

RISQUE D'ESTIMATION ET CHOIX DE PORTEFEUILLE DANS LE CADRE DES MOMENTS PARTIELS INFÉRIEURS

VERSION PRELIMINAIRE

SANFILIPPO Gilles

CERAG – Université Pierre Mendès France

150 rue de la Chimie 38040 Grenoble cedex 9 Gilles.sanfilippo@upmf-grenoble.fr

Résumé : Cette étude a pour objectif d'analyser par simulation le potentiel de la technique bootstrap à réduire l'erreur d'estimation des paramètres dans le cadre d'une gestion de portefeuille moyenne - moments partiels inférieurs. Les résultats de nos tests montrent que l'estimation des paramètres à partir d'un échantillon a tendance à sur-estimer l'espérance de rentabilité du portefeuille efficient et à sous-estimer son risque. Le portefeuille obtenu à partir d'une estimation des paramètres par le bootstrap est plus proche du portefeuille réellement efficient que les portefeuilles obtenus par les estimateurs shrinkage. Cette technique de ré-échantillonnage permet donc d'appréhender et même de réduire le risque d'estimation des paramètres dans le cadre d'une gestion moyenne-moments partiels inférieurs.

Mots clés : risque d'estimation, mesures du risque, ré-échantillonnage bootstrap

ESTIMATION RISK AND PORTFOLIO CHOICE IN THE LOWER PARTIAL MOMENT

Abstract : the effect of estimation risk on the efficient frontier in the lower partial moment (LPM) framework is analysed. A simulation approach is employed for the analysis of estimation risk in the MLPM -2 model. The results of the average difference between the actual and estimated portfolios show that the estimated portfolios are biased predictors of the actual portfolios. A bootstrap approach should be used to improve the optimization procedure since this approach produce lower root-mean squared errors than traditional James Stein and Bayes Stein estimates.

Keywords : estimation risk, risk measures, bootstrap sampling

1 INTRODUCTION

H. Markowitz, en proposant en 1952 son célèbre modèle moyenne-variance, a donné le point de départ de la théorie moderne de la gestion de portefeuille. Selon ce modèle, tout investisseur poursuit deux objectifs conflictuels : la maximisation du rendement espéré et la minimisation du risque, mesuré par la variance des taux de rentabilité. Les principaux apports de ce modèle sont sans doute son aspect relativement général, permettant son utilisation dans un grand nombre de situations pratiques, et sa simplicité en terme d'analyse théorique. En effet, une fois déterminés le risque et le rendement d'un actif financier ou d'une catégorie d'actifs financiers, la théorie financière moderne permet d'identifier les allocations d'actifs les plus judicieuses en fonction du degré de risque que l'investisseur est prêt à assumer.

Mais les rendements attendus ne sont pas des constantes physiques existant à l'état naturel comme la vitesse de la lumière par exemple. Dans la plupart des études théoriques comme dans la pratique, les estimations du taux de rentabilité espéré et du risque d'un portefeuille sont déduites des données historiques et parfois pondérées par les facteurs économiques et sociaux. Bien que l'étendue des informations quantitatives disponibles concernant les actifs financiers est sans égale en sciences sociales, il est fondamental de rappeler que ces estimations sont faites à partir d'un échantillon d'observations. Ces estimations sont considérées comme les vrais paramètres de la population entière, et non l'estimation de vrais paramètres inconnus. Comme l'ont montré Bawa et Klein (1976) cette approximation entraînera certainement un choix d'un portefeuille sous optimal. Lewellen et Shanken (1998) ont même constaté que, dans un contexte d'équilibre de marché, l'incertitude concernant l'estimation des paramètres peut affecter de manière significative les séries temporelles et la structure de corrélation entre les taux de rentabilité des actifs. Chopra et Ziemba (1993) ont, quant à eux, étudié l'impact relatif des erreurs d'estimations des espérances, des variances et des covariances. Une erreur d'estimation sur l'espérance du taux de rentabilité a des effets

bien plus importants qu'une erreur sur l'estimation de la variance ou sur les covariances. Ainsi, les estimations « ex ante » de la performance des portefeuilles constituent souvent des prédictions biaisées (c'est-à-dire trop optimistes) des performances réelles des portefeuilles. Il existe plusieurs manières de gérer cette situation. En premier lieu, il est possible de réduire significativement ce risque d'estimation des paramètres en interdisant les ventes à découvert d'actif. Ainsi, les effets néfastes (en termes de rentabilité ou d'utilité) d'une erreur d'estimation seront partiellement réduits par les contraintes de gestion imposées. Stein (1955) et Jorion (1985) ont, quant à eux, proposé des estimateurs dits « shrinkage » permettant de réduire le risque d'estimation des paramètres dans le cadre d'une gestion moyenne-variance. Ces estimateurs (James Stein et Bayse Stein) se concentrent sur l'inférence du vecteur des espérances d'une loi multi-normale. Toutes ces études ont été réalisées dans le cadre d'une optimisation de portefeuille moyenne-variance. La variance comme mesure du risque a pourtant souffert de nombreuses critiques, sur le plan statistique mais aussi sur le plan conceptuel.

Même si l'optimisation moyenne-variance reste le standard en finance, son application est néanmoins sujette à caution. En effet, une optimisation moyenne-variance ne sera valable que si les taux de rentabilité suivent une loi normale (ou si l'investisseur possède une fonction d'utilité quadratique peu réaliste). De nombreuses études ont pourtant conclu au rejet de la loi normale comme loi de probabilité des taux de rentabilité (Fama (1965), Blattberg et Gonedes (1974), Affleck-Graves et MacDonald (1989)). De plus, même si on fait l'hypothèse de taux de rentabilité normalement distribués, la variance ne paraît pas être une mesure du risque adéquate. Dans son calcul, l'écart entre les taux de rentabilité au dessus de la moyenne et la moyenne sont considérés comme une source potentielle de risque, ce qui est contraire à la vision du risque communément admise. Ainsi, des mesures du risque alternatives, appelées dans la littérature financière « downside risk measures » sont apparues depuis plus d'un quart

de siècle maintenant. Roy (1952), Bawa (1975) et Nawrocki (1991) ont montré que les moments partiels inférieurs constituaient une alternative plus générale que la variance, en terme de mesure du risque. Dans leurs modèles, le risque est mesuré en terme d'écarts en dessous d'un objectif pré-défini. Cette approche permet au gestionnaire de portefeuille de définir le risque d'une manière adéquate en fonction des ses objectifs et des contraintes qui lui sont imposées concernant le rendement de son portefeuille. Ce cadre théorique nous permet d'identifier une question de recherche que nous allons présenter dans la section suivante. En effet, l'analyse du risque d'estimation dans le cadre d'un modèle moyenne-moments partiels inférieurs est un sujet, qui, à notre connaissance, n'a pas été traité.

L'objectif de cet article est d'analyser la capacité de la technique bootstrap à réduire le risque d'estimation des paramètres dans le choix de portefeuille et de la comparer à d'autres techniques déjà décrites dans la littérature financière. Contrairement aux études antérieures, nous considérons que le risque d'un actif est mesuré par l'écart entre les rendements observés et les rendements moyens, c'est-à-dire les moments partiels inférieurs. Plus précisément, nous nous posons la question suivante : quel écart existe-t-il entre le portefeuille optimisé sur la base d'un échantillon de la population et le portefeuille réellement efficient ? Nous répondrons à cette question par une approche similaire à celle employée par Jobson et Korkie (1980), Broadie (1993) ou encore Chopra et Ziemba (1993). Nous utiliserons une approche par les simulations car elle permet de montrer directement les « effets » de l'erreur d'estimation sur les portefeuilles efficients. Afin de mesurer la capacité de notre technique de ré-échantillonnage à réduire le risque d'estimation des paramètres, il est nécessaire de la confronter à d'autres méthodes déjà décrites dans la littérature financière. Ainsi, nous comparerons les performances de trois méthodes permettant de réduire le risque d'estimation dans le cadre d'une optimisation de portefeuille : l'estimateur James-Stein (JS), l'estimateur

Bayes Stein (BS) et enfin l'estimation par la technique bootstrap. La technique bootstrap, contrairement aux estimateurs « shrinkage » qui se concentrent sur l'estimation des espérances de rentabilité, devrait aussi nous permettre d'améliorer nos estimations du risque. L'écart entre le portefeuille optimisé sur la base d'un échantillon de la population et le portefeuille réellement efficient devrait théoriquement diminuer lorsque l'investisseur utilise des estimateurs « shrinkage », si l'on se réfère aux études portant sur le modèle moyenne-variance. Notre intuition est que le bootstrap va nous permettre de réduire encore plus significativement cet écart dans le cadre d'une gestion de portefeuille moyenne - moments partiels inférieurs. En raison du nombre relativement élevé de simulations que nous allons effectuer, les performances de ces trois méthodes seront comparées dans le cadre d'une optimisation moyenne - moments partiels inférieurs (MPI) d'ordre 2. Le taux cible étant la moyenne historique du taux de rentabilité de chaque actif en portefeuille, la mesure du risque choisie est la semi-variance.

La suite de cet article est organisée comme suit. La seconde section présente notre méthodologie de recherche. Nous décrirons dans un premier temps la méthodologie de simulation employée et les procédures d'optimisation de portefeuille moyenne - variance et moyenne - moment partiel inférieur. Dans un second temps, nous présenterons notre mesure de l'erreur d'estimation des paramètres du portefeuille efficient. La troisième section de cet article présente les résultats des tests empiriques que nous avons menés à partir de données françaises. Nous analyserons la magnitude du risque d'estimation des paramètres pour les deux modèles de gestion employés. Nous comparerons ensuite les résultats obtenus grâce à trois méthodes de réduction du risque d'estimation des paramètres : l'estimateur James Stein, l'estimateur Bayes Stein et enfin le Bootstrap. La quatrième section conclut cet article.

2 METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Nous adoptons ici une approche par la simulation pour l'analyse du risque d'estimation dans le cadre moyenne - MPI-2 car cette approche nous permet d'apprécier directement les effets et la magnitude de l'erreur d'estimation sur les portefeuilles. Notre méthodologie de recherche peut être décomposée en plusieurs étapes : le calcul des paramètres de la population des rentabilités, les procédures de simulation et d'optimisation de portefeuille, et enfin la mesure de l'erreur d'estimation des paramètres du portefeuille efficient.

2.1 Paramètres de la population

Nous simulons les taux de rentabilité d'une distribution multi-normale car dans ce cadre, les modèles de gestion moyenne-variance et moyenne-MPI classent les portefeuilles dans le même ordre de préférence. Afin d'assurer le réalisme de nos simulations, nous avons choisi de prendre comme population de base des titres appartenant à l'indice d'actions françaises "CAC 40". Les taux de rentabilité mensuels totaux (dividendes inclus) proviennent de la base de donnée Datastream. Notre échantillon couvre la période Janvier 1973-Décembre 2001 (348 observations). Comme l'a montré Nawrocki (1991), le nombre d'actifs disponibles, représentant l'ensemble des opportunités d'investissements, peut jouer un rôle important dans le cadre d'une gestion moyenne-variance car la résolution du programme de gestion nécessite l'inversion de la matrice de covariance. Cette inversion devient généralement assez difficile lorsque sa taille (c'est-à-dire le nombre d'actifs disponibles) devient grand. Selon Jobson et Korkie (1980), l'effet des erreurs d'estimations tend à diminuer avec le nombre d'actifs en portefeuille. Nous effectuons donc nos simulations pour $N = 5$ actifs en portefeuille puis nous contrôlerons l'effet de la taille du portefeuille en prenant $N = 25$ actifs. Nous avons

aussi réalisé cette étude en prenant plusieurs portefeuilles composés de 5 actifs afin de vérifier que nos résultats étaient indépendants du choix des actifs en portefeuille.

Les taux de rentabilité des N actifs sont utilisés pour calculer le vecteur des espérances de notre population, μ_N , la matrice de covariance Σ_N . Dans le cadre du modèle de gestion moyenne-MPI-2, nous fixons le taux cible à $t = \mu_i$ pour chaque actif en portefeuille, μ_i étant le taux de rentabilité moyenne de chacun des actifs en portefeuille sur la période d'étude (Janvier 1973-Décembre 2001). Il nous est possible de fixer un taux cible pour chaque actif si nous utilisons l'algorithme heuristique de Nawrocki (1991). Nous considérons que ces estimations présentent les vrais paramètres de la population et non pas les estimations des paramètres d'un échantillon de la population. En simulant une loi multinormale $N(\mu_N, \Sigma_N)$ de taille T avec $T < 348$, nous allons donc obtenir un échantillon de la population. L'estimation des paramètres à partir de cet échantillon de taille T sera donc sujette au risque d'estimation. Nous émettons l'hypothèse que les rentabilités sont normalement distribuées. Cette hypothèse a été rejetée par de nombreux tests empiriques mais elle nous est indispensable puisque nous devons pré-spécifier la distribution des taux de rentabilité afin d'effectuer nos simulations. Cette hypothèse ne devrait d'ailleurs pas remettre en cause les résultats obtenus car l'erreur induite par le choix d'une loi multi-normale devrait se répercuter de manière identique sur la précision des trois estimateurs choisis.

2.2 Description des simulations et des procédures d'optimisation

Les simulations et les procédures d'optimisation se déroulent en deux étapes. La première étape consiste à simuler T taux de rentabilité issus d'une distribution multi-normale $N(\mu_N, \Sigma_N)$. La seconde étape consiste à calculer les pondérations de chaque actif en

portefeuille (selon les deux modèles moyenne-variance et moyenne-MPI-2) pour chaque trajectoire simulée.

Etape 1 : simulation d'une distribution multi-normale

La loi multi-normale correspond à l'extension de la loi normale au cas de N variables $x_1, x_2, \dots, x_N$. Elle est caractérisée par un vecteur de moyennes μ_N et une matrice de variance-covariance Σ_N . Pour simuler une loi multi-normale $N(\mu_N, \Sigma_N)$ de dimension N , on applique l'algorithme suivant :

1. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur constitué de N nombres aléatoires indépendants distribués selon la loi normale réduite $N(0,1)$. Partant d'un vecteur de taille N de variables pseudo-aléatoires obtenu à l'aide du générateur congruentiel, on génère un vecteur $\mathbf{u}$ par la technique de Box Muller (1958).
2. Soit $\mathbf{L}$ la matrice triangulaire inférieure résultant de la décomposition de Cholesky de la matrice Σ_N .
3. Le vecteur $\mathbf{x} = \mu_N + \mathbf{L}\mathbf{u}$ suit la loi multi-normale $N(\mu_N, \Sigma_N)$.

Nous répétons alors cette procédure T fois, afin d'obtenir une loi multi-normale de taille T . Cet échantillon d'une loi multi-normale $N(\mu_N, \Sigma_N)$ de taille T est une matrice (N, T) que l'on notera R_p (qui correspond à la simulation p).

Etape 2 : optimisation de portefeuille - calcul des pondérations de chaque actif dans le portefeuille efficient

La seconde étape consiste dans le calcul des pondérations de chaque actif dans le portefeuille efficient selon le modèle de gestion moyenne-risque retenu (pour un niveau d'aversion au risque donné) pour chaque échantillon R_p simulé.

Avec N titres, le programme d'optimisation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \underset{x}{Max} \quad & \mu X' - \frac{1}{2} \lambda X \Omega X' \\ \text{s.c. : } & X' I = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

où X le vecteur des poids de chaque actif en portefeuille, λ , comme dans l'analyse moyenne-variance, représente le degré d'aversion au risque de l'investisseur et Ω la matrice de semi-covariance.

La semi-covariance entre deux actifs i et j est calculée comme suit :

$$\text{semi cov}(r_i, r_j) = s_{ij} = SD_i SD_j \rho_{ij}$$

où SD_i le semi-écart-type de rendement de l'actif i (racine carrée de la semi variance de l'actif i) et ρ_{ij} le coefficient de corrélation entre les actifs i et j .

La résolution du programme d'optimisation (1) se fait numériquement à l'aide de l'algorithme de la ligne critique de Markowitz (1992). Pour chaque modèle de gestion, nous calculons la pondération des actifs pour plusieurs degrés admissibles d'aversion au risque : $\lambda = 1, 3$ et 5 .

Les deux étapes décrites précédemment sont répétées $P = 500$ fois, pour $T = 36, 60$ et 120

observations. Nous obtenons alors 500 matrices de taux de rentabilité R_p (avec $p = 1 \dots 500$), pour $T = 30, 60$ et 120 observations.

Nous avons donc choisi une taille de portefeuille relativement faible ($N = 5$), des coefficients d'aversion au risque faibles ($\lambda = 1, 3$ et 5) et des échantillons de données réduits ($T = 30, 60$ et 120 observations). Selon les études précédentes, cela aura pour effet de maximiser les erreurs d'estimation, du moins dans le cadre d'une gestion moyenne-variance. La taille attendue des erreurs d'estimation est donc relativement grande, mais cela rendra plus facile la comparaison des techniques d'amélioration des estimations. Si le bootstrap permet effectivement de réduire l'erreur d'estimation, l'écart entre l'erreur d'estimation avec les estimateurs « shrinkage » et l'erreur d'estimation avec le bootstrap devrait être significatif.

2.3 Optimisation avec des estimateurs améliorés

La littérature financière concernant le risque d'estimation est abondante et de nombreux estimateurs ont été proposés permettant de réduire le risque d'estimation dans le cadre d'une gestion de portefeuille moyenne-variance. Nous allons tester la performance de trois méthodes permettant de prendre en compte le risque d'estimation des paramètres dans le cadre d'une gestion moyenne-moments partiels inférieurs. Les deux premiers estimateurs que nous allons tester font partie des estimateurs « shrinkage », l'estimateur James Stein et l'estimateur Bayes Stein. Stein (1955) a montré que l'efficacité (au sens des moindres carrés) de l'estimation des espérances des taux de rentabilité pouvait être accrue en mélangeant les informations à travers les séries de taux de rentabilité : l'espérance de rendement de chaque actif est ajustée par une espérance globale des taux de rentabilité de tous les actifs présents en portefeuille.

Estimateur James Stein (JS)

Le premier estimateur « shrinkage » que nous présentons est l'estimateur James Stein (JS) :

$$\mu_{JS} = (1 - \omega)\hat{\mu} + \omega \bar{r}_G I \quad (2)$$

où I est un vecteur identité de dimension N (le nombre d'actifs en portefeuille), $\hat{\mu}$ est le vecteur des espérances des taux de rentabilité calculé à partir de la matrice des taux de rentabilité simulée R_p , $\bar{r}_G = \frac{1}{N} \sum \hat{\mu}_i$ l'espérance globale des taux de rentabilité et

$$\omega_t = \min \left[1, (N - 2) / (T(\hat{\mu} - \bar{r}_G I)' \hat{C}^{-1} (\hat{\mu} - \bar{r}_G I)) \right]$$

est le facteur shrinkage. $\hat{C}^{-1}$ est la transposée de la matrice de variance-covariance calculée à partir de notre matrice des taux de rentabilité simulée R_p , $N = 5$ est le nombre d'actifs en portefeuille et T est le nombre de données de notre échantillon d'observations.

Estimateurs Bayes Stein (BS)

Le second estimateur « shrinkage » utilisé est l'estimateur Bayes Stein (BS) introduit par Jorion (1985,1991) qui peut s'écrire :

$$\mu_{BS} = (1 - \omega)\hat{\mu} + \omega \bar{r}_{GBS} I \quad (3)$$

où $\hat{r}_{GBS} = I' \hat{C}^{-1} \hat{\mu} / (I' \hat{C}^{-1} I)$ et $\omega = \alpha / (\alpha + T)$

Le facteur « shrinkage » peut alors s'écrire :

$$\alpha = (N + 2) / \left[(\hat{\mu} - \bar{r}_{GBS} I)' \hat{C}^{-1} (\hat{\mu} - \bar{r}_{GBS} I) \right]$$

Estimation par le bootstrap

La troisième méthode que nous présentons afin d'améliorer nos estimations des paramètres à partir d'un échantillon d'observations est la méthode du bootstrap standard . La méthode de ré-échantillonnage bootstrap, introduite par Efron (1979), fait partie des méthodes de calculs intensifs sur ordinateur et permet d'estimer la distribution d'un estimateur ou d'une statistique en ré-échantillonnant les données à notre disposition, sans faire appel à une quelconque loi ou modèle économétrique. L'approche bootstrap dans un contexte de gestion de portefeuille moyenne-variance a déjà été utilisée dans des études menées par Liang et al (1996). Nous décrivons ci-dessous la procédure de ré-échantillonnage succinctement :

Soit R_p la matrice des taux de rentabilité simulés (pour les N actifs) de taille T issue d'un « tir » p de la simulation. Pour chaque matrice de taux de rentabilité simulés, nous allons tirer au hasard un nombre T de taux de rentabilité parmi R_p . Notre ré-échantillonnage se fait de manière « cross sectionnal » afin de conserver la corrélation entre chaque actif. Cette procédure nous permet d'obtenir un échantillon bootstrap R^* à partir de R_p . Pour chaque échantillon R^* généré, nous allons estimer les vecteurs d'espérance, les matrices de covariance et de semi-covariance puis résoudre les deux programmes d'optimisation présentés ci dessus. Cette procédure est répétée K fois. La moyenne des pondérations et des paramètres des portefeuilles issue des K ré-échantillonnages sera considérée comme la solution optimale issue de la matrice simulée R_p . Ainsi, pour chaque matrice de rendement simulée R_p , pour un niveau d'aversion au risque λ , la solution est donnée par :

$$\hat{X}_{R_p}(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{x}_k(\lambda) \quad (4)$$

$$\text{d'où} \quad \hat{\mu}_{R_p}(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\mu}_k(\lambda) \quad \text{et} \quad MPI2_{R_p}(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K MPI2_k(\lambda) \quad (5)$$

Etant donné le nombre de simulations à effectuer, nous choisissons $K = 300$, qui, dans les études empiriques concernant la précision des estimateurs, semble donner des résultats suffisamment précis pour estimer les paramètres d'espérance et de variance. Le bootstrap n'est pas la procédure de ré-échantillonnage la plus efficace pour les séries temporelles puisqu'il présuppose des taux de rentabilité i.i.d. Néanmoins, nous générons dans le cadre de nos simulations R_p des séries de taux de rentabilité supposés i.i.d. Il aurait donc été inutile d'utiliser d'autres méthodes de ré-échantillonnage tel que le moving block bootstrap (Carlstein et al, 1997) ou le matched block bootstrap (Sanfilippo, 2004), techniques de ré-échantillonnage permettant de prendre en compte la dépendance sérielle des rentabilités.

2.4 Mesures de l'erreur d'estimation

Afin de mesurer les effets de l'utilisation des paramètres estimés dans le choix du portefeuille efficient, nous allons analyser les caractéristiques des portefeuilles « pseudo-efficients » issus des simulations R_p . La composition de chaque portefeuille sera obtenue à partir de l'équation (1) et les estimations des paramètres de chaque actif à l'aide des équations (2), (3) et (5). Plus précisément, pour chaque modèle de gestion (c'est à dire chaque mesure du risque), nous obtenons les paramètres (moyenne et risque) de trois types de portefeuilles :

- les paramètres du portefeuille réellement efficient sur toute la période d'estimation, qui ont été calculés à partir de la population entière, qui eux, restent constants pour toutes les matrices simulées R_p ;

- les paramètres des portefeuilles efficients « ex ante » : c'est-à-dire les paramètres portefeuilles issus de l'optimisation pour chaque simulation R_p . Ce sont les paramètres des portefeuilles « pseudo-efficients », c'est-à-dire des portefeuilles efficients si l'échantillon des observations constituait la population entière ;

- les paramètres des portefeuilles « ex post » : c'est-à-dire ceux des portefeuilles qui ont été construits à partir des estimations. Ces paramètres sont calculés en multipliant les pondérations de chaque actif (calculées à partir des estimations issues de chaque simulation R_p) par les vraies valeurs des paramètres de chaque actif (calculées à partir de la population entière). Les caractéristiques du portefeuille « ex post » correspondent à ce que l'investisseur possède réellement en portefeuille. Nous allons présenter en détail la méthodologie utilisée pour obtenir les portefeuilles réellement efficients, ex-ante et ex-post, dans le graphique 1.

[Graphique 1]

Les paramètres du portefeuille réellement efficients sont obtenus de la manière suivante :

- la moyenne du portefeuille réellement efficients est donnée par le produit matriciel de la transposée du vecteur des poids optimaux W par le vecteur des espérances μ :
 $W' \mu$;
- la variance (ou la semi-variance) du portefeuille réellement efficients est donnée par le produit matriciel du vecteur des poids optimaux W par la matrice de covariance Σ (ou semi-covariance Ω) : $W' \Sigma W$ (ou $W' \Omega W$).

Les paramètres du portefeuille ex ante sont obtenus de manière similaire :

- la moyenne du portefeuille ex-ante est donnée par le produit matriciel de la transposée du vecteur des poids optimaux W_p par le vecteur des espérances μ_p : $W_p' \mu_p$;
- la variance (ou la semi-variance) du portefeuille ex-ante est donnée par le produit matriciel du vecteur des poids optimaux W_p par la matrice de covariance Σ_p (ou semi-covariance Ω_p) : $W_p' \Sigma_p W_p$ (ou $W_p' \Omega_p W_p$).

Enfin les paramètres du portefeuille ex-post sont obtenus ainsi :

- la moyenne du portefeuille ex-post est donnée par le produit matriciel de la transposée du vecteur des poids optimaux W_p par le vecteur des espérances μ : $W_p' \mu$;
- la variance (ou la semi-variance) du portefeuille ex-post est donnée par le produit matriciel du vecteur des poids optimaux W_p par la matrice de covariance Σ (ou semi-covariance Ω) : $W_p' \Sigma W_p$ (ou $W_p' \Omega W_p$).

A partir des paramètres calculés pour le portefeuille réellement efficient et l'ensemble des p portefeuilles ex-post, il est possible de mesurer l'erreur moyenne sur l'ensemble des simulations réalisées. Ce qui intéresse l'investisseur, ce n'est pas l'écart entre les caractéristiques du portefeuille réellement efficient et celles du portefeuille « ex ante », mais bien l'écart entre les caractéristiques du portefeuille réellement efficient et celles du portefeuille « ex post ».

Nous allons mesurer l'erreur moyenne due à l'estimation des paramètres par le biais de deux mesures :

$$f_{\mu}(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (\mu(\lambda) - \tilde{\mu}_p(\lambda))^2} \quad (6)$$

et

$$f_{MPI2}(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \left(MPI2(\lambda)^{1/2} - MPI2_p(\lambda)^{1/2} \right)^2} \quad (7)$$

où P est le nombre de matrices de taux de rentabilité simulées, $\mu(\lambda)$ l'espérance du portefeuille réellement efficient pour un niveau d'aversion au risque de λ , $\tilde{\mu}_p(\lambda)$ l'espérance du portefeuille empirique pour un niveau d'aversion au risque de λ issus de la simulation R_p , $MPI2(\lambda)$ est le MPI-2 du portefeuille réellement efficient pour un niveau d'aversion au risque de λ et $MPI2_p(\lambda)$ est le moment partiel inférieur du portefeuille empirique pour un niveau d'aversion au risque de λ issu de la simulation R_p .

Dans le cadre d'une gestion moyenne-variance, l'erreur d'estimation concernant la variance,

$f_{var}(\lambda)$ s'écrira donc

$$f_{var}(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (\sigma(\lambda) - \tilde{\sigma}_p(\lambda))^2} \quad (8)$$

où P est le nombre de matrices de taux de rentabilité simulées, $\sigma(\lambda)$ est l'écart-type du portefeuille réellement efficient et $\tilde{\sigma}_p(\lambda)$ est l'écart-type du portefeuille empirique pour un niveau d'aversion au risque de λ issu de la simulation R_p .

Ces trois mesures vont nous permettre de mesurer l'écart entre le portefeuille optimisé sur la base d'un échantillon de la population et le portefeuille réellement efficient. Nous aurions pu aussi comparer les ratios de Sharpe (Jobson et Korkie, 1980) ou encore la « perte équivalente » (cash equivalent loss, Chopra et Ziemba, 1993). Même si le temps de calcul est

plus long, les mesures que nous avons choisies nous permettent d'analyser l'écart sur chacun des paramètres et non pas sur les résultats bruts des portefeuilles.

3 REDUCTION DU RISQUE D'ESTIMATION PAR LE BOOTSTRAP

Nous allons présenter dans cette section les résultats que nous avons obtenus à partir de 500 simulations ($P = 500$), pour divers degrés d'aversion au risque et pour les trois méthodes d'amélioration des estimations. Nous allons d'abord montrer que le risque d'estimation, dans le cadre d'un modèle moyenne-moments partiels inférieurs, ne peut en aucun cas être négligé. De plus, en moyenne, la technique bootstrap permet de réduire sensiblement l'erreur d'estimation.

3.1 Le risque d'estimation dans le cadre des moments partiels inférieurs

L'utilisation des estimations des paramètres en lieu et place des vrais paramètres de la distribution peut avoir des conséquences importantes dans le cadre du modèle de gestion moyenne-MPI-2, comme le montre les graphiques 2 et 3.

[Graphique 2]

[Graphique 3]

Ces graphiques présentent la frontière efficiente réelle, tracée grâce aux vrais paramètres d'espérance et de moment partiel inférieur de chaque actif, la frontière efficiente ex ante, tracée à partir des estimations des paramètres issus de R_p et la frontière efficiente ex-post, tracée à partir des poids des portefeuilles pseudo-efficients de R_p et des vrais paramètres d'espérance et de moment partiel inférieur.

Lors de nos simulations, la frontière ex-ante est toujours située «à gauche» des frontières efficientes réelles et ex-post. Ceci est logique dans la mesure où l'estimation des paramètres semble sur-estimer l'espérance de rendement et sous-estimer le risque des portefeuilles. Les paramètres estimés sur la base d'un échantillon de la population semblent donc constituer des prévisions biaisées et trop « optimistes » des vrais paramètres. Mais le plus surprenant constitue la différence entre la frontière réelle et la frontière ex-post. L'utilisation de paramètres estimés déforme totalement la frontière efficiente si bien que les portefeuilles les plus risqués apportent « ex-post » un rendement moyen inférieur aux portefeuilles les moins risqués lors de certaines simulations R_p (graphique 3). La forme de la frontière efficiente n'est plus concave mais convexe. Ce rendement inférieur est essentiellement dû aux erreurs d'estimation portant sur les espérances de rendement. Il est possible d'obtenir une rentabilité de portefeuille négative, même lorsque le risque de notre portefeuille est élevé. Ce constat n'est pas rare lors des simulations.

De plus, la différence de rendement entre les portefeuilles réels et les portefeuilles ex-post n'est pas constante sur toute la frontière efficiente. Elle semble s'accroître avec le rendement espéré du portefeuille, c'est-à-dire pour des degrés d'aversion au risque faibles. Ceci n'est pas surprenant et correspond aux résultats trouvés par Jobson et Korkie (1980) dans le cadre d'un modèle moyenne-variance. Selon la théorie, l'erreur sur les espérances aura les conséquences les plus fortes, puis vient l'erreur sur les moments partiels inférieurs. Les efforts des gestionnaires doivent donc porter en priorité sur l'estimation des espérances. Or pour un risque d'aversion faible, l'investisseur va investir massivement dans des actifs dont l'espérance de rendement est la plus élevée, même si ils sont risqués. L'erreur sur l'espérance de rendement de ces actifs sera donc accrue lorsque son aversion au risque est faible. Dans le

cadre de notre étude, cette erreur est d'autant plus accentuée par le fait que nous n'imposons pas de contraintes sur les ventes à découvert.

A titre de comparaison, les tableaux 1 et 2 présentent les erreurs d'estimation des paramètres entre les portefeuilles ex-post et les portefeuilles réellement efficients pour un modèle de gestion moyenne-variance et pour un modèle moyenne-MPI-2 quand aucune méthode d'amélioration des estimations n'est employée. Nous remarquons que les erreurs d'estimations ne peuvent être négligées lorsque le portefeuille est composé de cinq actifs, quelque soit le degré d'aversion au risque de l'investisseur ($\lambda = 1, 3, 5$), et quelle que soit la taille de notre échantillon de données ($T = 36, 60, 120$).

[Tableau 1]

Nous constatons tout d'abord que le risque d'estimation des paramètres décroît avec la taille de l'échantillon et le degré d'aversion au risque de l'investisseur. Pour un degré d'aversion au risque $\lambda = 1$, l'erreur moyenne sur l'espérance du portefeuille efficient (dans le cadre du modèle moyenne - MPI2) passe de 0.70 % à 0.45 % lorsqu'on multiplie par quatre la taille de notre échantillon d'observations ($T = 30$ et $T = 120$). Plus la taille de notre échantillon est élevée, plus l'estimation de l'investisseur sera précise car il aura une meilleure connaissance de la distribution des taux de rentabilité de chaque actif. Ce résultat est bien conforme à notre analyse précédente concernant les frontières efficientes. Moins l'investisseur est averse au risque, plus il va investir dans les actifs dont l'espérance de rendement est élevée ; dans ce cas, une erreur d'estimation sur ces espérances aura des effets encore plus accentués.

[Tableau 2]

Quelle que soit la mesure du risque, les erreurs d'estimation des paramètres ne peuvent en aucun cas être négligées, même lorsque le degré d'aversion au risque est élevé et que la taille de l'échantillon de données (c'est-à-dire la taille de la matrice R_p) est grande. Pour un degré d'aversion au risque $\lambda = 5$ et une taille d'échantillon $T = 120$, l'erreur d'estimation sur la moyenne est de 0.11% et de 0.16 % pour la semi-variance. Sur une base annuelle, cette erreur serait donc de 1.32 % sur la moyenne et de 1.96 % sur la semi-variance du portefeuille. L'erreur concernant la semi-variance du portefeuille devient même très élevée lorsque la taille de notre échantillon et lorsque le degré d'aversion au risque sont faibles. Pour $\lambda = 1$ et $T = 30$ observations, l'erreur d'estimation moyenne sur la semi-variance atteint 5.02 % !

L'ampleur de ces erreurs d'estimation moyennes peut paraître surprenante mais peut s'expliquer assez simplement :

- Les coefficients d'aversion au risque choisis sont assez faibles. Ainsi, quel que soit le modèle de gestion, l'investisseur aura tendance à choisir un portefeuille « relativement » risqué. Parmi les actifs disponibles, la procédure d'optimisation de portefeuille va choisir les actifs dont l'espérance de rendement est la plus surestimée et le risque le plus sous-estimé. Il faut cependant noter que ce problème de maximisation d'erreur devrait diminuer avec le nombre d'actifs disponibles, ce que nous avons vérifié lorsque nous avons effectué nos simulation avec $N = 25$ actifs en portefeuille.
- Pour nos deux modèles de gestion, nous avons autorisé les ventes à découvert, ce qui a aussi pour effet d'accroître les erreurs d'estimation, comme l'ont montré Jobson et Korkie (1980). Pour un degré d'aversion au risque très faible, l'investisseur va vendre à découvert les actifs dont l'espérance de rendement est faible afin d'investir massivement dans des actifs

dont l'espérance de rendement est plus forte. Cette stratégie aura pour conséquence d'accroître les effets d'une erreur d'estimation.

- La taille de nos échantillons est assez faible puisque $T = 36, 60$ et 120 , alors que notre population est constituée de 348 données. Or, selon Jobson et Korkie (1980), il faut plus de 200 taux de rentabilité mensuels pour obtenir des estimations raisonnablement non biaisées de la relation rendement-risque du portefeuille optimal.

Nous avons montré, que, quel que soit le modèle de gestion employé, les erreurs portant sur le risque et l'espérance de rendement des portefeuilles optimaux tend à décroître avec le degré d'aversion au risque et le nombre d'observations utilisées pour estimer les paramètres de chaque actif. Cependant les erreurs d'estimation dans le modèle moyenne-MPI-2 sont généralement beaucoup plus grandes que celles du modèle moyenne-variance en particulier sur l'espérance du portefeuille. Pour un degré d'aversion au risque $\lambda = 3$ et un échantillon de taille $T = 60$ observations par exemple, l'erreur d'estimation sur l'espérance de rendement du portefeuille est de 0.37 % pour le modèle moyenne-MPI-2 et « seulement » de 0.20 % pour le modèle moyenne-variance. Nous pouvions nous attendre à ce résultat dans la mesure où, pour un degré d'aversion au risque donné, même si on suppose que les taux de rentabilité suivent une loi normale, la semi-variance d'un portefeuille est égale à la moitié de sa variance. Ceteris paribus, l'investisseur qui retient la semi-variance comme mesure du risque aura tendance à construire un portefeuille constitué d'actif plus risqués (du moins qui ont une espérance de rendement supérieure). En cherchant des actifs dont le rendement est supérieur, l'investisseur accroît son risque d'estimation des paramètres. De plus, la semi-variance ne mesure qu'une « partie » du risque, dans le sens où elle n'utilise qu'une partie tronquée des données disponibles, ce qui a pour conséquence d'accroître les erreurs d'estimations. Comme l'ont montré Chopra et Ziemba (1993) dans le cadre d'un modèle moyenne-variance, c'est l'erreur

sur les espérances qui a les conséquences les plus fortes ; nos résultats montrent que, dans le cadre d'une gestion moyenne-MPI-2, encore plus que pour une gestion moyenne-variance, l'erreur d'estimation des paramètres ne peut être négligée.

3.2 Amélioration des estimations par les estimateurs « shrinkage » et le bootstrap

Cette section présente les résultats de nos simulations lorsque l'investisseur utilise des estimateurs particuliers afin d'améliorer ces estimations des paramètres des différents actifs en portefeuille : les estimateurs shrinkage, James Stein (JS) et Bayes Stein (BS) et le bootstrap.

Le tableaux 3 et 4 présentent les erreurs d'estimation des paramètres lorsque nous employons les deux estimateurs « shrinkage » : l'estimateur James Stein et l'estimateur Bayes Stein. L'estimateur James Stein ne semble pas réellement capable de réduire le risque d'estimation des paramètres, en particulier pour la semi-variance du portefeuille. L'erreur commise sur la semi-variance du portefeuille ex-post est même parfois supérieure lorsque l'on emploie un estimateur James Stein. Pour un degré d'aversion au risque $\lambda = 3$ et un échantillon de $T = 120$ observations, l'erreur commise sur le MPI-2 par l'estimation est de 1.00% alors qu'elle est de 1.05% avec l'estimateur JS.

[Tableau 3]

Notons de plus que nos résultats sont assez difficiles à interpréter puisque, dans le cadre de l'estimateur JS, il n'est pas rare de constater que plus la taille de notre échantillon de données est grande, plus l'erreur commise est grande, en particulier pour la moyenne du portefeuille. Pour un degré d'aversion au risque $\lambda = 3$, l'erreur commise sur la moyenne pour un échantillon de taille $T = 60$ observations est de 0.33% alors qu'elle est de 0.38% pour un

échantillon de taille $T = 120$ observations. Ce résultat est assez contre-intuitif dans la mesure où un échantillon d'une taille plus grande devrait nous permettre d'approcher au mieux la « vraie » distribution. L'approche par l'estimateur James Stein ne semble donc pas adaptée dans le cadre d'un modèle moyenne-MPI-2, alors que Jorion (1985) a montré que cette approche améliorerait significativement la performance d'un modèle moyenne-variance.

Lorsque nous utilisons l'estimateur Bayes-Stein, les erreurs d'estimation semblent en revanche se réduire significativement, en termes de moyenne et de semi-variance du portefeuille ex-post, en particulier pour des degrés d'aversion au risque faibles. Pour un degré d'aversion au risque $\lambda = 1$ et un échantillon de $T = 120$ observations, l'erreur commise sur la moyenne par l'estimateur BS est de 0.30 % (contre 0.45 % avec l'estimation directe) et l'erreur sur la semi-variance est de 1.09 % (contre 2.70 %). En règle générale, l'apport de l'estimateur BS est surtout significatif pour la semi-variance du portefeuille.

[Tableau 4]

Il est cependant assez surprenant de constater que ces deux méthodes (JS et BS) n'améliorent pas significativement les performances de l'estimation directe, en particulier lorsque la taille de notre échantillon est faible et que le degré d'aversion au risque est élevé. Pour $T = 30$ et $\lambda = 5$, l'écart sur la moyenne pour l'estimateur BS et l'estimateur JS est de 0.23 % alors qu'il est de 0.25 % pour l'estimation directe. En ce qui concerne la semi-variance, l'écart est de 1.02 % pour l'estimateur JS, de 0.98 % pour l'estimateur BS et de 1.04 % pour l'estimation directe. La conclusion que nous pouvons tirer de ces résultats est que l'estimateur James Stein ne permet pas réellement de réduire le risque d'estimation des paramètres dans le cadre d'un modèle moyenne-MPI-2. De plus, l'écart entre le portefeuille optimisé sur la base d'un échantillon et le portefeuille réellement efficient peut être réduit par l'utilisation de

l'estimateur Bayes Stein. Mais l'apport de cet estimateur est très faible, surtout lorsque la taille de notre échantillon de données est faible. L'utilisation de ces techniques dans le cadre de notre problématique est donc sujette à caution, puisque, par nature, le nombre de données à long terme à notre disposition est extrêmement faible.

Le tableau 5 présente les erreurs d'estimation lorsque l'on utilise la méthode bootstrap afin d'affiner les estimations des paramètres à partir d'un échantillon de données. Pour chaque échantillon d'observations simulé, nous avons effectué 300 répliques bootstrap. La pondération de chaque actif en portefeuille est calculée comme la moyenne des pondérations lors des 300 répliques bootstrap.

[Tableau 5]

Nous constatons que, quelles que soient le degré d'aversion au risque et la taille de l'échantillon, l'écart entre le portefeuille optimisé sur la base d'un échantillon et le portefeuille réellement efficient peut être significativement réduit par l'utilisation du bootstrap. Pour un degré d'aversion au risque $\lambda = 1$ et un échantillon de $T = 120$ observations, l'erreur commise sur la moyenne par le bootstrap est de 0.23 % (contre 0.45 % avec l'estimation directe, 0.58 avec l'estimateur JS et 0.30 avec l'estimateur BS). L'erreur sur la semi-variance est de 0.62 % (contre 2.70 %, 1.05 % et 0.86 %). Cet écart est particulièrement réduit lorsque la taille de l'échantillon est faible, contrairement aux autres estimateurs. Pour $\lambda = 5$ et $T = 30$, l'erreur concernant la moyenne du portefeuille est de 0.15 % pour le bootstrap alors qu'il est proche de 0.25 % pour les estimateurs BS et JS. L'approche par le bootstrap semble donc plus performante que les estimateurs « shrinkage » pour réduire l'erreur d'estimation des paramètres, en particulier lorsque la taille de l'échantillon des observations est faible.

Enfin, nous avons pu remarquer lors des simulations la différence de « comportement » entre les trois estimateurs. Les estimateurs James Stein et Bayes Stein permettent de réduire fortement l'erreur d'estimation lorsque l'échantillon de données n'est pas du tout représentatif de la population. Ces estimateurs donnent de piètres résultats dans le cas contraire. Le bootstrap, au contraire, permet d'améliorer pratiquement à chaque fois l'estimation des paramètres. Nous avons effectué 300 réplifications bootstrap pour chaque échantillon d'observations simulé. Selon la théorie des techniques de ré-échantillonnage, il est cependant possible d'accroître la précision des estimateurs en augmentant le nombre de réplifications.

4 CONCLUSION

Nous avons analysé dans cet article les effets des erreurs d'estimation des paramètres sur une gestion moyenne-MPI-2. La frontière efficiente est calculée à partir de paramètres inconnus (mais estimés à partir d'un échantillon) et, comme la frontière ex-post, est inconnue de l'investisseur. Nous avons utilisé trois méthodes permettant d'améliorer l'optimisation de portefeuille. Nous les avons ensuite comparées à la méthode classique dans laquelle les estimations issues de l'échantillon sont considérées comme les vraies valeurs des paramètres. Deux des trois méthodes employées étaient deux estimateurs « shrinkage » : l'estimateur James Stein et l'estimateur Bayes Stein. La troisième méthode était une méthodologie de ré-échantillonnage : le bootstrap. Les apports de cet étude empirique réalisée sur le marché français des actions sont au nombre de quatre : l'étude des frontières efficientes nous montre que l'estimation des paramètres a tendance à surestimer l'espérance de rendement des actifs et sous-estimer leur risque, surtout lorsque l'échantillon des observations est de taille réduite. De plus, nos résultats montrent aussi que le risque d'estimation n'est pas négligeable dans un modèle moyenne-MPI-2, quelles que soient la taille de l'échantillon d'observations et le degré d'aversion au risque de l'investisseur. Ensuite, nous avons montré que les erreurs d'estimation

des paramètres sont même beaucoup plus grandes pour le modèle moyenne-MPI2 que pour le modèle moyenne-variance. Enfin, nous avons montré que le bootstrap permettait de réduire significativement le risque d'estimation des paramètres alors que les estimateurs « shrinkage » apportaient des résultats peu convaincants. Nous pouvons donc conclure que le bootstrap permet de réduire significativement l'erreur d'estimation des paramètres et d'améliorer significativement la performance ex-post d'un portefeuille d'action. Cette recherche peut cependant connaître de nombreuses extensions, en particulier l'utilisation de nouvelles méthodes de ré-échantillonnage permettant la prise en compte de l'autocorrélation des rentabilités.

RFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Affleck-Graves J., MacDonald B. (1989), "Non-normalities and tests of asset pricing theories", *Journal of Finance*, vol.44, n°4, p. 889-908.

Blatteberg R., Gonedes N. (1974), "A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices", *Journal of Business*, vol.47,n° 2, p. 244-280

Bawa V.S. (1975), "Optimal rules for ordering uncertain prospects", *Journal of Financial Economics*, vol.3, n°2, p. 95-121

Bawa V.S., Klein R.W. (1976), "The effect of estimation risk on optimal portfolio choice", *Journal of Financial Economics*, vol.3, n°1, p. 215-231

- Box G.P., Muller M.E. (1958), “A note on the generation of random normal deviates”, *Annals Math. Stat*, Vol.29, n°4, p. 610-611
- Broadie M. (1993), “Computing efficient frontiers using estimated frontiers”, *Annals of Operations Research : Financial Engineering*, vol.45, special issue, p. 21-58
- Carlstein E. et al. (1997), “Matched block bootstrap for dependent data” – In : *Seminar für Statistics at Eidgenössische technische Hochschule Zurich*, Research report, n°74, Switzerland
- Chopra V.K., Ziemba W.T. (1993), “The effects of errors in means, variances and covariances”, *Journal of Portfolio Management*, vol.19, n°4, p.6-11
- Efron B. (1979), “Bootstrap methods :another look at the jackknife”, *Annals of Statistics*, vol.7, n°1, p. 1-26
- Fama E.F (1965), “The behaviour of stock market prices”, *Journal of Buisness*, vol.38, n° 1, p. 34-105
- Jobson J.D., Korkie B. (1980), “Estimation for markowitz efficient portfolios”, *Journal of the American Statistical Association*, vol.75, n°371, p. 544-554
- Lewellen, J., Shanken J. (1998), “Market efficiency, rational expectations, and estimation risk”, In : *Annual meeting of American Finance Association*, New York
- Liang Y. et al. (1996), “The bootstrap efficient frontier for mixed asset portfolios”, *Real Estate Economics*, vol.24, n°2, p. 247-256
- Markowitz H. (1952), “Portfolio selection”, *The Journal of Finance*, vol.7, n°1, p. 77-91
- Markowitz H. (1992), “Portfolio diversification, efficient diversification of investments”, Oxford : Basil Blackwell, 2ème édition.

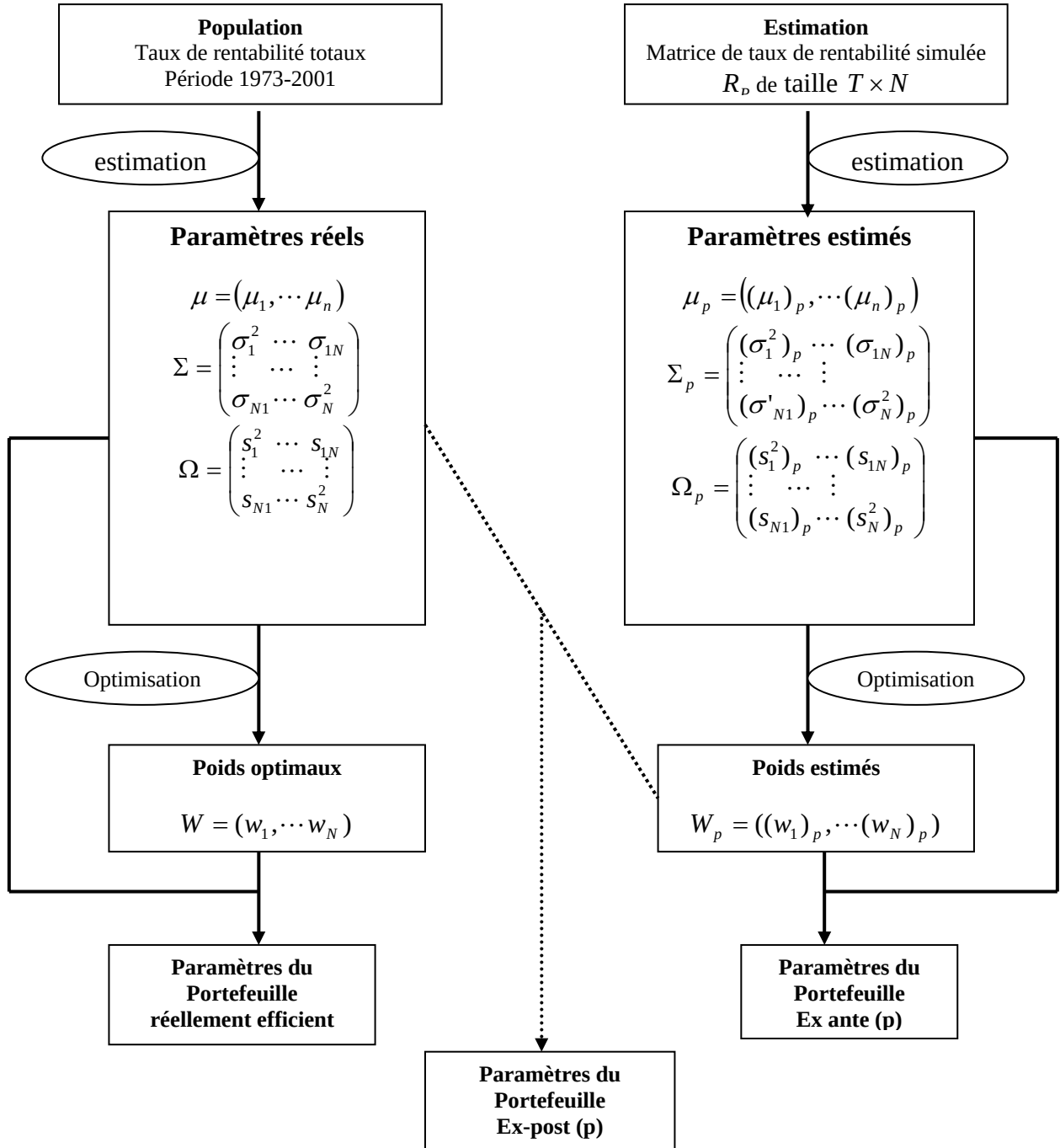
Nawrocki D.N (1991), “optimal algorithm and lower partial moment : ex-post results”, *Applied Economics*, vol.23, n°3, p. 465-471

Sanfilippo G. (2004), “Stocks, bonds and the investment horizon”, *Quantitative Finance*, June, p.345-351

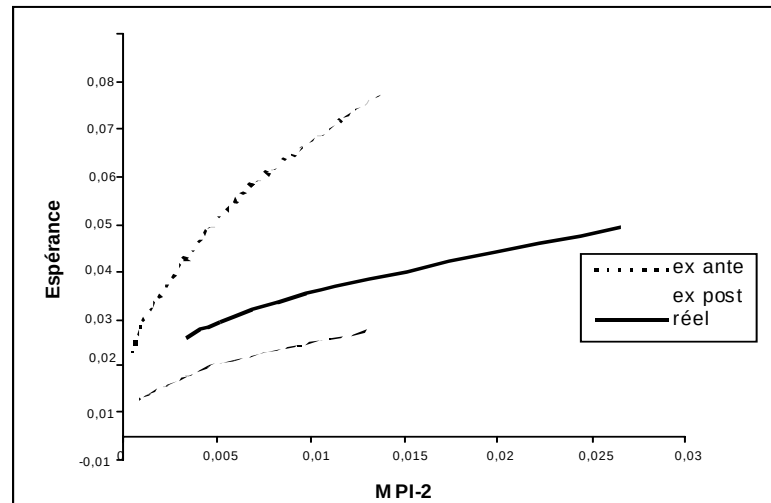
Roy A. (1952), “Safety first and the holding of assets”, *Econometrica*, vol.20, n°3, p. 431-449

GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Graphique 1 : Calcul des paramètres des portefeuilles réellement efficient, ex-ante et ex-post

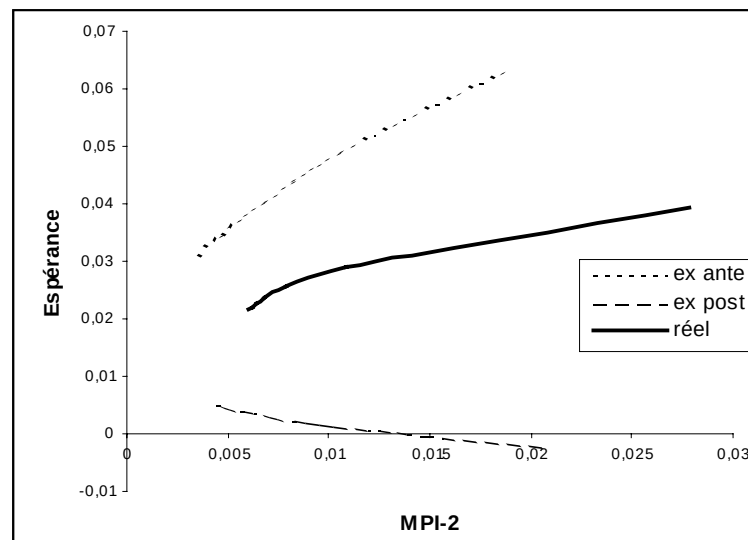


Graphique 2 : Frontières efficientes Moyenne-MPI2 pour une matrice de taux de rentabilité simulée de 36 observations



La courbe en trait plein (frontière réelle) présente la frontière efficiente calculée à partir des vrais paramètres de chaque actif, la courbe en pointillée (ex ante) est la frontière efficiente estimée, la courbe hachurée (ex post) est la frontière efficiente obtenue par la multiplication des pondérations du portefeuille (calculées à partir de l'échantillon) et les vraies valeurs des paramètres de chaque actif

Graphique 3 : Frontières efficientes Moyenne - MPI2 pour une matrice de taux de rentabilité simulée de 36 observations



La courbe en trait plein (frontière réelle) présente la frontière efficiente calculée à partir des vrais paramètres de chaque actif, la courbe en pointillée (ex ante) est la frontière efficiente estimée, la courbe hachurée (ex post) est la frontière efficiente obtenue par la multiplication des pondérations du portefeuille (calculées à partir de l'échantillon) et les vraies valeurs des paramètres de chaque actif

Tableau 1 : Erreur d'estimation moyenne des paramètres pour le modèle moyenne-MPI-2

	$f_{\mu}(\lambda)$ en (%)			$f_{MPI}(\lambda)$ en (%)		
	$T = 30$	$T = 60$	$T = 120$	$T = 30$	$T = 60$	$T = 120$
$\lambda = 1$	0.70	0.60	0.45	5.02	3.56	2.70
$\lambda = 3$	0.44	0.37	0.25	2.79	1.89	1.00
$\lambda = 5$	0.25	0.20	0.11	1.04	0.70	0.20

λ est le degré d'aversion au risque de l'investisseur, T la taille de la matrice simulée R_p , $f_{\mu}(\lambda)$ l'erreur d'estimation sur la moyenne du portefeuille et $f_{MPI}(\lambda)$ l'erreur d'estimation du moment partiel inférieur 2.

Tableau 2 : Erreur d'estimation moyenne des paramètres pour le modèle moyenne-variance

	$f_{\mu}(\lambda)$ en (%)			$f_{Var}(\lambda)$ en (%)		
	$T = 30$	$T = 60$	$T = 120$	$T = 30$	$T = 60$	$T = 120$
$\lambda = 1$	0.36	0.31	0.12	1.96	1.23	1.08
$\lambda = 3$	0.24	0.20	0.09	0.91	0.60	0.42
$\lambda = 5$	0.15	0.12	0.07	0.29	0.25	0.15

λ est le degré d'aversion au risque de l'investisseur, T la taille de la matrice simulée R_p , $f_{\mu}(\lambda)$ l'erreur d'estimation sur la moyenne du portefeuille et $f_{Var}(\lambda)$ l'erreur d'estimation sur la variance du portefeuille.

Tableau 3 : Erreur d'estimation avec des estimateurs JS ; modèle moyenne – MPI-2

	$f_{\mu}(\lambda)$ en (%)			$f_{MPI}(\lambda)$ en (%)		
	$T = 36$	$T = 60$	$T = 120$	$T = 36$	$T = 60$	$T = 120$
$\lambda = 1$	0.64	0.64	0.58	4.4	3.48	2.78
$\lambda = 3$	0.41	0.33	0.38	2.75	2.12	1.05
$\lambda = 5$	0.23	0.30	0.11	1.02	0.62	0.27

λ est le degré d'aversion au risque de l'investisseur, T la taille de la matrice simulée R_p , $f_{\mu}(\lambda)$ l'erreur d'estimation sur la moyenne du portefeuille et $f_{MPI}(\lambda)$ l'erreur d'estimation du moment partiel inférieur 2.

Tableau 4 : Erreur d'estimation avec des estimateurs BS ; modèle moyenne-MPI-2

	$f_{\mu}(\lambda)$ en (%)			$f_{MPI}(\lambda)$ en (%)		
	$T = 36$	$T = 60$	$T = 120$	$T = 36$	$T = 60$	$T = 120$
$\lambda = 1$	0.62	0.59	0.30	2.32	2.28	1.09
$\lambda = 3$	0.40	0.37	0.20	1.22	0.98	0.86
$\lambda = 5$	0.24	0.21	0.13	0.98	0.46	0.18

λ est le degré d'aversion au risque de l'investisseur, T la taille de la matrice simulée R_p , $f_{\mu}(\lambda)$ l'erreur d'estimation sur la moyenne du portefeuille et $f_{MPI}(\lambda)$ l'erreur d'estimation du moments partiels inférieurs 2.

Tableau 5 : Erreur d'estimation avec le bootstrap ; modèle moyenne-MPI-2

	$f_{\mu}(\lambda)$ en (%)			$f_{MPI}(\lambda)$ en (%)		
	$T = 30$	$T = 60$	$T = 120$	$T = 30$	$T = 60$	$T = 120$
$\lambda = 1$	0.65	0.52	0.23	1.96	1.04	0.62
$\lambda = 3$	0.41	0.36	0.14	1.04	0.65	0.23
$\lambda = 5$	0.15	0.12	0.01	0.36	0.18	0.06

λ est le degré d'aversion au risque de l'investisseur, T la taille de la matrice simulée R_p , $f_{\mu}(\lambda)$ l'erreur d'estimation sur la moyenne du portefeuille et $f_{MPI}(\lambda)$ l'erreur d'estimation du moments partiels inférieurs 2.