

Mortalité prospective en cas de petits échantillons : modélisation à partir d'informations externes en utilisant l'approche de Bongaarts

Version 1.1 du 18/12/2011

Frédéric Planchet *

Aymric Kamega ^β

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

ISFA ^γ

WINTER & Associés ^λ

Résumé

Cette étude présente une méthode simple pour modéliser la mortalité d'expérience future en l'absence de données d'historique suffisantes à partir d'informations externes. Ainsi, avec un ajustement paramétrique, une hypothèse sur la forme de l'évolution du niveau de mortalité (évolution linéaire ou exponentielle) et un avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle à un âge donné, ce travail présente la construction d'une table de mortalité prospective complète. Un exemple de mise en œuvre est présenté avec des données de la population assurée d'Afrique subsaharienne francophone.

MOTS-CLEFS : espérance de vie, projection de mortalité, hétérogénéité, mortalité par cause, extrapolation par période, extrapolation par génération, extrapolation par avis d'expert, interdépendance dans les extrapolations, modèle de Lee-Carter, modèle de Bongaarts, risque d'avis d'expert.

* Frédéric Planchet est docteur en sciences de gestion, enseignant-chercheur du laboratoire SAF à l'ISFA (EA n°2429) et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : fred@planchet.net

^β Aymric Kamega est docteur en sciences de gestion, actuaire chez WINTER & Associés et membre du Collège de Direction de l'EURIA (EURO-Institut d'Actuariat, UBO). Contact : akamega@winter-associes.fr

^γ Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 – France.

^λ WINTER & Associés – 55 avenue René Cassin - 69009 Lyon – France.

Sommaire

1. Introduction.....	2
2. Choix du modèle pour projeter la mortalité	4
2.1. Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité d'expérience future	5
2.2. Modèle de Lee-Carter : limites, extension et alternatives.....	10
2.3. Approche de Bongaarts : justification du choix.....	14
3. Ajustement du modèle Bongaarts	16
3.1. Ajustement statistique.....	16
3.2. Ajustement par avis d'expert	19
4. Application : anticipation de la mortalité d'expérience future.....	23
4.1. Résultats de l'ajustement du modèle.....	23
4.2. Sensibilités et mesure du risque d'avis d'expert.....	28
5. Synthèse et conclusion.....	31
Bibliographie	33

1. Introduction

En 1971, Omran [2005] propose une théorie pour rendre compte de l'évolution de la mortalité qui accompagne la transition démographique en Europe d'abord (à partir du XVIII^{ème} siècle), et dans le reste du monde ensuite (un siècle ou deux plus tard). Cette théorie, intitulée transition épidémiologique, reconnaît trois phases dans l'évolution de la mortalité : « l'âge de la peste et de la famine » pendant lequel la mortalité est forte et fluctuante, « l'âge du recul des pandémies » pendant lequel l'espérance de vie augmente fortement et « l'âge des maladies de dégénérescence et de société » pendant lequel la mortalité se stabilise à un niveau bas et l'espérance de vie plafonne. Dans les dernières décennies du XX^{ème} siècle toutefois, la mortalité a repris sa tendance à la baisse dans la plupart des pays occidentaux, compte tenu du recul des maladies cardio-vasculaires et du contrôle des maladies de société (*cf.* par exemple Kamega [2006] pour une présentation des mesures prises en France pour lutter contre les maladies de société à partir des années 1970). Ces avancées ont conduit plusieurs auteurs à étendre la théorie de transition épidémiologique à une quatrième phase, et c'est ainsi que s'est développée la théorie de la transition sanitaire, ajoutant à la donne épidémiologique les différentes réponses de la société aux questions de santé (*cf.* par exemple Meslé et Vallin [2007]).

Meslé et Vallin [2007] avancent que ces transitions revêtent un caractère universel, bien que certains pays rencontrent de grandes difficultés à franchir certaines étapes. En effet, à titre d'exemple les pays d'Afrique subsaharienne n'ont pas franchi la seconde phase de la transition à cause du VIH/Sida et du paludisme, et les pays d'Europe Centrale et de l'ex-URSS ne sont pas parvenus à contrôler les maladies de société ni à lutter efficacement contre les maladies cardio-vasculaires. En avançant le caractère universel de ces transitions, les auteurs anticipent donc une hausse générale de l'espérance de vie, mais considèrent qu'elle s'observera de manière plus ou moins prononcée selon les pays.

Si pour des raisons évidentes cette hausse attendue de l'espérance de vie peut être bien accueillie par les populations, il convient de rappeler qu'elle engendre des contraintes en termes de ressources en période de retraite. Il est donc nécessaire que la population dispose d'un financement lui permettant de se couvrir contre ce risque viager. À cet effet, la rente viagère apparaît être une solution adaptée, comme le rappellent Brouhns et Denuit [2002a] par exemple.

Avec les rentes viagères, le risque viager est transféré de l'assuré à l'assureur, et ce dernier doit alors évaluer son engagement d'assurance avec des tables de mortalité appropriées. C'est d'ailleurs dans ce contexte que depuis 1993 les tables réglementaires en France pour le provisionnement des rentes viagères sont des tables de mortalité prospectives, prenant en compte l'évolution de l'espérance de vie.

En complément, avec les référentiels Solvabilité 2 (en Europe) et IFRS, les assureurs sont tenus d'évaluer leurs engagements d'assurance à partir d'hypothèses réalistes et fines. En pratique, pour les contrats de rentes viagères, les assureurs sont ainsi appelés à construire des tables de mortalité prenant en compte le niveau actuel et l'évolution attendue de la mortalité de leur population assurée (il s'agit de tables d'expérience prospectives spécifiques à chaque assureur). Cet exercice peut toutefois être complexe car (*cf.* Kamega [2011]) :

- les théories et les tendances que l'on peut observer et anticiper au sein de la population générale ne sont pas directement vérifiées au sein de la population assurée, compte tenu de l'existence d'une sélection à l'entrée qui conduit à disposer d'une population assurée différente de la population générale (et en général présentant des taux de décès inférieurs à ceux de la population générale à tous les âges) ;
- l'assureur ne peut pas directement inclure l'évolution attendue des différentes causes de décès dans ses analyses et ses anticipations car l'accès à l'information sur les causes de décès est généralement limité pour les populations assurées ;
- la construction d'une table d'expérience prospective conduit à déterminer une dérive temporelle, et nécessite à ce titre un recul historique et un volume de données que les assureurs n'ont pas dans leur portefeuille.

Généralement, deux approches sont envisagées pour construire des tables prospectives à partir de données d'expérience : une démarche endogène à partir des seules données du portefeuille ou une démarche exogène utilisant une référence externe de mortalité (*cf.* Planchet et Lelieur [2007]).

Aujourd'hui, la seconde approche est souvent retenue pour pallier les difficultés associés à des échantillons de taille réduite, comme souvent en ce qui concerne les portefeuilles d'expérience, même à l'échelle nationale pour un pays comme la France. En effet, à titre d'exemple pour la construction des tables d'expérience TGH/TGF05, réglementaires en France depuis 2007, les données d'expérience par génération ont été positionnées par rapport aux tables de la population générale française de 1962 à 2000 (sachant que les données d'expérience utilisées pour la construction de ces tables réglementaires

comptent 700 000 rentiers et 2 000 000 de lignes et couvrent la période 1993-2005, *cf.* Planchet [2006]).

De manière générale, plus le périmètre des données d'expérience est restreint (faible recul, faible exposition, faible nombre de rentiers, etc.), plus les difficultés pour construire une loi d'expérience prospective sont nombreuses et le recours à des informations externes (positionnement par rapport à des tables de mortalité externes, calibrage de paramètres par avis d'expert, etc.) devient nécessaire.

Dans ce contexte ce travail s'attache à proposer une démarche pour construire, sur la base d'informations externes, des lois d'expérience prospectives à partir de petits échantillons. En pratique, la solution proposée consiste à intégrer des contraintes liées aux avis d'expert dans la modélisation des taux de décès prospectifs.

Plan

L'étude présente dans un premier temps (*cf.* section 2) les étapes du processus du choix du modèle retenu : de la présentation d'outils et de méthodes classiques pour projeter la mortalité au choix de l'approche de Bongaarts. Dans un second temps (*cf.* section 3), l'étude présente l'ajustement du modèle de Bongaarts, à partir de données statistiques d'une part et à partir de références externes (avis d'expert) d'autre part. La troisième étape (*cf.* section 4) est alors consacrée à la mise en œuvre du modèle pour anticiper la mortalité future de la population d'expérience. Des tests de sensibilité y sont également réalisés dans un contexte d'assurance.

L'ensemble des travaux est conduit sur la base d'une population en « groupe fermé », arrêtée à une date d'inventaire, compte tenu du contexte de l'étude (évaluation de l'engagement de l'assureur en termes de rentes viagères).

2. Choix du modèle pour projeter la mortalité

Dans un contexte où le volume des données d'expérience est limité, les problématiques liées à l'estimation des paramètres et de la tendance future de la mortalité revêtent une importance particulière dans le choix du modèle.

En effet, d'une part, lors de l'ajustement des paramètres aux données il existe un risque que la valeur estimée diffère de la valeur correspondant au risque sous-jacent. Ce risque est directement lié aux fluctuations d'échantillonnage (*cf.* Kamega et Planchet [2010] et Kamega et Planchet [2011b] pour une présentation du risque d'estimation en présence de fluctuations d'échantillonnage) et est d'autant plus important que la taille de l'échantillon est petite. En conséquence, dans la présente étude, une attention particulière doit être accordée au nombre de paramètres dans le modèle.

D'autre part, la constitution de la tendance future pour la mortalité doit idéalement être le fruit de la combinaison d'un ajustement statistique aux données passées, et d'un ajustement par avis d'expert pour tenir compte du contexte futur. En effet, les projections de mortalité ne doivent pas se limiter à des approches descriptives, consistant à reproduire les tendances passées, mais à des approches prédictives, consistant à anticiper le futur. À cet effet, la prise

en compte d'une dimension quantitative et qualitative est fortement souhaitable pour les projections de mortalité. En pratique toutefois, en présence d'un faible volume de données, la dimension quantitative pour déterminer les tendances futures de la mortalité ne peut pas être intégrée car on ne dispose pas des tendances passées. Les tendances futures de mortalité sont alors complètement déterminées à partir d'une dimension qualitative (à partir d'informations et de contraintes externes). Aussi, dans la présente étude, une attention particulière doit également être accordée à la prise en compte d'une dimension qualitative dans le modèle.

Dans cette section, on présente les étapes du processus du choix du modèle compte tenu, entre autres, de ces contraintes sur le nombre de paramètres et sur la prise en compte d'une dimension qualitative. Ainsi, dans un premier temps on présente les principales problématiques rencontrées dans le cadre d'une projection de la mortalité (*cf.* sous-section 2.1), puis on présente le modèle classique de Lee-Carter ainsi que ses principales limites, extensions et alternatives (*cf.* 2.2), et enfin on présente et justifie le choix du modèle de Bongaarts plutôt que celui de Lee-Carter (*cf.* 2.3) ou l'une de ses extensions.

2.1. Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité d'expérience future

Comme indiqué en introduction, l'existence d'une sélection à l'entrée conduit à disposer d'une population assurée différente de la population générale. Ainsi, en pratique l'allongement de la durée de vie au sein de la population générale d'un pays ne se traduit pas automatiquement par un allongement analogue au sein de la population assurée d'un organisme assureur.

Une autre différence significative entre ces deux populations porte sur la profondeur des données disponibles (*cf.* Barrieu et al. [2010]) : généralement de 5 à 15 ans d'historique au sein d'une population assurée, contre plusieurs dizaines d'années au sein d'une population générale. C'est notamment pour cette raison que les actuaires modélisent généralement la tendance de la mortalité de la population assurée à partir de la tendance de la mortalité de la population générale, malgré les différences existant entre ces deux populations. Cette approche n'est toutefois pas satisfaisante et c'est dans ce contexte qu'une réflexion s'impose sur la procédure à suivre pour projeter la mortalité d'expérience.

Ainsi, cette sous-section présente quelques outils et méthodes propres à la modélisation de la mortalité future de la population assurée. En pratique, cette sous-section présente les méthodes de projection par cause (*cf.* paragraphe 2.1.1), par extrapolation (*cf.* paragraphe 2.1.2) et par avis d'expert (*cf.* paragraphe 2.1.3). Le dernier paragraphe de cette sous-section est consacré aux méthodes de fermeture des tables.

Les risques liés à l'incertitude des projections de mortalité ne sont toutefois pas repris ici (pour information, une revue de ces risques est présentée dans Booth et Tickle [2008] et Kamega et Planchet [2011b]).

2.1.1. Hétérogénéité et projection de la mortalité par cause

Ce paragraphe présente le traitement de l'hétérogénéité et l'analyse de la mortalité par cause dans le cadre de projections.

Prise en compte des facteurs d'hétérogénéité : une démarche utile et nécessaire mais présentant des risques

Au-delà des différences entre population générale et population assurée évoquées ci-dessus, il existe des différences au sein de la population assurée : entre portefeuilles assurés d'une part, compte tenu des différences dans la sélection, et au sein d'un même portefeuille assuré d'autre part, compte tenu des facteurs d'hétérogénéité.

L'identification et la prise en compte de ces facteurs d'hétérogénéité sont utiles et nécessaires dans le cadre d'une projection de la mortalité.

En effet, d'une part il apparaît que la modélisation du risque de décès fournit des résultats différents au niveau agrégé (c'est-à-dire en considérant la population au global) et désagrégé (c'est-à-dire en segmentant la population en sous-populations), ce qui traduit un biais d'hétérogénéité (*cf.* par exemple Dreesbeke et al. [1989]). Comme indiqué dans Kamega et Planchet [2011c], ce résultat est souvent expliqué par le phénomène « mobile-stable », selon lequel les individus du segment avec un taux de sortie élevé sortent en premier et augmentent ainsi la proportion d'individus du segment avec un taux de sortie faible lorsque le temps s'écoule. Ainsi, on comprend que dès que la répartition de la population évolue, comme souvent lors de l'évaluation d'une provision d'assurance, une prise en compte de l'hétérogénéité est indispensable, afin de disposer d'une loi d'expérience robuste.

D'autre part, la prise en compte de l'hétérogénéité peut permettre d'améliorer l'intégration d'une dimension qualitative dans les projections de mortalité. À titre d'exemple, pour affiner les hypothèses de projection pour la mortalité, Van Den Berg Jeths et al. [2001] structurent les différents facteurs d'hétérogénéité en distinguant deux catégories : celle des facteurs exogènes (consommation de tabac, consommation d'alcool, comportements alimentaires, activité physique, etc.) et celle des facteurs endogènes (prédispositions héréditaires, sexe, âge, indice de masse corporelle, etc.). Il apparaît alors que dans la catégorie des facteurs exogènes, les facteurs de risque sont très sensibles aux politiques sanitaires et de santé publique et les projections de mortalité associées peuvent ainsi naturellement intégrer une dimension qualitative (par avis d'expert). Dans la catégorie des facteurs endogènes, l'impact des politiques sur la mortalité future est plus modeste et la dimension qualitative dans les projections de mortalité est en conséquence plus limitée.

Au final toutefois, la prise en compte de l'hétérogénéité doit être appréciée en tenant compte notamment des problématiques de choix de segmentation optimale (*cf.* Planchet et Leroy [2009]) et de risque d'estimation (*cf.* Kamega et Planchet [2010] et Kamega et Planchet [2011c]), qui peuvent conduire le modèle à devenir inadapté.

Prise en compte des causes de mortalité : problème de données, de cohérence et de qualité statistique

Comme indiqué en annexe de Kamega et Planchet [2011a], l'analyse des causes de mortalité pourrait être utile pour justifier les différences de mortalité entre sous-populations, même si le lien entre l'hétérogénéité et la mortalité par cause n'est pas simple : il s'agit de domaines distincts dont les relations sont complexes. Les analyses de l'hétérogénéité et de la mortalité par cause apparaissent toutefois complémentaires. En effet, à titre d'exemple, la prise en compte de l'hétérogénéité entre les fumeurs et les non fumeurs doit se traduire dans l'analyse de la mortalité par cause par un poids significatif des décès dus au cancer des poumons dans la sous-population des fumeurs.

L'analyse et la projection de la mortalité par cause présente des avantages et des inconvénients. Parmi les avantages, on note notamment qu'il est plus facile avec cette approche de tenir compte de la connaissance sur la science médicale, sur le comportement des individus ou sur les changements environnementaux (à titre d'exemple il est plus simple de prendre en compte la connaissance épidémiologique pour des causes de décès spécifiques que pour des décès toutes causes). Sur le plan qualitatif, cette démarche permet donc de disposer de projections plus structurées.

En pratique toutefois l'analyse de la mortalité par cause est peu utilisée compte tenu de l'insuffisance des données et des informations disponibles. En effet, dans un premier temps la cause de décès renseignée peut être relativement arbitraire. Par ailleurs, il est peu fréquent qu'un décès résulte d'une cause unique, et on est donc généralement confronté à des situations de multi-causalité. Sur ce point, on peut par exemple citer les études de l'Australian Bureau of Statistics (*cf.* ABS [2009]) qui illustrent qu'en 2007 3,1 causes de décès sont recensés en moyenne par décès dans le pays et que seul 20 % des décès enregistrés relève d'une cause de décès unique. Enfin, une troisième limite dans les données est la forte interaction entre les risques de décès, ce qui rend difficile l'identification de la (ou des) cause(s) exacte(s) du décès (le risque de décéder d'une grippe est différent selon que l'on vive ou non avec le VIH/Sida). Ce problème d'interdépendance des causes de décès est notamment à l'origine du problème de cohérence observée entre les projections de mortalité par cause et les projections de mortalité toutes causes (*cf.* par exemple Wilmoth [1995], qui constate que les projections de mortalité par cause conduisent à des taux de mortalité supérieurs à ceux issus de projections de mortalité globales).

Un autre inconvénient significatif de l'analyse de la mortalité par cause est la dégradation de la qualité statistique des estimations (compte tenu de la baisse du volume d'information et de la multiplication des modèles, *cf.* Alho [2007]).

C'est dans ce contexte que Tabeau et al. [2001a] indiquent que si les analyses par causes sont souhaitables pour les projections de court ou moyen terme, elles s'avèrent particulièrement risquées pour les projections de long terme qui nous intéressent ici.

2.1.2. Projection par extrapolation des taux de décès

Ce paragraphe présente les avantages et inconvénients d'une projection de la mortalité par extrapolation (selon qu'il s'agisse d'une extrapolation par période ou par génération), ainsi que les particularités de cette approche en termes d'interdépendance.

Extrapolation des taux de décès : projection par période ou par génération ?

Comme évoqué ci-dessus, les projections de mortalité toutes causes sont plus robustes sur le plan statistique que les projections par cause, mais en contrepartie elles sont moins intéressantes sur le plan qualitatif. Parmi les projections toutes causes, on distingue généralement les projections par période (dans ce cas on considère une dérive des taux de décès au fil du temps) ou par génération (dans ce cas on considère une dérive au fil des générations).

Les projections toutes causes par génération présentent l'avantage de pouvoir facilement prendre en compte l'évolution des facteurs d'hétérogénéité exogènes sur la mortalité, car dans ce cas on peut aisément intégrer la période latente entre le changement de comportement et son impact sur les taux de décès. Cette approche présente toutefois une limite importante, qui porte sur les censures généralement observées dans les données pour les personnes nées au cours des 100 dernières années. En effet, avec ces censures on ne dispose pas d'observations complètes pour certaines générations et on est usuellement amené à retenir des hypothèses qui biaisent les projections (*cf.* Tabeau et al. [2001a]).

Ce problème n'apparaît pas dans les projections toutes causes par période, ce qui est un avantage pour cette méthode alternative. Un autre argument justifiant l'intérêt de la méthode de projection par période (aux dépens de la méthode par génération) est que l'effet période sur la mortalité est généralement plus fort que l'effet génération, comme le rappellent Booth et Tickle [2008]. L'approche par période présente toutefois un inconvénient significatif par rapport à l'approche par génération : la prise en compte d'une dimension qualitative dans les projections y est plus limitée.

Au final, les démarches par période ou par génération présentées ici apparaissent donc complémentaires, chacune d'entre elles présentant des avantages et des inconvénients. C'est d'ailleurs dans ce contexte que ce sont développés les modèles APC (Age-Période-Cohorte), selon lesquels les taux de décès évoluent selon l'âge, la date (période) et la génération (*cf.* un exemple de modèle APC au paragraphe 2.2.2 avec le modèle de Renshaw et Haberman [2005]).

Traitement de l'interdépendance dans les extrapolations : interdépendance entre les paramètres, entre les âges et entre les périodes

On note que dans le cadre d'extrapolation à partir de modèle paramétrique incluant plusieurs paramètres, une attention particulière doit également être accordée au traitement de l'interdépendance entre les paramètres, qu'il s'agisse d'une extrapolation par période ou par génération (sur ce point, *cf.* Booth et Tickle [2008] ou Delwarde et Denuit [2006]).

Au-delà de l'interdépendance entre les paramètres présentée ci-dessus, une réflexion s'impose également sur l'interdépendance entre les âges et entre les périodes en cas d'extrapolation.

Aussi, dans leur article sur la dépendance cachée au sein du risque de longévité, Loisel et Serant [2007] apportent un éclairage sur la mesure et l'illustration de l'interdépendance entre les âges et entre les périodes (leurs illustrations concernent les 60-90 ans observés sur la période 1969-1999 en France à partir de données issues de l'INSEE). Les auteurs apprécient dans un premier temps l'interdépendance entre les âges pour une période t . Ils considèrent à cet effet la variation des logits des taux de décès entre t et $t+1$ (variation intitulée « logit's Deltas ») et constatent alors une corrélation entre les âges. Dans un second temps, ils étudient l'interdépendance entre les périodes à partir de la représentation de la moyenne sur tous les âges des « logit's Deltas » sur la période 1969-1999. Il y apparaît que la série constituée correspond à un processus autorégressif d'ordre 1 (dont le coefficient est significativement négatif). Il existe donc bien une interdépendance entre les périodes.

2.1.3. Projection par avis d'expert

Au-delà des approches qui consistent à projeter les causes de mortalité (cf. 2.1.1) ou à directement extrapoler la mortalité globale (par période ou par génération, cf. 2.1.2), la projection de la mortalité peut être réalisée par avis d'expert.

Généralement, la méthode retenue à cet effet consiste à poser une contrainte sur le niveau de l'espérance de vie à une date future (à l'image de ce qui est proposé dans Planchet [2007] sur la base du modèle de Lee-Carter). Booth et Tickle [2008] présentent toutefois plusieurs démarches alternatives : avis d'expert sur les tendances des taux de décès par causes (et par âge), avis d'expert sur la vitesse de réduction des taux de mortalité par âge, etc.

L'approche par avis d'expert permet d'intégrer, au moins sur un plan qualitatif, la connaissance épidémiologique, démographique, environnementale, etc. dans les projections. En outre, elle présente également un intérêt particulier lorsque les données d'expérience disponibles sont limitées (comme dans le cadre de la présente étude). L'inconvénient de cette approche est sa subjectivité et son biais potentiel. Ainsi, Booth et Tickle [2008] rappellent que le conservatisme et les divergences dans les avis d'expert ne permettent pas d'envisager des projections de long terme avec cette méthode. En outre, les résultats présentés par les auteurs illustrent que les projections par avis d'expert aux États-Unis, au Royaume-Uni et en Australie ont eu tendance à sous-estimer à terme l'amélioration de la mortalité, que ce soit par rapport aux projections par extrapolation ou par rapport aux observations *ex post*.

L'approche consistant à projeter la mortalité par avis d'expert apparaît ainsi nécessaire en cas de petits échantillons, mais présente des limites importantes pour des projections de long terme. Cette approche est par ailleurs complémentaire aux deux autres.

2.1.4. Fermeture de la table

Quelle que soit l'approche retenue au final, la question du traitement de la mortalité aux grands âges se pose. En effet, au-delà de 90 ans, on dispose rarement de données de bonne qualité (du moins dans un contexte d'assurance). Il convient alors de trouver des solutions pour extrapoler la mortalité aux grands âges, avant ou après l'ajustement : on parle de « fermeture de table de mortalité ».

Ces questions sur la fermeture de la table soulèvent le problème du comportement de la mortalité aux grands âges : existence et niveau d'un éventuel âge limite (biologiquement maximal), décroissance de la croissance des taux de décès au-delà d'un certain âge, etc. (*cf.* Delwarde et Denuit [2006]). De nombreux modèles ont ainsi été développés par des démographes et des actuaires pour tenir compte de ces réalités. Quashie et Denuit [2005] présentent et comparent plusieurs de ces modèles.

Comme le rappellent Planchet et Thérond [2006], la question de la fermeture de la table est importante dans le cas de la construction d'une table pour des provisionnements de rentes viagères, mais cette importance doit être relativisée si les rentiers d'âge très élevé sont en proportion modeste dans le portefeuille. En effet, les auteurs illustrent qu'en figeant les taux de décès de la table TH00-02 à 95 ans (en provoquant alors une sortie brutale à 120 ans), l'impact sur la provision à 75 ans est inférieur à 1 % (impact inférieur à 3 % sur une provision à 85 ans). De même, Quashie et Denuit [2005] illustrent que l'écart entre deux méthodes de fermeture en termes de provisionnement n'est véritablement significatif qu'à des âges très élevés.

2.2. Modèle de Lee-Carter : limites, extension et alternatives

La sous-section précédente présente les avantages et inconvénients de quelques outils et méthodes pour modéliser la mortalité future, dans le contexte de l'étude. Cette nouvelle sous-section présente désormais les caractéristiques de l'approche classique de Lee-Carter pour modéliser la mortalité d'expérience future. En particulier, cette sous-section s'attache à mettre en perspective les problématiques formulées dans l'analyse des outils et méthodes existants avec les propriétés de l'approche de Lee-Carter.

2.2.1. Présentation du modèle de Lee-Carter

Le modèle de Lee-Carter, aujourd'hui un standard, a déjà fait ses preuves à de maintes reprises en démographie. Il a notamment prouvé son efficacité sur diverses populations (USA, Canada, Chili, Japon, Belgique, Suède, etc., *cf.* références associées dans Delwarde et Denuit [2006]).

En termes de méthodes, la démarche de Lee-Carter consiste à estimer les taux de mortalité futurs à partir d'une extrapolation des tendances passées, après avoir décomposé la mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle. Il s'agit ainsi d'une projection à partir d'une extrapolation par période. Le modèle s'écrit ainsi (*cf.* Lee [2000]) :

$$\ln(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t},$$

où α_x s'interprète comme la valeur moyenne des $\ln(\mu_{x,t})$ au cours du temps, k_t représente l'évolution générale de la mortalité au cours du temps, β_x traduit la sensibilité (à l'échelle logarithmique) de la mortalité instantanée à l'âge x par rapport à k_t et $\varepsilon_{x,t} \sim N(0; \sigma_\varepsilon)$ représente l'erreur du modèle (sous l'hypothèse d'homoscédasticité).

Afin de rendre le modèle identifiable, il convient par ailleurs d'ajouter deux contraintes sur les paramètres ; on retient généralement :

$$\sum_x \beta_x = 1 \text{ et } \sum_t k_t = 0.$$

Les paramètres du modèle sont alors estimés par une méthode de moindres carrés.

Il convient de noter que le modèle de Lee-Carter est donc un modèle semi-paramétrique dans lequel la forme de la mortalité n'est pas contrainte.

2.2.2. Limites, extensions et alternatives au modèle de Lee-Carter

Ce paragraphe présente quelques limites du modèle de Lee-Carter, ainsi que des extensions ou des alternatives envisageables pour y remédier.

Traitement de l'hétéroscédasticité : l'approche de Brouhns et al. [2002] (log-Poisson)

Une première limite du modèle de Lee-Carter est l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs requise pour l'estimation par moindres carrés. En effet, cette condition est rarement vérifiée en pratique puisque la variance du logarithme du taux instantané de mortalité croît aux âges élevés, du fait notamment de la baisse des effectifs survivants à ces âges.

Pour pallier à cette limite, Brouhns et al. [2002] ont proposé une adaptation consistant à modéliser le nombre de décès à l'âge x durant l'année t à l'aide d'une loi de Poisson. Ils modélisent ainsi $D_{x,t}$, qui suit une loi de Poisson de paramètre $R_{x,t}\mu_{x,t}$, où $R_{x,t}$ représente l'exposition au risque à l'âge x durant l'année t et $\mu_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)$ (l'expression du taux de décès instantané est donc identique à celle du modèle de Lee-Carter, avec les mêmes interprétations des paramètres et les mêmes contraintes). Comme le rappellent Delwarde et Denuit [2006], cette nouvelle spécification, qui recourt au principe du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres, permet de lever l'hypothèse d'homoscédasticité et reconnaît la variabilité plus grande des taux bruts aux âges élevés (due aux effectifs réduits).

Extension de la dimension temporelle : l'approche de Renshaw et Haberman [2003]

L'approche de Lee-Carter classique consiste à extrapoler dans le futur des tendances constatées dans le passé, en ne faisant intervenir qu'un seul paramètre temporel. Ainsi, l'approche de Lee-Carter dispose d'une dimension qualitative très limitée et peut en conséquence se révéler trop rigide dans certaines situations. En effet, Renshaw et Haberman [2003] constatent par exemple que le modèle classique de Lee-Carter ne permet pas de rendre compte de l'impact des maladies de société (suicide notamment), ni de l'effet du VIH/Sida dans la mortalité des 20-39 en Angleterre et au Pays de Galles au cours des dernières décennies du XX^{ème} siècle. Il s'agit d'une seconde limite pour l'approche de Lee-Carter.

Pour pallier cette limite, Renshaw et Haberman [2003] propose de rajouter une dimension temporelle au modèle de Lee-Carter classique pour projeter la mortalité. Le modèle s'écrit alors :

$$\ln(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x^1 k_t^1 + \beta_x^2 k_t^2 + \varepsilon_{x,t},$$

avec des notations analogues à celle du modèle de Lee-Carter classique. Ce nouveau dispose alors d'une dimension qualitative plus importante.

Prise en compte de la génération : l'approche de Renshaw et Haberman [2005]

Comme évoqué ci-dessus, l'approche de Lee-Carter classique présente une faible dimension qualitative et la prise en compte d'un avis d'expert dans l'évolution présumée de la mortalité (au titre de l'accès aux soins, des progrès de la médecine, de l'apparition ou de la suppression de maladies, de l'évolution du style de vie, etc.) est donc limitée¹.

L'alternative de Renshaw et Haberman [2003], qui consiste à améliorer la dimension qualitative du modèle en augmentant la dimension temporelle, est une première approche pour limiter cette insuffisance (*cf.* ci-dessus). En complément, toujours afin d'améliorer la dimension qualitative, Renshaw et Haberman [2005] ont étendu le modèle de Lee-Carter classique afin de tenir compte d'un effet de génération. À cet effet, ils considèrent que l'expression des taux de décès instantanés s'écrit :

$$\mu_{x,t} = \exp\left(\alpha_x + \beta_x^0 \gamma_{t-x} + \beta_x^1 k_t\right),$$

où l'effet génération est représenté par $\beta_x^0 \gamma_{t-x}$ (la génération étant symbolisée par $z = t - x$). Il s'agit d'un modèle APC (Age-Période-Cohorte), dans lequel la mortalité est sensible à l'âge, à la période et à la génération.

¹ Dans d'autres contextes, la faible dimension qualitative du modèle de Lee-Carter peut toutefois être présenté comme un avantage (comme le font par exemple Delwarde et Denuit [2006]), notamment lorsque les avis d'experts divergent significativement.

On remarque que si $\beta_x^0 = 0$ on retrouve l'expression classique du modèle de Lee-Carter (prenant en compte uniquement les effets d'âge et de période), et d'un autre côté si $\beta_x^1 = 0$ l'on dispose d'un modèle ne prenant en compte que les effets d'âge et de génération.

Calibrage en présence de données limitées : quelques alternatives à Lee-Carter et à ses extensions

Le modèle de Lee-Carter et ses extensions s'appuient, entre autres, sur le calibrage de la tendance pour ensuite l'extrapoler pour les années futures. En particulier, ces modèles sont construits pour un contexte de gros volume de données dans lequel on suppose qu'il n'y a pas de fluctuations d'échantillonnage à un âge fixé. Pour toutes ces raisons, un historique de données important est nécessaire. Si à l'échelle d'une population nationale le volume de données nécessaire est généralement disponible, à l'échelle d'une population assurée le volume de données se révèle généralement insuffisant pour structurer correctement la table complète. En outre, le nombre élevé de paramètres, notamment pour les extensions au modèle de Lee-Carter, et le faible volume de données peut conduire à des irrégularités importantes au titre des fluctuations d'échantillonnage (ce phénomène est illustré dans Planchet et Lelieur [2007]).

Pour faire face à ces limites, il peut être utile de se tourner vers des modèles alternatifs moins paramétrés, mettant en jeu des expressions analytiques portant sur les âges et/ou les années. À titre d'exemple, on peut s'appuyer sur des régressions linéaires simples des logits des taux bruts (qui présentent l'avantage de varier entre $-\infty$ et $+\infty$; en outre, on constate empiriquement que le *logit* des taux de décès est approximativement affine au-delà de 25 ans). Dans ce cas, deux paramètres sont estimés.

Ainsi, en régressant sur l'année calendaire notée t (pour un âge x fixé), on peut considérer le modèle alternatif suivant $\ln\left(q_{x,t}/(1-q_{x,t})\right) = \alpha_x + \beta_x \times t + \varepsilon_{x,t}$. Par ailleurs, en régressant sur les logits des taux de la table de référence notés $\ln\left(q_{x,t}^{ref}/(1-q_{x,t}^{ref})\right)$, on peut également considérer le modèle alternatif suivant $\ln\left(q_{x,t}/(1-q_{x,t})\right) = \alpha + \beta \times \ln\left(q_{x,t}^{ref}/(1-q_{x,t}^{ref})\right) + \varepsilon_{x,t}$. Cette deuxième démarche permet au surplus une extrapolation aisée des logits des taux d'expérience dans les plages d'âge pour lesquelles les données d'expérience seraient insuffisantes.

Ces deux exemples sont détaillés dans Planchet et Thérond [2006].

Sensibilité de la mortalité au cours du temps : quelques alternatives à Lee-Carter

Une autre limite importante du modèle de Lee-Carter est l'hypothèse que la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge x par rapport à k_t , notée β_x

(avec $d \ln(\mu_{x,t})/dt = \beta_x \times dk_t/dt$, soit $\beta_x = d \ln(\mu_{x,t})/dk_t$), est constante au cours du temps (cf. Planchet et Thérond [2006]). Cette hypothèse revient à considérer qu'à un âge donné, l'amélioration de la mortalité au cours du temps est la même, quelles que soient les dates de la période considérée. Cette contrainte n'est pas vérifiée en pratique. En effet, à titre d'exemple Bongaarts [2004] illustre à partir de la population féminine suédoise, que l'amélioration de la mortalité à 75 ans sur la période 1950-2000 est plus forte que celle observée sur les périodes 1850-1900 et 1900-1950. De manière générale, l'auteur rappelle que l'amélioration de la mortalité au cours du temps a tendance à diminuer dans le temps pour les plus jeunes, et qu'elle a tendance à augmenter dans le temps pour les plus âgés.

L'approche de Bongaarts [2004], présentée ci-après en 2.3, permet, entre autres, de relâcher cette contrainte (cf. notamment en 2.3.2).

2.3. Approche de Bongaarts : justification du choix

Le modèle de Lee-Cater présente l'avantage d'avoir fait ses preuves à maintes reprises dans la modélisation de la mortalité future et de disposer de bonnes propriétés, ce qui en fait un standard.

Cette approche présente toutefois quelques limites. Certaines sont « universelles » (problème d'hétéroscédasticité, constance de la sensibilité de la mortalité au cours du temps), et d'autres sont principalement liées au contexte de l'étude sur de petits échantillons (faible dimension qualitative, grand nombre de paramètres – notamment pour les extensions du modèle –).

Il convient alors de retenir au final un modèle qui ne reprenne pas ces limites, tout en y gardant les principaux avantages (peu de paramètres, simplicité opérationnelle, facilité d'interprétation, etc.). Aussi, cette sous-section présente et justifie le choix de l'approche de Bongaarts.

2.3.1. Présentation de l'approche de Bongaarts

On considère ici le modèle logistique décalé de Bongaarts [2004] défini par :

$$\mu_{x,t} = \frac{\alpha_t e^{\beta x}}{1 + \alpha_t e^{\beta x}} + \gamma_t,$$

où les paramètres α_t et γ_t sont dépendants du temps, et le paramètre β est indépendant du temps (Bongaarts [2004] constatant empiriquement que le paramètre β dépend peu du temps).

Dans cette spécification des taux de décès instantanés, on reconnaît facilement une adaptation du modèle paramétrique proposé par Thatcher [1999] dans laquelle les taux de décès ne sont pas constants au cours du temps². On

² Pour mémoire, le modèle de Thatcher correspond lui-même à une adaptation du modèle classique de Makeham, ajusté pour corriger la surestimation des taux de décès conditionnels aux âges élevés observés en pratique.

retrouve ainsi la dimension explicative du modèle, dans laquelle Bongaarts [2004] considère que la composante liée au taux instantané de décès environnemental (notée $(\mu_{x,t})_e = \gamma_t$) et celle liée au vieillissement (notée

$$(\mu_{x,t})_v = \frac{\alpha_t e^{\beta x}}{1 + \alpha_t e^{\beta x}})$$

dépendent du temps. Pour mémoire, le paramètre γ_t représente généralement l'ajustement de la mortalité pour les jeunes adultes, le paramètre α_t représente le niveau de mortalité et le paramètre e^β représente l'augmentation du risque de mortalité avec l'âge.

Concernant la composante des taux de décès liée au vieillissement, Bongaarts relève en particulier que l'évolution à la hausse ou à la baisse de la mortalité au cours du temps peut être interprétée comme un décalage d'âge cours du temps. Cette interprétation est possible car il montre que la composante vieillesse de la mortalité à l'âge x pour l'année t est identique à la valeur de la composante à l'âge $x - S_{t_0,t}$ pour l'année t_0 , soit

$$(\mu_{x,t})_v = \frac{\alpha_{t_0} e^{\beta(x - S_{t_0,t})}}{1 + \alpha_{t_0} e^{\beta(x - S_{t_0,t})}}, \text{ avec } S_{t_0,t} = -\frac{\ln(\alpha_t / \alpha_{t_0})}{\beta}.$$

Cette propriété, qui n'est toutefois pas valable pour les âges proches de 0, est à l'origine de l'expression « modèle logistique décalé ».

Sur la base de ce modèle, Bongaarts [2004] propose une procédure en quatre étapes pour anticiper la mortalité future :

- 1) Calibrer le modèle de Thatcher $\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x}}{1 + \alpha e^{\beta x}} + \gamma$ pour différentes périodes ou années passées t (ajustement statistique). Ce calibrage permet de disposer de séries pour les paramètres α_t , β_t et γ_t .
- 2) Fixer la valeur du paramètre β en considérant la moyenne de β_t , et déterminer à nouveau les séries pour les paramètres α_t et γ_t (les nouvelles séries ne devant différer que légèrement de celles issus de la première étape).
- 3) Extrapoler les paramètres α_t et γ_t obtenus dans l'étape 2 sur la durée de projection souhaitée.
- 4) En déduire une projection des taux de mortalité à partir du modèle de Bongaarts, sur la base du paramètre β et des paramètres extrapolés α_t et γ_t .

2.3.2. Justification de l'approche de Bongaarts

L'approche de Bongaarts [2004] consiste à ajuster les observations de chaque année à l'aide d'un modèle paramétrique (en l'occurrence ici le modèle

de Thatcher), puis à modéliser l'évolution au cours du temps de ces paramètres afin de fournir des projections de la mortalité dans le futur. Cette démarche présente de nombreux atouts au regard des principes et caractéristiques évoquées ci-dessus. Ainsi, l'approche de Bongaarts :

- permet de ne pas majorer le nombre de paramètres du modèle de Lee-Carter classique : l'information annuelle est condensée dans un petit nombre de paramètres ;
- est moins contrainte dans la dimension temporelle que le modèle de Lee-Carter classique, étant donné qu'elle fait intervenir deux paramètres temporels (contre un seul dans Lee-Carter) ;
- considère que l'amélioration de la mortalité au cours du temps évolue dans le temps (contrairement au modèle de Lee-Carter). En effet, Bongaarts [2004] montre que l'amélioration de la mortalité au cours du temps évolue au fil des années (il considère notamment que cette amélioration est égale au produit du taux d'évolution de la mortalité selon l'âge et de la sensibilité au temps de l'espérance de vie, ces deux composantes évoluant dans le temps) ;
- accorde une attention particulière à la modélisation de la mortalité aux grands âges ;
- fournit une dimension qualitative à la modélisation, d'une part compte tenu de la forme paramétrique du modèle sous-jacent (modèle de Thatcher, avec un paramètre au titre de la mortalité environnementale, un paramètre au titre du niveau de mortalité et un paramètre au titre de l'augmentation du risque de décès avec l'âge), et d'autre part compte tenu de la propriété de « décalage » du modèle de Bongaarts (qui permet d'interpréter l'évolution de la mortalité au cours du temps comme un décalage d'âge).

De surcroît, Bongaarts [2004] précise que son approche est adaptée à des populations pour lesquelles on ne dispose qu'une d'une (ou de très peu) d'année(s) d'historique, ce qui est souvent le cas dans les pays non industrialisés (les données dans ces pays étant souvent limitées). Dans ce cas, Bongaarts [2004] indique que la projection des paramètres α_t et γ_t se fait alors uniquement à partir d'hypothèses et que son approche devient de fait principalement qualitative.

3. Ajustement du modèle Bongaarts

Après avoir présenté et justifié le choix de l'approche de Bongaarts dans la section précédente, il convient ici d'en effectuer un ajustement. L'ajustement est réalisé à partir des données individuelles d'une part (ajustement statistique, cf. 3.1) et à partir d'informations externes d'autre part (ajustement par avis d'expert, cf. 3.2).

3.1. Ajustement statistique

Cette sous-section présente l'ajustement statistique des paramètres, réalisé dans le cadre de l'étape 1 de l'approche de Bongaarts [2004]. Dans un premier

temps, on présente la méthode statistique retenue à cet effet (cf. 3.1.1), puis on présente dans un second temps le test statistique retenu (cf. 3.1.2).

3.1.1. Méthode : ajustement par maximum de vraisemblance (et moindres carrés)

La méthode retenue est l'ajustement par (pseudo) maximum de vraisemblance discret (méthode de De Vylder, cf. Delwarde et Denuit [2006] ou Planchet et Thérond [2006]).

De la méthode du maximum de vraisemblance à un problème de moindres carrés

Soit d_x le nombre de décès observé à l'âge x , parmi R_x individus soumis au risque de décès à cet âge. On considère alors le nombre de décès observé d_x comme une réalisation de variables aléatoires D_x de la loi binomiale de paramètres $(R_x; q_x)$, où q_x correspond à la probabilité annuelle de décès théorique à l'âge x . La vraisemblance associée à la réalisation d'un nombre d_x de décès s'écrit alors $\binom{R_x}{d_x} q_x^{d_x} (1-q_x)^{R_x-d_x}$ et on cherche alors à maximiser $\sum_x d_x \ln(q_x) + (R_x - d_x) \ln(1 - q_x)$.

En pratique toutefois, on réalise généralement l'approximation de la loi de \hat{q}_x (estimation des taux de décès basée sur l'échantillon) par une loi normale, et en remplaçant la variance théorique par la variance estimée le problème de maximisation ci-dessus peut être valablement approximé par un problème de minimisation de (cf. Delwarde et Denuit [2006] ou Planchet et Thérond [2006]) :

$$\sum_x \frac{R_x}{\hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)} (q_x - \hat{q}_x)^2.$$

Dans ce cas, la méthode de vraisemblance est ramenée, pour chaque année (ou période), à un problème de moindres carrés pondérés dans le cas non linéaire.

Évaluation du taux de décès théorique

Les quantités R_x et \hat{q}_x étant observées (en particulier, \hat{q}_x est déterminé à partir de l'estimation des taux bruts de Hoem, cf. une description de la méthode dans Planchet et Thérond [2006]), il reste à déterminer l'expression de q_x (taux de décès théorique) pour résoudre le problème de moindres carrés pondérés. On considère à cet effet

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_u du\right) = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \left(\frac{\alpha e^{\beta u}}{1 + \alpha e^{\beta u}} + \gamma\right) du\right). \quad \text{En posant}$$

$v_u = 1 + \alpha e^{\beta u}$ et en intégrant par changement de variable (à l'image de ce qui est proposé dans Planchet [2010]), on obtient $q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \frac{v'_u}{\beta v_u} du\right) \exp(-\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\beta} \int_x^{x+1} \frac{1}{v} dv\right) \exp(-\gamma)$, et on en déduit :

$$q_x = 1 - \exp(-\gamma) \left(\frac{v_x}{v_{x+1}}\right)^{1/\beta},$$

avec $v_u = 1 + \alpha e^{\beta u}$. C'est à l'aide de cette expression que le problème d'optimisation est résolu.

Détermination des valeurs initiales des paramètres

L'algorithme utilisé pour l'estimation des paramètres ne converge vers la vraie valeur du paramètre qu'à condition de partir d'une valeur initiale assez proche de cette valeur. Une attention particulière doit ainsi être accordée à la détermination de valeurs initiales acceptables.

À cet effet, on s'appuie sur une propriété présentée dans Planchet et Théron [2006], sous l'hypothèse que les taux suivent une loi de Makeham. Cette hypothèse est acceptable ici étant donné qu'en pratique le calibrage est réalisé sur les âges compris entre 30 et 55 ans (*cf.* section 4), et que pour ces âges le modèle de Thatcher est assimilable au modèle de Makeham, étant donné que $\alpha e^{\beta x}$ est généralement petit (il s'agit de la première des deux propriétés importantes soulevées par Thatcher [1999] dans son article).

Avec le modèle de Makeham, on a $q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} (\alpha e^{\beta u} + \gamma) du\right)$, soit au final $q_x = 1 - e^{-\gamma} \left[\exp\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{e^{\beta x} (e^\beta - 1)}$. On observe alors que l'on a $\ln(1 - q_x) = -\gamma + e^{\beta x} (e^\beta - 1) \times \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Pour les q_x proches de zéro, on peut faire l'approximation $\ln(1 - q_x) \approx -q_x$ et on a donc $-q_x \approx -\gamma - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} (e^\beta - 1)$. Il en résulte que $q_{x+1} - q_x \approx \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} (e^\beta - 1)^2$, ce qui conduit à remarquer en prenant le logarithme que :

$$\ln(q_{x+1} - q_x) \approx \ln(e^\beta) \times x + \ln\left(\frac{\alpha}{\beta} (e^\beta - 1)^2\right).$$

Sous l'hypothèse que sur les âges retenus pour l'ajustement, les taux de mortalité suivent une loi de Makeham, les points $(x, y = \ln(q_{x+1} - q_x))$ sont donc alignés sur une droite de pente β . Il s'agit ainsi de réaliser une régression linéaire classique, par moindres carrés, pour en déduire des valeurs initiales pour les paramètres du modèle de Thatcher : la pente de la droite et l'ordonnée à l'origine permettent de déterminer une estimation de β et α ; et la relation

$\gamma = -\ln(1 - q_x) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} (e^\beta - 1)$ permet de déterminer une estimation de γ (en vérifiant que $-\ln(1 - q_x) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} (e^\beta - 1)$ dépend faiblement de l'âge x ³).

3.1.2. Test statistique

Dans le cadre de cette étude, on se limite pour les illustrations au test de significativité globale des paramètres. On suppose ici que ce test est réalisé à partir de la statistique du rapport des vraisemblances qui suit une distribution du Khi-deux sous l'hypothèse nulle H_0 (cette statistique compte parmi les plus utilisées dans ce contexte, avec la statistique de Wald, cf. par exemple Klein et Moeschberger [2005] pour une présentation illustrée).

On considère donc $H_0 : \delta = 0$, soit :

$$\chi_L^2(p) = 2 \left[L(\hat{\delta}) - L(0) \right],$$

où δ représente le vecteur des paramètres (α , β et γ ici) et p représente la dimension δ .

3.2. Ajustement par avis d'expert

L'étape 1 de l'approche de Bongaarts préconise de réaliser l'ajustement statistique pour différentes années ou périodes passées. Toutefois, dans le cadre de cette étude on considère des données limitées et insuffisantes pour réaliser l'ajustement statistique pour différentes années (ou périodes). Aussi, on considère ici, dans le cadre de l'étape 1 de l'approche de Bongaarts, un ajustement statistique pour une année (ou période) de référence uniquement. L'étape 2 de l'approche de Bongaarts relative au paramètre β_t est alors immédiate (puisque l'on a $\beta_t = \beta$). La projection des paramètres γ_t et α_t pour l'étape 3 est ensuite réalisée par avis d'expert. À cet effet, on distingue la projection du paramètre γ_t et celle du paramètre α_t .

Ajustement de la mortalité environnementale

Pour le paramètre γ_t , représentant l'ajustement au titre de la mortalité environnementale (indépendant de l'âge mais concernant principalement les

³ En pratique, on pourra considérer la moyenne pour tous les âges x de l'ajustement.

jeunes adultes), il sera supposé qu'il est constant tout au long de la durée de projection. On a ainsi $\gamma_t = \gamma$.

Ajustement du niveau de la mortalité : première approche

Pour le paramètre α_t , représentant le niveau de mortalité, deux approches sont envisagées pour introduire l'avis d'expert.

La première consiste à utiliser les caractéristiques du modèle logistique décalé. Dans ce cas, pour chaque t futur, on déduit les α_t à partir des décalages d'âge $S_{t_0,t}$ fixés par avis d'expert. Cette approche apparaît toutefois faiblement appréhensive, ce qui limite une prise en compte optimale de l'avis d'expert.

Ajustement du niveau de la mortalité : seconde approche (présentation)

On se tourne alors vers une seconde approche, qui consiste à utiliser l'espérance de vie générationnelle à une date t future et à un âge pivot x donné, à l'image de ce qui est proposé dans Planchet [2007]. Cette notion, notée $e_{x,t}$, est intuitivement plus aisée à intégrer et se calcule par :

$$e_{x,t} = \sum_{h>0} \prod_{k=0}^{h-1} (1 - q_{x+k,t+k}),$$

où h et k sont des entiers. En reprenant l'expression des q_x du modèle retenu, on obtient :

$$e_{x,t} = \sum_{h>0} \exp(-\gamma h) \prod_{k=0}^{h-1} \left(\frac{v_{x+k,t+k}}{v_{x+1+k,t+k}} \right)^{1/\beta},$$

avec $v_{u,t} = 1 + \alpha_t e^{\beta u}$. On remarque ici que l'on suppose que la répartition des décès entre x et $x+1$ s'observe à une même date t : on considère ainsi une évolution en escalier des taux de décès au fil du temps.

Dans le cadre de cette seconde approche, on pose ensuite une expression simple pour projeter α_t , en fonction de t et de deux paramètres a_α et b_α :

- soit $\alpha_t = a_\alpha \times t + b_\alpha$, si l'on anticipe une évolution linéaire du niveau de mortalité,
- ou $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$, si l'on anticipe une évolution exponentielle du niveau de mortalité.

Quelques indications pour faciliter le choix de l'expert entre ces deux expressions pour la projection du niveau de mortalité sont présentées dans le sous-paragraphe suivant.

On en déduit alors facilement une expression de la forme $e_{x,t} = \varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha)$ pour l'espérance de vie générationnelle. On se ramène au final à chercher $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ minimisant l'écart quadratique entre la valeur à dire d'expert pour l'espérance de vie générationnelle (notée $e_{x,t}(\text{expert})$ à un âge pivot x et à une date t) et la prédiction de cette valeur selon l'expression de $e_{x,t}$ ci-dessus. On cherche ainsi à résoudre :

$$\underset{(a_\alpha, b_\alpha)}{\text{Min}} \left[\left(e_{x,t}(\text{expert}) - \varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha) \right)^2 \right],$$

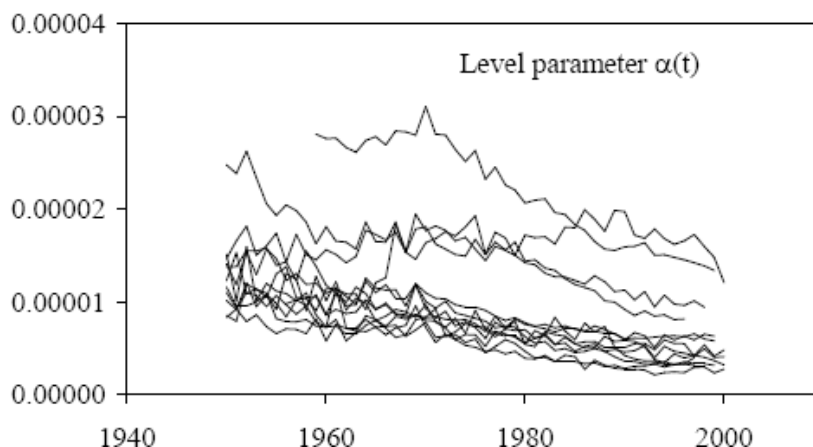
avec $\varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha) = e_{x,t}$.

On note qu'ici l'avis de l'expert s'observe à deux niveaux : d'une part pour le choix de l'expression pour la projection du niveau de moralité α_t (cf. détails dans le sous-paragraphe suivant), et d'autre part pour le choix de l'espérance de vie générationnelle $e_{x,t}(\text{expert})$ (cf. expression à minimiser ci-dessus).

Ajustement du niveau de la mortalité : seconde approche (choix de l'expression pour la projection du niveau de mortalité)

En pratique, l'expression de la projection du niveau de mortalité α_t dépend de la forme attendue pour la courbe d'évolution du paramètre α_t et de la durée de projection, sachant que dans tous les cas on doit raisonnablement s'attendre à une décroissance du paramètre compte tenu du contexte de hausse attendue de l'espérance de vie (cf. introduction).

Pour information, dans le cadre de l'étape 1, Bongaarts [2004] obtient les allures suivantes pour l'évolution du paramètre α_t de 1950 à 2000 au titre de la population générale féminine de 14 pays industrialisés. Il apparaît bien, une tendance à la baisse du niveau de mortalité.

Figure 1 – Évolution du niveau de mortalité (extrait de Bongaarts [2004])Figure 3a: Estimates of level parameter α in the logistic model for 14 countries, females, 1950-2000

Selon la durée de projection et l'allure attendue pour la prédiction du paramètre α_t , l'expression de la projection du niveau de mortalité peut s'assimiler à une décroissance linéaire ou à une décroissance exponentielle.

D'un côté, si l'on anticipe que la baisse absolue du niveau de mortalité sera constante dans les prochaines années, il convient de retenir une décroissance linéaire. Dans ce cas α_t s'exprime simplement par $\alpha_t = a_\alpha \times t + b_\alpha$, et on dispose alors d'une suite arithmétique de valeur initiale $\alpha_0 = b_\alpha$ et de raison a_α (avec $a_\alpha < 0$). La limite de cette approche est que pour des horizons de projection importants, α_t peut mathématiquement devenir négatif (ce qui n'est pas souhaitable en pratique). Cette approche peut ainsi être envisagée lorsque l'on considère que la baisse du niveau de mortalité s'effectuera à un rythme régulier (en valeur absolue) dans le futur et que la projection est réalisée sur un horizon mesuré.

D'un autre côté, si l'on anticipe que c'est plutôt la baisse relative du niveau de mortalité qui sera constante dans les prochaines années, il convient de retenir une décroissance exponentielle. En effet, dans ce cas on considère une diminution de α_t proportionnelle à son niveau, et on pose donc $\frac{d\alpha_t}{dt} = a_\alpha \times \alpha_t$ (avec $a_\alpha < 0$), soit $\alpha_t = \alpha_0 \times \exp(a_\alpha \times t)$. Au final, on dispose ainsi d'une suite géométrique de valeur initiale α_0 et de raison $\exp(a_\alpha)$, et en posant $\alpha_0 = \exp(b_\alpha)$, on a $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$. Cette expression présente l'avantage de rendre mathématiquement impossible l'obtention de niveaux de mortalité négatifs. Cette approche peut ainsi être envisagée lorsque l'on considère que la

baisse du niveau de mortalité diminuera (en valeur absolue) dans le futur et est parfaitement adaptée aux horizons de projection importants.

4. Application : anticipation de la mortalité d'expérience future

Cette section s'attache à mettre en application la démarche proposée ci-dessus pour modéliser la mortalité prospective en présence de données limitées.

En particulier, les applications s'inscrivent dans le cadre de la modélisation de la mortalité prospective en Afrique subsaharienne francophone et s'appuient à ce titre sur les données d'expérience utilisées pour la construction des tables de mortalité réglementaires dans la zone CIMA/FANAF⁴ pour les contrats d'assurance en cas de vie et en cas de décès. Ces données ont été collectées en 2009, sont observées sur les années 2003 à 2006 et comptent des troncatures à gauche (relatives aux entrées après le 01/01/2003) et des censures à droite (relatives aux sorties avant le 31/12/2006 pour un motif autre que le décès). Ces données, qui sont exploitables uniquement sur les 30-55 ans, sont présentées en détail dans Planchet et al. [2010].

Dans le cadre de cette étude, on limite l'exploitation de ces données à la population masculine de la Côte d'Ivoire, ce qui permet de répondre à la volonté de tenir compte de l'hétérogénéité au sein de la zone étudiée (zone qui pour mémoire comprends plusieurs pays).

4.1. Résultats de l'ajustement du modèle

Cette sous-section présente les résultats des ajustements statistiques (*cf.* 4.1.1) et par avis d'expert (*cf.* 4.1.2), ainsi qu'une illustration des projections des taux de mortalité (*cf.* 4.1.3).

4.1.1. Résultats de l'ajustement statistique

L'ajustement statistique est réalisé au titre des points 1 et 2 de l'approche de Bongaarts. Les statistiques descriptives relatives aux données utilisées sont présentées dans le tableau suivant, pour chaque année d'observation de la population assurée.

⁴ Zone couvrant les pays membres de la CIMA (Conférence Interafricaine sur les Marchés de l'Assurance) et représentés par des sociétés d'assurance ou de réassurance de la FANAF (Fédération des sociétés d'Assurances de droits National Africaines), à savoir le Bénin, le Burkina Faso, la Côte d'Ivoire, le Mali, le Niger, le Sénégal et le Togo, ainsi que le Cameroun, la Centrafrique, le Congo Brazzaville, le Gabon, le Tchad.

Tableau 1 – Statistiques ventilées par année (Côte d'Ivoire - Homme)

Homme Côte d'Ivoire (pop. ass.)	Exposition	Âge moyen	Taux décès moyen	Taux décès moyen (borne inf. à 95%)	Taux décès moyen (borne sup. à 95%)
2003	163 755	43,7 ans	0,36%	0,33%	0,38%
2004	161 056	44,0 ans	0,40%	0,37%	0,43%
2005	125 797	44,4 ans	0,43%	0,40%	0,47%
2006	99 048	43,4 ans	0,42%	0,38%	0,46%
2003-2006	549 656	43,9 ans	0,40%	0,38%	0,41%

La faible profondeur des données (quatre année d'historique uniquement) et les fluctuations d'échantillonnage associées à la taille de l'échantillon ne permettent pas d'identifier de tendance dans l'évolution de la mortalité au fil des années. Aussi, dans le cadre de cette étude, on considère une seule période d'observation t (comme le permet Bongaarts [2004]), correspondant à la période 2003-2006.

Pour revenir sur l'approche de Bongaarts, dans une première étape, on réalise l'ajustement des trois paramètres α_t , β_t et γ_t à partir de la méthode présentée ci-dessus en 3.1.1 (moindres carrés pondérés).

À cet effet, on commence par déterminer des valeurs initiales acceptables, et on réalise donc une régression linéaire simple de $y = \ln(q_{x+1} - q_x)$ sur x , telle que $y = a_y \times x + b_y + \varepsilon_y$. On obtient les estimations suivantes : $\hat{a}_y = 0,06451$ et $\hat{b}_y = -10,68118$ (avec des probabilités de rejeter à tort l'hypothèse H_0 de nullité du paramètre selon le test de Student respectivement égales à 1,8 % et à $9,27.10^{-10}$). À partir de la démarche présentée en 3.1.1, on en déduit les valeurs initiales suivantes : $\hat{\alpha}_i = 1,89.10^{-7}$, $\hat{\beta}_i = 6,45.10^{-2}$ et $\hat{\gamma}_i = 3,58.10^{-3}$.

À partir de ces valeurs initiales, on procède à la mise en œuvre de l'optimisation pour estimer les paramètres α_t , β_t et γ_t . Les résultats sont présentés dans le tableau suivant. À titre d'information, les résultats des estimations de Bongaarts pour la population générale masculine (moyenne des estimations entre 1950 et 2000, cf. Bongaarts [2004]) sont également présentés pour la France et pour la moyenne de 14 pays industrialisés.

Tableau 2 – Ajustement statistique (étapes 1 et 2 de Bongaarts)

Période (t)	Alpha (α_t)	Beta (β_t)	Gamma (γ_t)
Valeur initiale (régression lin.)	1,89E-07	6,45E-02	3,58E-03
Côte d'Ivoire, exp. 2003-2006	2,05E-04	6,45E-02	-3,07E-05
Bongaarts (France) (*)	4,20E-05	1,01E-01	9,80E-04
Bongaarts (14 pays indus.) (*)	3,12E-05	1,05E-01	7,50E-04

(*) Moyenne des valeurs moyennes obtenues entre 1950 et 2000 pour la population générale masculine (respectivement pour la France et pour 14 pays industrialisés, cf. Bongaarts [2004]).

Il ressort de ces résultats que le niveau de mortalité moyen de la population assurée ivoirienne entre 2003 et 2006 est supérieur au niveau de mortalité moyen de la population générale française et des pays industrialisés entre 1950 et 2000. En revanche, dans le cas de la population assurée de la Côte d'Ivoire, l'évolution de la mortalité avec l'âge est plus modérée. Enfin, on note que dans le cas de la population assurée ivoirienne, l'ajustement de la mortalité pour les jeunes adultes correspond à un ajustement à la baisse (à l'image de ce qu'obtient Thatcher [1999] pour les hommes d'Angleterre et du Pays de Galles âgés de plus de 30 ans entre 1980 et 1982).

Sur le plan statistique, il apparaît que le modèle est significatif au seuil de 5 % (la valeur du test empirique est supérieure à celle de la table au seuil de 5 % à 3 degrés de liberté).

Pour illustrer l'adéquation de l'ajustement aux taux bruts, le graphique ci-dessous compare les taux bruts et les taux ajustés déduits de l'estimation des paramètres présentés dans le Tableau 2, et le tableau suivant compare les décès observés et les décès prédits (décès théoriques déduits des taux ajustés).

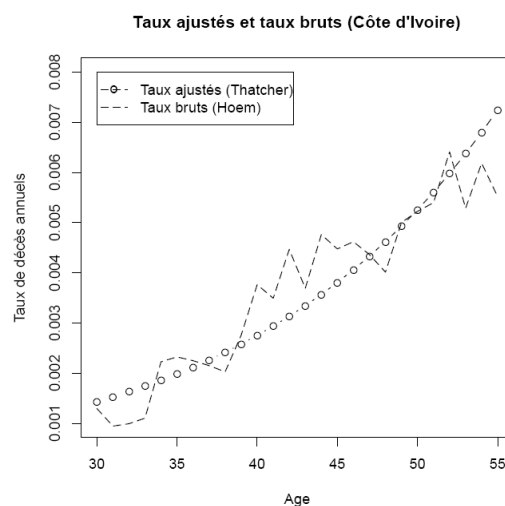
Figure 2 – Taux de décès ajustés et taux de décès bruts (Côte d'Ivoire - H)

Tableau 3 – Comparaison des réalisations / prédictions de décès

Homme Côte d'Ivoire (pop. ass.)	Exposition	Décès observés	Décès prédits	Différences relatives	Décès prédits (borne inf. à 95%)	Décès prédits (borne sup. à 95%)	Taux décès moyen (décès observés)	Taux décès moyen (décès prédits)
30-39 ans	144 931	276	294	6,4%	260	327	0,19%	0,20%
40-44 ans	126 517	514	401	-21,9%	362	441	0,41%	0,32%
45-49 ans	149 578	672	650	-3,3%	600	699	0,45%	0,43%
50-55 ans	128 630	726	779	7,4%	725	834	0,56%	0,61%
Total	549 656	2 188	2 124	-2,9%	2 034	2 214	0,40%	0,39%

Au global, il apparaît un écart inférieur à 3 % entre les décès théoriques (prédits à partir des taux ajustés) et les décès observés. Par tranche d'âges toutefois, il apparaît des écarts plus importants : les décès prédits pour les 40-44 ans minorent ainsi de plus de 20 % les décès observés.

4.1.2. Résultats de l'ajustement par avis d'expert

L'ajustement par avis d'expert est relatif à l'étape 3 de l'approche de Bongaarts, dans laquelle les paramètres α_t et γ_t sont projetés pour chaque t futur. En pratique, cette projection est réalisée dans notre étude par avis d'expert.

Concernant la mortalité environnementale γ_t , on considère qu'elle est constante tout au long de la durée de projection. On a ainsi $\hat{\gamma}_t = \hat{\gamma} = -3,07.10^{-5}$.

Concernant le niveau de mortalité α_t , on considère qu'elle évolue dans le temps selon l'expression $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$; on considère ainsi une décroissance exponentielle du niveau de mortalité au fil des années. Pour mémoire, les paramètres $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ sont obtenus en minimisant l'écart quadratique entre la valeur d'expert de l'espérance de vie générationnelle (notée $e_{x,t}$ (expert) à un âge x et à une date t) et la prédiction de cette valeur (prédiction à partir de l'expression de $e_{x,t} = \varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha)$, cf. sous-section 3.2).

La projection par avis d'expert du paramètre $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$ est ainsi directement déduite de la valeur d'expert retenue pour l'espérance de vie générationnelle à un âge pivot x et à une date t . Pour faciliter le choix de l'expert, on présente dans le tableau ci-dessous trois références pour l'espérance de vie générationnelle, à l'âge $x = 30$ et à la date $t = t_0 = 0$ (en considérant que la date initiale $t = t_0 = 0$ correspond à l'année 2006) :

- La première est issue de la table d'expérience ajustée en supposant que sur toute la durée de projection le niveau de mortalité α_t est constant. Pour le calcul de l'espérance de vie, on considère par ailleurs que la table issue des taux ajustés se ferme brutalement à 105 ans (pour mémoire, la méthode de fermeture n'a un impact significatif sur le

provisionnement que si les individus considérés pour l'évaluation ont un âge très élevé à la date de calcul, *cf.* 2.1.4).

- La deuxième est issue des tables de la population assurée masculine française (tables prospectives réglementaires TGH 05). Pour mémoire, cette table se ferme à 120 ans.
- La troisième est issue des tables de la population générale masculine française (tables prospectives INED H). Pour information, cette table se ferme à 105 ans.

Tableau 4 – Références pour l'espérance de vie à 30 ans (en 2006)

Espérance de vie générationnelle (Age = 30, Date/Année = 2006)	
Côte d'Ivoire (Table du moment sans évolution de l'espérance de vie, population assurée, années 2003-2006) (*)	51,4
TGH05 (Tables prospectives réglementaires en France, population assurée, générations 1900-2005)	60,6
INED H (Tables prospectives en France, population générale, générations 1897-1996)	54,0

(*) Dans ce cas il ne s'agit pas d'une espérance de vie générationnelle, mais d'une espérance de vie simple, ne prenant donc pas en compte l'évolution de la mortalité.

Ainsi par exemple, en considérant par avis d'expert que l'espérance de vie générationnelle de la population assurée ivoirienne est raisonnablement inférieure à celle de la population générale française, on peut supposer qu'elle est égale à 53 ans (contre 54 ans pour la population générale française).

On cherche alors les valeurs de $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ permettant de minimiser

$$\left(53 - \sum_{h>0} \exp(-\hat{\gamma}h) \prod_{k=0}^{h-1} \left(\frac{1 + \alpha_{t+k} e^{\hat{\beta}(x+k)}}{1 + \alpha_{t+k} e^{\hat{\beta}(x+1+k)}} \right)^{1/\hat{\beta}} \right)^2, \text{ avec } \alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha).$$

À cet effet, on considère que les valeurs initiales des paramètres $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ correspondent aux valeurs obtenues à la date initiale $t = t_0 = 0$, soit $(a_\alpha)_i = 0$ et $(b_\alpha)_i = \ln(\hat{\alpha}_0) = -8,49$. On obtient alors les estimations suivantes : $\hat{a}_\alpha = -3,24.10^{-3}$ et $\hat{b}_\alpha = -8,49$. L'estimation par avis d'expert du niveau de mortalité à la date t est ainsi $\hat{\alpha}_t = \exp(-3,24.10^{-3} \times t - 8,49)$ (pour $t = 0$ en 2006, $t = 1$ en 2007, etc.). Dans ce cas, l'estimation de l'espérance de vie théorique est $\hat{e}_{x,t} = 53,0$ (on retrouve ainsi le « 53 ans » fixé par avis d'expert).

4.1.3. Illustrations des projections

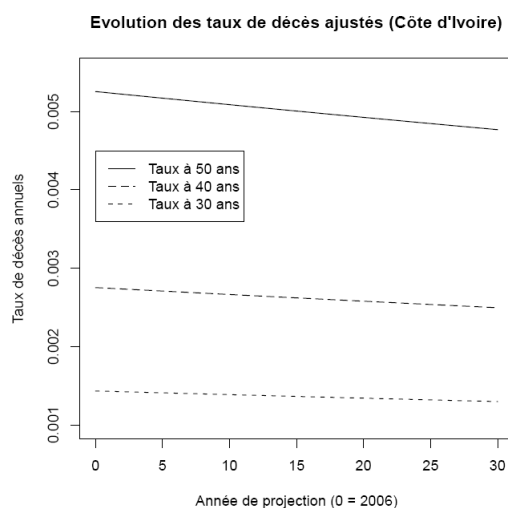
Au final, les taux de décès ajustés à un âge x et à une date t sont notés

$$q_{x,t} = 1 - \exp\left(-\hat{\gamma}\right) \left(\frac{1 + \exp\left(\hat{a}_\alpha \times t + \hat{b}_\alpha\right) e^{\hat{\beta}x}}{1 + \exp\left(\hat{a}_\alpha \times t + \hat{b}_\alpha\right) e^{\hat{\beta}(x+1)}} \right)^{1/\hat{\beta}}, \text{ et en considérant que } t = 0$$

en 2006, on a ainsi $\hat{\gamma} = -3,07.10^{-5}$, $\hat{a}_\alpha = -3,24.10^{-3}$, $\hat{b}_\alpha = -8,49$ et $\hat{\beta} = 6,45.10^{-2}$. Cette expression permet notamment de projeter les taux de décès dans le cadre de l'étape 4 de l'approche de Bongaarts.

Sur ces bases, le graphique suivant présente l'évolution dans le temps des taux de décès à différents âges (en l'occurrence à 30 ans, 40 ans et 50 ans).

Figure 3 – Évolution des taux de décès ajustés (Côte d'Ivoire - H)



Au fil du temps, il ressort une baisse des taux de décès ajustés cohérente avec l'amélioration anticipée de la mortalité (hausse de l'espérance de vie).

4.2. Sensibilités et mesure du risque d'avis d'expert

Pour mémoire, les résultats des projections présentés dans la sous-section précédente sont issus d'un avis d'expert à plusieurs niveaux : forme de la décroissance du paramètre représentant le niveau de la mortalité α_t (choix d'une décroissance exponentielle), niveau de l'espérance de vie générationnelle à 30 ans (âge pivot) en 2006 (choix de 53 ans), âge de fermeture de la table (choix de 105 ans).

Dans cette sous-section, on apprécie la sensibilité des projections à ces différentes hypothèses. En particulier, le premier paragraphe (*cf.* 4.2.1) est consacré à l'analyse de la sensibilité des projections de α_t au choix de l'âge pivot utilisé pour l'avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle. Dans le

second paragraphe (cf. 4.2.2), on se place dans un contexte d'assurance et on mesure la sensibilité d'une provision d'assurance *best estimate* au risque d'avis d'expert (tant sur le niveau de l'espérance de vie, que sur la forme de la décroissance du niveau de mortalité α_t et sur l'âge de fermeture de la table).

4.2.1. Cohérence des avis d'expert (sensibilité au choix de l'âge pivot)

Pour apprécier la cohérence des avis d'expert, on sollicite un avis d'expert sur l'espérance de vie à différents âges pivots, et on étudie la cohérence des projections du niveau de mortalité α_t qui en découlent. Dans le cadre de cette analyse, on considère que le paramètre représentant le niveau de mortalité suit une décroissance exponentielle.

Tableau 5 – Cohérence des avis d'expert (Côte d'Ivoire - H)

Avis d'expert sur l'esp. de vie gén. 2006 (esp. de vie du moment issue de la table d'expérience)	a	b	alpha (décroissance exponentielle)			
			t=0	t=10	t=20	t=30
A 30 ans : 53 ans (51,4 ans)	-3,24E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,98E-04	1,92E-04	1,86E-04
A 40 ans : 43 ans (42,3 ans)	-1,88E-03	-8,49E+00	2,05E-04	2,01E-04	1,97E-04	1,94E-04
A 40 ans : 44 ans (42,3 ans)	-4,47E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,96E-04	1,87E-04	1,79E-04
A 50 ans : 34 ans (33,7 ans)	-1,07E-03	-8,49E+00	2,05E-04	2,03E-04	2,00E-04	1,98E-04
A 50 ans : 35 ans (33,7 ans)	-4,69E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,95E-04	1,86E-04	1,78E-04

Il apparaît logiquement que dans l'expression du niveau de mortalité, la sensibilité à l'avis d'expert sur l'espérance de vie s'illustre principalement sur la raison de la suite géométrique, notée $\exp(a_\alpha)$ pour mémoire. La valeur initiale de la suite géométrique, notée $\alpha_0 = \exp(b_\alpha)$, semble quant à elle inchangée dans les différents scénarios.

La cohérence et l'ajustement des différentes opinions d'experts peuvent ainsi être évalués à partir du seul paramètre a_α .

4.2.2. Risque d'avis d'expert sur les provisions

Pour mesurer le risque d'avis d'expert sur les provisions, on considère un régime de rentes en cours de service et une population de rentiers composée d'un seul individu de sexe masculin et âgé de $x_0 = 55$ ans au 31/12/2009 (date initiale de calcul notée i_0 , avec $i_0 = t_0 + 3$ en considérant que $t_0 = 0$ correspond à l'année 2006). La rente annuelle individuelle est supposée égale à 1 € à la date initiale de calcul (i_0), et est supposée être revalorisée de 2 % chaque année. Le régime prévoit le versement de cette rente jusqu'au décès.

En pratique, il s'agit ici de présenter la provision *best estimate* dans plusieurs situations. À cet effet, on considère un scénario central dans lequel l'espérance de vie générationnelle à 30 ans est égale à 53 ans, le niveau de mortalité connaît une décroissance exponentielle et la table d'expérience

prospective construite se ferme à 105 ans (hypothèses d'avis d'expert retenues jusqu'alors dans ce travail). Dans les scénarios alternatifs testés, on considère une évolution de ces hypothèses d'avis d'expert.

Dans tous les cas, on évalue des provisions déterministes : on suppose ainsi qu'il n'y a pas d'aléa sur la durée de vie restante des assurés.

La provision *best estimate* est calculée à la date initiale à partir de la relation suivante :

$$L_{i_0} = \sum_{i=1}^{\omega} F(i) \times (1+r_i)^{-i},$$

où r_i représente le taux d'actualisation des flux de l'échéance i (issu de la courbe des taux à la date initiale), ω représente la dernière échéance de versement des flux et $F(i) = (1+2\%)^{i-1} \prod_{u=0}^{i-1} (1 - q_{x_0+u, i_0+u})$ représente les flux probables des prestations à payer en i (à terme échu), avec x_0 l'âge de l'individu à la date initiale i_0 et q_{x_0+u, i_0+u} le taux de décès ajusté issu de la table construite à partir des avis d'expert. La courbe d'actualisation retenue est la courbe de l'Institut des Actuaire⁵ au 31/12/2009.

Une illustration des résultats des calculs de provisions dans les différents scénarios est présentée dans le tableau suivant.

⁵ Courbe disponible sur le site de l'Institut des Actuaire : http://www.institutdesactuaire.com/gene/link.php?doc_link=../docs/2010003190313_I A20091231.xls.

Tableau 6 – Sensibilité de la provision aux avis d’expert (Côte d’Ivoire - H)

Avis d'expert sur l'esp. de vie gén. à 30 ans en 2006 / forme décroissance niveau mortalité / âge fermeture (estimation esp. de vie gén. théorique)	Provision <i>best estimate</i> au 31/12/2009 (homme âgé de 55 ans en 2009)	
	Provision <i>best estimate</i>	Ecart relatif avec (1)
52 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (52,00 ans)	20,40	-1,1%
53 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (53,00 ans) (1)	20,62	0,0%
53 ans / décroiss. linéaire / fermeture 105 ans (53,14 ans)	20,64	0,1%
53 ans / décroiss. expo. / fermeture 120 ans (53,00 ans)	20,61	0,0%
54 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (54,00 ans)	20,85	1,1%
57 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (57,00 ans)	21,53	4,4%

À la lecture de ce tableau, il apparaît plusieurs enseignements. D’une part, on note qu’une évolution d’un an de l’avis d’expert sur l’espérance de vie générationnelle à 30 ans engendre, toutes choses égales par ailleurs, une évolution d’environ 1 % de la provision d’assurance. De même, une évolution quatre ans (soit de plus de 7 %) de l’avis d’expert sur l’espérance de vie générationnelle à 30 ans engendre une évolution de 4 à 5 % de la provision d’assurance (en pratique, l’impact sur la provision est minoré par l’effet actualisation).

D’autre part, il ressort que pour l’évolution du niveau de mortalité, le choix d’une décroissance linéaire aux dépens d’une décroissance exponentielle a un impact limité sur le montant de la provision. En revanche, le choix de la forme de la décroissance semble influencer sur la performance du processus de minimisation permettant de rapprocher l’espérance de vie théorique à celle issue de l’avis d’expert (avec la décroissance exponentielle on converge plus précisément vers l’avis d’expert pour l’espérance de vie).

Enfin, il apparaît que le passage d’une fermeture de 105 ans à 120 ans a, toutes choses égales par ailleurs, également un impact limité sur la provision (à l’image de ce qui était annoncé au paragraphe 2.1.4).

5. Synthèse et conclusion

Dans le cadre de régimes de rentes, l’assureur est tenu d’apprécier le niveau actuel et l’évolution attendue de la mortalité spécifique de sa population assurée, compte tenu du contexte de hausse générale de l’espérance de vie (y compris dans les pays en développement, *cf.* Meslé et Vallin [2007]) et d’introduction de nouveaux référentiels justifiant l’évaluation réaliste et fine des risques (par opposition à l’approche prudente souvent retenue). Il doit alors construire des tables d’expérience prospectives.

À cet effet, lorsque le volume de données est restreint, en particulier lorsque l'on dispose de peu d'années d'historique (comme souvent dans les pays en développement), l'utilisation du modèle classique de Lee-Carter n'est pas souhaitable et le recours à des informations externes est nécessaire. La dimension qualitative (avis d'expert) dans les projections prend alors une place importante. Autre conséquence : la présence de données limitées engendre un risque significatif d'estimation des paramètres compte tenu des fluctuations d'échantillonnage (*cf.* Kamega et Planchet [2010] et Kamega et Planchet [2011b]). Dans ce cas, une attention particulière doit également être accordée au nombre de paramètres dans le modèle.

Dans ce contexte, l'approche proposée par Bongaarts [2004], qui consiste à utiliser le modèle de Thatcher [1999] et à faire évoluer les paramètres au cours du temps, se révèle utile pour répondre à ces contraintes. Aussi, dans cette étude le modèle de Bongaarts est utilisé pour projeter la mortalité d'expérience. À cet effet, dans un premier temps, les trois paramètres du modèle sont estimés à la date initiale par ajustement statistique. Dans un second temps, en termes de projection, deux des trois paramètres (ceux relatif à la mortalité environnementale et à l'augmentation de la mortalité avec l'âge) sont supposés constants au cours du temps, et les valeurs futures du troisième paramètre sont déduites de l'avis d'expert retenu pour l'espérance de vie générationnelle.

La solution proposée dans ce travail permet alors de disposer d'un outil simple pour projeter la mortalité d'expérience en l'absence de données d'historique suffisantes (quatre ans dans l'exemple numérique de la présente étude). Seul un avis d'expert sur le niveau de l'espérance de vie générationnelle (et dans une moindre sur la forme de la décroissance du niveau de mortalité et sur l'âge de fermeture de la table) est nécessaire.

En complément, une appréciation du risque lié au choix de l'avis d'expert est réalisée dans ce travail. Pour un engagement viager à 55 ans, il apparaît alors qu'un écart d'un an dans le choix de l'espérance de vie conduit à un écart d'environ 1 % sur la provision, et qu'un écart de 4 ans conduit à un écart de 4 à 5 %. Les impacts de la forme de l'évolution de la mortalité (forme linéaire ou exponentielle) ou du choix de l'âge de fermeture de la table apparaissent secondaires.

Il convient toutefois de noter que certaines problématiques susceptibles de faire l'objet de développements importants n'ont pas été traitées dans le présent travail. Ainsi, aucune projection de la mortalité par cause n'a été réalisée alors qu'une telle analyse pourrait être utile (*cf.* paragraphe 2.1.1), notamment dans le contexte des données africaines utilisées ici compte tenu de l'impact potentiel du VIH/Sida dans la mortalité. Par ailleurs, ni l'interdépendance entre les paramètres, ni celle entre les âges, ni celle entre les périodes (*cf.* paragraphe 2.1.2) n'ont été étudiées, alors qu'elles sont confirmées par plusieurs études (*cf.* par exemple Booth et Tickle [2008] et Loisel et Serant [2007]). Enfin, hormis le risque systématique d'avis d'expert, les mesures d'incertitudes (risque systématique d'estimation, risque systématique de modèle, risque mutualisable) n'ont pas été développés ici, alors qu'elles présentent un intérêt particulier dans le contexte de données limitées (*cf.* par exemple Booth et Tickle [2008] et Kamega et Planchet [2011b]).

Bibliographie

- ABS [2009] « Causes of death », *Australian Bureau of Statistics*.
- Alho J. M. [2007] « Méthodes utilisées pour établir les projections relatives à la mortalité – Distributions prédictives de la mortalité future », *ISSA, Quinzième Conférence internationale des actuaires et statisticiens de la sécurité sociale*.
- Barrieu P., Bensusan H., El Karoui N., Hillairet C., Loisel S., Ravanelli C., Salhi Y. [2010] « Understanding, Modelling and Managing Longevity Risk: Key Issues and Main Challenges », *Scandinavian Actuarial Journal*.
- Bongaarts J. [2004] « Long-Range Trends in Adult Mortality: Models and Projections Methods », *Population Council, WP192*.
- Booth H., Tickle L. [2008] « Mortality modeling and forecasting: A review of methods », *The Australian Demographic and Social Research Institute, WP3*.
- Brouhns N., Denuit M. [2002a] « Risque de longévité et rentes viagères – I. Évolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours », *Belgian Actuarial Bulletin, Vol. 2, No. 1*.
- Brouhns N., Denuit M., Vermunt J. K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics, No. 31*.
- Delwarde A., Denuit M. [2006] « Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives », *Economica*.
- Droesbeke J.-J., Fichet B., Tassi P. [1989] (éditeurs) « Analyse statistique des durées de vie », *Economica*.
- Kamega A. [2006] *Impact de la sursuicidité en Bretagne sur les garanties temporaires décès*, Mémoire d'actuariat, EURIA.
- Kamega A. [2011] *Quelle anticipation de l'espérance de vie dans les portefeuilles d'assurance ?*, Chaire transitions démographiques, transitions économiques, Intervention du 27/01/2011.
- Kamega A., Planchet F. [2010], « Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2136*.
- Kamega A., Planchet F. [2011a], « Analyse et comparaison des populations générale et assurée en Afrique subsaharienne francophone pour anticiper la mortalité future », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2138*.
- Kamega A., Planchet F. [2011b], « Construction de tables de mortalité prospectives sur un groupe restreint : mesure du risque d'estimation », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2140*.
- Kamega A., Planchet F. [2011c], « Hétérogénéité : mesure du risque d'estimation dans le cas d'une modélisation intégrant des facteurs observables », *Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 11, No. 21*.
- Klein J. P., Moeschberger M. L. [2005] « Survival Analysis – Techniques for Censored and Truncated Data », *Springer, 2nd edition*.
- Lee R. [2000], « The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications », *North American Actuarial Journal, Vol. 4, No. 1*.

- Loisel S., Serant D. [2007], « In the core of longevity risk: hidden dependence in stochastic mortality models and cut-offs in prices of longevity swaps », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2044*.
- Omran A. R. [2005] « The Epidemiologic Transition: A Theory of the Epidemiology of Population Change », *The Milbank Quarterly, Vol. 83, No. 4, Reprinted*.
- Meslé F., Vallin J. [2007] « De la transition épidémiologique à la transition sanitaire », *Médecine Tropicale, No. 67*.
- Planchet F. [2006], « Tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers – (Tables TGH 05 et TGF 05) – Notice de présentation », *Institut des Actuaire*.
- Planchet F. [2007], « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress*.
- Planchet F. [2010] *Modèles de durée – Tables de mortalité*, Support de cours 2010-2011, Version 2.11 (novembre 2010).
- Planchet F., Kamega A., Ziguélé M. [2010], « Confection des tables de mortalité réglementaires pour la zone CIMA », *CIMA/WINTER & Associés (confidentiel)*.
- Planchet F., Lelieur V. [2007] « Utilisation des méthodes de Lee-Carter et log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillon », *Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 7, No. 14*.
- Planchet F., Leroy G. [2009] « Quel niveau de segmentation pertinent ? », *La Tribune de l'Assurance, n. 142*.
- Planchet F., Thérond P. [2006] « Modèles de Durée – Applications actuarielles », *Economica*.
- Quashie A., Denuit M. [2005] « Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges », *Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, WP*.
- Renshaw A., Haberman S. [2003] « Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement », *Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 33*.
- Renshaw A., Haberman S. [2005] « Mortality Reduction Factors Incorporating Cohort Effects », *Actuarial Research Paper (Cass Business School), No. 160*.
- Tableau E., Ekamper P., Huisman C., Bosch A. [2001a] « Predictiong Mortality from Period, Cohort or Cause-Specific Trends: a Study of Four European Countries », *extrait de* Tableau E., Van Den Berg Jeths A., Heathcote C. (edited by) [2001b] « Forecasting Mortality in Developed Countries – Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective », *Kluwer*.
- Thatcher A. R. [1999] « The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age », *Journal of the Royal Statistical Society, 162*.
- Van Den Berg Jeths A., Hoogenveen R., De Hollander G., Tableau E. [2001] « A Review of Epidemiological Approaches to Forecasting Mortality and Morbidity », *extrait de* Tableau E., Van Den Berg Jeths A., Heathcote C. (edited by) [2001b] « Forecasting Mortality in Developed Countries –

Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective », *Kluwer*.

Wilmoth J. R. [1995] « Are mortality projections always more pessimistic when disaggregated by cause of death? », *Mathematical Population Studies, Vol. 5(4)*.