

# L'UTILISATION DE MÉTHODES DE SIMULATION EN ASSURANCE

## PARTIE 2 : APPLICATIONS

Frédéric PLANCHET

*Laboratoire SAF<sup>1</sup> / JWA - Actuaire<sup>2</sup>*

Julien JACQUEMIN

*JWA - Actuaire<sup>3</sup>*

### RESUME

Le présent document présente trois exemples simples d'application des méthodes de simulation à des problèmes issus de l'assurance vie :

- l'évaluation de l'engagement associé au paiement d'un capital décès dans le cadre d'un contrat collectif d'entreprise,
- la prise en considération dans l'évaluation du coût d'une garantie de « rente de conjoint » d'une dépendance entre la mortalité des 2 têtes.
- l'évaluation et le contrôle de la probabilité de ruine d'un fonds de rentiers.

### MOTS CLEFS

Engagement, prestations définies, facteurs aléatoires, risque de taux, risque d'assurance, modèle binomial, modèle en racine carrée

### 1. INTRODUCTION

Le présent article est constitué de trois cas pratiques illustrant la mise en œuvre de méthodes de valorisations basées sur des simulations. Il illustre les méthodes décrites dans l'article « Méthodes de simulation en assurance – partie 1 » (à paraître)<sup>4</sup>.

Le schéma suivant présente l'approche et les méthodes à utiliser pour mettre en œuvre des modèles basés sur la simulation des paramètres d'intérêt dans un contexte assurantiel. Il met en évidence le niveau à partir duquel on intègre les modèles actuariels classiques, comme le modèle collectif, le modèle individuel et les modèles de taux ou de rendements. Il indique aussi comment prendre en compte des clauses non linéaires ou de la dépendance.

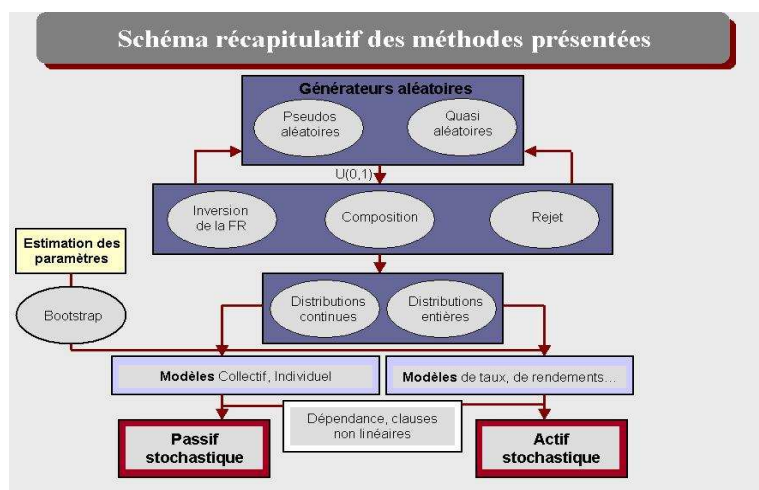
---

<sup>1</sup> ISFA, 50 avenue Tony Garnier, 69366 LYON cedex 07

<sup>2</sup> 18 avenue Félix Faure, 69007 LYON

<sup>3</sup> 9 rue Beaujon, 75008 PARIS

<sup>4</sup> [20]



Cette approche est appliquée ici à trois exemples issus de l'assurance vie :

- l'évaluation de l'engagement associé au paiement d'un capital décès dans le cadre d'un contrat collectif d'entreprise,
- la prise en considération dans l'évaluation du coût d'une garantie de « rente de conjoint » d'une dépendance entre la mortalité des 2 têtes,
- l'évaluation et le contrôle de la probabilité de ruine d'un fonds de rentiers.

Dans chacun de ces exemples, simples sur le principe, on s'est attaché à mettre en évidence ce qu'apportent les méthodes de simulation par rapport à une approche classique : le premier exemple est très standard en ce sens que la modélisation en elle-même est identique à celle utilisée dans une approche déterministe. L'utilisation de simulations permet simplement d'obtenir plus de résultats que les calculs d'espérance habituels ; dans le second exemple, au contraire, le fait d'utiliser des méthodes de simulation permet de mettre en œuvre une modélisation ad hoc de la dépendance, modélisation qui serait inexploitable dans un contexte classique. Le troisième exemple enfin se focalise sur une grandeur d'intérêt de plus en plus souvent utilisée en pratique pour contrôler notamment des niveaux de fonds propres : la probabilité de ruine.

Le lecteur intéressé trouvera un exemple d'application des méthodes de simulation à l'assurance non-vie dans [21].

## 2. SIMULATION D'UN CAPITAL DÉCÈS AVEC TIRAGES SUR UNE SEULE TÊTE ET SUR UN PORTEFEUILLE

Cet exemple présente les résultats obtenus avec un algorithme stochastique développé pour modéliser le versement d'un capital en cas de décès. Il suit la même

démarche que celle proposée dans [19], dont il est en quelque sorte une version simplifiée, l'objectif étant ici d'insister sur l'apport de l'utilisation des méthodes de simulation.

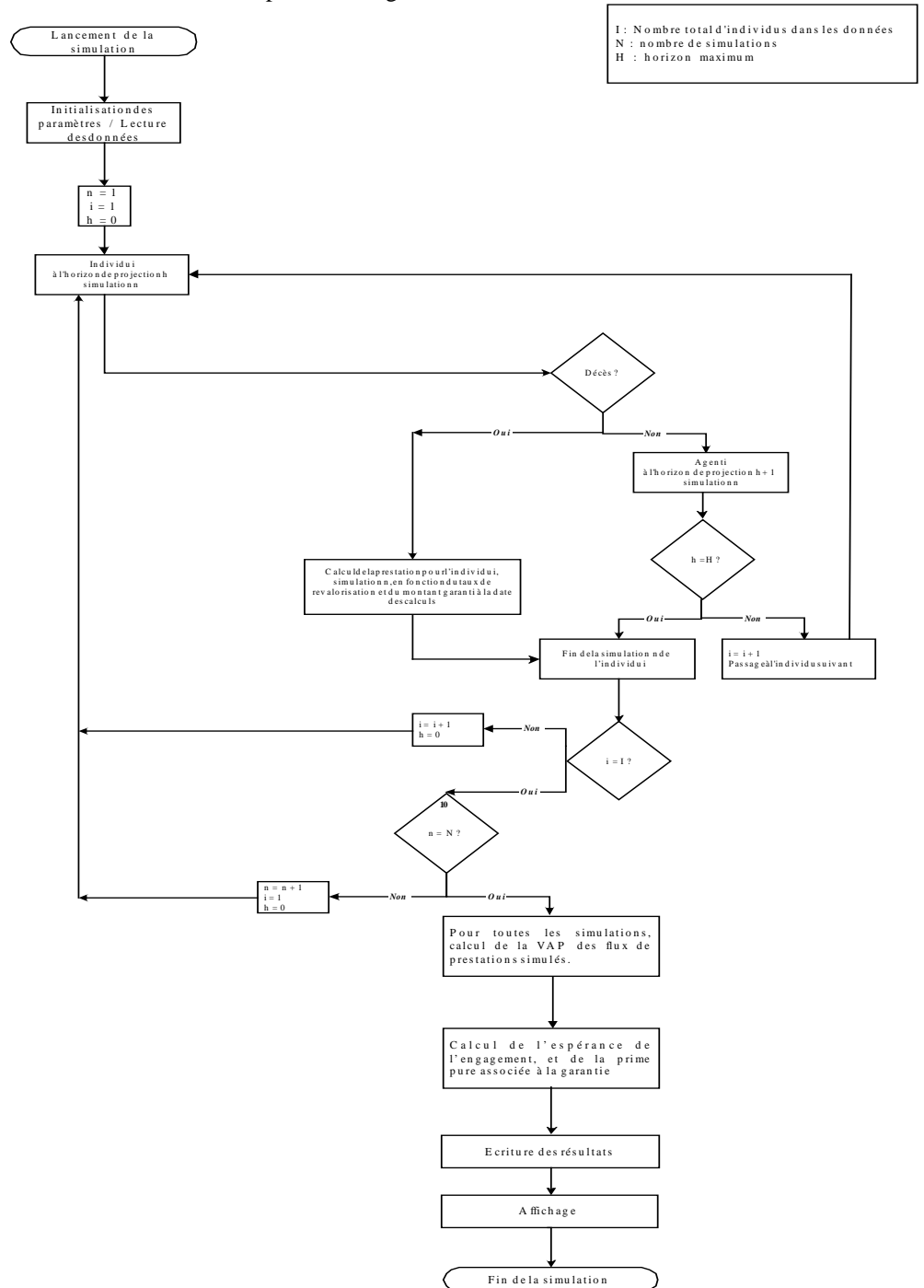
## 2.1 Présentation du modèle

Dans cette première application, le contrat simulé est un contrat décès, temporaire ou viager (la durée de garantie est paramétrable), versant un capital (identique à tous les assurés) au jour du décès s'il survient durant la période de garantie. Ce capital est revalorisable.

Cette application, développée dans le langage *Visual Basic* pour l'application *Microsoft Excel*, est l'exemple le plus simple de l'utilisation de méthodes stochastiques en assurance vie. Le principe consiste à projeter la survie de chaque individu année après année sur une durée correspondant à la durée de la garantie, par exemple 120 ans s'il s'agit d'un risque viager. Chaque année, la survie de l'individu est testée par un tirage aléatoire d'une réalisation d'une variable aléatoire Bernoulli, de paramètre la probabilité de décès, et le capital garanti est revalorisé. Ainsi, au moment du décès, le montant du capital versé est le capital projeté. Ce versement représente l'engagement de l'assureur. Ensuite, la valeur actuelle probable de cette réalisation de l'engagement est évaluée en actualisant le montant versé jusqu'à l'année des calculs. La somme de ces différentes valeurs actuelles probables calculées sur chaque individu du portefeuille donne une réalisation de l'engagement de l'assureur sur le portefeuille à la date des calculs.

Ce calcul de l'engagement de l'assureur vis-à-vis de chaque individu étant réitéré un grand nombre de fois (notion de "nombre de simulations"), l'espérance empirique des valeurs actuelles probables obtenues converge vers l'espérance théorique. De plus il est possible d'obtenir la fonction de répartition empirique de l'engagement de l'assureur, puis sa fonction de densité empirique, et d'ajuster alors cette loi empirique à une loi paramétrique classique. Bien entendu, sur une seule tête, l'apport du calcul stochastique pour l'obtention de la prime pure n'est pas très intéressant, puisqu'il existe des calculs analytiques pour le faire. En revanche, sur un portefeuille complet, l'intérêt de connaître une estimation de la loi de l'engagement est non négligeable : cela permet entre autres de réaliser des études de sensibilité autour de certains paramètres, en notant par exemple leur impact sur la variance de l'engagement. On obtient ainsi d'une manière très simple des indicateurs modernes d'évaluation du risque d'un engagement d'assurance.

Le schéma suivant présente l'algorithme utilisé ici :



Les variables du modèle sont les suivantes :

- Durée de garantie
- Capital garanti à la date des calculs
- Taux de revalorisation annuel du capital
- Taux d'actualisation
- Table de mortalité

On notera que le taux d'actualisation peut être paramétré comme constant dans le modèle ou stochastique. L'utilisation combinée d'un taux stochastique avec une mortalité stochastique permettra par exemple de mettre en lumière l'importance relative des différents risques de taux et de mortalité sur l'engagement étudié.

## 2.2 Simulations avec un taux d'actualisation constant

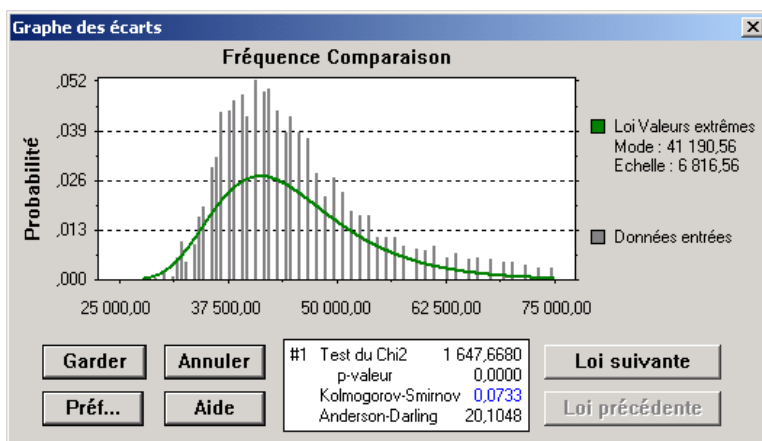
### 2.2.1 Résultats du scénario de référence

#### 2.2.1.1 Sur une seule tête

L'individu est né le 01/01/1960, il dispose d'un capital garanti de 100 000 € à la date des calculs, revalorisé annuellement de 1,5 %. La date de référence des calculs est le 01/01/2001. Le contrat d'assurance stipule un taux technique de 3,5 %. La garantie décès est viagère et la table de mortalité de référence est la table TV 2000.

NB : La table de mortalité TV 2000, de même que les tables TV 88-90 et TRPV 93 sont des tables de mortalités généralement utilisées pour des calculs de garanties en cas de vie. Elles n'interviennent ici qu'à titre illustratif ; en effet, ce ne sont pas les montants des engagements en tant que tels qui sont intéressants, mais plutôt leurs évolutions en fonction de certains paramètres.

Alors, l'espérance de l'engagement calculée par le modèle stochastique est de 45 526 €. De plus, l'histogramme des valeurs prises par l'espérance de l'engagement est le suivant :



On remarque que l'engagement de l'assureur n'est pas symétrique autour de son espérance : le sinistre maximum possible est de 100 000 € (décès de l'assuré dans l'année ; + 120 % par rapport à l'espérance), tandis que le sinistre minimum est de 29 250 € (- 36 % par rapport à l'espérance). 2000 trajectoires ont été ici simulées.

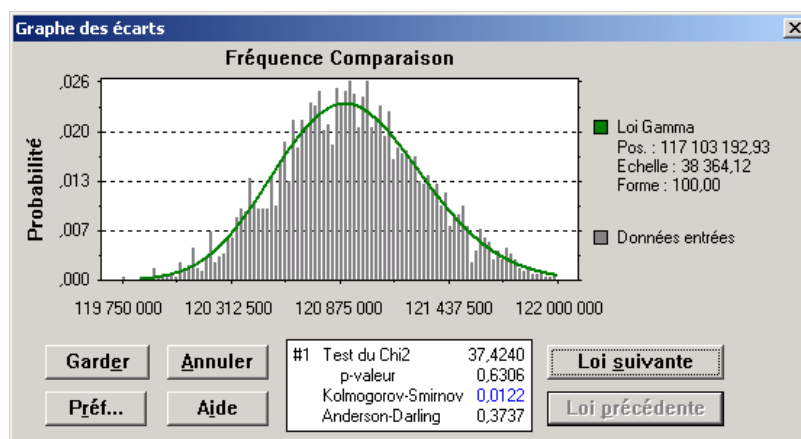
Une estimation empirique d'un intervalle de confiance de l'engagement à 95 % est donnée par l'intervalle [33 503 € ; 77 595 €].

Cet intervalle n'est pas centré autour de l'espérance, toujours à cause de la non symétrie de l'engagement, et il est très large. Enfin la variance de l'engagement est de 113 984 796, soit un écart-type de 10 676 € environ

### 2.2.1.2 Sur un portefeuille

Désormais, l'outil est utilisé sur un portefeuille de 2 500 assurés environ d'âge moyen 44 ans au 01/01/2001. De même que dans l'application sur une seule tête, le capital garanti est de 100 000 € à la date des calculs, le taux de revalorisation de 1,5 %, et le taux d'actualisation de 3,5 %. La garantie décès est viagère. La table de mortalité de référence est la table TV 88-90.

Alors, l'espérance de l'engagement calculée par le modèle stochastique est de 120 939 604 €, et sa variance de 145 369 502 224. L'histogramme des réalisations de la variable aléatoire Valeur Actuelle Probable de l'engagement sur le portefeuille est le suivant :



Le test d'adéquation à une loi Gamma donne des résultats satisfaisants, puisque la P-valeur du test du Chi-Deux est de 63 %. Ceci permet donc de conclure que l'engagement de l'assureur sur ce portefeuille décès est distribué selon une loi Gamma d'espérance et de variance celles de l'engagement.

On en déduit un intervalle de confiance empirique à 95 % de l'engagement :

[120 203 983,1 € ; 121 718 323,2 €].

Sur ce scénario de référence la variance de l'engagement est relativement faible, les différentes VAP simulées étant assez regroupées autour de l'espérance. Le risque de mortalité est peu élevé sous ces hypothèses, du fait de l'effet de la mutualisation de ce risque.

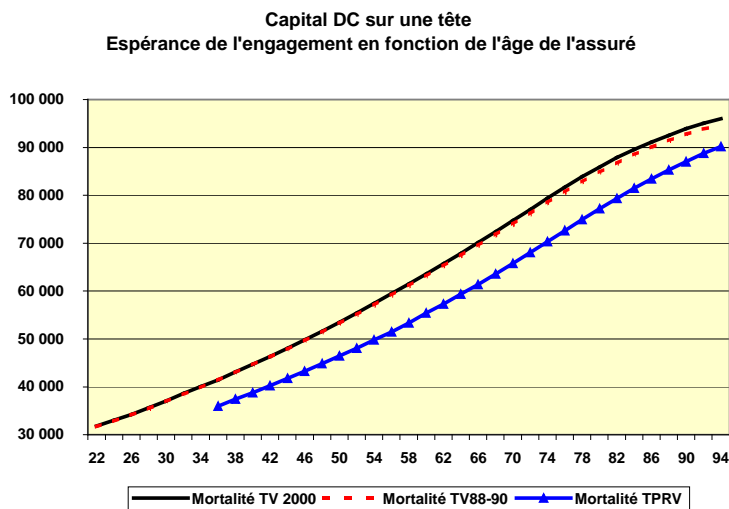
### 2.2.2 Etude de sensibilité autour des différents paramètres

L'intérêt d'une modélisation stochastique est de pouvoir mesurer l'évolution de l'engagement, et surtout celle de sa variance, en fonction de l'évolution de différents paramètres, ce dernier point ne pouvant être obtenu de manière simple à partir de calculs déterministes. Or ces évolutions de variance sont très importantes à estimer avant la mise en place d'un nouveau contrat, car ce sont de bons indicateurs du risque encouru par l'assureur. De même, nous pourrions facilement étudier les variations du SMP, de l'intervalle de confiance de l'engagement calculé.

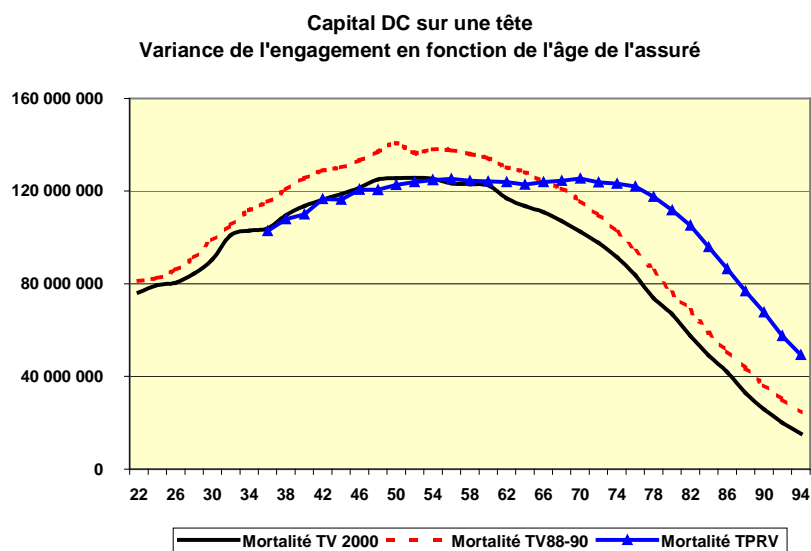
Pour chacun des paramètres, nous présenterons ici des graphiques montrant l'évolution de l'espérance puis de la variance de l'engagement.

#### 2.2.2.1 Age de l'assuré – Age moyen du portefeuille

L'évolution de l'espérance de l'engagement en fonction de celle de l'âge de l'assuré ou de l'âge moyen du portefeuille, n'est pas évidente à anticiper. Pour évaluer l'effet d'un changement de table de mortalité, les graphiques ci-après seront présentés avec les deux tables de mortalité TV 88-90, TV 2000 et TPRV 93.



A l'échelle des montants garantis, la différence entre les courbes d'espérances de l'engagement en fonction de l'âge est quasi nulle entre les tables TV 88-90 et TV 2000. En revanche, la différence de ces deux tables avec la table générationnelle TPRV est sensible. A noter ici que la génération assez récente de la naissance de notre individu (1960) est responsable en partie de cette différence : la mortalité de l'individu est vraiment plus faible avec la TPRV, et donc l'engagement moindre du fait du jeu de l'actualisation (la différence entre le taux d'actualisation et le taux de revalorisation est positive). Au niveau de l'évolution avec l'âge de l'assuré, l'espérance de l'engagement de l'assureur est croissante, par le jeu de la croissance de  $q_x$  en fonction de  $x$ . Cet engagement converge avec les âges croissants vers le montant du capital garanti initial (100 000 € dans cet exemple), les individus très âgés (>100 ans) décédant la première année des projections.

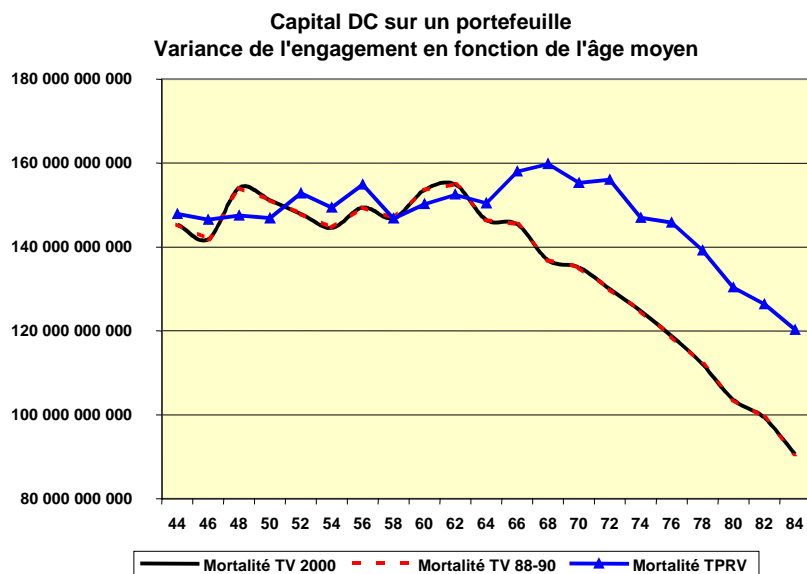


En revanche, la variance de l'engagement en fonction de l'âge n'est pas strictement monotone avec l'âge, elle est tout d'abord croissante entre 22 ans et 55 ans environ, puis décroissante.

En effet, durant la première période, la variance est plus faible aux âges jeunes du fait de l'actualisation, l'horizon du décès étant éloigné. Les âges augmentant, l'actualisation joue moins, car la probabilité de décès dans les premières années de la projection augmente, tandis que la probabilité de décès à un horizon lointain est toujours importante. Puis, la variance diminue avec l'âge, car après 55 ans, la probabilité de décès est assez importante au début de la projection, et la survie aux horizons éloignés faible, ce qui a pour effet de

diminuer la variabilité de l'engagement. Enfin, à noter que la mortalité de la table TV 88-90 étant plus forte, la variance de l'engagement calculée avec cette table de mortalité est également plus importante que celle évaluée à partir de la table TV 2000. En revanche, si le même phénomène s'observe ensuite au début de la période pour la table de mortalité TPRV, ce n'est plus le cas par la suite car la probabilité de survie est beaucoup plus importante avec cette dernière table, ce qui implique que l'engagement reste au même niveau de risque plus longtemps qu'avec les deux autres tables de mortalité.

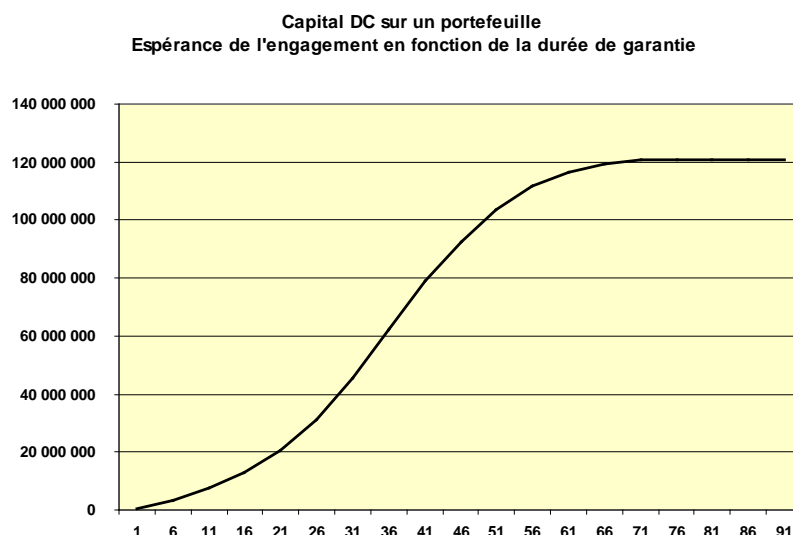
A l'échelle du portefeuille, le graphique est établi en fonction de l'âge moyen de la population.



L'évolution de la variance de l'engagement est quelque peu différente dans le cas d'une seule tête. En effet, entre des âges moyens du portefeuille de 44 ans et 62 ans, la variabilité de l'engagement est relativement stable, tout comme sur une seule tête, mais les fluctuations autour de ce palier moyen sont beaucoup plus importantes. De plus sur cette première partie du graphique, il est difficile d'établir une hiérarchie entre les différentes tables de mortalité, au contraire de l'étude sur une seule tête. Par contre, la partie droite du graphique, concernant les âges élevés est assez identique dans les deux approches.

#### 2.2.2.2 Durée de garantie

La durée de la garantie varie dans les simulations entre 1 an et 90 ans (durée considérée comme celle d'une garantie viagère).



L'espérance de l'engagement n'est ici pas linéaire avec la durée de garantie, bien qu'elle soit croissante avec ce paramètre. A l'échelle du portefeuille, la courbe a la même allure, mais elle converge moins rapidement vers la limite atteinte pour une garantie viagère, car tous les individus n'ont pas le même âge.

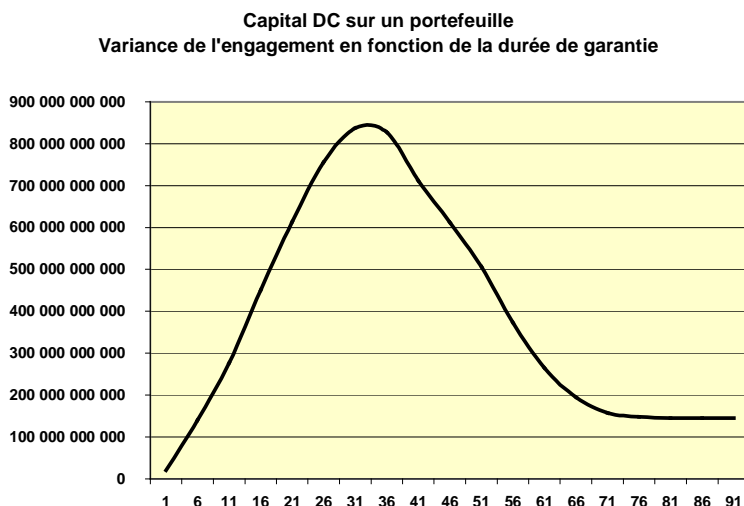
L'étude de la variance fait apparaître une courbe d'allure sensiblement identique pour les simulations sur une seule tête et sur le portefeuille, cette dernière étant présentée ci-dessous.

L'allure de cette courbe de variance peut s'analyser comme suit :

- Sur la première période (1 à 35 ans de garantie), le risque est croissant avec la durée du contrat ; en effet, les probabilités de voir survenir un grand nombre de décès, ou très peu de décès, sont assez importantes, ce qui explique une forte variabilité de l'engagement dont le montant peut être très élevé ou très faible.

- Sur la seconde période (35 à 70 ans de durée de garantie), cette variance décroît, car la probabilité d'avoir un engagement important continue d'augmenter, tandis que la probabilité d'avoir un engagement faible diminue rapidement.

- Enfin, sur la dernière partie du graphique (>70 ans), la variance est constante, la durée est telle que la garantie est viagère.



A noter ici la présence d'une variance maximale sur le graphique. La durée de garantie 35 ans est à éviter pour l'assureur confronté à ce portefeuille, sous peine d'avoir un engagement fortement variable.

## 2.3 Simulation avec un taux d'actualisation stochastique

### 2.3.1 Présentation du modèle

Après avoir étudié la variabilité d'un passif stochastique type « capital décès » vis-à-vis des paramètres, un taux d'intérêt stochastique est introduit dans le modèle. Ainsi, une nouvelle source de variabilité est prise en compte, et il apparaît alors opportun de mesurer les deux types de risques, risque de taux et risque d'assurance, qui ne sont autres que les parts de la variance imputables à l'aléa du taux et des décès respectivement.

En notant  $Tx(j)$  le taux forward de la période  $j$  et  $Xi(t)$  le coût du sinistre du contrat  $i$  sur la période  $t$ , les versements de l'assureur étant effectués en début d'année, le coût de ce sinistre vu à l'année 0 est :

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^t (1 + Tx(j))} \cdot Xi(t) .$$

Alors,  $T$  étant la durée du contrat, et  $N$  le nombre de polices dans le portefeuille, l'engagement de l'assureur s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \frac{1}{\prod_{j=1}^t (1+Tx(j))} \cdot Xi(t) .$$

Se placer dans l'optique d'un calcul stochastique de l'engagement, oblige à simuler plusieurs réalisations de  $X$ , et à utiliser pour chaque simulation une série de taux simulés. Notons ici qu'il faut effectuer un plus grand nombre de simulations dans ce type de scénario, pour "mélanger" les différents cas liés au décès avec les différentes possibilités de taux simulés.

Ainsi, après un nombre suffisant de simulations  $K$ , l'espérance empirique de la valeur actuelle probable de l'engagement est donnée par :

$$E(X) \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X^{(k)},$$

en notant  $X^{(k)}$  la réalisation de  $X$  obtenue à la  $k^{\text{ème}}$  simulation. C'est une estimation de l'engagement de l'assureur, calculée à partir du modèle stochastique.

De plus, en utilisant le théorème de décomposition de la variance totale, et en conditionnant par les taux forward simulés, la variance empirique de l'engagement est donnée par :

$$Var(X) = Var(E(X / tx(j), j = 1, \dots, T)) + E(Var(X / tx(j), j = 1, \dots, T)).$$

Les deux parties du membre de droite de cette égalité représentent respectivement le risque de taux et le risque d'assurance de l'engagement de l'assureur. [19] montre que l'on peut estimer sans biais le risque de taux par :

$$E(Var(X / tx(j), j = 1, \dots, T)) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^K (E(X / tx^{(k)}(j)) - E(X))^2$$

et le risque d'assurance par :

$$Var(E(X / tx(j), j = 1, \dots, T)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K Var(X / tx^{(k)}(j), j = 1 \dots T).^5$$

Dans cet exemple, le taux est modélisé par le modèle de Cox Ingersoll et Ross, dont les caractéristiques sont rappelées ci-après.

### 2.3.2 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Ce modèle est basé sur l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr = a(R - r) dt + \sigma \sqrt{r} dW$$

---

<sup>5</sup> A noter que les formules complètes et les preuves de ces deux risques sont présentées dans le détail dans [19]

avec :  $R$  taux limite vers lequel converge  $r$  ;  $R > 0$ ,

$a$  vitesse de convergence ;  $a > 0$ ,

$\sigma$  paramètre de diffusion ;  $\sigma > 0$ .

Ce modèle, appelé aussi modèle en racine carrée, sera simulé par une approche récursive de la façon suivante :

Nous discrétisons le processus en :

$$\Delta r_t = a(R - r_t) + \sigma \sqrt{r_t} \Delta W_t$$

puis, par propriété du processus  $W$ ,

$$\Delta r_t = a(R - r_t) + \sigma \sqrt{r_t} \Delta t \varepsilon$$

avec  $\varepsilon$  distribué selon une loi Normale centrée réduite.

Ce qui donne :

$$r_{t+1} = r_t + a(R - r_t) + \sigma \sqrt{r_t} \varepsilon.$$

Alors simuler un tel taux se limite à calculer récursivement  $r_t$ , pour tout  $t$ , en simulant à chaque étape une réalisation d'une loi Normale centrée réduite, pas utilisation par exemple d'un algorithme du type De Moro.

Par contre, si le choix des paramètres  $R$ ,  $a$  et  $\sigma$  n'est pas judicieux, il est possible de simuler un taux négatif à un rang  $k > 0$ , ce qui générera une erreur lors du calcul de  $r_{k+1}$ , lorsqu'il faudra calculer  $\sqrt{r_k}$ . Il existe d'ailleurs une variante où  $\sqrt{|r|}$  remplace  $\sqrt{r}$ .

*Propriété<sup>6</sup>* : Le modèle de Cox Ingersoll & Ross est bien posé si :  $a \cdot R > \frac{\sigma^2}{2}$ .

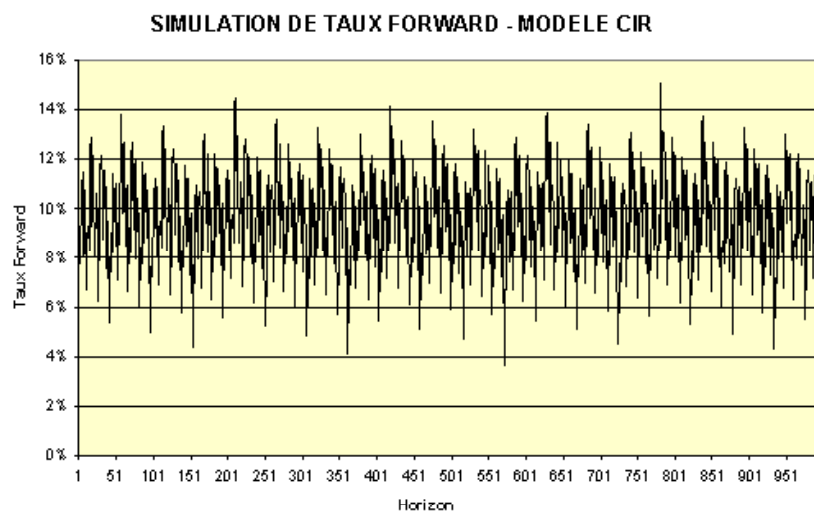
Nous prendrons donc soin de respecter cette condition dans les simulations où nous utiliserons le modèle CIR, pour éviter la génération de taux négatifs. Attention, il faut bien remarquer que cette condition est nécessaire, mais pas suffisante : un mauvais choix de  $r_0$  pourra engendrer des taux négatifs.

### 2.3.3 Une remarque sur la simulation des taux d'intérêt

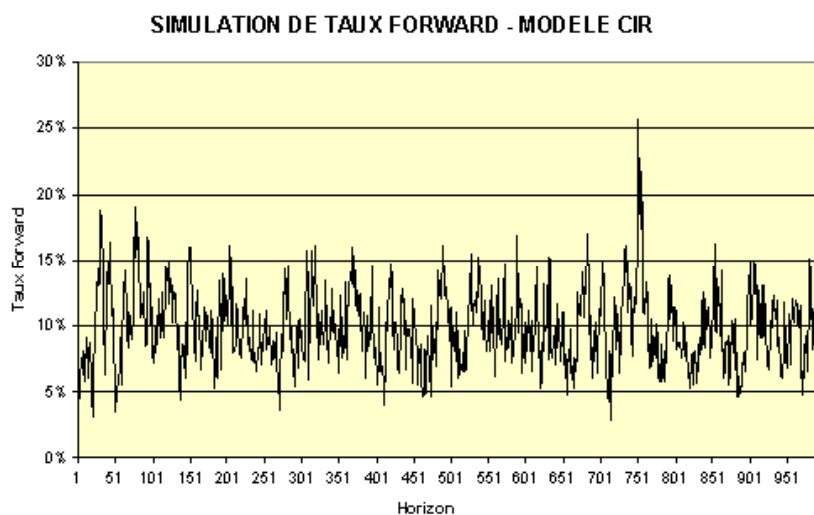
Soit à simuler une suite  $(r_t)_{0 \leq t < 1000}$ , avec  $r_0 = 7\%$ ,  $R = 10\%$ ,  $a = 0,3$  et  $\sigma = 6\%$ . En utilisant un générateur quasi-aléatoire, nous obtenons le taux suivant :

---

<sup>6</sup> Extraite de la thèse [9]



Si nous utilisons plutôt un algorithme de simulations pseudo-aléatoires pour obtenir les réalisations de  $\varepsilon$ , un taux simulé est :



Nous remarquons graphiquement que le taux simulé à partir d'un algorithme pseudo-aléatoire présente moins de régularité qu'un taux simulé avec une méthode quasi-aléatoire. Cette nouvelle illustration de la meilleure répartition des valeurs simulées (cf. [20]) conduit à préférer pour les simulations de taux les algorithmes quasi-aléatoires.

### 2.3.4 Résultats du scénario de référence

Les paramètres du modèle sont les mêmes que dans la première partie, de même que l'individu et le portefeuille étudiés. Seul le taux est désormais stochastique avec, dans les notations du modèle *CIR*,

$$R = 3,5\%$$

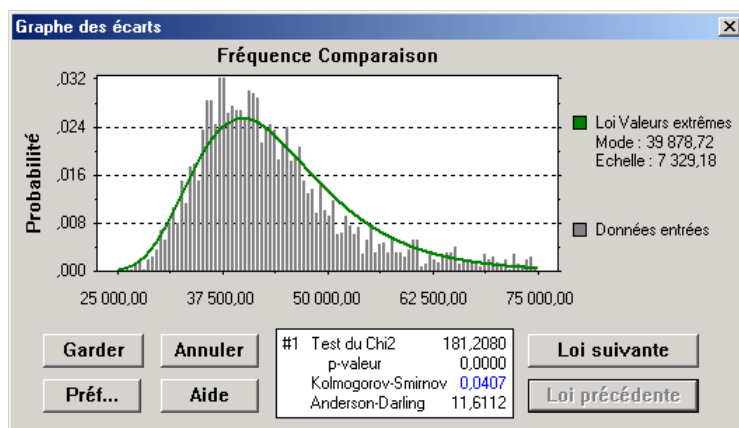
$$R_0 = 3,5\%$$

$$a = 0,5$$

$$\sigma = 2\%$$

#### 2.3.4.1 Sur une seule tête

Avec utilisation d'un taux stochastique, l'engagement est de 44 414 €. L'histogramme des valeurs prises par l'espérance de l'engagement est le suivant :



Comme dans le scénario avec taux d'actualisation constant, cet engagement n'est pas symétrique. Une estimation empirique de l'intervalle de confiance de l'engagement est de :

$$[39\,975,4 \text{ €} ; 75\,340,9 \text{ €}].$$

Le tableau et le graphique suivant reprennent les résultats obtenus avec notre modèle sur la variance de l'engagement, pour ce scénario de référence.

Risque de taux	3 226 454	soit	45,8%
Risque d'assurance	3 825 784	soit	54,2%
Variance totale	7 052 238		

## Répartition des risques



Il faut remarquer ici que le risque d'assurance est plus important que le risque de taux (54 % contre 46 % de la variance totale). Les variations de ces proportions seront étudiées dans l'étude de sensibilité aux paramètres du modèle réalisée par la suite.

#### 2.3.4.2 Sur un portefeuille

L'espérance de l'engagement est de 119 275 967 € (soit environ le même que dans le modèle à taux constant, ce qui est logique puisque le taux stochastique est symétrique). La variance globale de l'engagement est de  $18.10^{12}$ , soit 124,4 fois plus que dans le cas à taux constant !

Le risque de taux est de  $18.10^{12}$ , et le risque d'assurance de  $9.10^9$ , soit 99,95 % et 0,05 % de la variance respectivement.

<b>Risque de taux</b>	<b>18 229 395 996 908</b>	<b>soit</b>	<b>99,9%</b>
<b>Risque d'assurance</b>	<b>9 403 801 577</b>	<b>soit</b>	<b>0,1%</b>
<b>Variance totale</b>	<b>18 238 799 798 485</b>		

A noter qu'à la différence du cas sur une seule tête, c'est le risque de taux qui prédomine sur ce portefeuille. Ceci est dû au phénomène de mutualisation du risque de décès. Le risque de mortalité est ici négligeable pour un assureur face au risque de taux. Il est vrai que la table de mortalité TV 88-90 n'est pas la plus risquée, des exemples utilisant la table TPRV seront présentés dans les études de sensibilité suivantes.

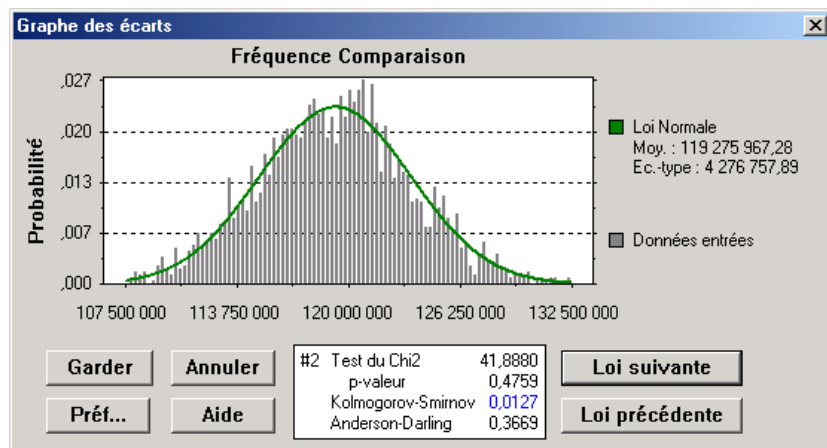
L'intervalle de confiance à 95 % de l'engagement est :

$$[111\,034\,525,5 \text{ €} ; 128\,592\,846,1 \text{ €}],$$

environ 10 fois plus grand que l'intervalle obtenu avec un taux constant, ce qui était prévisible étant donné le rapport 1 à 124 entre les variances des deux modèles.

Enfin, l'histogramme des réalisations de la variable aléatoire VAP de l'engagement est donné dans le graphique suivant. A la différence des résultats observés sur une seule

tête, l'engagement simulé est distribué selon une loi Normale de paramètres l'espérance de l'engagement, et la variance de celui-ci. L'engagement est cette fois-ci symétrique. Ainsi, il sera possible d'utiliser cette information dans les calculs de sensibilité de l'engagement de l'assureur.



### 2.3.5 Etude de sensibilité autour des différents paramètres

#### 2.3.5.1 Passage à la table TPRV

Sur le portefeuille étudié, l'impact est le suivant :

Espérance de l'engagement	105 509 791		(-11,5%)
Risque de taux	17 085 350 869 125	soit	99,9% (-6,3%)
Risque d'assurance	8 756 578 789	soit	0,1% (-6,9%)
Variance totale	17 094 107 447 914		(-6,3%)

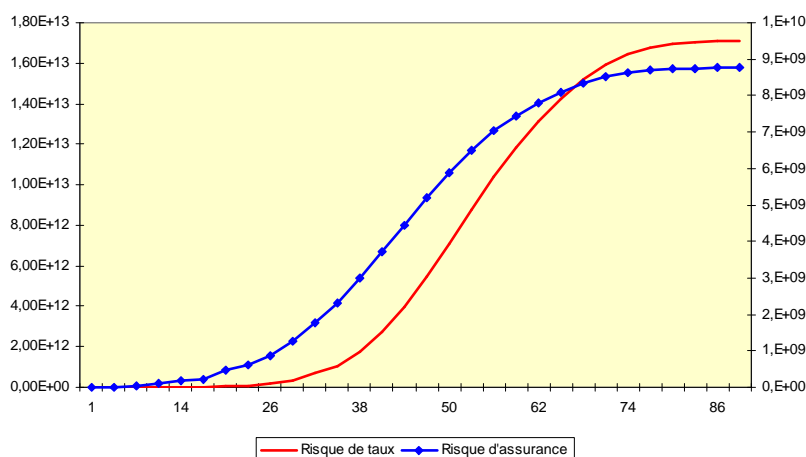
Le passage à la table TPRV diminue l'espérance de l'engagement, ce qui était prévisible, mais également sa variance.

#### 2.3.5.2 Durée de garantie

Dans le cas présent, la table de mortalité utilisée est la TPRV 93. Plus la garantie est courte, plus le risque d'assurance est important ; en effet, le paiement de la garantie n'est pas certain pour des couvertures d'une durée inférieure à 60 ans, et donc la variabilité due à cette présence ou non du décès (et donc du paiement) est très grande, surtout vis à vis de la variance due au taux (la durée d'actualisation étant alors assez courte).

Sur un portefeuille les graphiques sont les suivants :

Evolution des deux risques en fonction de la durée de garantie, sur un portefeuille



Sur ce graphique, les courbes correspondant aux deux risques ne sont pas représentées sur le même axe, risque de taux à gauche, risque d'assurance à droite. Elles ont la même allure que sur une seule tête.

L'enseignement principal à retenir de l'introduction d'un taux d'actualisation stochastique est le fait que le vrai risque auquel est soumis l'assureur vie sur un portefeuille de garantie décès viagère ou non est le risque de taux, c'est-à-dire l'augmentation ou la diminution des bénéfices financiers qui viennent rémunérer la prime versée contre la couverture décès.

### 3. RENTE DE RÉVERSION, AVEC INFLUENCE DU DÉCÈS DE LA PREMIÈRE TÊTE SUR CELUI DE LA SECONDE

Le cadre d'analyse de la dépendance, et les méthodes classiques préconisées pour sa prise en compte sont en réalité très délicats à utiliser dans l'actuariat "pratique". On trouvera par exemple dans [22] une synthèse de la théorie des risques multiples en assurance. L'objectif de cet exemple est de présenter un modèle simple et pragmatique, basé sur l'utilisation de calculs stochastiques, et permettant de prendre en compte la surmortalité d'un conjoint  $y$  suite au décès de la première tête  $x$ .

#### 3.1 Présentation du modèle

Le principe est simple : lorsque la première tête décède, par tirage aléatoire, la probabilité d'occurrence du décès de la deuxième tête est calculée à partir de  $q_x$  de la table de mortalité, majoré d'un coefficient de surmortalité. Cette surmortalité, modélisant la

dépendance du décès entre les deux époux, s'amortit exponentiellement dans le temps, et dépend linéairement de l'âge de la seconde tête à la date du décès. En effet, nous prenons ainsi en compte l'idée assez immédiate qu'un conjoint de 20 ans survit mieux en général qu'un conjoint de 90 ans au décès de son époux. De même, la durée d'amortissement dépendra linéairement de l'âge de la seconde tête à la date du décès de la première.

Ainsi, après avoir choisi deux âges notés  $\hat{age}_1$  et  $\hat{age}_2$  pour lesquels sont fixés les différents paramètres, nous notons :

$b_{age1}$  le taux de surmortalité instantané au premier âge considéré,

$b_{age2}$  le taux de surmortalité instantané au second âge considéré,

$N_{age1}$  la durée pour ramener la surmortalité au premier âge en dessous de 0,1%,

$N_{age2}$  la durée pour ramener la surmortalité au second âge en dessous de 0,1%.

Pratiquement :

- Pour les âges compris entre  $\hat{age}_1$  et  $\hat{age}_2$ , les coefficients  $b_y$  et  $N_y$  à l'âge  $y$  sont obtenus par interpolation linéaire classique entre  $b_{\hat{age}_1}$  et  $b_{\hat{age}_2}$ , et  $N_{\hat{age}_1}$  et  $N_{\hat{age}_2}$  respectivement.
- Enfin pour les âges inférieurs à  $\hat{age}_1$  ou supérieurs à  $\hat{age}_2$ , les valeurs de  $\hat{age}_1$  et  $\hat{age}_2$  sont prolongées d'une manière constante, respectivement.

La surmortalité est donc de la forme :

$$(1 + b_y \times e^{-ayT_k})$$

avec  $a_y$  calculé à partir de  $b_y$  et  $N_y$ ,

$$a_y = \frac{\ln 1000 \times b_y}{N_y}$$

$$\text{et } T_k = t_k - t_d$$

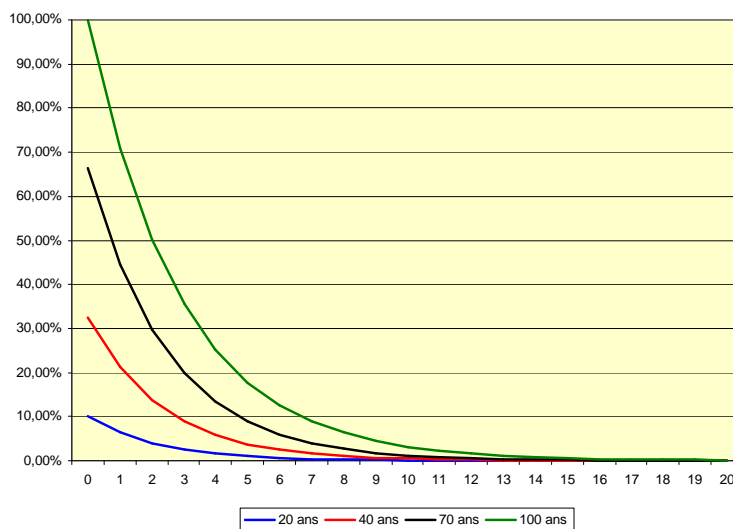
avec  $t_k$  l'année de projection, et  $t_d$  l'année du décès de la première tête,  $t_k \geq t_d$ . Ainsi, à partir de l'année  $N_{age_i}$  la surmortalité est redevenue inférieure à 0,1 %<sup>7</sup>.

Le graphique suivant présente la surmortalité en fonction de l'âge de la seconde tête (4 courbes pour 4 âges), et en fonction de  $T_k$ , durée de projection après le décès de la première tête. Le tableau suivant présente les paramètres retenus dans ce tracé.

---

<sup>7</sup> Preuve : par simple calcul de la surmortalité à  $T_k = N_y$

Paramètre	Valeur
âge1	20 ans
âge2	100 ans
$b_{\text{âge1}}$	10%
$b_{\text{âge2}}$	100%
$N_{\text{âge1}}$	10 ans
$N_{\text{âge2}}$	20 ans
Agey	Variable



Enfin, pour affiner encore ce modèle, remarquons qu'il serait très simple de tenir compte du sexe de l'individu, en doublant l'ensemble des paramètres, et en utilisant une série ou l'autre en fonction d'un test informatique sur le sexe de la seconde ou de la première tête<sup>8</sup>.

### 3.2 Application

Dans la suite, nous allons appliquer ce modèle de dépendance de la mortalité des conjoints à un engagement type rente de réversion, tout d'abord sur un seul couple, puis sur un portefeuille.

#### 3.2.1 Sur un seul couple

La rente est versée à la seconde tête lors du décès de la première tête durant la durée de la garantie. La première tête peut par exemple être un individu retraité, avec une garantie de réversion à l'attention de son conjoint en cas de décès. La rente n'est pas versée si la

<sup>8</sup> En effet, à certains âges, les études empiriques montrent que la surmortalité liée au décès du conjoint est dix fois plus importante pour un homme que pour une femme

première tête n'a pas atteint l'âge de la retraite avant son décès, les différents individus du portefeuille étudié étant à l'origine actifs.

L'algorithme ici développé se place dans cette optique, en reconstituant une retraite à prestations définies. A la date des calculs, la première tête est un individu salarié. Son évolution de carrière est totalement simulée (mortalité et turnover stochastiques, augmentation de salaire par table de profil de carrière dépendant de l'âge). Si la présence ou non de profil de carrière n'a qu'une influence a priori linéaire sur l'engagement, le turnover stochastique peut en revanche interférer avec les résultats. C'est pourquoi il sera supposé que les salariés dont la carrière est ici projetée ne démissionnent pas, ni ne sont licenciés, par souci de simplification de la présentation des résultats. A l'âge de départ paramétré dans l'application, la retraite est calculée à partir d'un pourcentage du dernier salaire, par année d'ancienneté. Cette retraite est assortie d'une garantie de réversion, paramétrable.

Les paramètres du modèle sont les suivants :

- Age de la première tête
- Age de la seconde tête
- Age de la retraite
- Pourcentage du dernier salaire par année d'ancienneté garanti à la retraite
- Pourcentage de réversion
- $Age1$
- $Age2$
- $N_{age1}$
- $N_{age2}$
- $b_{age1}$
- $b_{age2}$
- Taux d'actualisation
- Table de mortalité

Les paramètres du scénario de référence sont les suivants :

Age de la retraite = 60 ans

Pourcentage du dernier salaire par année d'ancienneté garanti au départ = 2 %

Réversion = 60 %

Taux d'actualisation constant = 3 %

Table de mortalité = TV 2000

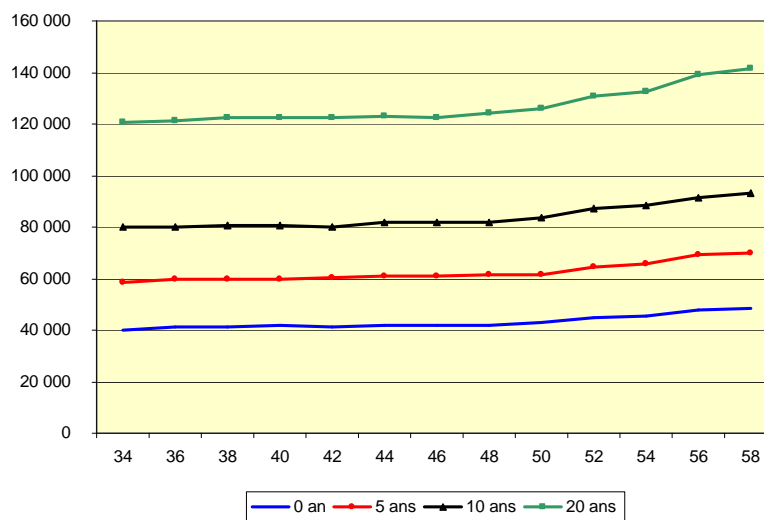
A noter ici que les nombres aléatoires de loi uniforme sont simulés avec le générateur quasi-aléatoire de translation irrationnelle du Tore (cf. [20]).

L'espérance de l'engagement de l'assureur est ici étudiée par l'intermédiaire de graphiques en fonction de l'âge de la première tête, et l'impact de la dépendance des deux âges sur celle-ci. De même, nous analysons parfois la variance de l'engagement, afin de voir l'impact de la dépendance introduite sur la variabilité de cet engagement. Certains paramètres ne sont pas très intéressants à étudier en détail, notamment le montant de la réversion, celui de la retraite, et la valeur du taux d'actualisation (dont l'impact a déjà été étudié avec l'application sur le capital décès).

Dans ce premier graphique, les courbes dépendent de la différence d'âge des deux têtes. La surmortalité et la durée d'amortissement sont constantes.

Graphique 1	
Paramètre	Valeur
âge1	20 ans
âge2	100 ans
$b_{age1}$	10%
$b_{age2}$	10%
$N_{age1}$	10 ans
$N_{age2}$	10 ans
Agex	Variable
Agex - Agey	Variable
Age retraite	60 ans

Graphique 1

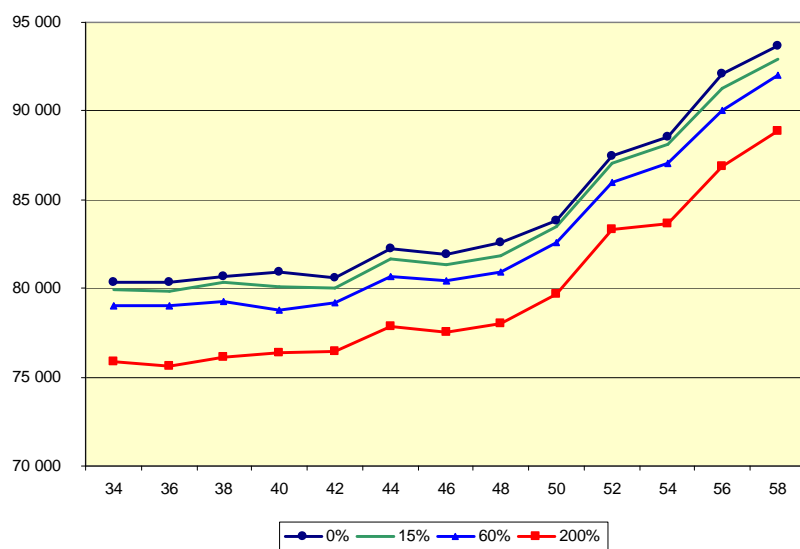


L'engagement est globalement croissant avec l'âge de la première tête, qui varie au niveau de l'axe des abscisses. Il augmente également avec la différence d'âge entre les deux têtes. A noter tout de même le rapport de 1 à 3 de l'engagement entre 0 et 20 ans de différence entre les deux têtes.

Le graphique 2 présente l'impact de la variation du taux de surmortalité instantané sur le calcul de l'engagement de l'assureur en fonction de l'âge de la première tête.

Graphique 2	
Paramètre	Valeur
âge1	20 ans
âge2	100 ans
$b_{age1}$	Variable
$b_{age2}$	= $b_{age1}$
$N_{age1}$	10 ans
$N_{age2}$	10 ans
Agex	Variable
Agex - Agey	5 ans
Age retraite	60 ans

Graphique 2

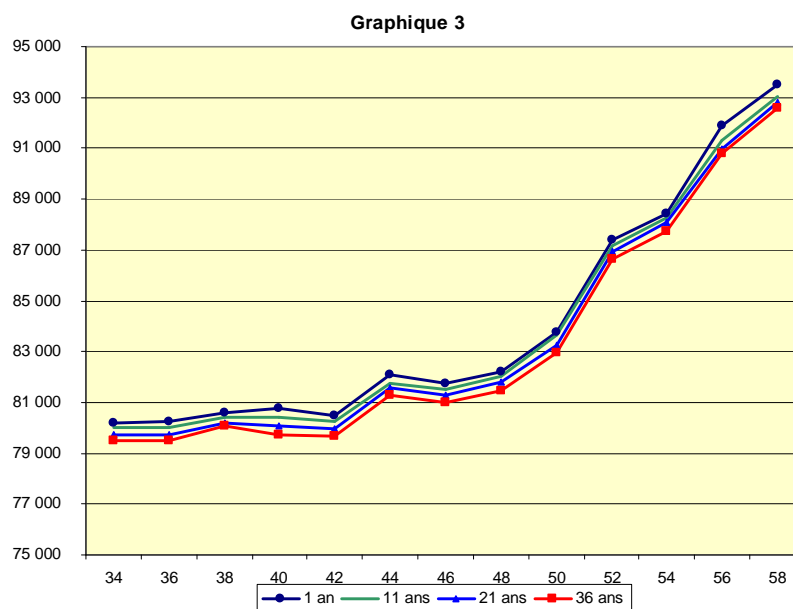


Le taux de surmortalité instantané, variant ici de 0 à 200 %, a pour conséquence de baisser l'engagement de l'assureur. Ainsi, la modélisation de la dépendance de la mortalité entre les deux têtes permet d'éviter un surprovisionnement inutile, puisque les échéances de rentes non versées du fait de la surmortalité de la seconde tête ne sont ici pas prises en

compte. L'économie est croissante avec le taux de surmortalité, ce qui va dans le sens de la conclusion précédente : plus la seconde tête « sur-meurt » moins de rentes lui sont versées.

Le troisième graphique présente l'impact de la variabilité de la durée d'amortissement sur le calcul de l'engagement de l'assureur en fonction de l'âge de la première tête.

Graphique 3	
Paramètre	Valeur
âge1	20 ans
âge2	100 ans
$b_{age1}$	10%
$b_{age2}$	10%
$N_{age1}$	Variable
$N_{age2}$	$= N_{age1}$
Agex	Variable
Agex - Agey	5 ans
Age retraite	60 ans



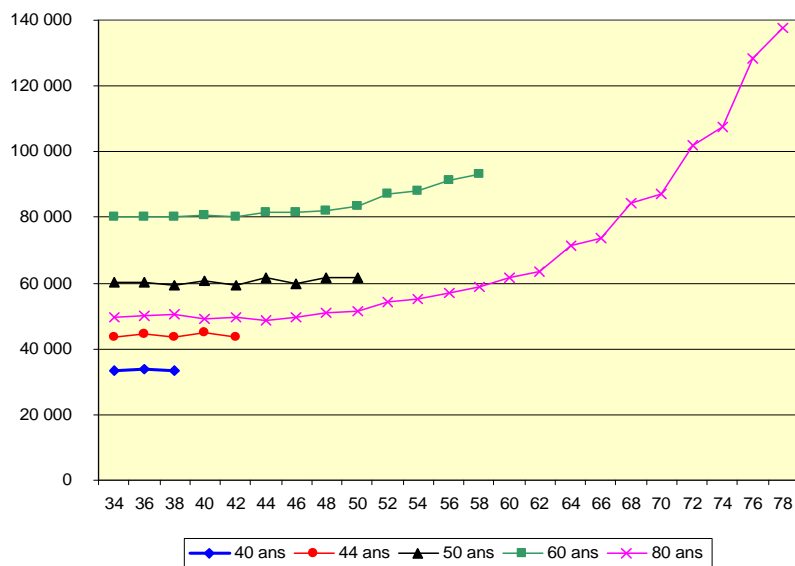
L'augmentation de la durée d'amortissement de la surmortalité du modèle a pour effet de baisser l'engagement : plus la surmortalité prise en compte dure dans le temps, plus l'engagement diminue. L'impact de la durée d'amortissement est cependant moindre que celui du paramètre précédent (taux de surmortalité instantané du modèle), la différence des engagements aux différents âges n'étant pas très importante, malgré des variations de 1 à

36 ans d'amortissement. Ce phénomène est dû au fait que l'amortissement est exponentiel, et donc que ce sont surtout les premières années pour lesquelles la surmortalité est importante.

Le quatrième graphique montre l'impact d'une surmortalité constante sur le calcul de l'engagement de l'assureur en fonction de l'âge de départ à la retraite.

Graphique 4	
Paramètre	Valeur
âge1	20 ans
âge2	100 ans
b <sub>age1</sub>	Variable
b <sub>age2</sub>	= b <sub>age1</sub>
N <sub>age1</sub>	10 ans
N <sub>age2</sub>	10 ans
Agex	Variable
Agex - Agey	5 ans
Age retraite	Variable

Graphique 4



Les différentes courbes ne mesurent pas la même longueur, car elles dépendent de l'âge de départ à la retraite des individus. En effet, nous avons calculé les valeurs de l'engagement uniquement pour les années précédant le départ à la retraite, car le phénomène qui nous intéresse ici est la présence d'une période de différé entre la date du

calcul de l'engagement, et le début de la garantie de la seconde tête. Ce différé n'existe plus après le départ à la retraite, nous sommes en quelque sorte dans le cas d'une rente viagère décès.

L'étude des différentes courbes en fonction de l'âge de départ à la retraite montre que l'engagement est tout d'abord croissant avec l'âge de départ, du fait du jeu du taux de profil de carrière et de l'ancienneté : le salaire de début de carrière est le même, et il croît au fur et à mesure des années travaillées du fait du taux de profil de carrière. Ainsi, lorsque le départ à la retraite a lieu à 60 ans plutôt qu'à 40 ans, le salaire a augmenté pendant 20 ans d'une moyenne de 2,1 % par an (table paramétrée dans l'application), c'est à dire qu'il a été multiplié par un coefficient 1,5 environ. De plus, la retraite versée à la première tête dépend de l'ancienneté (2 % du dernier salaire par année d'ancienneté) et en ce sens, plus l'âge de la retraite est tardif, plus l'engagement de l'assureur est important (la rente de réversion représentant 60 % de la rente de la première tête). La mortalité entre 40 et 60 ans compense très peu ce phénomène car elle est assez faible. C'est pourquoi la courbe correspondant à un départ à 60 ans se situe au-dessus de celle pour un départ à la retraite à 40 ans (bien entendu plutôt rare dans la réalité).

Dans un deuxième temps, le phénomène de mortalité joue plus fortement que l'application du taux de profil de carrière et l'augmentation des droits sur le montant des pensions versées : l'engagement de l'assureur est plus faible au même âge pour un départ à 80 ans que pour un départ à 60 ans. En effet, la probabilité de décéder entre 60 et 80 ans pour la première tête n'est absolument plus négligeable, elle augmente la probabilité de verser une réversion pour un départ à 60 ans, et elle diminue la probabilité de verser une rente de première tête (et donc une réversion) pour un départ à 80 ans. C'est ce qui explique que la courbe pour un départ à 80 ans se situe en dessous de celle pour un départ à 60 ans.

Pour analyser ces courbes en fonction de l'âge de la première tête, il faut noter que pour un même âge de départ à la retraite, les droits sont les mêmes puisque l'ancienneté dépend d'une date d'entrée, alors que le vieillissement de l'individu lors des calculs se fait par changement de la date des calculs et non de la date de naissance de l'individu. Ainsi seul le salaire à la date de départ varie, il est décroissant avec l'âge initial puisque le profil de carrière s'applique moins longtemps plus l'âge initial est important. L'engagement est ainsi faiblement croissant entre 40 et 60 ans, car la croissance de droits est quasi compensée par la croissance des salaires et l'actualisation. En revanche après 60 ans, l'engagement de l'assureur est fortement croissant, car la probabilité de décès de la première tête est de plus en plus importante, et donc la probabilité de verser une rente de réversion rapidement de

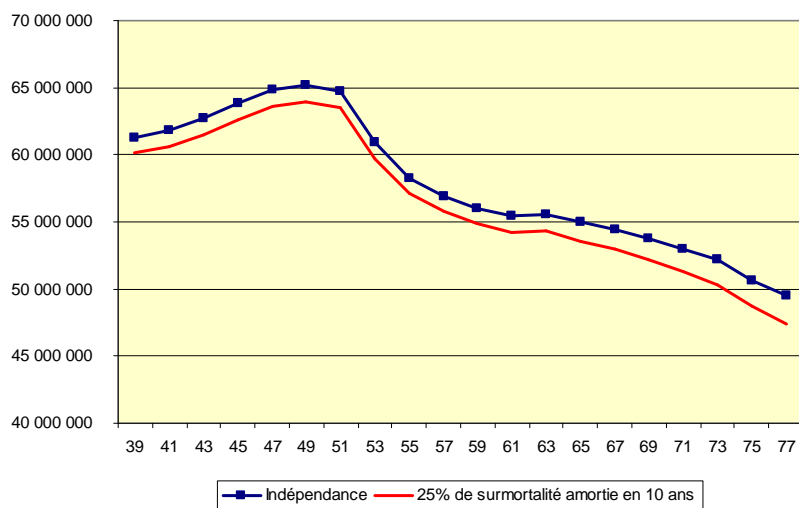
plus en plus grande, avec un jeu d'actualisation des rentes de réversion versées de moins en moins important corrélé à une durée de versement non négligeable, puisque la seconde tête est de 5 ans plus jeune que la précédente.

### 3.2.2 Sur un portefeuille

Dans ce cas, nous étudions simplement l'impact de la variabilité du taux de surmortalité instantané sur l'engagement de l'assureur en fonction de l'âge moyen du portefeuille. L'âge moyen du portefeuille est

Graphique 5	
Paramètre	Valeur
âge1	20 ans
âge2	100 ans
$b_{age1}$	Variable
$b_{age2}$	= $b_{age1}$
$N_{age1}$	10 ans
$N_{age2}$	10 ans
Age retraite	60 ans

Graphique 5

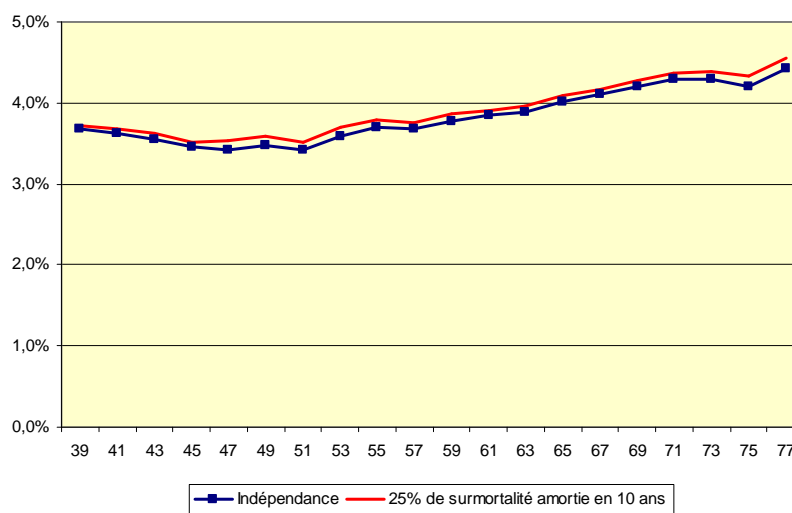


De même que sur une seule tête, l'application d'un facteur de surmortalité de 25 % amorti exponentiellement sur 10 ans diminue l'engagement de l'assureur, surtout pour les âges moyens du portefeuille faibles. Le vieillissement de la population du portefeuille est obtenu en modifiant la date des calculs. L'allure générale des deux courbes peut s'expliquer

comme suit : dans un premier temps, avec l'augmentation de la date des calculs (vieillesse du portefeuille), le facteur d'actualisation joue de moins en moins longtemps, le départ à la retraite étant de plus en plus proche, et donc l'engagement augmente. Puis, à partir d'un âge moyen du portefeuille de 50 ans environ, plus la date des calculs est élevée, plus une partie non négligeable de la population étudiée a un âge supérieur à l'âge de départ de 60 ans, et donc ne profite pas de revalorisations du salaire avant le départ à la retraite, ce qui, individuellement et sur le portefeuille, baisse l'engagement de l'assureur. La forme des pentes décroissantes, qui connaissent deux cassures pour des âges moyens de 52 et 62 ans montre même que notre groupe est formé de deux générations assez distinctes, dont les départs à la retraite se font en deux vagues bien séparées.

Le graphique 5bis présente l'impact de la surmortalité sur le coefficient de variation de l'engagement de l'assureur (écart-type rapporté à l'espérance).

Graphique 5bis



Avec une surmortalité de 25 %, le coefficient de variation de l'engagement de l'assureur présentée sur ce graphique est légèrement plus important que dans le cas où l'hypothèse d'indépendance de la mortalité des deux têtes est faite. Cependant ce phénomène n'est pas très marqué, et nous remarquons ici le fait que ce coefficient n'est pas très important en valeur. L'engagement est relativement stable autour de sa moyenne.

#### 4. CONTRÔLE DE LA PROBABILITÉ DE RUINE POUR UN FONDS DE RETRAITÉS

Comme nous l'avons montré dans les simulations sur les rentes de conjoints, et comme nous l'avons observé en utilisant un taux d'actualisation stochastique dans un calcul d'engagement pour une garantie décès, le passif peut être considéré comme déterministe dans de nombreuses évaluations, en assurance vie<sup>9</sup>. Cependant, il n'en est pas de même pour l'actif, ici représenté par la modélisation du taux d'actualisation.

##### 4.1 Présentation du modèle

Dans cet exemple, l'engagement de l'assureur consiste à payer des rentes, déjà liquidées à la date des calculs, et dont les montants sont connus pour l'évaluation. La mortalité est appliquée de manière classique, c'est à dire déterministe.

L'engagement est supposé géré via un fonds collectif d'assurance, alimenté par les produits financiers issus du placement des provisions et sur lequel sont prélevés les arrérages des rentes à servir.

L'objet de cette partie est de montrer que pour un provisionnement type « Valeur Actuelle Probable de l'engagement » (fonds initial = VAP des rentes), l'introduction d'un modèle de taux stochastique symétrique engendre une probabilité de ruine de 50 %, au sens où la capitalisation de la VAP de l'engagement ne couvrira pas le paiement des rentes du portefeuille jusqu'à l'extinction de celui-ci dans la moitié des scénarios simulés.

Nous avons voulu montrer dans un exemple ce phénomène, et étudier la couverture de la variabilité du taux par la constitution d'une « provision pour aléa financier » théorique qui est une augmentation du fonds initial fonction de la probabilité de ruine maximum acceptable, pour couvrir l'aléa du taux. Cette provision peut aussi être constituée par une augmentation du taux de cotisation d'équilibre, dans le cas où les individus du portefeuille cotisent encore (ici ce n'est pas possible car tous les individus ont déjà liquidé leurs rentes).

##### 4.2 Application

Les paramètres du scénario de référence sont les suivants :

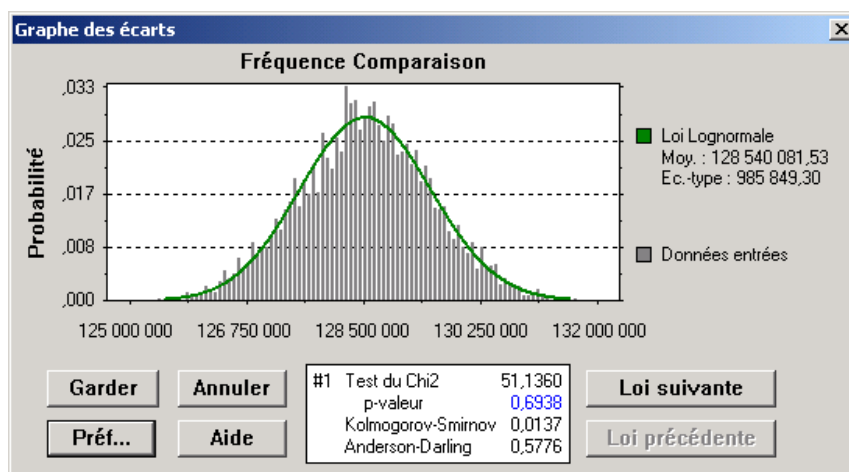
- ❑ Table de mortalité de référence : TV 2000,
- ❑ Fonds initial : VAP (déterministe) de l'engagement de l'assureur,

---

<sup>9</sup> A noter que ce n'est absolument pas le cas en Assurance Non-Vie

- ❑ Taux d'actualisation stochastique, symétrique, suivant le modèle CIR, autour de 3,5 %,
- ❑ 5000 simulations.

L'espérance empirique de l'engagement est de 128,5 M€, la variance empirique de 971,8.10<sup>9</sup>. Un intervalle de confiance empirique à 95 % est : [126,6M€ ; 130,4M€]. Ici malgré l'utilisation d'un taux stochastique, l'engagement est relativement peu volatile. L'histogramme de l'engagement est le suivant :



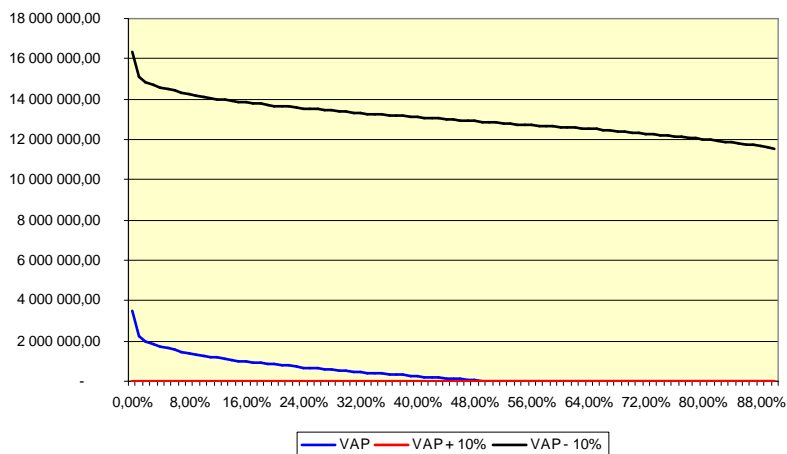
Enfin, la probabilité de ruine obtenue dans ce modèle est de 50 %.

Le graphique suivant présente le montant à apporter à l'origine en fonction de la probabilité de ruine maximum acceptable pour trois scénarios :

- ✓ le scénario de référence où le fonds initial est la VAP déterministe de l'engagement,
- ✓ un scénario moins risqué avec un fonds initial = VAP + 10 %,
- ✓ un scénario plus risqué avec un fonds initial = VAP - 10 %.

Les probabilités de ruine obtenues sont très différentes, puisqu'elles sont de 0 % sur le scénario « fonds initial = VAP + 10 % », 50 % sur le scénario « fonds initial = VAP », 100 % sur le scénario « fonds initial = VAP - 10 % ».

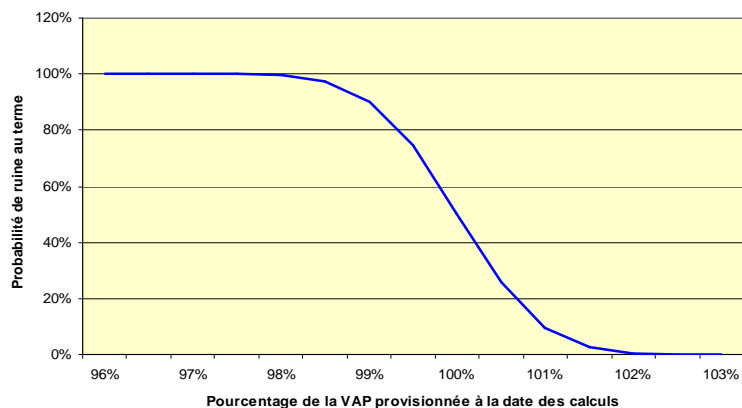
**Augmentation du fonds initial en fonction de la probabilité de ruine maximum acceptable**



Nous voyons ici toute l'importance d'une telle approche : à 10 % près du montant du fonds initial destiné à financer le paiement des rentes, la probabilité de ruine peut être annulée ou presque, alors qu'elle était de 50 % à l'origine lorsque nous supposons que le processus de taux est symétrique.

Le graphique suivant présente la probabilité de ruine du portefeuille, en fonction du pourcentage de la valeur actuelle probable de l'engagement provisionné initialement (c'est à dire à la date des calculs).

**Probabilité de ruine du portefeuille en fonction du fonds initial**



Comme le montrait l'intervalle de confiance de l'engagement, peu important, une variation de quelques % du montant de la provision initiale peut avoir des conséquences très importantes sur l'équilibre du contrat au terme. La probabilité de survie est symétrique autour de la provision à 100 % de la VAP, ce qui est prévisible au sens où le processus de taux ici utilisé est symétrique.

## 5. BIBLIOGRAPHIE

### OUVRAGES

- [1] KNUTH D.E., *The art of computer programming volume 2, Seminumerical Algorithms*. Book News, inc. (1997 – troisième édition).
- [2] BOWERS, GERBER, HICKMAN, JONES, NESBITT, *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, (1997 – Seconde édition).
- [3] PARTRAT C., BESSON J.L., *Assurance Non Vie : Modélisation, Simulation*. Economica, (2005).
- [4] PETAUTON P., *Théorie et pratique de l'Assurance-Vie*. Dunod, (1996 – Seconde édition).
- [5] SAPORTA G., *Probabilité, Analyse de données et Statistiques*. Technip, (1990).
- [6] DROESBEKE J.J., FINE J., SAPORTA G., *Méthodes bayésiennes en statistiques*. Technip, (2002).

### ARTICLES

- [7] MARSAGLIA, BRAY, *A convenient method for generating Normal variables*. SIAM Review, n° 4 (1964).
- [8] GE Z., *A numerical study of one-factor interest rate models*. A thesis submitted at the University of Toronto, n° 4 (1998).
- [9] ROBERTSON J.P., *The computation of aggregate loss distributions*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol. LXXIX, Pages 57-133 (1992).
- [10] HECKMAN P.E., MEYERS G.G., *The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol. LXX, Pages 22-61 (1983).
- [11] GREENBERGER M., *Notes a new pseudo-random number generator*. Journal of the ACM, 8, (2), April, p. 163-167, (1961).

- [12] LUBES-NEIL H., MASSON J.L., CAPPELAERE B., *Quelques techniques de simulations de variables aléatoires applicables à l'hydrologie*. UMR HydroSciences, Montpellier.
- [13] SCOLLNIK D.P., *An introduction to Markov Chain Monte Carlo methods and their actuarial applications*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol. LXXXIII, Pages 114-165 (1996).
- [14] KAUFMANN R., GADMER A. et KLETT R., *Introduction to Dynamic Financial Analysis*. Astin Bulletin, Vol. 31, Pages 213-249, n° 1 (2001).
- [15] AHLGRIM K.C., D'ARCY S.P. et GORVETT R.W., *Parametrizing Interest Rate Models*. Casualty Actuarial Society Forum, Pages 1-50 (1999).
- [16] ROGERS L.C.G., *Which modelo for term-structure of interest rates should one use ?* Mathematical Finance, IMA Vol. 65, Springer, p. 93-116 (1995).
- [17] DE WINNE R., *Processus de diffusion de taux d'intérêt et correction du biais de discrétisation*. 5th AFIR International Colloquium, p. 749-782.
- [18] PLANCHET F., MAGNIN F., *L'engagement d'un régime de retraite supplémentaire à prestations définies*. Bulletin Français d'Actuariat, vol. 4, n° 7 (2000).
- [19] PLANCHET F., JACQUEMIN J., *L'utilisation de méthodes de simulation en assurance – Partie 1 : générer des nombres aléatoires*. Bulletin Français d'Actuariat, vol. 6, n° 11 (2003).
- [20] REGAZZONI Y., SANDER J., *Les provisions techniques : une approche par simulation*. Bulletin Français d'Actuariat, vol. 1, n° 2 (1997).
- [21] CHARPENTIER A., *Gestion des risques multiples en assurance : introduction à la théorie des copulas*. Présentation groupe de travail CREST (2002).