{D}_s^i | X)\right]_i^N\right] \quad (5.9)$$

Remarque 23. Le portefeuille change sur chaque période s , d'où les effectifs N_s^i qui dépendent du temps s .

L'espérance dans l'équation 5.9 doit être calculée avec une méthode de Monte Carlo, car c'est une espérance par rapport à un vecteur aléatoire, à savoir \mathbf{X} , qui est un vecteur Gaussien.

Une fois qu'on a la fonction génératrice des pertes L , on peut avoir la distribution des pertes par une méthode Fast Fourier Transform (FFT).

Il resterait à comparer les valeurs de Best Estimate et SCR calculées dans 4, avec les valeurs obtenues ici. Cette méthode reste à implémenter mais les méthodes FFT pour les variables continues (les pertes dans notre cas), restent difficiles à obtenir.

5.2 Calcul de la VaR

Cette section présente une façon de calculer les quantiles élevés dans le cadre d'un modèle à facteurs et de risques systémiques gaussiens.

5.2.1 Dérivées de la VaR

On souhaite calculer un quantile de la distribution des pertes associé au niveau de confiance α . Soit $q_\alpha(L)$ le quantile cherché. On suppose qu'on a construit un portefeuille de perte \bar{L} , tel que son quantile de niveau α , noté $q_\alpha(\bar{L})$ peut être calculé analytiquement et est suffisamment proche de $q_\alpha(L)$. On regarde alors la perte L comme \bar{L} perturbée par un bruit U , donc $U = L - \bar{L}$. On définit une nouvelle variable $L_\epsilon = \bar{L} + \epsilon U$, où ϵ sert à "mesurer" la perturbation autour de \bar{L} . Avec le résultat dans [77] pour des niveaux de confiance élevés, $q_\alpha(L)$ peut être calculé par la formule :

$$q_\alpha(L) = q_\alpha(\bar{L}) + \left. \frac{dq_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} \quad (5.10)$$

Les deux dérivées ci-dessus sont calculées dans [42]. D'après l'article on a :

$$\left. \frac{dq_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \mathbb{E} [U | \bar{L} = q_\alpha(\bar{L})] \quad (5.11)$$

et

$$\left. \frac{d^2q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \frac{1}{f_{\bar{L}}(l)} \frac{d}{dl} (f_{\bar{L}}(l) \mathbb{V} [U | \bar{L} = l]) \Big|_{l=q_\alpha(\bar{L})} \quad (5.12)$$

Il suffit donc de trouver une variable \bar{L} .

Dans un premier temps, on suppose que $Z_n = \varrho_n \bar{S} + \sqrt{1 - \varrho_n^2} \varepsilon_n$ avec $\bar{S} \sim N(O, 1)$.

On définit \bar{L} comme une distribution limite :

$$\bar{L} = l(\bar{S}) = \sum_{n=1}^N LGD_n p^{n|\bar{S}} = \sum_{n=1}^N LGD_n \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_n) - \varrho_n \bar{S}}{\sqrt{1 - \varrho_n^2}} \right) \quad (5.13)$$

La perte \bar{L} est une fonction décroissante de \bar{S} et le quantile $q_\alpha(\bar{L})$ peut alors être calculé avec la formule :

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{L} < q_\alpha(\bar{L})) = \mathbb{P}(l(\bar{S}) < q_\alpha(\bar{L})) = \mathbb{P}(\bar{S} > l^{-1}(q_\alpha(\bar{L}))) = 1 - \Phi(l^{-1}(q_\alpha(\bar{L}))) \quad (5.14)$$

D'où

$$q_\alpha(\bar{L}) = l(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \quad (5.15)$$

On a ainsi le premier terme de l'approximation 5.10.

On peut réécrire les dérivées première et seconde avec s , une réalisation de \bar{S} comme variable. Sachant qu'il y a équivalence entre les conditions $q_\alpha(\bar{L})$ et $\bar{S} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, on obtient :

$$\frac{dq_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \mathbb{E}[U | \bar{S} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)] \quad (5.16)$$

et

$$\frac{d^2 q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{\phi(s)} \frac{d}{ds} \phi(s) \frac{\mathbb{V}[U | \bar{S} = s]}{l'(s)} \Big|_{s=\Phi^{-1}(1-\alpha)} \quad (5.17)$$

Il faut ensuite relier \bar{L} à la vraie perte L . Pour cela il faut trouver un lien entre \bar{S} et les variables $(I_k)_{k=1, \dots, K}$ le vecteur de risques systémiques (regarder aussi 3.3). On suppose qu'il y a une relation linéaire entre ces variables et on écrit :

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^K b_k I_k \quad (5.18)$$

en posant comme condition $\sum_{k=1}^K b_k^2 = 1$ pour que la variance de \bar{S} soit égale à 1.

Il reste maintenant à déterminer les coefficients $(\varrho_n)_{n=1, \dots, N}$ et les coefficients $(b_k)_{k=1, \dots, K}$. Afin de déterminer ces coefficients, on pose $\bar{L} = \mathbb{E}[L | \bar{S}]$. Ceci a, entre autres, pour conséquence de rendre nulle la dérivée première donnée en 5.16. Après quelques calculs dont les détails se trouvent dans [74], pour les coefficients ϱ_n on obtient :

$$\varrho_n = \varrho_n \sum_{k=1}^K \xi_{nk} b_k \quad (5.19)$$

Le choix des $(b_k)_{k=1, \dots, K}$ intervient dans l'équation 5.15. Afin de trouver ces coefficients, les auteurs partent du fait qu'intuitivement il faudrait que \bar{S} soit le plus

corrélé possible avec les facteurs de risques systématiques $(S_n)_{n=1,\dots,N}$.
Il faut donc trouver les coefficients $(b_k)_{k=1,\dots,K}$ tels que :

$$\max_{\{b_k\}} \left(\sum_{n=1}^N c_n \text{corr}(\bar{S}; S_n) \right) \quad (5.20)$$

sous la contrainte $\sum_{k=1}^K b_k^2 = 1$.
La solution est donnée par

$$b_k = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{\lambda} \xi_{nk} \quad (5.21)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange, solution du problème de maximisation.
Finalement, en imposant certaines contraintes à c_n , le choix suivant fait partie de ceux qui prodiguent les meilleurs résultats :

$$c_n = LGD_n \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_n) + \varrho_n \Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \varrho_n^2}} \right) \quad (5.22)$$

Jusqu'ici on a donc la valeur de

$$q_\alpha(\bar{L}) = l(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) = \sum_{n=1}^N LGD_n \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_n) - \varrho_n \sum_{k=1}^K \xi_{nk} b_k \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sqrt{1 - \left(\varrho_n \sum_{k=1}^K \xi_{nk} b_k \right)^2}} \right) \quad (5.23)$$

$$\text{avec } b_k = \sum_{n=1}^N \frac{LGD_n \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_n) + \varrho_n \Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \varrho_n^2}} \right)}{\lambda} \xi_{nk}$$

La dérivée première étant nulle car on a choisi $\bar{L} = \mathbb{E}(L|\bar{S})$ il reste à calculer la dérivée seconde

$$\left. \frac{d^2 q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \frac{1}{\phi(s)} \frac{d}{ds} \left(\phi(s) \frac{\mathbb{V}[U|\bar{S} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)]}{l'(s)} \right) \Bigg|_{s=\Phi^{-1}(1-\alpha)}$$

5.2.2 Calcul de la dérivée seconde - Cadre multifactoriel

On note $\mathbb{V}[U|\bar{S} = s] = v(s)$.

$$q_\alpha(L) - q_\alpha(\bar{L}) = \left. \frac{d^2 q_\alpha(L_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \frac{1}{2\phi(s)} \frac{d}{ds} \left(\phi(s) \frac{v(s)}{l'(s)} \right) \Bigg|_{s=\Phi^{-1}(1-\alpha)} \quad (5.24)$$

$$= - \frac{1}{2\phi(s)} \left(-s\phi(s) \frac{v(s)}{l'(s)} - \phi(s) \frac{v'(s)l'(s) - v(s)l''(s)}{l'(s)^2} \right) \Bigg|_{s=\Phi^{-1}(1-\alpha)} \quad (5.25)$$

$$= - \frac{1}{2l'(s)} \left(v'(s) - v(s) \left(\frac{l''(s)}{l'(s)} + y \right) \right) \Bigg|_{s=\Phi^{-1}(1-\alpha)} \quad (5.26)$$

Il faut alors calculer $l'(s)$ et $l''(s)$.

$$l'(s) = \sum_{n=1}^N -LGD_n \frac{\varrho_n}{\sqrt{1-\varrho_n^2}} \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_n) - \varrho_n s}{\sqrt{1-\varrho_n^2}} \right) \quad (5.27)$$

et

$$l''(s) = \sum_{n=1}^N -LGD_n \frac{\varrho_n^2}{1-\varrho_n^2} \frac{\Phi^{-1}(p_n) - \varrho_n s}{\sqrt{1-\varrho_n^2}} \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_n) - \varrho_n s}{\sqrt{1-\varrho_n^2}} \right) \quad (5.28)$$

Il ne reste plus qu'à calculer la variance conditionnelle de U . \bar{L} est une fonction déterministe de \bar{S} donc :

$$v(s) = \mathbb{V}(U|\bar{S} = s) = \mathbb{V}(L|\bar{S} = s) \quad (5.29)$$

Par la formule de décomposition de la variance conditionnelle, en conditionnant par rapport aux variables $(I_k)_{k=1,\dots,K}$ pour se ramener à des variables indépendantes, on a alors :

$$\mathbb{V}(L|\bar{S} = s) = \mathbb{V}(\mathbb{E}(L|\{I_k\})|\bar{S} = s) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(L|\{I_k\})|\bar{S} = s) \quad (5.30)$$

On note $\mathbb{V}(\mathbb{E}(L|\{I_k\})|\bar{S} = s) = v_{\infty(y)}$ et $\mathbb{E}(\mathbb{V}(L|\{I_k\})|\bar{S} = s) = v_{GA}(s)$.

On pose :

$$\varrho_{nm} = \frac{\varrho_n \varrho_m \sum_{k=1}^K \xi_{nk} \xi_{mk} - \varrho_n \varrho_m}{\sqrt{(1-\varrho_n^2)(1-\varrho_m^2)}}. \quad (5.31)$$

ϱ_{nm} est le coefficient de corrélation conditionnel à \bar{S}^2 .

Après calcul, on obtient :

$$v_{\infty}(s) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N LGD_n L_m [\Phi_2(\Phi^{-1}(p^{n1s}), \Phi^{-1}(p^{m1s}), \varrho_{nm}) - p^{n1s} p^{m1s}] \quad (5.32)$$

où $\Phi_2(.,.,.)$ désigne la fonction de distribution d'une loi normale bivariée. La dérivée première de $v_{\infty}(s)$ est :

$$v'_{\infty}(s) = 2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N LGD_n L_m p^{n1s} \left[\Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(p^{m1s}) - \varrho_{nm} \Phi^{-1}(p^{n1s})}{\sqrt{1-\varrho_{nm}^2}} \right] - p^{m1s} \right] \quad (5.33)$$

$$v_{GA}(s) = \sum_{n=1}^N LGD_n^2 [p^{n1s} - \Phi_2(\Phi^{-1}(p^{n1s}), \Phi^{-1}(p^{m1s}), \varrho_{nn})] \quad (5.34)$$

2. Pour plus de détails sur cette partie consulter

$v_{GA}(s) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$. Et sa dérivée est égale à :

$$v'_{GA}(s) = \sum_{n=1}^N LGD_n^2 p^{n's'} \left[1 - 2\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p^{n's}) - \rho_{nn}\Phi^{-1}(p^{n's})}{\sqrt{1 - \rho_{nn}^2}} \right) \right] \quad (5.35)$$

Il correspond à un ajustement par rapport à la granularité du portefeuille, donc plus le portefeuille est granulaire, plus la valeur de ce terme diminue.

Comme dans la section précédente, il reste à calculer les quantiles de la perte par les formules ci-dessus et les comparer avec ceux obtenus dans les chapitres précédents. Ceci fera l'objet d'un travail futur.

Conclusion

Notre but, dans cette partie, était d'utiliser la propriété d'indépendance conditionnelle entre acheteurs dans le cadre d'un modèle à facteurs, afin de déterminer un moyen aisé d'obtenir la distribution de la perte ou les quantiles élevés. Nous nous sommes pour cela d'abord préoccupés du calcul de la distribution de la perte, mais ne pouvons déterminer avec certitude le moment où la taille du portefeuille sera en adéquation avec la possibilité d'utiliser la formule trouvée. Nous décrivons ensuite une méthode de calcul des quantiles élevés différente de celle utilisée précédemment. Ces calculs de quantiles élevés semblent être une alternative intéressante aux calculs simulatoires de quantiles que nous avons faits dans ce cadre. Ceci fera l'objet de travaux futurs.

Conclusion

Dans le cadre de ce travail nous avons tout d'abord présenté ce qu'était l'assurance-crédit et ses enjeux. Nous avons vu que la directive Solvabilité 2 qui encadre les calculs d'engagements, dans le cadre de sa formule standard ne prend pas en compte les spécificités du métier d'assureur crédit. En effet elle ne tient pas bien compte des corrélations entre contreparties, qui sont désignées pour calculer le risque de corrélation pour un petit nombre d'elles. Pour cette raison les assureurs crédits doivent construire des modèles internes, afin de calculer au plus juste les fonds propres mis de coté en cas d'événements qui causeraient des pertes extrêmes. Nous avons donc travaillé spécifiquement dans ce cadre, en essayant d'apporter une contribution quant à l'amélioration d'un modèle interne de base.

Après avoir présenté le modèle interne de base, la manière dont il est spécifié, les paramètres d'entrée et ses sorties, nous avons présenté les données que nous avons à notre disposition dans le cadre de notre travail. Nous avons réalisé une analyse descriptive des données de transitions entre classes, des données de défaut et d'expositions, ainsi que du programme informatique que nous avons développé, qui reproduit le modèle interne. C'est sur ce programme que nous nous sommes appuyés ensuite pour tester les améliorations que nous proposons.

La première proposition que nous faisons, est celle de tenir compte de la caractéristique du métier d'assureur crédit, qui est de pouvoir adapter ses niveaux de garanties pendant l'année. En effet les pertes sont actuellement calculées avec des paramètres fixes pendant l'année et nous avons montré dans le cadre de cette étude que si nous les faisons varier, l'engagement de l'assureur en fin d'année s'en trouve diminué. Ceci vient du fait qu'en temps de crise les assureurs diminuent leurs expositions de manière plus importante qu'il ne les augmentent en période de croissance. Et ils s'adaptent assez rapidement aux cycles de marché.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes concentrés sur la structure de dépendance des facteurs systémiques. En effet c'est cette structure qui détermine la dépendance entre acheteurs, et donc l'importance des pertes du fait de défauts corrélés. Nous avons vu que dans le cadre de la dépendance Student, et uniquement pour de petits degrés de liberté, la dépendance de Student est plus prudente que la dépendance Gaussienne. Cependant, afin de faire une étude plus poussée sur la structure de dépendance qui serait la plus adaptée, il faudrait avoir plus de données sur les pertes, et sur les probabilités de défaut, que nous n'en avons actuellement.

Dans un dernier chapitre nous nous sommes concentrés sur le calcul du Best Estimate et du SCR dans le cadre d'un modèle à facteur réduit que nous avons estimé dans [9]. Dans un premier temps nous avons parlé de prix de marché du risque, cette variable qui nous permet de passer de l'univers historique à un univers risque

neutre, dans le cadre d'un risque de taux. Un modèle qui nous a paru approprié est présenté, avec une application numérique sur les taux Libor 1 mois. Dans un deuxième temps, nous avons mené le calcul effectif de Best Estimate. Nous nous sommes alors intéressés au cas où il y aurait une dépendance entre risques de taux et risque de crédit, le premier étant évalué sous une probabilité risque neutre et le second sous une probabilité historique. Nous avons démontré la formule explicitant ce Best Estimate dans le cadre de dépendance. Puis, nous avons calculé le SCR, évaluant ainsi les engagements dans le cadre de notre modèle. Finalement, nous avons conclu par des propositions de calcul de SCR dans un cadre multifacteur, approches qui ne nécessiteraient pas de simulations numériques. Ces approches restent à être validées et comparées avec les calculs de SCR faits dans un cadre simulateur.

Bibliographie

- [1] Alan Agresti. *Categorical Data Analysis*. Number Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., 2 edition, July 2002.
- [2] R. Ahmad and P. Wilmott. The market price of interest-rate risk : Measuring and modelling fear and greed in the fixed-income markets. *Wilmott magazine*, 2006.
- [3] P. Alaton, B. Djehiche, and D. Stillberger. On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9(1) :1–20, 2002.
- [4] P. Balduzzi and C. Robotti. Minimum-variance kernels, economic risk premia and tests of multi-beta models. *Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta*, (2001-24).
- [5] A. Bangia, F.X. Diebold, A. Kronimus, C. Schagen, and T. Schuermann. Ratings migration and the business cycle, with application to credit portfolio stress testing. *Journal of Banking and Finance*, 26(2) :445–474, 2002.
- [6] P. Barrieu, H. Bensusan, N. El Karoui, C. Hillairet, S. Loisel, C. Ravanelli, and Y. Salhi. Understanding, modelling and managing longevity risk : key issues and main challenges. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012(3) :203–231, 2012.
- [7] David Bolder and David Strélski. Yield curve modelling at the bank of canada. *Available at SSRN 1082845*, 1999.
- [8] Q. Cai, A. Levy, and N. Patel. Understanding asset correlation dynamics for stress testing. *Moody's KMV Research Paper*, 2009.
- [9] A. Caja, Q. Guibert, and F. Planchet. Influence of economic factors on rating transition matrices-application to economic capital for a credit insurer. *Working paper ISFA - à paraître*.
- [10] A. Caja and F. Planchet. La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? *Assurances et gestion des risques*, 78(3-4), 2010.
- [11] A. Caja and F. Planchet. Modelling cycle dependence in credit insurance. *Risks*, 2014.
- [12] P. Carr, H. Geman, D.B. Madan, and M. Yor. The fine structure of asset returns : an empirical investigation. *Journal of business*, 75(2), 2002.

- [13] J.A. Casanovas. Solvency ii - underwriting credit risk models. *Department of Econometry, Barcelona University*, 2000.
- [14] CEIOPS. Consultation paper no. 51 - draft level 2 advice on scr standardformula - counterparty default risk. 2009.
- [15] J.H.E. Christensen, E. Hansen, and D. Lando. Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities. *Journal of Banking and Finance*, 28(11) :2575–2602, 2004.
- [16] J.H. Cochrane and M. Piazzesi. Bond risk premia. *The American Economic Review*, 2005.
- [17] D. Cossin and H. Pirotte. *Advanced credit risk analysis : financial approaches and mathematical models to assess, price, and manage credit risk*. John Wiley & Sons, 2001.
- [18] M. Crouhy, D. Galai, and R. Mark. A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24(59) :117, 2000.
- [19] M.M. Dacorogna. Solvency ii and ifrs : The credit insurance industry demonstrates how to prepare for them. *PML Working Group*, 2008.
- [20] H. Dastarac and P. Sauveplane. Les déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ? *Mémoire d'actuariat, ENSAE*, 2010.
- [21] A. de Guigné. La coface a essuyé une perte historique en 2009. *Le Figaro*, 2010.
- [22] Arnaud De Servigny and Olivier Renault. *Measuring and managing credit risk*. McGraw Hill Professional, 2004.
- [23] Stefano Demarta and Alexander J McNeil. The t copula and related copulas. *International statistical review*, 73(1) :111–129, 2005.
- [24] Cour des comptes. La coface. *Rapport public annuel*, 2011.
- [25] J.L. Doob. *Stochastic Processes*.
- [26] G.R. Duffee and R.H. Stanton. Emm estimation of affine and nonaffine term structure models. *Working Paper, Haas School of Business*, 2000.
- [27] EIOPA. Technical specification on the long term guarantee assessment (part 1). Technical Report EIOPA-DOC-13/061, EIOPA, Frankfurt, January 2013.
- [28] Paul Embrechts, Filip Lindskog, and Alexander McNeil. Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, 8(1) :329–384, 2003.
- [29] Chedal-Anglay et Associés. Le cap, une couverture pour risque aggravé. 2011. <http://www.assurance-credit.fr/le-cap-une-couverture-pour-risque-aggrave.html>.

- [30] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*.
- [31] D. Feng, Christian Gouriéroux, and Joan Jasiak. The ordered qualitative model for credit rating transitions. *Journal of Empirical Finance*, 15(1) :111–130, January 2008.
- [32] Figaro. De nouvelles mesures pour les entreprises. 2008.
- [33] R. Frey and A.J. McNeil. Dependent defaults in models of portfolio credit risk. *Journal of Risk*, 6 :59–92, 2003.
- [34] R. Frey, A.J. McNeil, and M. Nyfeler. Copulas and credit models. *Risk*, 10 :111–114, 2001.
- [35] P. Gagliardini and C. Gouriéroux. Stochastic migration models with application to corporate risk. *Journal of Financial Econometrics*, 3(2) :188–226, March 2005.
- [36] A. Garratt, K. Lee, M. H. Pesaran, and Y. Shin. A long run structural macroeconomic model of the UK. *The Economic Journal*, 113(487) :412–455, 2003.
- [37] Narayan C Giri. *Multivariate statistical inference*, volume 65. Academic Press New York, 1977.
- [38] J.E. Gómez-González and I.P.O. Hinojosa. Estimation of conditional time-homogeneous credit quality transition matrices. *Economic Modelling*, 27(1) :89–96, 2010.
- [39] J. Goodman. *Discrete Time Gaussian Markov Processes*. Cours NYU, 2012.
- [40] M.B. Gordy. A comparative anatomy of credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24(1) :119–149, 2000.
- [41] M.B. Gordy. A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation*, 12(3) :199–232, 2003.
- [42] Christian Gouriéroux, Jean Pierre Laurent, and Olivier Scaillet. Sensitivity analysis of values at risk. *Journal of Empirical Finance*, 7(3) :225–245, 2000.
- [43] J. Gregory and J.-P. Laurent. In the core of correlation. *Journal of Risk*, 17(10) :87–91, 2004.
- [44] ICISA Solvency II Expert Group. Spotlight on solvency ii. *Business Money International*, 2006.
- [45] Q. Guibert, F. Planchet, and M. Juillard. Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes. *Bulletin Français d’Actuariat*, 10(20) :5–34, 2010.

- [46] J.D. Hamilton. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 357–384, 1989.
- [47] M.R. Hardy. A regime-switching model of long-term stock returns. *North American Actuarial Journal*, 5(2) :41–53, 2001.
- [48] P. Hill, R. Brooks, and R. Faff. Variations in sovereign credit quality assessments across rating agencies. *Journal of Banking & Finance*, 34(6) :1327–1343, June 2010.
- [49] R. Hu, Y. and Kiesel and W. Perraudin. The estimation of transition matrices for sovereign credit ratings. *Journal of Banking & Finance*, 26(7) :1383–1406, July 2002.
- [50] European Insurance and Occupational Pensions Authority. Solvency ii technical specifications. 2014. <https://eiopa.europa.eu/en/publications/technical-specifications/index.html>.
- [51] Y. Jafry and T. Schuermann. Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices. *Journal of Banking and Finance*, 28(11) :2603–2639, 2004.
- [52] R. A. Jarrow, David Lando, and Stuart Turnbull. A markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies*, 10(2) :481–523, January 1997.
- [53] S.J. Koopman, R. Kräussl, A. Lucas, and A.B. Monteiro. Credit cycles and macro fundamentals. *Journal of Empirical Finance*, 16(1) :42–54, 2009.
- [54] S.J. Koopman and A. Lucas. Business and default cycles for credit risk. *Journal of Applied Econometrics*, 20(2) :311–323, 2005.
- [55] S.J. Koopman, A. Lucas, and A. Monteiro. The multi-state latent factor intensity model for credit rating transitions. *Journal of Econometrics*, 142(1) :399–424, January 2008.
- [56] C. Lagarde and P. Lellouche. Cap export et cap+ export : prolongation en 2011 des dispositifs publics de soutien à l’assurance-crédit court terme à l’export. *Communiqué de Presse, Ministère de l’Economie des Finances et de l’Industrie*, 2011. http://www.economie.gouv.fr/files/finances/presse/dossiers_de_presse/110413/capexport.pdf.
- [57] D. Lando and T.M. Skødeberg. Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking and Finance*, 26(2) :423–444, 2002.
- [58] J. Lee. Understanding 2008 gcorr corporate. *Moody’s KMV Research Paper*, 2008.

- [59] A. Marchant. Coface and atradius launch credit limit top up schemes. *UK Credit Insurance Specialists*, 2013. <http://www.credit-insure.co.uk/Industrynews/?p=395>.
- [60] P. McCullagh. Models for ordinal data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 42(2) :109–142, 1980.
- [61] R. Mehra. The equity premium : Why is it a puzzle? *Financial Analysts Journal*, 2003.
- [62] R. C. Merton. On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates*. *The Journal of Finance*, 29(2) :449–470, 1974.
- [63] R.C. Merton. An analytic derivation of the cost of deposit insurance and loan guarantees an application of modern option pricing theory. *Journal of Banking and Finance*, 1(1) :3–11, 1977.
- [64] P. Nickell, W. Perraudin, and S. Varotto. Stability of rating transitions. *Journal of Banking and Finance*, 24(1) :203–227, 2000.
- [65] Pamela Nickell, William Perraudin, and Simone Varotto. Stability of rating transitions. *Journal of Banking & Finance*, 24(1-2) :203–227, January 2000.
- [66] OCDE. Oecd.stat extracts.
- [67] Sia Partners. L’assurance-crédit, un marché en pleine mutation. 2013.
- [68] M. Hashem Pesaran and Yongcheol Shin. Long-run structural modelling. *Econometric Reviews*, 21(1) :49–87, 2002.
- [69] F. Planchet. Provisionnement et couverture des garanties financières : deux notions indissociables. *La Tribune de l’Assurance*, (138), 2009.
- [70] F. Planchet. Modélisation du risque de pandémie dans solvabilité 2. *Assurances et gestion des risques*, 81, 2013.
- [71] F. Planchet, F. Magnin, and Decroocq J.F. Systematic risk modelisation in credit risk insurance. *ISFA Laboratoire SAF*, 2009.
- [72] Frédéric Planchet, Quentin Guibert, and Marc Juillard. Measuring uncertainty of solvency coverage ratio in ORSA for non-life insurance. *European Actuarial Journal*, 2(2) :205–226, December 2012.
- [73] J. Planchet, F. nd Tomas. Uncertainty on survival probabilities and solvency capital requirement : Application to LTC insurance. volume 4, pages 1–13, Copenhagen, 2013.
- [74] M. Pykhtin. Multi-factor adjustment. *Journal of risk*, pages 85–90, 2004.
- [75] M. Pykhtin. Portfolio credit risk multi factor adjustment. *London risk magazine limited*, 17(3) :85–90, 2004.

- [76] Alfred Rényi, Alfred Renyi, Alfred Renyi, Alfred Renyi, and Hungary Mathematician. *Calcul des probabilités : avec un appendice sur la théorie de l'information*. Dunod, 1966.
- [77] M. Richard and T. Wilde. Unsystematic credit risk. *Risk magazine*, 2002.
- [78] S. Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13 :341–360, 1976.
- [79] Anthony Saunders and Linda Allen. *Credit risk management in and out of the financial crisis : new approaches to value at risk and other paradigms*, volume 528. John Wiley & Sons, 2010.
- [80] P.J. Schönbucher. Factor models for portfolio credit risk. *Department of Statistics, Bonn University*, 2000.
- [81] David F. Schrage. Affine stochastic mortality. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38(1) :81–97, February 2006.
- [82] Til Schuermann et al. What do we know about loss given default. *Credit risk models and management*, 2 :1–29, 2004.
- [83] Steven E Shreve. *Stochastic calculus for finance II : Continuous-time models*, volume 11. Springer, 2004.
- [84] M. Sijlamassi and Y. Ouaknine. Valorisation par les déflateurs stochastiques. *Mémoire d'actuariat, ENSAE*, 2004.
- [85] C. Stefanescu, R. Tunaru, and S. Turnbull. The credit rating process and estimation of transition probabilities : A bayesian approach. *Journal of Empirical Finance*, 16(2) :216–234, March 2009.
- [86] L. Torosantussi, A. Uboldi, and M. Bernaschi. Empirical evaluation of the market price of risk using the cir model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2002.
- [87] S. Trueck and S. T. Rachev. *Rating Based Modeling of Credit Risk : Theory and Application of Migration Matrices*. Academic Press Advanced Finance Series. Academic Press, 2009.
- [88] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2) :177–188, 1977.
- [89] L. Wang and K. Poetzelberger. Boundary crossing probability for brownian motion and general boundaries. *Journal of Applied Probability*, (34) :54–65, 1997.
- [90] Jonathan Wendin and Alexander J. McNeil. Dependent credit migrations. *Journal of Credit Risk*, 2(3) :87–114, 2006.
- [91] J. Zemmour. Un modèle d'équilibre partiel d'arbitrage multifactoriel : l'écueil des primes de risque des facteurs. 2002.

- [92] Jing Zhang, Fanlin Zhu, and Joseph Lee. Asset correlation, realized default correlation, and portfolio credit risk. *Manuscript, Moody's KMV (March)*, 2008.
- [93] C. Zucca and L. Sacerdote. On the inverse first-passage-time problem for a wiener process. *Annals of Applied Probability*, 19(4) :1319–1346, 2009.

Annexe

Théorème de Kolmogorov

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelle indépendantes telle que :

– pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$

– il existe une suite croissante $(a_n)_{n \geq 1}$ de nombres positifs tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{a_n^2} < +\infty.$$

Alors

$$\frac{\sum_{n=1}^N X_n - \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^N X_n\right)}{a_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Si

$$a_n^{-1} \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^N X_n\right) \rightarrow m$$

alors $\frac{\sum_{n=1}^N X_k}{a_n} \rightarrow m$.

