

Evaluation stochastique des contrats d'épargne : agrégation des trajectoires de l'actif & mesure de l'erreur liée à l'agrégation

Oberlain Nteukam T.^β Frédéric Planchet*

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

ISFA – Actuarial School ^γ

WINTER & Associés ^λ

Résumé

Dans ce papier¹, nous nous intéressons à l'optimisation du temps de calcul de la valeur des options observées sur les contrats d'assurance vie dans le cadre des simulations monte-carlo.

Nous proposons une technique très simple à mettre en œuvre qui consiste à regrouper le faisceau des trajectoires du processus initial en fonction des quantiles. Ce regroupement permet aussi d'estimer directement le poids (ie. la probabilité d'occurrence) que nous accordons à chacun des scénarios discrétisés. La mesure de la distance entre le processus initial et le processus discrétisé est réalisée au moyen de la norme L2. Nous montrons que cette distance décroît selon le nombre de trajectoires du processus discrétisé. Le processus discrétisé est ensuite utilisé dans l'évaluation des contrats d'assurance vie. Nous constatons qu'un choix judicieux de la discrétisation permet de correctement estimer la valeur d'une option européenne. Enfin, dans le cadre de l'évaluation des contrats en euro, l'erreur liée au remplacement des trajectoires du processus initial par celles du processus discrétisé peut être réduite à moins de 5 %.

MOTS-CLEFS : Contrats Euros, TMG, UC, Garantie Plancher, *Best Estimate*, Modèles stochastiques, Simulation, Quantile.

^β Contact : onteukamteugua@winter-associes.fr

* Corresponding author. Contact : fplanchet@winter-associes.fr

^γ Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 – France.

^λ WINTER & Associés – 55 avenue René Cassin - 69009 Lyon – France.

¹ Version du 10 mars 2010.

SOMMAIRE

1	INTRODUCTION	3
2	CARACTERISTIQUES GENERALES DU PROCESSUS DISCRETISE.....	3
2.1	DEFINITION.....	3
2.2	LOI DU PROCESSUS	4
2.3	DISTANCE L^2 ENTRE $\xi(t)$ ET $S(t)$	5
3	CAS PARTICULIER D'UN MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE.....	6
3.1	LOI DU PROCESSUS	7
3.2	DISTANCE DANS L^2	8
3.3	EVALUATION D'UNE OPTION EUROPEENNE	9
3.4	ILLUSTRATIONS	11
4	APPLICATION A L'EVALUATION D'UN PORTEFEUILLE D'EPARGNE.....	14
4.1	DESCRIPTION DU CONTRAT	14
4.1.1	Évaluation de la garantie	15
4.1.2	Stratégie financière et modélisation du portefeuille d'actifs.....	16
4.2	CALCUL DU PRIX DE L'OPTION DE TAUX MINIMUM GARANTI.....	16
4.2.1	Processus initial.....	16
4.2.2	Processus discrétisé	16
4.3	APPLICATION.....	18
4.3.1	Hypothèses de modélisation	18
4.3.2	Résultats	18
5	CONCLUSION.....	22
6	BIBLIOGRAPHIE.....	22

1 INTRODUCTION

La mise en œuvre d'un modèle actif / passif pour l'évaluation des provisions d'un contrat d'assurance vie requiert un volume de calculs très important, dans le cadre de simulations de type Monte-Carlo. En effet, pour chaque trajectoire de l'actif, l'ensemble du passif doit être simulé, du fait des interactions fortes entre l'actif et le passif au travers des rachats et participations aux bénéfiques (cf. PLANCHET et al. [2005]). On parle alors de "simulations dans les simulations" (SdS).

Diverses approches ont été développées pour contourner la difficulté pratique de mise en œuvre des approches SdS, parmi lesquelles les plus usitées sont les optimisations inspirées de l'échantillonnage d'importance (cf. DEVINEAU et LOISEL [2009]) et les techniques de réplification de portefeuille (cf. REVELEN [2009] et SCHRAGER [2008]). Toutefois les techniques d'optimisation sont conçues *a priori* pour le calcul des quantiles du surplus actif / passif dans le cadre de la détermination du capital économique et pas forcément bien adaptées au calcul de la provision dans une logique *best estimate*. Les approches de portefeuille répliquant s'avèrent pour leur part mal adaptées au contexte des portefeuilles d'épargne français du fait de la complexité des clauses de participation aux bénéfiques.

De ce fait, les praticiens ont parfois recourt à une méthode consistant à résumer les évolutions possibles de l'actif en un nombre limité de trajectoires caractéristiques. Cela conduit à proposer un nombre limité de scénarios d'évolution pour l'actif, chacun de ces scénarios étant affecté d'une probabilité de survenance. La difficulté est de construire les scénarios de manière optimale afin d'obtenir une bonne approximation de la valeur de la provision.

L'objectif de ce travail est de proposer une méthode de construction de ces trajectoires caractéristiques et de fournir des outils pour mesurer l'impact sur le résultat de cette simplification.

2 CARACTERISTIQUES GENERALES DU PROCESSUS DISCRETISE

2.1 DEFINITION

On considère un processus $S(t)$ à valeur dans Ω^2 observé sur l'intervalle de temps $[0, T]$. En pratique $S(t)$ pourra représenter la cours d'un actif de type actions ou le rendement d'un processus de prix. On remplace le faisceau de trajectoires de ce processus par un processus simplifié construit de la manière suivante :

- À l'instant t on fixe une partition de Ω , $\left\{ \left[s_{t,j-1}, s_{t,j} \right[, 1 \leq j \leq p \right\}$;

- On pose $\xi_j(t) = \mathbf{E} \left(S(t) \mid S(t) \in \left[s_{t,j-1}, s_{t,j} \right[\right)$ (0.1) ;

² $\Omega = [0, +\infty[,]-\infty, +\infty[\dots$

- On définit le processus $\xi(t)$ en sélectionnant l'une des p trajectoires $\xi_j(t)$, chaque trajectoire étant pondérée par les probabilités $\pi_{t,j} = \mathbf{Pr}(S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[$.

En d'autres termes, on effectue des regroupements de trajectoires en fonction des quantiles de $S(t)$. On pourra par exemple choisir les bornes des intervalles de sorte que $\pi_{t,j} = \frac{1}{p}$, ce que l'on retiendra comme méthode par défaut par la suite. En pratique, on est en général amené à simuler des trajectoires de S , $S_i(t)$, $1 \leq i \leq N$ et on utilise alors l'approximation de $\mathbf{E}(S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[$:

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \text{ avec } \Omega_j = \{i / S_i(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[\text{ et } N_j = |\Omega_j|.$$

On peut noter que dans ce processus, il existe alors deux sources d'erreurs :

- le remplacement des trajectoires de $S(t)$ par le processus $\xi(t)$ obtenu en sélectionnant l'une des p trajectoires $\xi_j(t)$, chaque trajectoire ayant la probabilité $\pi_{t,j} = \mathbf{Pr}(S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[$;
- le mode de construction par simulation qui conduit en remplaçant des espérances théoriques par des espérances empiriques à introduire des fluctuations d'échantillonnage.

Cette discrétisation est en général effectuée dans le cadre de l'évaluation d'options dans des contrats d'assurance, et les projections sont donc effectuées en probabilité risque neutre, ce que l'on supposera par la suite, ce qui revient à faire l'hypothèse qu'il existe un réel $r \geq 0$ tel que $t \rightarrow e^{-rt} S(t)$ soit une martingale. Dans ce papier, on s'intéresse aux propriétés du processus $\xi(t)$, que nous appellerons par la suite par *processus discrétisé* associé à $S(t)$. Nous nous attellerons à quantifier l'erreur générée sur des prix d'options dans l'évaluation des garanties financières des contrats d'épargne.

Tout d'abord, nous allons nous intéresser aux caractéristiques du processus $(\xi(t))_{t \leq T}$. Elles passent par la détermination de la loi de ce processus. Nous étudierons cette loi dans un contexte général ne nécessitant pas de spécifier la loi sous-jacente au processus initial $S(t)$ (section 2.2). La distance (au sens de la norme L^2) entre le processus initial et le processus discrétisé permet de donner une première vision de l'erreur due au remplacement des trajectoires de $S(t)$ par les trajectoires du processus $\xi(t)$ (section 2.3).

2.2 LOI DU PROCESSUS

Le processus $\xi(t)$ est discret en ce sens qu'il ne peut prendre qu'un ensemble fini de p valeurs possibles. Ainsi, $\xi(t)$ prend p valeurs possibles $\{\xi_j(t), i = 1 \dots p\}$, avec les probabilités $\pi_{t,j}$. On peut noter que les $\xi_j(t)$ ne sont pas aléatoires, car les bornes des

intervalles de discrétisation, si elles dépendent du temps, ne sont pas aléatoires. Le processus $\xi(t)$ est bien défini et son espérance est identique à celle du processus initial $S(t)$. En effet³,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi(t)) &= \sum_{j=1}^p \pi_j \xi_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^p \pi_j \mathbf{E}(S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[) \\ &= \sum_{j=1}^p \pi_j \left(\frac{1}{\Pr(S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[)} \mathbf{E}(S(t) \mathbf{1}_{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[)} \right)\end{aligned}$$

En utilisant la définition $\pi_{t,j} = \Pr(S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi(t)) &= \mathbf{E}\left(S(t) \sum_{j=1}^p \mathbf{1}_{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(S(t) \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^p \{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[}\}}\right) \text{ car les ensembles } \{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[}\} \text{ sont disjoints} \\ &= \mathbf{E}(S(t)) \text{ car } \{[s_{t,j-1}, s_{t,j}[[, 1 \leq j \leq p\} \text{ est une partition de } \Omega.\end{aligned}$$

2.3 DISTANCE L^2 ENTRE $\xi(t)$ ET $S(t)$

On cherche à mesurer la distance (au sens de la norme L^2) entre le processus initial et le processus discrétisé. Cette distance est définie par :

$$\|S - \xi\|_{L^2} = \mathbf{E}\left(\int_0^T (S(t) - \xi(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (0.2)$$

On peut calculer explicitement cette distance, en utilisant :

Résultat :

$$\|S - \xi\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^p \left(\int_0^T \mathbf{V}(X_j(t)) dt\right)} = \sqrt{\int_0^T \sum_{j=1}^p \mathbf{V}(X_j(t)) dt} \quad (0.3)$$

où $X_j(t) = S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[[$

La démonstration de ce résultat est simple :

³ On rappelle que pour un ensemble A de mesure non nulle et une variable aléatoire intégrable X on a $\mathbf{E}(X|A) = \frac{1}{\Pr(A)} \mathbf{E}(X \mathbf{1}_A)$

Preuve :

Nous nous intéressons au calcul de $\mathbf{E} \left(\int_0^T (S(t) - \xi(t))^2 dt \right)$. $\{[s_{t,j-1}, s_{t,j}[, 1 \leq j \leq p\}$ étant une partition de Ω , les ensembles $\{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[\}$ sont deux à deux disjoints. On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_0^T (S(t) - \xi(t))^2 dt \right) &= \mathbf{E} \left(\int_0^T \left(\sum_{j=1}^p (S(t) - \xi_j(t)) \mathbf{1}_{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[} \right)^2 dt \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^p \int_0^T (S(t) - \xi_j(t))^2 \mathbf{1}_{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[} dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbf{E} \left(\int_0^T (S(t) - \xi_j(t))^2 \mathbf{1}_{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[} dt \right) \end{aligned}$$

En posant $X_j(t) = S(t) \mathbf{1}_{S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[}$, on a bien :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T (S(t) - \xi(t))^2 dt \right) = \sum_{j=1}^p \mathbf{E} \left(\int_0^T (X_j(t) - \mathbf{E}(X_j(t)))^2 dt \right)$$

L'application du théorème de Fubini montre que pour tout j :

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T (X_j(t) - \mathbf{E}(X_j(t)))^2 dt \right) = \int_0^T \mathbf{E} \left((X_j(t) - \mathbf{E}(X_j(t)))^2 \right) dt ,$$

d'où le résultat. On en déduit en particulier la propriété suivante :

Propriété :

$$\|S - \xi\|_{L^2} \leq \sqrt{\int_0^T \mathbf{V}(S(t)) dt} \quad (0.4)$$

Preuve :

Par construction, le processus ξ converge vers S lorsque p tends vers l'infini et la fonction $f(p) = \|S - \xi\|_{L^2}$ est une fonction décroissante. Ainsi, $f(1) \geq f(p), \forall p \geq 1$, d'où le résultat.

3 CAS PARTICULIER D'UN MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE

Après avoir spécifier les principales propriétés du processus discrétisé dans un cadre général ne nécessitant de spécifier de la loi du processus initial $S(t)$, nous allons maintenant nous intéresser au cas où $S(t)$ est un mouvement brownien géométrique, comme dans le modèle de BLACK et SHOLES [1973]. Dans les deux premières sections de cette partie, nous allons en déduire les propriétés du processus discrétisé. Dans la troisième partie nous montrerons que le

processus $\xi(t)$ permet, *modulo* un choix judicieux de la partition de départ, d'évaluer correctement le prix d'une option européenne.

3.1 LOI DU PROCESSUS

On suppose que $S(t)$ est un mouvement brownien géométrique de la forme suivante :

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right) \quad (0.5)$$

Dans ce cas $\Omega = [0, +\infty[$. $Y(t) = \frac{S(t)}{S_0}$ suit une loi log-normale de paramètres $\left(m_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \omega_t^2 = \sigma^2 t\right)$. La densité de la loi log-normale s'écrit :

$$f(y) = \frac{1}{\omega_t y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t}\right)^2\right] \quad (0.6)$$

On peut alors en déduire la densité de la loi tronquée $Y_j = Y(t) | Y(t) \in [y_{j-1}, y_j[$:

$$f_j(y) = \frac{1}{\omega_t y \pi_j \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t}\right)^2\right] \mathbf{1}_{[y_{j-1}, y_j[}(x) \quad (0.7)$$

avec $y_j = \frac{\hat{s}_j}{S_0}$, $\pi_j = F(y_j) - F(y_{j-1})$ et $F(y) = \Phi\left(\frac{\ln(y) - m}{\omega}\right)$ avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On remarque que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_j) &= \mathbf{E}(Y(t) | Y(t) \in [y_{j-1}, y_j[) \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{S(t)}{S_0} \middle| \frac{S(t)}{S_0} \in \left[\frac{S_{t,j-1}}{S_0}, \frac{S_{t,j}}{S_0}\right]\right) \end{aligned}$$

et on en déduit que $\mathbf{E}(X_j) = S_0 \times \mathbf{E}(Y_j)$. Mais on a :

$$\mathbf{E}(Y_j) = \frac{1}{\omega_t \pi_j \sqrt{2\pi}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t}\right)^2\right] dy$$

et en posant $u = \frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t} - \omega_t$, $du = \frac{dy}{y\omega_t} = \exp\left(-\left(m_t + \omega_t \times u + \omega_t^2\right)\right) \frac{dy}{\omega_t}$, on trouve que :

$$\mathbf{E}(Y_j) = \frac{1}{\pi_j \times \sqrt{2\pi}} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u + \omega_t)^2\right] \exp\left(m_t + \omega_t u + \omega_t^2\right) du,$$

avec $b_{j,t} = \frac{\ln(y_j) - m_t}{\omega_t}$ et donc :

$$\mathbf{E}(Y_j) = \frac{\exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right)}{\pi_j^*} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = \frac{\Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t})}{\Phi(b_{j,t} + \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} + \omega_t)} \exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right)$$

On retrouve bien avec un unique intervalle tel que $b_{0,t} = -\infty$ et $b_{1,t} = +\infty$ l'espérance usuelle d'une loi log-normale $\mathbf{E}(Y_1) = \exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right)$.

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}]) &= S_0 \times \mathbf{E}(Y_j) = S_0 \times \frac{\Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t})}{\Phi(b_{j,t} + \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} + \omega_t)} \exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right) \\ &\Rightarrow \xi_j(t) = \frac{\Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t})}{\Phi(b_{j,t} + \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} + \omega_t)} S_0 \exp(rt) \end{aligned} \quad (0.8)$$

$$\text{où } b_{j,t} = \frac{\ln\left(\frac{S_{t,j}}{S_0}\right) - m_t}{\omega_t} - \omega_t.$$

En résumé dans le modèle de Black & Scholes, la loi de $\xi(t)$ est une loi discrète, telle que $\xi(t) = \xi_j(t) = \frac{\pi_{j,t}}{\pi_j} S_0 \exp(rt)$ avec une probabilité π_j tel que :

$$\begin{cases} \pi_{j,t} = \Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t}) \text{ et } \pi_j = \Phi(b_{j,t} + \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} + \omega_t) \\ b_{j,t} = \frac{\ln\left(\frac{S_{t,j}}{S_0}\right) - m_t}{\omega_t} - \omega_t \\ m_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \text{ et } \omega_t^2 = \sigma^2 t \end{cases}$$

3.2 DISTANCE DANS L^2

On obtient une formule fermée de la distance L^2 . Pour cela il suffit de déterminer le moment d'ordre 2 de Y_j :

$$\mathbf{E}(Y_j^2) = \frac{1}{\omega_t \pi_j \sqrt{2\pi}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} y \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t}\right)^2\right] dy.$$

En posant $u = \frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t} - \omega_t$, on a :

$y = \mathbf{exp}(u\omega_t + \omega_t^2 + m_t)$ et $du = \frac{dy}{y\omega_t} = \mathbf{exp}(-(m_t + \omega_t \times u + \omega_t^2)) \frac{dy}{\omega_t}$, on trouve que :

$$\mathbf{E}(Y_j^2) = \frac{1}{\pi_j \times \sqrt{2\pi}} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}(u + \omega_t)^2\right] \mathbf{exp}(2m_t + 2\omega_t u + 2\omega_t^2) du ,$$

avec $b_{j,t} = \frac{\ln(y_j) - m_t}{\omega_t}$ et donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_j^2) &= \frac{1}{\pi_j \times \sqrt{2\pi}} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}u^2 - \omega_t u - \frac{1}{2}\omega_t^2 + 2m_t + 2\omega_t u + 2\omega_t^2\right] du \\ &= \frac{1}{\pi_j \times \sqrt{2\pi}} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}u^2 + \omega_t u - \frac{1}{2}\omega_t^2 + 2m_t + 2\omega_t^2\right] du \\ &= \frac{1}{\pi_j \times \sqrt{2\pi}} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}(u - \omega_t)^2 + 2m_t + 2\omega_t^2\right] du \\ &= \frac{\mathbf{exp}(2\omega_t^2 + 2m_t)}{\pi_j} \int_{b_{j-1,t} - \omega_t}^{b_{j,t} - \omega_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}v^2\right] dv \\ &= \frac{\Phi(b_{j,t} - \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} - \omega_t)}{\pi_j} \mathbf{exp}(2\omega_t^2 + 2m_t) \end{aligned}$$

La variance est déduite de cette dernière expression :

$$\left(\mathbf{E}(Y_j)\right)^2 = \left(\frac{\Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t})}{\pi_j}\right)^2 \mathbf{exp}(2m_t + \omega_t^2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y_j) &= \mathbf{E}(Y_j^2) - \left(\mathbf{E}(Y_j)\right)^2 \\ &= \frac{\Phi(b_{j,t} - \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} - \omega_t)}{\pi_j} \mathbf{exp}(2\omega_t^2 + 2m_t) - \left(\frac{\Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t})}{\pi_j}\right)^2 \mathbf{exp}(2m_t + \omega_t^2) \\ &= \mathbf{exp}(2m_t + \omega_t^2) \left[\frac{\Phi(b_{j,t} - \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} - \omega_t)}{\pi_j} \mathbf{exp}(\omega_t^2) - \left(\frac{\Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t})}{\pi_j}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

3.3 EVALUATION D'UNE OPTION EUROPEENNE

On s'intéresse à l'erreur de calcul induite sur le prix d'une option de vente européenne lorsque l'on remplace la distribution des trajectoires de $S(t)$ par la distribution simplifiée avec les p

trajectoires $\mathbf{E}(S(t)|S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$ chacune affectée d'une probabilité $\pi_{t,j}$. En fait, compte tenu du caractère européen de l'option, seule compte la valeur au terme, il s'agit donc ici d'une discrétisation de $S(T)$ et pas véritablement du processus complet. On doit donc calculer $c_\xi = \mathbf{E}([K - \xi(T)]^+)$ et le comparer à $c_S = \mathbf{E}([K - S(T)]^+)$. En utilisant la formule de Black & Scholes, on rappelle que :

$$c_S(S_0, T, K, r) = K\Phi(-d_2(T)) - S_0\Phi(-d_1(T))\mathbf{exp}(rT) \quad (0.9)$$

avec $d_2(T) = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - m_T}{\omega_T}$, $d_1(T) = d_2(T) + \sigma\sqrt{T} = d_2(T) + \omega_T$.

On a :

$$c_\xi(S_0, T, K, r) = \mathbf{E}([K - \xi(T)]^+) = \sum_{j=1}^p \pi_j \times [K - \xi_j(T)]^+ \quad (0.10)$$

On a nécessairement $\xi_j(T)$ qui croit en fonction de j car $\xi_j(T) \geq s_{T,j-1} \geq \xi_{j-1}(T)$. Si $\xi_j(T) > K \quad \forall j$ alors $c_\xi = 0$ ce qui n'est pas intéressant. On suppose que $\exists j_0$ tel que $\xi_{j_0}(T) < K \leq \xi_{j_0+1}(T)$ alors :

$$c_\xi(S_0, T, K, r) = \sum_{j=1}^{j_0} \pi_j \times [K - \xi_j(T)] \quad (0.11)$$

En utilisant (0.10) et les résultats de la section 3.1 on a :

$$c_\xi(S_0, T, K, r) = \sum_{j=1}^p \pi_j \times \left[K - \frac{\pi'_{j,T}}{\pi_j} S_0 \mathbf{exp}(rT) \right]^+ \quad (0.12)$$

Lorsqu'on combine (0.11) et (0.12) on a :

$$\begin{aligned} c_\xi(S_0, T, K, r) &= \sum_{j=1}^{j_0} \pi_j \times \left[K - \frac{\pi'_{j,T}}{\pi_j} S_0 \mathbf{exp}(rT) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{j_0} \left[\pi_j \times K - \pi'_{j,T} \times S_0 \mathbf{exp}(rT) \right] \\ &= \left(\Phi(b_{j_0,T} + \omega) - \Phi(b_{1,T} + \omega) \right) \times K - \left(\Phi(b_{j_0,T}) - \Phi(b_{1,T}) \right) \times S_0 \mathbf{exp}(rT) \end{aligned}$$

Mais $b_{1,T} = -\infty$ (car $s_{T,1} = 0$) d'où

$$c_\xi(S_0, T, K, r) = \Phi(b_{j_0,T} + \omega) \times K - \Phi(b_{j_0,T}) \times S_0 \mathbf{exp}(rT) \quad (0.13)$$

avec $b_{j_0, T} = \frac{\ln\left(\frac{S_{j_0}}{S_0}\right) - m_T}{\omega_T} - \omega_T$. Si on choisit la partition tel que $\exists j^* s_{T, j^*} = K$ alors $j^* = j_0$ et

$$s_{T, j_0} = K \quad \text{ainsi on a} \quad b_{j_0, T} = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - m_T}{\omega_T} - \omega_T = -\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - m_T}{\omega_T} + \omega_T\right) = -d_1(T) \quad \text{et}$$

$b_{j_0} + \omega_T = -d_1(T) + \omega_T = -d_2(T)$ d'où :

$$\begin{aligned} c_{\xi}(S_0, T, K, r) &= K \times \Phi(-d_2(T)) - S_0 \times \Phi(-d_1(T)) \times \exp(rT) \\ &= K \times \Phi(-d_2(T)) - S_0 \times \Phi(-d_1(T)) \times \exp(rT) \\ &= c_S(S_0, T, K, r) \end{aligned}$$

□

Dans le modèle de BS, une condition pour que le prix de l'option dans le processus discrétisé soit égale au prix de l'option dans le processus continue est que la partition de $[0, +\infty[$, $\left\{ [s_{T, j-1}, s_{T, j}[, 1 \leq j \leq p \right\}$ soit choisie telle que $\exists j^* s_{j^*} = K$.

En résumé, puisque $\left\{ [s_{T, j-1}, s_{T, j}[, 1 \leq j \leq p \right\}$ est une partition de $[0, +\infty[$, il existe un unique j_0 tel que $s_{T, j_0} \leq K < s_{T, j_0+1}$ et le prix de l'option européenne lorsque l'on remplace la distribution des trajectoires de $S(t)$ par la distribution simplifiée est :

$$c_{\xi}(S_0, T, K, r) = \begin{cases} c_S(S_0, T, s_{T, j_0}, r), & \text{si } s_{T, j_0} \leq K < \xi_{j_0+1}(T) \\ c_S(S_0, T, s_{T, j_0+1}, r), & \text{si } \xi_{j_0+1}(T) \leq K \leq s_{T, j_0+1} \end{cases} \quad (0.14)$$

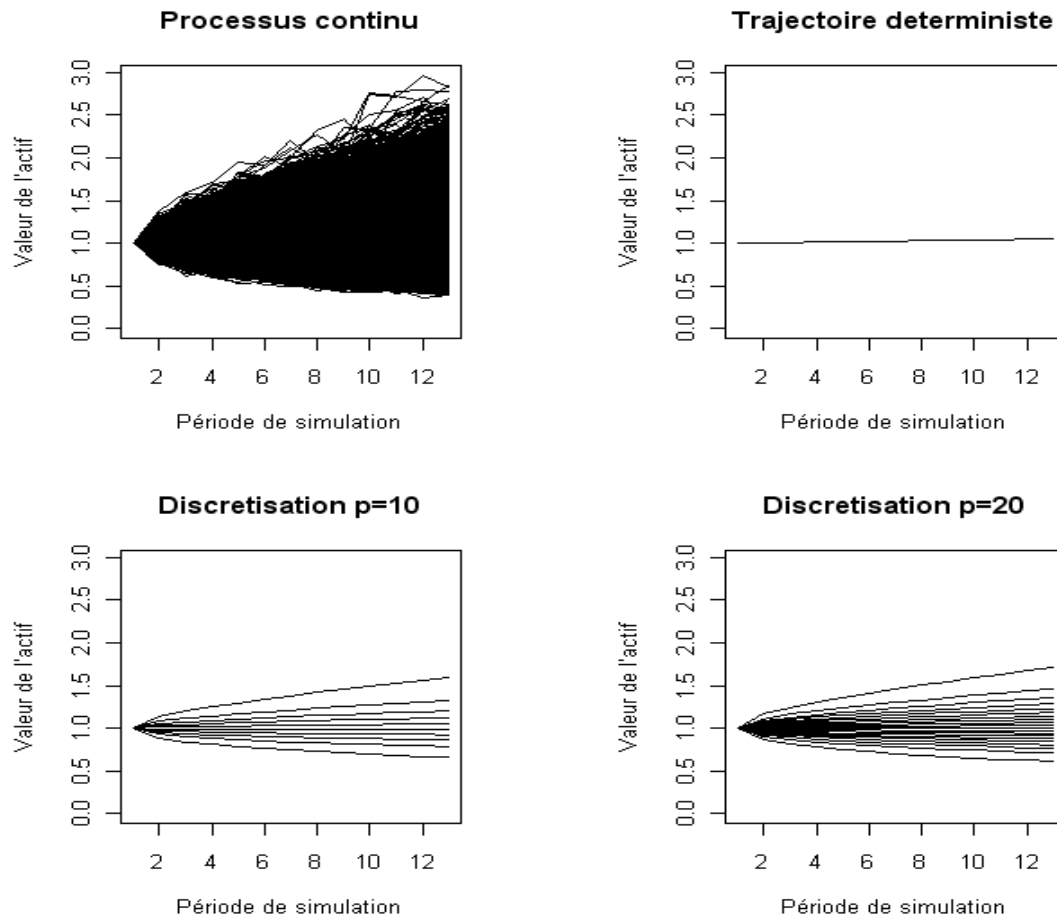
Dans le cas d'une suite d'options à différentes dates (par exemple pour le calcul de provisions sur un contrat en unités de compte), le choix des bornes des intervalles de discrétisation en fonction de la règle ci-dessus appliquée à chaque date permet le contrôle du prix de chaque option.

3.4 ILLUSTRATION DE LA DISCRETISATION

On suppose que le processus de prix de l'actif est un processus de Black & Scholes dont les paramètres sont $S_0 = 1$, $\mu = 8,5\%$ et $\sigma = 25\%$. Le taux sans risque est estimé à $r = 5\%$. On réalise 100 000 trajectoires du processus des prix. La discrétisation retenue est telle que les bornes des intervalles $s_{t, j}$ sont choisies de sorte que $\pi_{t, j} = \frac{1}{p}$. Les quantiles utilisés pour les bornes des intervalles de discrétisation sont en pratique estimés empiriquement à partir des trajectoires simulées, ils pourraient dans certaines situations (modèle de Black et Scholes notamment) être calculés explicitement.

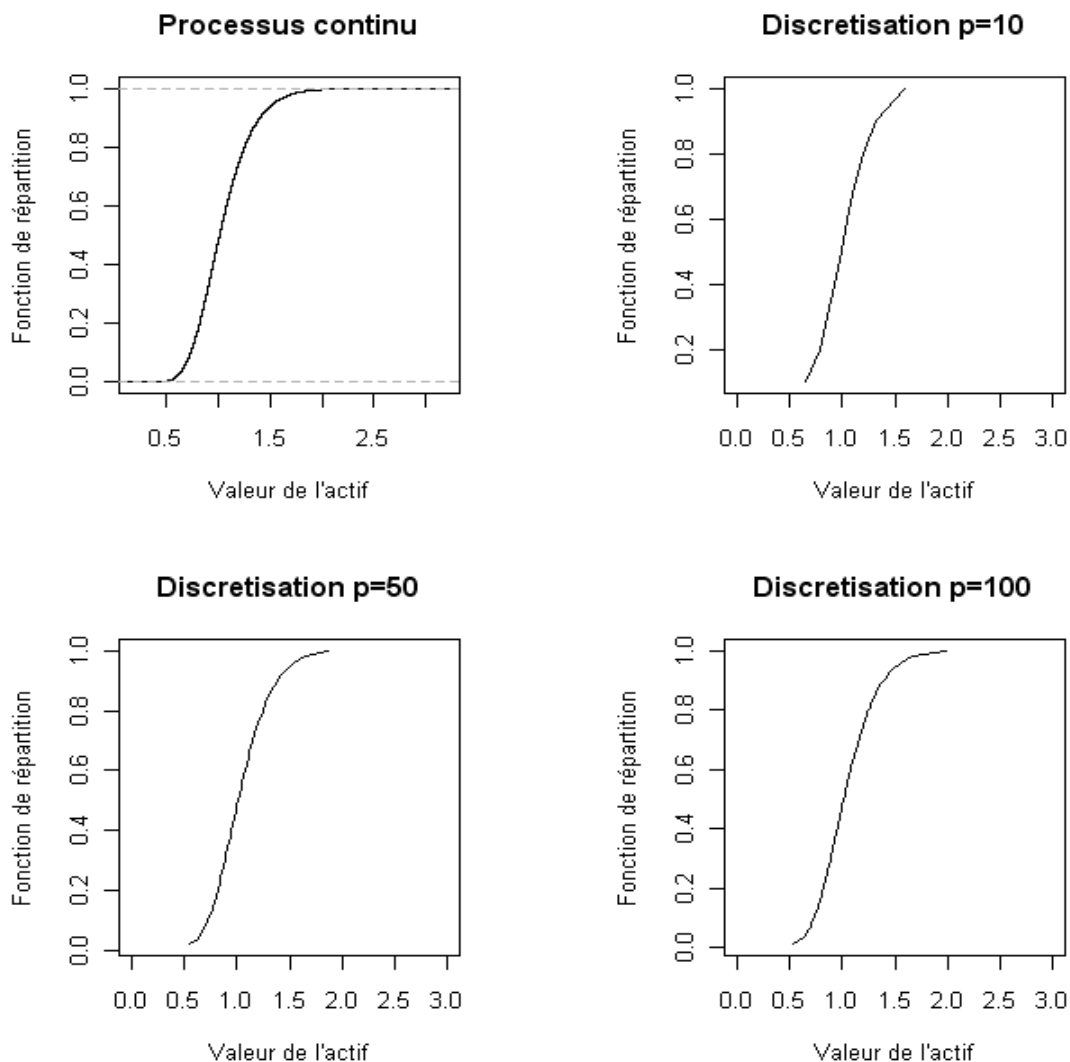
Les simulations sont faites sur 1 an ($T = 1$) et avec un pas mensuel ($h = 1/12$). Les graphiques ci-dessous permettent de comparer de façon visuelle les trajectoires du processus initial à celles du processus discrétisé.

Figure 1 – Processus continu et processus discrétisés



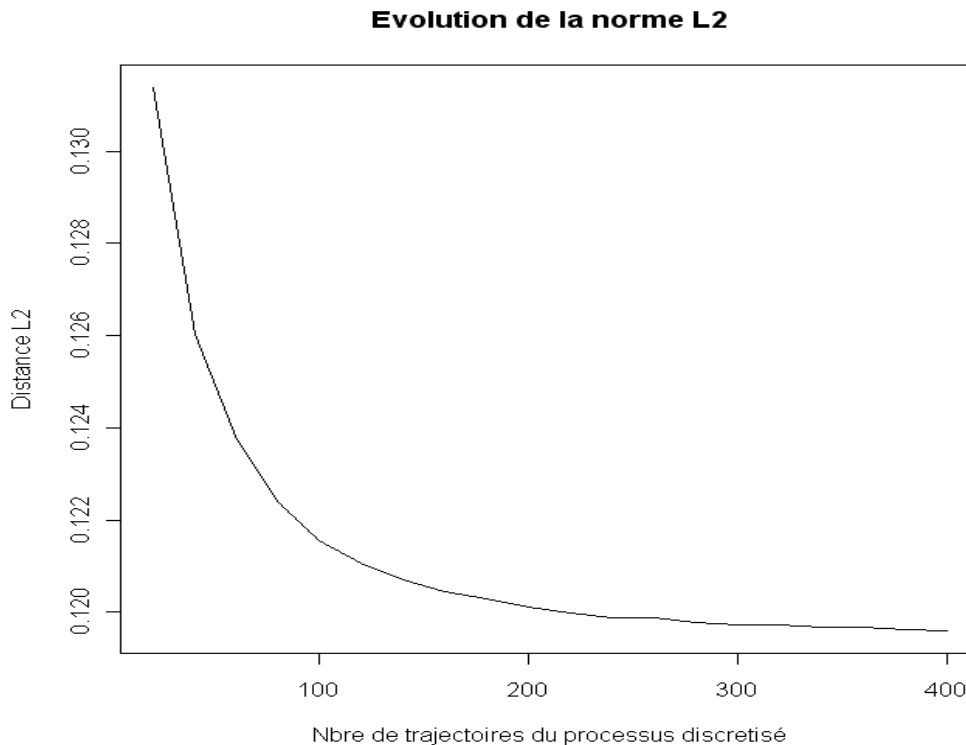
On note bien que l'augmentation du nombre d'ensemble de la partition p accroît sensiblement le nuage du faisceau de trajectoires du processus discrétisé. Cela induit une meilleure connaissance de la distribution du processus. Cependant, les valeurs extrêmes sont fortement sous-estimées. Une discrétisation des 100 000 trajectoires du processus initial en 100 trajectoires discrétisées permet déjà d'obtenir une bonne approximation de la densité au terme du processus continu.

Figure 2 – Densités au terme (1 an) du processus continu et du processus discrétisé



Avec une discrétisation en 100 trajectoires, soit 1 000 fois moins de trajectoires que celles du processus initial, la densité au terme du processus discrétisé est très proche de celle du processus initial. Cette bonne approximation de la densité du processus des prix conduit à réduire la distance au sens de la norme L^2 entre le processus initial et le processus discrétisé :

Figure 3 – Distance au sens L2 entre le processus discrétisé et le processus continu



On peut noter que le gain marginal en précision décroît très rapidement en fonction du nombre de trajectoires retenu et qu'à partir de 100 trajectoires on obtient un compromis satisfaisant entre précision et coût en termes de temps de calcul.

4 APPLICATION A L'EVALUATION D'UN PORTEFEUILLE D'EPARGNE

La technique de discrétisation des trajectoires de l'actif est utilisée afin réduire les temps de calcul tout en optimisant les résultats obtenus. Dans, cette section, nous nous intéressons à l'évaluation d'une garantie de taux minimum sur un contrat en Euros.

4.1 DESCRIPTION DU CONTRAT

On considère un produit d'épargne en euros dans lequel les cotisations ont été revalorisées à un taux de 3,50 % (taux minimum garanti sur un an de 60 % du TME, et participation aux bénéfices sous déduction du taux minimum garanti et au moins égale à 85 % des résultats de la gestion financière et à 90 % des résultats techniques).

En pratique, le taux de revalorisation de l'épargne est le maximum entre le taux minimum garanti (ici 3,5 %) et 85 % des résultats de la gestion financière auxquels il convient de rajouter 90 % des résultats techniques :

$$R_t^s = \max(TMG; 85\%R_t^f + 90\%R_t^r) \quad (0.15)$$

avec :

- TMG est le taux annuel minimum garanti ;
- R_t^f , le rendement financier du portefeuille d'actifs sur l'année t .
- R_t^r : le rendement technique du aux produits techniques ;

Si on pose $R_t^n = 85\%R_t^f + 90\%R_t^r$, alors on peut encore écrire que

$$R_t^s = \max(TMG; R_t^n) = R_t^n + [TMG - R_t^n]^+ \quad (0.16)$$

$[TMG - R_t^n]^+$ peut s'apparenter au flux d'une option de taux de type *Floor*. Toutefois, la loi du processus de rendement net R_t^n n'est pas explicitement connue. En effet, R_t^n dépend de l'évolution des actifs financiers mais est aussi impacté par les risques techniques tels que la mortalité et les rachats, mais aussi par les décisions de gestion. La forme explicite de cette loi est donc difficile à déterminer. L'évaluation de ce contrat nécessite d'avoir recours à des techniques de simulations.

4.1.1 ÉVALUATION DE LA GARANTIE

L'évaluation de la garantie épargne Euros est effectuée tête par tête. Les provisions mathématiques individuelles sont calculées suivant une approche rétrospective qui vise à capitaliser les primes investies par les assurés, nettes des rachats effectués, au taux de revalorisation accordé en application des clauses contractuelles. La provision mathématique individuelle dépend du nombre de nouvelles parts souscrites (cotisation), et est obtenue par application de la formule suivante :

$$EA_t = [EA_{t-1} + C_t(1 - \tau_c) - R_t] \times (1 + R_t^s \times (1 - p)) \quad (0.17)$$

EA_t = Épargne acquise à t

C_t = Nombre de parts à t * valeur de la part (1 €)

R_t = Rachat sur la période t ,

τ_c = Taux de chargement sur les cotisations ($\tau_c = 3,5$ %)

R_t^s = Taux de capitalisation à l'année t .

p = est le taux de prélèvement obligatoire. Il est fixé à 11,8 % et est composé de :

- Taux CSG = 8,20 %
- Taux CRDS = 0,50 %
- Taux de prélèvement social = 2 %

Taux CAPS = 1,1 % depuis le 01/01/2009 (le taux CAPS a évolué de 0,3 % à 1,1 % à partir du 01/01/2009 au titre de la mise en place du financement du RSA).

On peut en déduire le flux à t lié à la garanti de TMG :

$$F_t = [EA_{t-1} + C_t(1 - \tau_c) - R_t] \times [TMG - R_t^n]^+ \quad (0.18)$$

4.1.2 STRATEGIE FINANCIERE ET MODELISATION DU PORTEFEUILLE D'ACTIFS

On suppose que le portefeuille d'actifs est constitué d'un actif sans risque et d'un actif risqué. L'actif sans risque produit un rendement annuel r de 5%. On suppose que l'actif risqué est un processus de Black & Scholes, qui produit un rendement annuel de 8,5 % avec une volatilité de 25 %, $S_0 = 1$, $\mu = 8,5\%$ et $\sigma = 25\%$. L'allocation cible du portefeuille d'actif est définie dans le tableau suivant :

Actif	Allocation cible
Actif sans risque	80%
Actif risqué	20%

L'objectif est de recomposer le portefeuille d'actif à la fin de chaque année afin de respecter l'allocation cible.

4.2 CALCUL DU PRIX DE L'OPTION DE TAUX MINIMUM GARANTI

4.2.1 PROCESSUS INITIAL

Le prix de la garantie de TMG à l'aide du processus initial $S(t)$ peut être obtenu à l'aide de l'équation suivante :

$$FloorLet_t = [EA_{t-1} + C_t(1 - \tau_c) - R_t] \times \frac{1}{Ns} \sum_{i=1}^p [TMG - 85\%R_{t,i}^f - 90\%R_t^r]^+ e^{-rt} \quad (0.19)$$

Où :

- $R_{t,i}^f = \beta \times r + \alpha \times R_i(t)$
- $R(t) = \ln(S(t)) - \ln(S(t-1))$ est le rendement de l'actif risqué entre t et $t-1$;
- β est le poids de l'actif sans risque ;
- α est le poids de l'actif risqué.

4.2.2 PROCESSUS DISCRETISE

Dans notre exemple, nous avons considéré que le portefeuille d'actif était affecté par une seule source de risque : le risque action. Dans la mesure où la garantie que nous souhaitons évaluer est une garantie de rendement, la technique de discrétisation s'appliquera sur le processus de rendement.

Ainsi, l'application de la technique de discrétisation à ce portefeuille d'actif s'effectuera uniquement sur l'actif risqué et est constituée de cinq étapes :

- **Étape 1** : simulation des trajectoires possibles de la valeur de l'actif risqué $S(t)$;
- **Étape 2** : détermination du faisceau des trajectoires du processus de rendement de l'actif risqué $R(t) = \ln(S(t)) - \ln(S(t-1))$;

- **Étape 3** : détermination de la partition de l'ensemble des valeurs possibles du processus de rendement de l'actif risqué $\left\{ [r_{t,j-1}, r_{t,j}[, 1 \leq j \leq p \right\}$. Dans notre cas, les ensembles de cette partition sont des intervalles dont les bornes seront les quantiles du processus des rendements.
- **Étape 4** : discrétisation du faisceau des trajectoires du processus de rendement : une trajectoire du processus discrétisé est obtenue en faisant la moyenne des valeurs du processus de rendement contenues dans un des ensembles de la partition : $R_{\xi_j}^{\xi}(t) = \mathbf{E}\left(R(t) \mid R(t) \in [r_{t,j-1}, r_{t,j}[\right)$;
- **Étape 5** : détermination du poids $\pi_{t,j} = \mathbf{Pr}\left(R(t) \in [r_{t,j-1}, r_{t,j}[\right)$ (qui est aussi la probabilité d'occurrence) de chacune des trajectoires.

On peut en déduire la valeur de la garantie de TMG à la date t :

$$FloorLet_t = \left[EA_{t-1} + C_t (1 - \tau_C) - R_t \right] \times \sum_{j=1}^p \pi_{t,j} \left[TMG - 85\% R_{t,j}^f - 90\% R_t^r \right]^+ e^{-rt} \quad (0.20)$$

Où :

- $R_{t,j}^f = \beta \times r + \alpha \times R_{\xi_j}^{\xi}(t)$
- β est le poids de l'actif sans risque ;
- α est le poids de l'actif risqué.

4.3 APPLICATION

4.3.1 HYPOTHESES DE MODELISATION

Nous disposons d'un portefeuille de 1 000 assurés âgés tous de 45 ans et ayant souscrit à un contrat épargne sur 8 ans. Le TMG est fixé à 3,5 %. On suppose que la mortalité du portefeuille est modélisée par la TH00-02. Les rachats annuels sont fixés à 1% du nombre de contrat. On applique des frais de rachats de 1% si le rachat intervient sur les trois premières années d'existence du contrat. L'ensemble des paramètres est repris dans le tableau suivant :

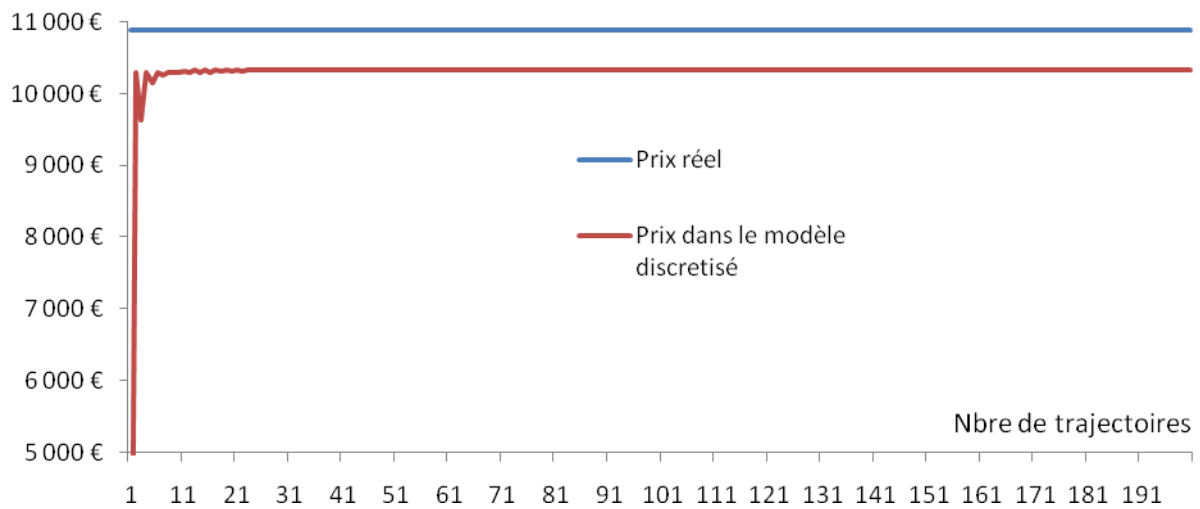
Hypothèses de projection	
Intitulé	Paramètres
Nombre de contrat	1000
Age moyen	45
Maturité du contrat	8 ans
Versement initial sur le contrat euro	100 €
Versement périodique	0 €
Taux minimum garanti	3,50%
Taux de participation au bénéfice	100%
Taux de rachat	1%
Taux de frais sur rachat	1%
Taux de frais de gestion	0,50%
taux de prélèvement sur les produits financiers	11,80%
Mortalité	TH 00-02

4.3.2 RESULTATS

Comme précisé dans la section 4.1.2, la discrétisation a été réalisée sur le processus des rendements de l'actif risqué. L'évaluation⁴ de la garantie de TMG sur le contrat en Euro dans les deux modèles (Modèle initial et modèle discrétisé) montre que lorsque le nombre de trajectoires du processus discrétisé est supérieur à 1, l'écart entre les deux évaluations est inférieur à 12 %. Le graphique suivant permet de visualiser la valeur de l'option du TMG sur le contrat euros en fonction du nombre de trajectoires du processus discrétisé.

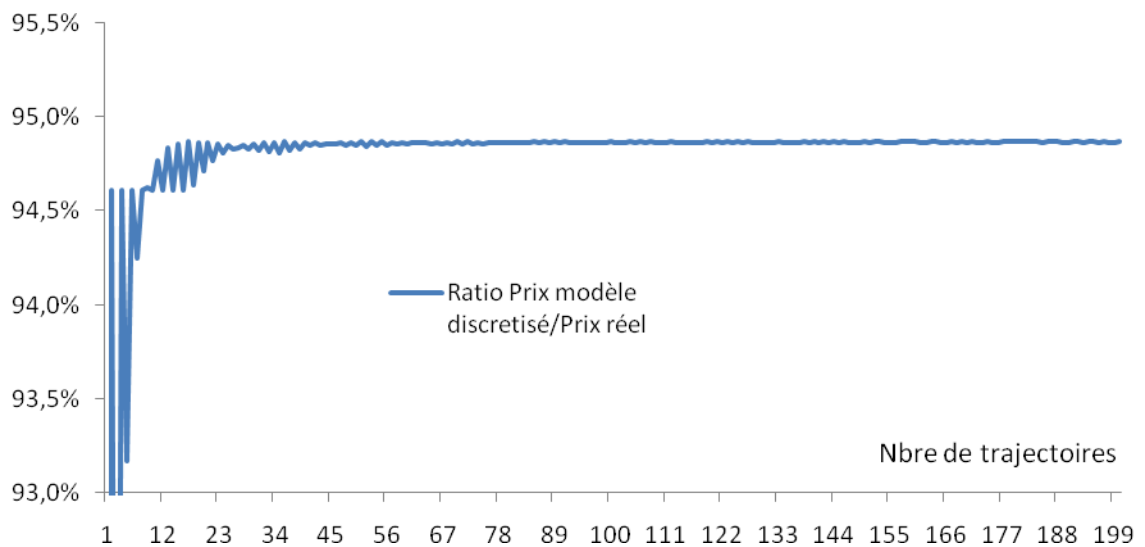
⁴ Les résultats sont obtenus sur la base de 100 000 simulations. Ce chiffre qui semble a priori largement suffisant laisse tout de même entrevoir une erreur potentielle de 0,05% sur le prix de la garantie de TMG.

Figure 4 – Évolution du prix en fonction du nombre de trajectoires du processus discrétisé



Le graphique suivant montre l'évolution du rapport entre la valeur de la garantie de TMG dans le modèle discrétisé et la valeur de la garantie de TMG dans le processus initial.

Figure 5 – Évolution du ratio entre le prix dans les deux modèles en fonction du nombre de trajectoire du processus discrétisé



On note une très forte volatilité du ratio lorsque le nombre de trajectoires est plus petit que 25. Le ratio commence à se stabiliser autour de 95 % lorsque le nombre de trajectoires est supérieur à 100. Le ratio converge ensuite très faiblement vers 100 %, en ce sens qu'une augmentation d'une trajectoire (p à $p+1$) se traduit par un gain marginal sur la précision des résultats obtenus. Une discrétisation en 100 trajectoires donne une valeur estimée à près de 95 % du prix réel de la garantie de TMG. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'accroître indéfiniment le nombre de trajectoires du processus discrétisé, une discrétisation en 100 trajectoires suffit à fournir une approximation correcte de la valeur du TMG. Toutefois, il convient d'estimer correctement les probabilités d'occurrence de chacune des 100 trajectoires. Ce qui nécessite de connaître la distribution du processus initial.

Le prix de la garantie de TMG est déterminé à partir des valeurs inférieures au TMG, la convergence vers le prix réel est plus rapide que la convergence du processus discrétisé vers le processus initial.

Ainsi dans la suite, nous travaillerons avec une discrétisation en 100 trajectoires.

4.3.2.1 Impact de la maturité des contrats en euros

Les graphiques suivants permettent de visualiser l'impact de la maturité du contrat en Euros sur la valeur obtenue dans le modèle discrétisé.

Figure 6 – Évolution du prix dans les deux modèles en fonction de la maturité des contrats

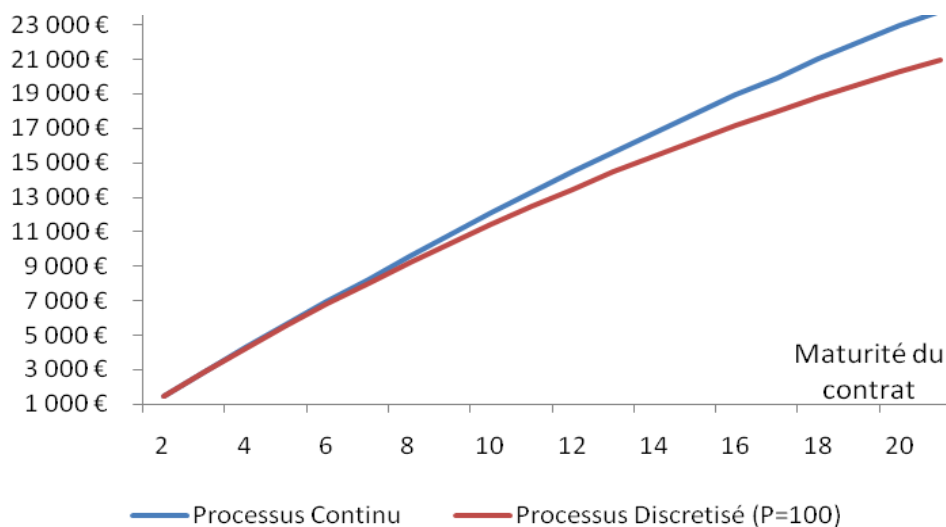
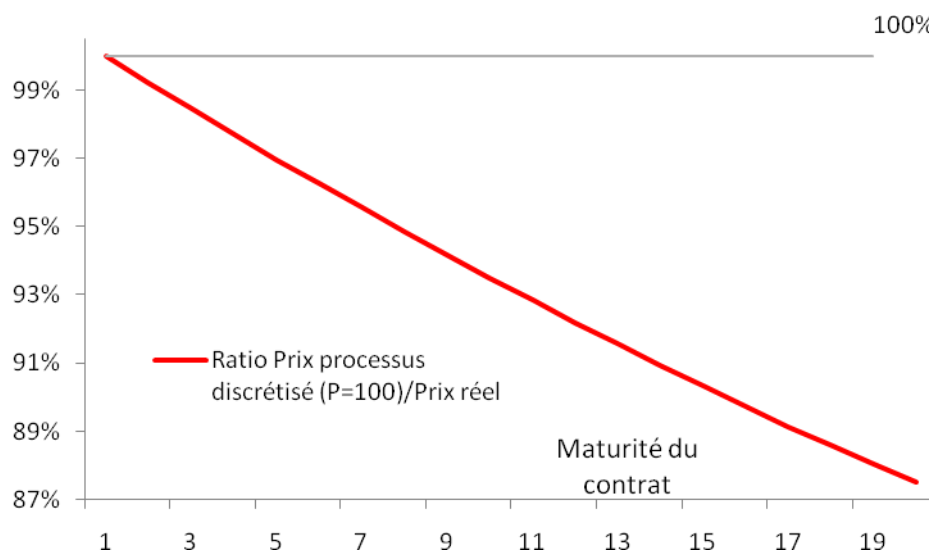


Figure 7 – Rapport des prix dans les deux modèles en fonction de la maturité du contrat



Lorsque la maturité du contrat est égale à 1 an, l'erreur de valorisation de la garantie de TMG à l'aide du processus discrétisé est presque nulle, le rapport entre le prix obtenu du modèle

discrétisé et le prix dans le modèle initial est 100%. Ce ratio décroît ensuite de façon continue pour se fixer à près de 87,5% pour un contrat de maturité 20 ans.

4.3.2.2 Impact de l'Age des assurés

Les graphiques suivants permettent d'observer l'impact de l'âge des assurés sur la valeur de la garantie de TMG obtenue à travers les deux processus.

Figure 8 – Rapport des prix dans les deux modèles en fonction de l'âge des assurés

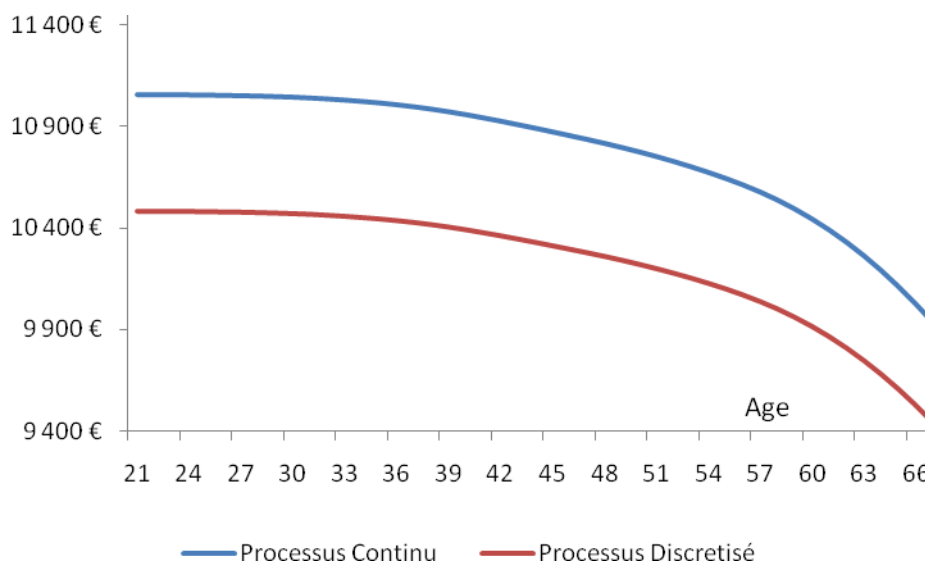
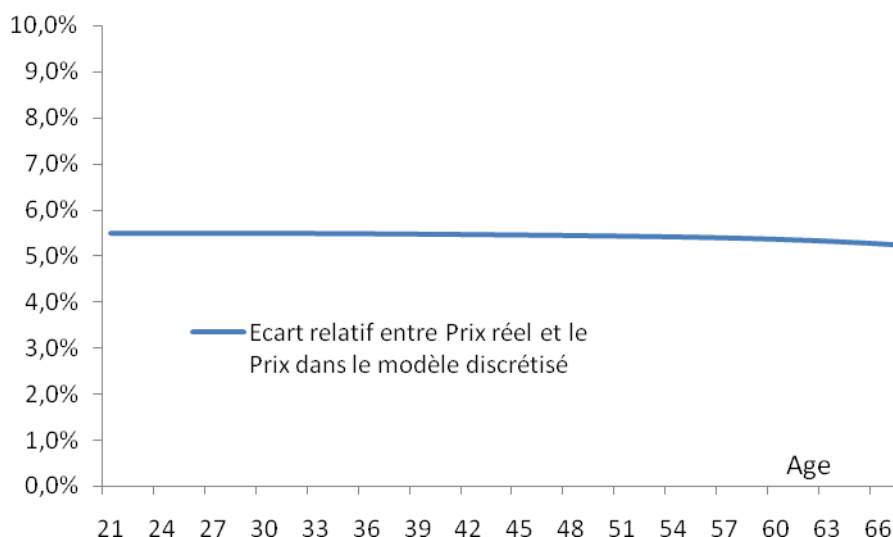


Figure 9 – Rapport des prix dans les deux modèles en fonction de l'âge des assurés



L'augmentation de l'âge de l'assuré impacte faiblement l'erreur de valorisation de la garantie de TMG, liée au remplacement des 100 000 trajectoires du processus initial par les 100 trajectoires synthétiques du processus discrétisé. Pour des assurés d'âge compris entre 21 et 67 ans, la variation de cette erreur est dans l'absolu strictement inférieure à 0,30 %. Cette

variation est de la même ampleur que l'erreur de rééchantillonnage liée à la technique de simulation. Nous pouvons donc conclure que l'âge des assurés n'a pas d'impact sur l'erreur liée à la discrétisation des trajectoires du processus initial.

5 CONCLUSION

Dans ce papier nous nous sommes intéressés à une technique simple de réduction du temps de calcul de la valeur des options observées sur des contrats d'assurance vie. Cette technique très simple à mettre en œuvre consiste à regrouper le faisceau des trajectoires du processus initial en fonction des quantiles de la distribution à chaque instant. Ce regroupement permet aussi d'estimer directement le poids (ie. la probabilité d'occurrence) que nous accordons à chacun des scénarios discrétisés.

L'utilisation de ces deux informations nous a permis, modulo un choix judicieux de la partition de $[0, +\infty[$, de correctement estimer la valeur d'une option européenne. Pour mémoire, ces options sont rencontrées dans les garanties plancher sur les contrats en UC.

Nous avons aussi montré que sur un contrat en euro, l'erreur liée au remplacement des trajectoires du processus initial par celles du processus discrétisé évoluait en fonction de la maturité du contrat sans toutefois être impactée par l'âge de l'assuré.

De plus, la convergence du prix obtenu à l'aide du modèle discrétisé est plus rapide que la convergence du processus discrétisé vers le processus initial. Toutefois, sur un contrat de maturité 8 ans, le remplacement des 100 000 trajectoires du processus initial par seulement 100 trajectoires synthétiques du processus discrétisé conduit à une erreur de 5 % sur la valeur de la garantie de TMG. Ce nombre de trajectoires du processus discrétisé permet ainsi de donner une estimation correcte de la valeur du TMG.

L'utilisation de cette technique nécessite toutefois de connaître la distribution du processus initial. En effet, outre la constitution des trajectoires discrétisés, il est indispensable de pouvoir estimer la probabilité d'occurrence de celles-ci.

La comparaison du faisceau de trajectoires du processus initial à celui du processus discrétisé montre clairement que ce dernier sous-estime fortement les valeurs extrêmes du processus initial. Ainsi, si la technique de discrétisation peut donner une bonne estimation de la valeur moyenne dans une logique *best estimate* son utilisation dans le cadre d'estimation des valeurs extrêmes (SCR, VAR ...) peut conduire à des résultats biaisés. Cependant, le choix d'une partition dont les valeurs extrêmes sont fortement affinées pourrait éventuellement conduire à réduire ce biais. Cet aspect n'a pas été traité ici et pourrait faire l'objet de développements futurs.

6 BIBLIOGRAPHIE

BLACK F., SCHOLLES M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of political Economy*, vol. 81, n° 3, 637–54.

DEVINEAU L., LOISEL S. [2009] "Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II", Bulletin Français d'Actuariat, vol. 9, n°17.

PLANCHET F., THEROND P.E., JACQUEMIN J. [2005] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques*, Paris : Economica.

REVELEN J. [2009] "Replicating Portfolio et capital économique en assurance vie", Mémoire d'ingénieur, ISFA / Ecole Centrale de Lyon

SCHRAGER D. [2008] "Replicating Portfolios for Insurance Liabilities", Actuarial Sciences