



Tables de mortalité prospectives sur un groupe restreint : mesure du risque d'estimation

Présentation du
30/05/2011



Frédéric PLANCHET *Actuaire Associé*
fplanchet@winter-associes.fr

Aymric KAMEGA *Actuaire*
akamega@winter-associes.fr

Préambule



On considère ici un groupe restreint observé sur un historique relativement court d'une dizaine d'années pour construire des tables prospective de mortalité,

L'importance des fluctuations d'échantillonnage lorsque le volume de données est restreint (*cf.* Olivieri [2001]) nous conduit à vouloir quantifier le risque d'estimation.

Par ailleurs, l'attention accordée, dans une moindre mesure, au risque systématique d'avis d'expert, lié au choix de la table de référence externe, est justifié par le fait que l'utilisation d'un groupe restreint pour construire la table prospective conduit à utiliser une table de référence externe (*cf.* Planchet et Lelieur [2007]).

Le risque de modèle, n'est pas traité dans cette étude, mais on peut toutefois rappeler ici qu'il s'agit d'un sujet utile qui peut se révéler complexe et pour lequel il existe un espace important pour la recherche future (*cf.* Booth et Tickle [2008]).

Préambule



On se concentre donc ici sur le risque d'estimation des paramètres lié aux fluctuations d'échantillonnage et, dans une moindre mesure, sur le risque d'avis d'expert lié au choix de la référence externe retenue.

Ces deux risques sont des risques systématiques et ne se mutualisent donc pas. Il s'agit ainsi de risques potentiellement dangereux, et susceptibles d'avoir un impact non négligeable dans les évaluations de l'assureur (provision *best estimate*, marge de risque, besoin de capital, coût des risques non couvrables, etc.).

Une réflexion s'impose alors sur la mesure de ces risques dans le cadre de la construction de tables prospectives d'expérience.

Le problème de l'interdépendance des sources de risques entre les périodes ou entre les âges (*cf.* Booth et Tickle [2008] et Loisel et Serant [2007]) n'est pas traité dans ce travail.



SOMMAIRE

Mesure du risque
d'estimation

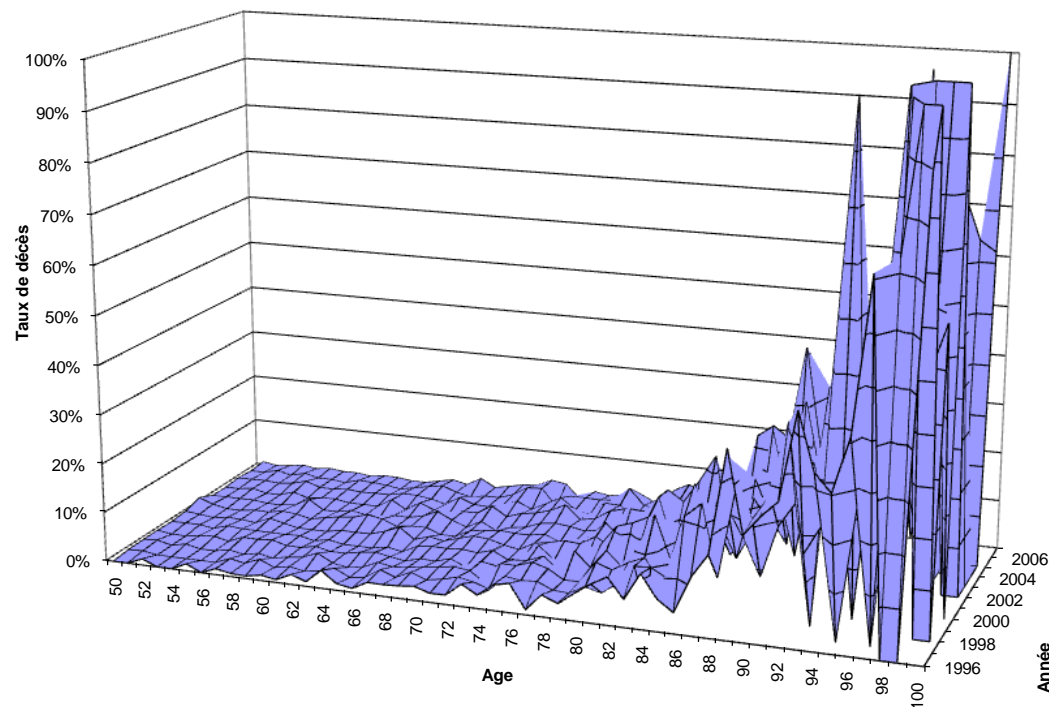
1. Présentation de la table d'expérience
2. Mesure du risque d'estimation
3. Conséquences pour un régime de rentes
4. Impact du choix de la référence

1. Présentation de la table d'expérience



Les données

On dispose de données relatives à un régime de retraite de 1996 à 2007 avec une exposition au risque concentrée sur la plage d'âge 50-100 ans. L'exposition annuelle globale est d'environ 20 000 années avec un *sex-ratio* de 40 %.



1. Présentation de la table d'expérience



La méthode de construction

Aussi, il a été décidé de s'appuyer sur une référence externe et de construire les tables d'expérience H/F en positionnant la mortalité d'expérience par rapport à cette référence. Les tables réglementaires françaises TGH/F 05 ont été choisies comme référence, compte tenu du fait qu'elles décrivent la survie des rentiers de portefeuilles d'assureurs (*cf.* Planchet [2006]). L'ajustement est effectué sur les tables du moment reconstituées de 1996 à 2007. Le modèle utilisé repose sur :

$$\ln\left(\frac{\hat{q}_{xt}}{1-\hat{q}_{xt}}\right) = a \times \ln\left(\frac{q_{xt}^{réf}}{1-q_{xt}^{réf}}\right) + b + \varepsilon_{xt}$$

où l'on minimise

$$D = \sum_{x,t} R_{xt} (\hat{q}_{xt} - q_{xt})^2$$



SOMMAIRE

Mesure du risque
d'estimation

1. Présentation de la table d'expérience
2. **Mesure du risque d'estimation**
3. Conséquences pour un régime de rentes
4. Impact du choix de la référence

2. Mesure du risque d'estimation



Ré-échantillonnage des taux ajustés

On cherche désormais à mesurer l'impact des fluctuations d'échantillonnage sur l'estimation des paramètres du modèle retenu pour ajuster les taux de décès. La démarche retenue à cet effet consiste, dans un premier temps, à ré-échantillonner les taux de décès bruts à partir de la méthode de simulation directe des taux présentée dans Kamega et Planchet [2010].

Le principe est de simuler des décès dans la loi binomiale $B(R_{xt}; \hat{q}_{xt})$ et d'en déduire des taux de décès simulés :

$$\hat{q}_{xt}^k = d_{xt}^k / R_{xt}$$

Sur cette base on détermine une nouvelle estimation du paramètre (a, b) dans le modèle de positionnement.

2. Mesure du risque d'estimation

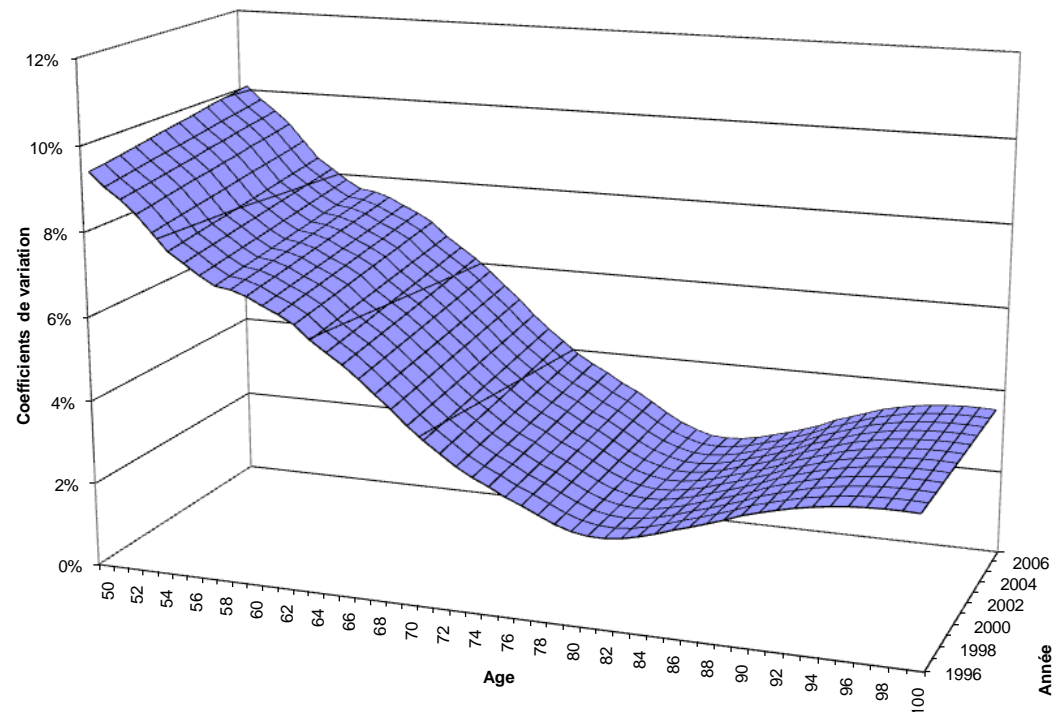


Ré-échantillonnage des taux ajustés

On construit ainsi des taux ajustés simulés (avec 5 000 tirages) ; le coefficient de variation de ces taux simulés a l'allure suivante :

$$y_{xt}^k = \hat{a}^k \ln \left(\frac{q_{xt}^{réf}}{1 - q_{xt}^{réf}} \right) + \hat{b}^k$$

$$q_{xt}^k = \frac{\exp(y_{xt}^k)}{1 + \exp(y_{xt}^k)}$$



2. Mesure du risque d'estimation



Encadrement de la table d'expérience

Sur la base de ces taux ré-échantillonnés on souhaite construire un encadrement de la table ajustée.

L'approche retenue à cet effet consiste à considérer une fonctionnelle propre à chaque table de mortalité qui lui associe un nombre positif, puis à lui déterminer un intervalle de confiance pour cette fonctionnelle.

L'espérance de vie générationnelle est de ce point de vue un choix naturel.

$$EV_{xt|n} = \sum_{h=1}^n \prod_{u=0}^{h-1} (1 - q_{x+u,t+u})$$

2. Mesure du risque d'estimation



Encadrement de la table d'expérience

On procède alors de la manière suivante, en cherchant deux bornes telles que :

$$P\left(EV_{xt}^i < EV_{xt}^k \leq EV_{xt}^s, x = x_0\right) = 1 - \alpha$$

Les bornes sont alors calculées de manière empirique :

$$EV_{xt}^i = \mathbf{inf} \left\{ EV_{xt}^g \in \left[EV_{xt}^1, \dots, EV_{xt}^K \right] \mid P\left(EV_{xt}^k \leq EV_{xt}^g\right) \geq \alpha/2, x = x_0 \right\}$$
$$EV_{xt}^s = \mathbf{inf} \left\{ EV_{xt}^g \in \left[EV_{xt}^1, \dots, EV_{xt}^K \right] \mid P\left(EV_{xt}^k \leq EV_{xt}^g\right) \geq 1 - \alpha/2, x = x_0 \right\}$$

Dans la suite on retient comme âge de référence 67 ans et on considère les EV jusqu'à 95 ans.



SOMMAIRE

Mesure du risque
d'estimation

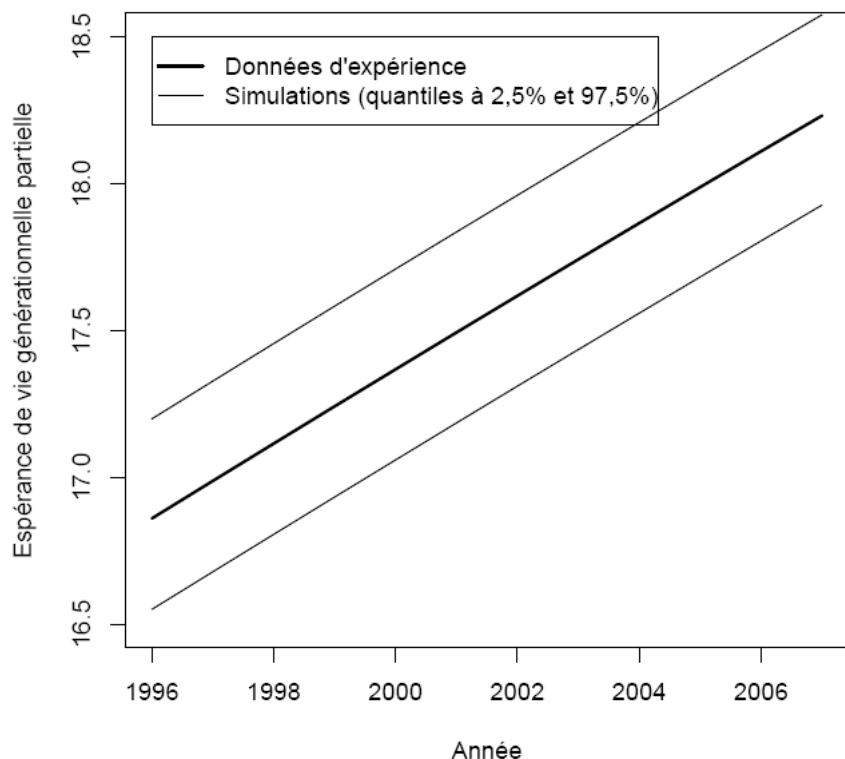
1. Présentation de la table d'expérience
2. Mesure du risque d'estimation
3. **Conséquences pour un régime de rentes**
4. Impact du choix de la référence

3. Conséquences pour un régime de rentes



Intervalle de confiance sur les EV partielles et les provisions

On a typiquement



Esp. de vie gén, partielle (pour t=1996)	Données d'expérience (1)	Simulations à partir des données d'expérience			
		Quantile à 2,5% (2)	Ecart relatif (2)/(1)-1	Quantile à 97,5% (3)	Ecart relatif (3)/(1)-1
Age: 50 / Age fin: 90	32,7	32,2	-1,6%	33,3	1,7%
Age: 60 / Age fin: 90	22,7	22,3	-1,7%	23,1	1,9%
Age: 67 / Age fin: 90	16,1	15,8	-1,7%	16,4	1,9%
Age: 70 / Age fin: 90	13,5	13,2	-1,7%	13,7	1,8%
Age: 50 / Age fin: 95	33,9	33,3	-1,7%	34,5	1,9%
Age: 60 / Age fin: 95	23,6	23,2	-1,8%	24,0	2,0%
Age: 67 / Age fin: 95	16,9	16,5	-1,8%	17,2	2,0%
Age: 70 / Age fin: 95	14,2	13,9	-1,9%	14,5	2,0%

Sur les EV partielles, on note des écarts d'environ 2 % relativement stables en fonction des âges de référence retenus.

L'écart sur la provision *best estimate* des engagements du régime est du même ordre (écart de 1,5 %, donc plus faible compte tenu de l'effet actualisation).

3. Conséquences pour un régime de rentes



Besoin en capital

On se place dans le cadre du dispositif européen Solvabilité 2, dans lequel on cherche le montant de capital dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5 %.

On considère le sous-risque de longévité du risque de souscription vie, qui pour mémoire représente le *risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de fluctuations affectant le niveau, l'évolution tendancielle ou la volatilité des taux de mortalité, lorsqu'une baisse de ces taux entraîne une augmentation de la valeur des engagements d'assurance.*

En particulier, on compare le capital requis au titre du risque de longévité et évalué à partir de l'approche standard (premier cas) au capital requis au titre du risque d'estimation des tables de mortalité prospectives lié aux fluctuations d'échantillonnage (second cas).

3. Conséquences pour un régime de rentes



Besoin en capital

Le calcul dans le cadre standard est direct (abattement de 20% sur les taux conditionnels de décès).

Le calcul dans le cadre du modèle interne utilise le cadre proposé dans Guibert et al. [2010] qui conduit à

$$\text{Capital_MIP}_0 \approx \frac{\frac{\text{VaR}_{99,5\%}(\chi) - 1}{L_0}}{1 + \alpha \left(D_0 - \frac{\text{VaR}_{99,5\%}(\chi)}{L_0} (D_0 - 1) \right)} L_0$$

avec $\chi = \frac{P_1 + L_1}{1 + R_1}$

3. Conséquences pour un régime de rentes



Besoin en capital

On obtient les résultats suivants, pour le modèle standard :

Provision - D. d'expérience (1)	Charge capital (FS - Longévité) (2)	Poids de la charge de capital (2)/(1)
4 752	316	6,7%

puis pour le modèle interne partiel :

Provision - D. d'expérience (1)	Charge capital (MIP - Risque estimation) (2)	Poids de la charge de capital (2)/(1)
4 752	92	1,9%

Il apparaît que la charge de capital au titre du risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage, qui se limite ainsi principalement à un risque de volatilité des taux de décès ajustés, représente environ 2 % de la provision *best estimate*. Aussi, il ressort que la charge de capital au titre du seul risque d'estimation représente environ 30 % de la charge de capital au titre du risque de longévité prévue par la formule standard du QIS5.



SOMMAIRE

Mesure du risque
d'estimation

1. Présentation de la table d'expérience
2. Mesure du risque d'estimation
3. Conséquence pour un régime de rentes
4. **Impact du choix de la référence**

4. Impact du choix de la référence



La table d'expérience est construite par positionnement par rapport à une référence. Il est souhaitable que les résultats dépendent assez peu de la référence choisie.

Les tables de référence retenues sont les TGH/F 05. Ces tables sont construites à partir de données d'expérience et ont elles-mêmes été obtenues à partir d'un positionnement par rapport aux tables de la population générale française de 1962 à 2000.

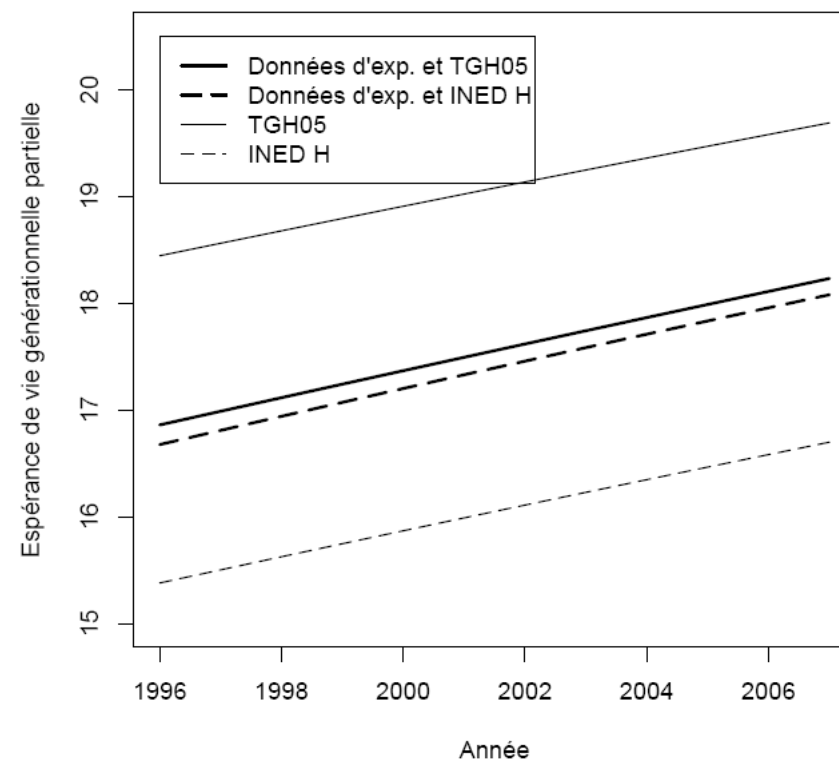
On compare l'ajustement du modèle à partir de deux jeux de tables de référence différents : d'une part à partir des tables de la population assurée (tables prospectives réglementaires TGH/F 05), et d'autre part à partir des tables de la population générale française (tables prospectives de l'INED).

4. Impact du choix de la référence



L'impact est d'environ 1% de l'EV partielle, soit la moitié du risque d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage.

Esp. de vie gén. partielle (pour t=1996) Age: 67 / Age fin: 95		Ecart relatif avec (1)
Données d'expérience / Positionnement table population assurée (TGH05) (1)	16,9	0,0%
Quantile à 2,5% (simulations et positionnement TGH05)	16,5	-1,8%
Quantile à 97,5% (simulations et positionnement TGH05)	17,2	2,0%
Données d'expérience / Positionnement table population générale (INED H)	16,7	-1,1%
Table population assurée (TGH05)	18,4	9,4%
Table population générale (INED H)	15,4	-8,8%



Conclusion



On a mis en évidence un écart d'environ 1,5 % entre la provision calculée à partir de la table issue des données et celle calculée à partir des tables correspondant aux bornes de l'intervalle de probabilité à 95 % des tables issues des simulations.

Cet écart est proche de celui observé pour les espérances de vie, mais est légèrement plus faible compte tenu notamment de l'effet actualisation.

Concernant la charge de capital, il apparaît que le besoin de capital au titre du seul risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage représente environ 30 % du besoin de capital au titre du risque de longévité du projet Solvabilité 2 (QIS5).

Sur ce point, on rappelle que le risque de longévité du projet Solvabilité 2 reflète le risque lié au niveau, à la tendance et à la volatilité des taux de décès ajustés à partir des données.

Conclusion



A cela s'ajoute un risque associé au choix de la référence, dont l'ordre de grandeur est de la moitié du précédent.

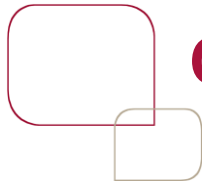
Ainsi, la moitié du besoin en capital destiné à couvrir le risque de longévité dans le QIS 5 est consommé par les incertitudes associées à la construction de la loi de provisionnement *best estimate*.

La quantification explicite de ces risques apparaît donc indispensable dans le cadre de la mise en place d'un modèle interne partiel.

Références



- BOOTH H., TICKLE L. [2008] « Mortality modeling and forecasting: A review of methods », *The Australian Demographic and Social Research Institute*, WP3.
- DELWARDE A., KACHAKHIDZE D., OLIÉ L., DENUIT M. [2004] « Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 6, No. 12.
- EUROPEAN COMMISSION [2010] « QIS5 Technical Specifications – Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5 », *European Commission, Financial Institutions*.
- GUIBERT Q., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 10, No. 20.
- KAMEGA A., PLANCHET F. [2010] « Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience », *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2136.
- LEE R. [2000] « The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications », *NAAJ*, Vol. 4, No. 1.
- LOISEL S., SERANT D. [2007] « In the core of longevity risk: hidden dependence in stochastic mortality models and cut-offs in prices of longevity swaps », *Cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2044.
- OLIVIERI A. [2001] « Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective », *Insurance Mathematics & Economics*, No. 29.
- PARLEMENT EUROPÉEN, CONSEIL [2009] « Directive du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité II) (Refonte) », *Union européenne*, PE-CONS 3643/6/09, REV 6.
- PITACCO E. [2004] « Survival models in a dynamic context: a survey », *Insurance Mathematics & Economics*, No. 35.
- PLANCHET F. [2006] « Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentes – note de présentation », Document de travail, Institut des Actuaire.
- PLANCHET F., LELIEUR V. [2007] « Utilisation des méthodes de Lee-Carter et log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillon », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 7, No. 14.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2007] *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2006] *Modèles de Durée – Applications actuarielles*, Paris : Economica.
- THATCHER A.R. [1999] « The Long-term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age. », *JRSS* 162 Part 1: 5-43.



Contacts



Frédéric Planchet

fplanchet@ressources-actuarielles.net

Aymric Kamega

akamega@ressources-actuarielles.net

Institut de Science Financière et d'Assurance

50 avenue T. Garnier
69007 LYON

<http://www.ressources-actuarielles.net>
<http://blog.ressources-actuarielles.net>
<http://afrique.ressources-actuarielles.net>