

## SYSTEMES BONUS-MALUS

Philippe BIENAIME

*Actuaire I.S.F.A., GPA*

*Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière, I.S.F.A.,  
Université Claude Bernard Lyon 1*

Nathalie RICHARD

*GPA*

*Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière, I.S.F.A.,  
Université Claude Bernard Lyon 1*

**Résumé :** Après avoir rappelé les travaux BESSON J.L. et PARTRAT C. (1992) sur les systèmes Bonus-Malus, une extension est proposée. Elle permet, pour des produits multigaranties, de tenir compte des sinistralités propres à chacune des garanties. La modélisation proposée pour les fréquences de sinistres repose sur les lois Poisson-mélange multivariées. En outre, ce système permet d'intégrer les éventuelles variations de sinistralités moyennes au cours du temps.

**Mots clés :** Systèmes Bonus-Malus ; Lois Poisson-mélange multivariées ; Loi Poisson-Gamma Multivariée ; Loi Poisson-Inverse Gaussienne multivariée

Deux méthodes de tarification sont couramment utilisées par les assureurs :

- la tarification a priori : l'assureur essaie de prévoir, dès l'entrée d'un nouvel assuré, sa sinistralité future,
- la tarification a posteriori : le tarif initial de l'assuré est adapté, au cours de la vie de son contrat, à sa sinistralité individuelle.

Généralement, une tarification a priori repose sur une segmentation du portefeuille : on cherche à classer les assurés en fonction de leur risque potentiel. Pour cela, il s'agit de sélectionner des critères de tarification qui soient pertinents et commercialement utilisables.

A l'issue de la segmentation, l'assureur dispose de classes homogènes d'assurés (homogènes au sens où les variables aléatoires du nombre et du montant des sinistres de tous les assurés d'une même classe sont équidistribuées).

Dans la suite de cet article, nous supposons que nous nous situons dans une telle classe, C. Cependant, puisque seuls les critères de tarification commerciaux peuvent être pris en compte, au sein de chaque classe, il demeure une hétérogénéité résiduelle.

C'est à ce niveau qu'intervient la tarification a posteriori : afin de tenir compte de l'hétérogénéité résiduelle au sein de la classe C, on peut introduire une tarification basée sur l'historique du nombre de sinistres de chaque assuré. Cette tarification peut prendre la forme d'un système Bonus-Malus.

Dans un premier temps, nous allons exposer les résultats des travaux de BESSON J.L. et PARTRAT C. : en effet, ils ont traité le cas d'un système Bonus-Malus pour un produit à une garantie. Ils prennent en compte la variation tendancielle de la fréquence

moyenne annuelle de sinistres au cours du temps. Ils utilisent, pour modéliser cette fréquence, les lois Poisson-Gamma et Poisson-Inverse Gaussienne.

PARTRAT C., quant à lui, traite le cas d'un produit à deux garanties sans prendre en compte, cependant, les variations tendanciennes des sinistralités. La loi utilisée est la loi Poisson-Gamma bivariée.

Dans un second temps, nous proposons une extension des systèmes cités ci-dessus : nous allons supposer que le produit que nous devons 'tarifer' est multigaranties. Nous utiliserons donc les lois Poisson-Gamma multivariée et Poisson-Inverse Gaussienne multivariée. Nous tiendrons également compte des variations tendanciennes des fréquences moyennes annuelles de sinistres associées à chacune des garanties.

## I. LES TRAVAUX DE BESSON J.L. ET PARTRAT C. (1992)

### A. SYSTEME BONUS-MALUS UNIVARIE

Le système Bonus-Malus présenté dans cette première partie concerne les produits à une garantie. Il permet de tenir compte de la sinistralité passée de chaque assuré dans le calcul de sa prime : il repose sur la fréquence de sinistres.

Dans un premier temps, nous allons présenter les lois de probabilité retenues pour modéliser les fréquences de sinistres. Puis, nous décrirons le système Bonus-Malus, c'est-à-dire le modèle mathématique dans lequel il s'inscrit et les résultats qu'il permet d'obtenir.

#### 1. Les lois de fréquence de sinistres

On suppose que quel que soit l'assuré choisi dans la classe C, sa fréquence de sinistres suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Ce dernier est l'espérance du nombre de sinistres et mesure donc le risque potentiel de chaque assuré. Ainsi faire l'hypothèse d'une loi de Poisson, c'est faire l'hypothèse d'une classe homogène au sens du risque potentiel des assurés. Ceci est en contradiction avec l'existence d'une hétérogénéité résiduelle au sein de la classe C. **La loi de Poisson ne convient donc pas.**

L'utilisation des lois Poisson-mélange permet, grâce à l'introduction d'une variable de structure, de remédier à ce problème de modélisation : on suppose que la variable N suit une loi de Poisson dont le paramètre  $\lambda$  est une réalisation d'une variable aléatoire positive  $\Lambda$  qu'on appelle variable de structure. On suppose, en outre, que cette dernière admet une densité h.

De manière plus formelle :

- notation :  $N / \Lambda = \lambda \rightsquigarrow P(\lambda)$

- loi de probabilité :  $P(N = n) = \int_0^{\infty} P(N = n / \Lambda = \lambda) h(\lambda) d\lambda$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} h(\lambda) d\lambda$$

- moments :  $E(N) = E(\Lambda)$  et  $\text{Var}(N) = E(\Lambda) + \text{Var}(\Lambda)$

on remarque que  $E(N) < \text{Var}(N)$  ce qui révèle bien un phénomène d'hétérogénéité au sein de la classe C.

Deux lois ont été utilisées : les lois Poisson-Gamma et Poisson-Inverse Gaussienne.

**a. La loi Poisson-Gamma**

On note  $N \sim \text{PG}(r, \beta) \Leftrightarrow N / \Lambda = \lambda \sim P(\lambda)$  avec  $\Lambda \sim \gamma(r, \beta)$

$$- h(\lambda) = \frac{\beta^r \lambda^{r-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(r)}$$

$$- E(N) = \frac{r}{\beta}$$

**Remarque :**  $N \sim \text{PG}(r, \beta) \Leftrightarrow N \sim \text{BN}\left(r, \frac{\beta}{1+\beta}\right)$

**b. La loi Poisson-Inverse Gaussienne**

On note  $N \sim \text{PIG}(\mu, \beta) \Leftrightarrow N / \Lambda = \lambda \sim P(\lambda)$  et  $\Lambda \sim \text{IG}(\mu, \beta)$

$$- h(\lambda) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\beta\lambda^3}} e^{-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2\beta\lambda}}$$

$$- E(N) = \mu$$

**Remarque :** la loi Inverse Gaussienne Généralisée

$X \sim \text{IGG}(v, \mu, \beta), \mu > 0, \beta > 0$

$$- \text{densité : } f(x) = \frac{x^{v-1} \exp\left[-\frac{1}{2\beta}\left(x + \frac{\mu^2}{x}\right)\right]}{2\mu^v K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}, \quad x \geq 0$$

où  $K_v$  est la fonction de Bessel de 3<sup>ème</sup> espèce modifiée

$$- E(X) = \frac{\mu K_{v+1}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}{K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}$$

## 2. Le modèle

On note  $S$  le montant cumulé des sinistres, alors  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  avec  $N$  variable aléatoire du nombre de sinistres et  $X_i$  variable aléatoire du coût du  $i^{\text{ème}}$  sinistre.

On suppose que : -  $N$  et  $X_i$  sont indépendantes,  $\forall i \in \mathbf{N}^*$

-  $\{X_i, i \in \mathbf{N}^*\}$  est un i.i.d. de moyenne  $m$ .

La prime pure est alors  $E(S) = E(N)m$

On considère  $(N_1, \dots, N_t, N_{t+1})$  le vecteur représentant les fréquences de sinistres des  $(t+1)$  dernières années.

On suppose que :

- les v.a.r.  $N_1, \dots, N_t, N_{t+1}$  sont, conditionnellement en  $\Lambda$ , indépendantes.

- pour  $i = 1, \dots, t+1$ ,  $N_i / \Lambda = \lambda \rightsquigarrow P(v^{i-1} \lambda)$ .

Ainsi, conditionnellement à la connaissance du risque potentiel de l'assuré, les fréquences de sinistres suivent une loi de Poisson dont le paramètre dépend de l'année de survenance  $i$  des sinistres. Cela permet de prendre en compte l'évolution de la fréquence de sinistres au cours du temps.

L'introduction du paramètre  $v$  est donc la formalisation mathématique de ce que nous avons appelé variation tendancielle de la fréquence moyenne de sinistres au cours du temps. Nous appellerons taux de variation de la fréquence moyenne de sinistres au cours du temps, ce paramètre  $v$ .

On note :  $a_t(v) = \sum_{i=1}^t v^{i-1}$ .

## 3. Les coefficients de réduction-majoration

On considère une police de la classe  $C$  : le vecteur aléatoire  $(N_1, \dots, N_t)$  de ses fréquences de sinistres des  $t$  dernières années a pour réalisation  $(n_1, \dots, n_t)$ . On notera  $V_t$  l'événement  $(N_1 = n_1, \dots, N_t = n_t)$ .

Le principe du système Bonus-Malus est de tenir compte de cette information pour « corriger » la prime pure a priori de la  $(t+1)^{\text{ème}}$  année. A cette fin, nous calculons un coefficient de réduction-majoration de la prime pure,  $C_{t+1}(n_1, \dots, n_t)$ , qui n'est autre que le rapport entre la prime pure a posteriori  $E(S_{t+1}/V_t)$  et la prime pure a priori  $E(S_{t+1})$ , exprimé en pourcentage.

$$C_{t+1}(n_1, \dots, n_t) = 100 \times \frac{E(S_{t+1}/V_t)}{E(S_{t+1})}$$

Les hypothèses du modèle permettent de montrer que :

$$C_{t+1}(n_1, \dots, n_t) = 100 \times \frac{E(\Lambda/V_t)}{E(\Lambda)}$$

Pour calculer  $E(\Lambda/V_t)$ , il faut connaître la loi de la variable  $\Lambda/V_t$ , or :

$$h_{\Lambda/V_t}(\lambda) = \frac{h(\lambda)P(V_t/\Lambda = \lambda)}{\int_0^{\infty} h(y)P(V_t/\Lambda = y)dy}$$

Puisque  $P(V_t/\Lambda = \lambda) = e^{-\lambda a_t(v)} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^t n_i} v^{\sum_{i=1}^t (i-1)n_i}}{\prod_{i=1}^t n_i!}$ , on obtient :

$$h_{\Lambda/V_t}(\lambda) = \frac{h(\lambda) e^{-\lambda a_t(v)} \lambda^{\sum_{i=1}^t n_i}}{\int_0^{\infty} h(y) e^{-y a_t(v)} y^{\sum_{i=1}^t n_i} dy}.$$

**Remarque :** la loi de  $\Lambda/V_t$  ne dépend de la sinistralité passée,  $(n_1, \dots, n_t)$ , que par le nombre total de sinistres  $\sum_{i=1}^t n_i$ , il en donc de même du coefficient de réduction-majoration.

L'application aux lois Poisson-Gamma et Poisson-Inverse Gaussienne donne les résultats suivants.

#### a. La loi Poisson-Gamma

Grâce au dernier résultat du paragraphe précédent, on montre que :

$$\Lambda/V_t \rightsquigarrow \gamma\left(r + \sum_{i=1}^t n_i, \beta + a_t(v)\right)$$

$$\text{d'où : } E(\Lambda/V_t) = \frac{r + \sum_{i=1}^t n_i}{\beta + a_t(v)}$$

$$\text{on en déduit donc : } C_{t+1}(n_1, \dots, n_t) = 100 \times \frac{1 + \frac{\sum_{i=1}^t n_i}{\beta}}{1 + \frac{r}{\beta}}$$

#### b. La loi Poisson-Inverse Gaussienne

De même que précédemment, on montre que :

$$\Lambda / V_t \rightsquigarrow \text{IGG} \left( \sum_{i=1}^t n_i - \frac{1}{2}, \mu (1 + 2\beta_{a_t}(v))^{-1/2}, \beta (1 + 2\beta_{a_t}(v))^{-1} \right)$$

$$\text{d'où : } E(\Lambda / V_t) = \frac{\mu}{\sqrt{1 + 2\beta_{a_t}(v)}} \frac{K_{\sum_{i=1}^t n_i + 1/2} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta_{a_t}(v)} \right)}{K_{\sum_{i=1}^t n_i - 1/2} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta_{a_t}(v)} \right)}$$

on en déduit donc :

$$C_{t+1}(n_1, \dots, n_t) = 100 \times \frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta_{a_t}(v)}} \frac{K_{\sum_{i=1}^t n_i + 1/2} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta_{a_t}(v)} \right)}{K_{\sum_{i=1}^t n_i - 1/2} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta_{a_t}(v)} \right)}$$

## B. SYSTEME BONUS-MALUS BIVARIE

PARTRAT C. a abordé, en 1992, le cas des produits à deux garanties dont chacune a une fréquence de sinistres qui lui est propre. Il s'agit donc de construire un système Bonus-Malus bivarié.

L'architecture de cette partie sera la même que celle de la partie A, c'est-à-dire : présentation des lois retenues pour la modélisation les fréquences de sinistres, puis mise en place du système Bonus-Malus et enfin calcul effectif des coefficients de réduction-majoration.

### 1. Les lois de fréquence de sinistres

Le modèle choisi est le modèle Poisson-mélange à indépendance conditionnelle de Greenwood et Hull. C'est la transposition au cas bivarié du modèle Poisson-mélange utilisé dans le cas univarié. Il nécessite une hypothèse supplémentaire : si  $N^{(1)}$  et  $N^{(2)}$  sont les fréquences de sinistres des deux garanties considérées, alors, conditionnellement à la connaissance du risque potentiel, les variables  $N^{(1)}$  et  $N^{(2)}$  sont indépendantes.

On suppose que la variable de structure,  $\Lambda$ , admet une densité  $h$ .

De manière plus formelle :

- notation :  $N^{(1)} / \Lambda = \lambda \rightsquigarrow P(\lambda)$  et  $N^{(2)} / \Lambda = \lambda \rightsquigarrow P(a\lambda)$  avec  $a > 0$  et conditionnellement à  $\Lambda$ ,  $N^{(1)}$  et  $N^{(2)}$  sont indépendantes.

- loi de probabilité :

$$\begin{aligned} P(N^{(1)} = n_1, N^{(2)} = n_2) &= \int_0^{\infty} P(N^{(1)} = n_1, N^{(2)} = n_2 / \Lambda = \lambda) h(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{e^{-a\lambda} (a\lambda)^{n_2}}{n_2!} h(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

- moments :

$$\begin{aligned} E(N^{(1)}) &= E(\Lambda) & E(N^{(2)}) &= aE(\Lambda) \\ \text{Var}(N^{(1)}) &= E(\Lambda) + \text{Var}(\Lambda) & \text{Var}(N^{(2)}) &= aE(\Lambda) + a^2 \text{Var}(\Lambda) \\ \text{Cov}(N^{(1)}, N^{(2)}) &= a\text{Var}(\Lambda) \end{aligned}$$

## 2. Le modèle

On note  $S$  le montant cumulé des sinistres, alors :

$$S = S_1 + S_2 = \sum_{i=1}^{N^{(1)}} X_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{N^{(2)}} X_i^{(2)}$$

avec :  $N^{(1)}, N^{(2)}$  : variables aléatoires du nombre de sinistres des deux garanties

$X_i^{(1)}, X_i^{(2)}$  : variables aléatoires du coût du  $i^{\text{ème}}$  sinistre des deux garanties

On suppose que :

- $j=1,2$   $N^{(j)}$  et  $X_i^{(j)}$  sont indépendantes,  $\forall i \in \mathbf{N}^*$
- $j=1,2$   $(X_i^{(j)})_i$  est un i.i.d. de moyenne  $m^{(j)}$
- $X_i^{(1)}$  et  $X_k^{(2)}$  sont indépendantes,  $\forall i$  et  $k$

La prime pure est alors :  $E(S) = E(N^{(1)})m^{(1)} + E(N^{(2)})m^{(2)}$

On considère  $((N_1^{(1)}, N_1^{(2)}), \dots, (N_{t+1}^{(1)}, N_{t+1}^{(2)}))$  le vecteur aléatoire représentant les fréquences de sinistres des  $(t+1)$  dernières années.

On suppose que :

- les vecteurs  $(N_i^{(1)}, N_i^{(2)})$   $i=1, \dots, t+1$  sont, conditionnellement en  $\Lambda$ , indépendants.

- pour  $i=1, \dots, q$ ,

$$\begin{aligned} N_i^{(1)}/\Lambda = \lambda &\sim P(\lambda) \\ N_i^{(2)}/\Lambda = \lambda &\sim P(a\lambda) \end{aligned}$$

On remarque que ce modèle ne permet pas, à l'instar du modèle univarié, de tenir compte de l'évolution des fréquences de sinistres au cours du temps.

## 3. Les coefficients de réduction-majoration

On considère une police de la classe  $C$  : le vecteur aléatoire  $((N_1^{(1)}, N_1^{(2)}), \dots, (N_t^{(1)}, N_t^{(2)}))$  des fréquences de sinistres des  $t$  dernières années a pour réalisation  $((n_1^{(1)}, n_1^{(2)}), \dots, (n_t^{(1)}, n_t^{(2)}))$ .

On notera  $A_t$  l'événement  $((N_1^{(1)} = n_1^{(1)}, N_1^{(2)} = n_1^{(2)}), \dots, (N_t^{(1)} = n_t^{(1)}, N_t^{(2)} = n_t^{(2)}))$

Comme précédemment, le coefficient de réduction-majoration  $C_{t+1}((n_1^{(1)}, n_1^{(2)}), \dots, (n_t^{(1)}, n_t^{(2)}))$  est le rapport entre la prime pure a posteriori  $E(S_{t+1}/A_t)$  et la prime pure a priori  $E(S_{t+1})$ , exprimé en pourcentage, donc :

$$C_{t+1}((n_1^{(1)}, n_1^{(2)}), \dots, (n_t^{(1)}, n_t^{(2)})) = 100 \times \frac{E(S_{t+1}/A_t)}{E(S_{t+1})}$$

De la même manière que dans le cas univarié, les hypothèses du modèle permettent de montrer que :

$$C_{t+1}((n_1^{(1)}, n_1^{(2)}), \dots, (n_t^{(1)}, n_t^{(2)})) = 100 \times \frac{E(\Lambda/A_t)}{E(\Lambda)}$$

Il faut donc déterminer la loi de  $\Lambda/A_t$  :

$$h_{\Lambda/A_t}(\lambda) = \frac{P(A_t/\Lambda = \lambda)h(\lambda)}{\int_0^\infty P(A_t/\Lambda = y)h(y)dy}$$

$$\text{or } P(A_t/\Lambda = \lambda) = e^{-\lambda t(1+a)} \lambda^{\sum_{i=1}^t (n_i^{(1)} + n_i^{(2)})} \prod_{i=1}^t \frac{a^{n_i^{(2)}}}{n_i^{(1)}! n_i^{(2)}!}$$

$$\text{d'où : } h_{\Lambda/A_t}(\lambda) = \frac{h(\lambda) e^{-\lambda t(1+a)} \lambda^{\sum_{i=1}^t (n_i^{(1)} + n_i^{(2)})}}{\int_0^\infty h(y) e^{-y t(1+a)} y^{\sum_{i=1}^t (n_i^{(1)} + n_i^{(2)})} dy}$$

**Remarque :** la loi de  $\Lambda/A_t$  ne dépend de la sinistralité passée  $((n_1^{(1)}, n_1^{(2)}), \dots, (n_t^{(1)}, n_t^{(2)}))$  que par le nombre total de sinistres  $\sum_{i=1}^t (n_i^{(1)} + n_i^{(2)})$ , il en est donc de même pour les coefficients de réduction-majoration.

Dans le cas bivarié PARTRAT C. ne s'est intéressé qu'à la loi Poisson-Gamma bivariée. En utilisant les résultats précédents, on montre que :

$$\Lambda/A_t \sim \gamma\left(r + \sum_{i=1}^t (n_i^{(1)} + n_i^{(2)}), \beta + t(1+a)\right),$$

$$\text{ce qui entraîne : } E(\Lambda/A_t) = \frac{r + \sum_{i=1}^t (n_i^{(1)} + n_i^{(2)})}{\beta + (1+a)t},$$

et nous permet d'obtenir le coefficient de réduction-majoration suivant :

$$C_{t+1}((n_1^{(1)}, n_1^{(2)}), \dots, (n_t^{(1)}, n_t^{(2)})) = 100 \times \frac{1 + \frac{\sum_{i=1}^t (n_i^{(1)} + n_i^{(2)})}{\beta}}{1 + \frac{r}{(1+a)t}}$$



## II. LE SYSTEME BONUS-MALUS MULTIVARIE

Notre but, ici, est de proposer une généralisation des deux modèles précédents en construisant un système Bonus-Malus adapté à un produit multi-garanties. Il tient compte de la fréquence de sinistres propre à chaque garantie, et pour chacune de ces fréquences, il intègre son éventuelle évolution au cours du temps en introduisant des taux de variation des fréquences moyennes de sinistres.

### A. LES LOIS DE FREQUENCE DE SINISTRES

Nous avons généralisé le modèle Poisson-mélange à indépendance conditionnelle utilisé dans le cas bivarié.

On considère  $N^{(i)}, i = 1, \dots, q$ , les variables aléatoires des fréquences de sinistres des différentes garanties considérées. On fait l'hypothèse suivante : conditionnellement à la connaissance du risque potentiel, les variables  $N^{(i)}, i = 1, \dots, q$ , sont indépendantes.

On suppose que la variable aléatoire de structure des risques potentiels au sein de la classe C,  $\Lambda$ , admet une densité  $h$ .

De manière plus formelle :

- notation :  $N^{(i)} / \Lambda = \lambda \rightsquigarrow P(a_i \lambda)$  avec  $\forall i \in \{1, \dots, q\} a_i > 0$

et la convention  $a_1 = 1$

$$\begin{aligned} P(N^{(1)} = n_1, \dots, N^{(q)} = n_q) &= \int_0^{\infty} P(N^{(1)} = n_1, \dots, N^{(q)} = n_q / \Lambda = \lambda) h(\lambda) d\lambda \\ &= \prod_{i=1}^q \frac{a_i^{n_i}}{n_i!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda \sum_{i=1}^q a_i} \lambda^{\sum_{i=1}^q n_i} h(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

- moments : pour  $i=1, \dots, q$ ,

$$E(N^{(i)}) = a_i E(\Lambda)$$

$$\text{Var}(N^{(i)}) = a_i E(\Lambda) + a_i^2 \text{Var}(\Lambda)$$

$$\text{Cov}(N^{(i)}, N^{(j)}) = a_i a_j \text{Var}(\Lambda)$$

### B. LE MODELE

On note S le montant cumulé des sinistres, alors :  $S = \sum_{j=1}^q S^{(j)} = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{N^{(j)}} X_i^{(j)}$  avec  $N^{(j)}$

la variable aléatoire du nombre de sinistres de la  $j^{\text{ème}}$  garantie et  $X_i^{(j)}$  la variable aléatoire du coût du  $i^{\text{ème}}$  sinistre de la  $j^{\text{ème}}$  garantie.

Les hypothèses sont les suivantes :  $j, k = 1, \dots, q$  et  $i, l \in \mathbb{N}$

-  $N^{(j)}$  et  $X_i^{(j)}$  sont indépendantes

- $(X_i^{(j)})_i$  est un i.i.d. de moyenne  $m^{(j)}$
- $X_i^{(j)}$  et  $X_i^{(k)}$  sont indépendantes

La prime pure est alors :  $E(S) = \sum_{j=1}^q [E(N^{(j)})m^{(j)}]$

On considère  $\left[ (N_1^{(1)}, \dots, N_1^{(q)}), \dots, (N_{t+1}^{(1)}, \dots, N_{t+1}^{(q)}) \right]$  le vecteur aléatoire représentant les fréquences de sinistres des  $t+1$  dernières années.

On suppose que :

- les vecteurs  $(N_i^{(1)}, \dots, N_i^{(q)})$   $i = 1, \dots, t+1$  sont, conditionnellement en  $\Lambda$ , indépendants.
- $\forall i \in \mathbf{N}, N_i^{(j)} / \Lambda = \lambda \sim \mathcal{P}(a_j v_j^{i-1} \lambda)$

$v_j$  est le taux de variation, d'une année à l'autre, de la fréquence moyenne de sinistres de la  $j^{\text{ème}}$  garantie

### C. LES COEFFICIENTS DE REDUCTION-MAJORATION

On considère une police de la classe C : le vecteur aléatoire  $\left( (N_1^{(1)}, \dots, N_1^{(q)}), \dots, (N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(q)}) \right)$  des nombres de sinistres des  $t$  dernières années a pour réalisation  $\left( (n_1^{(1)}, \dots, n_1^{(q)}), \dots, (n_t^{(1)}, \dots, n_t^{(q)}) \right)$ . On notera  $R_t$  l'événement  $\left( (N_1^{(1)} = n_1^{(1)}, \dots, N_1^{(q)} = n_1^{(q)}), \dots, (N_t^{(1)} = n_t^{(1)}, \dots, N_t^{(q)} = n_t^{(q)}) \right)$ .

Le coefficient de réduction-majoration est toujours défini par :

$$C_{t+1} \left( (n_1^{(1)}, \dots, n_1^{(q)}), \dots, (n_t^{(1)}, \dots, n_t^{(q)}) \right) = 100 \times \frac{E(S_{t+1} / R_t)}{E(S_{t+1})}$$

et les hypothèses du modèle nous permettent, là encore, de montrer que :

$$C_{t+1} \left( (n_1^{(1)}, \dots, n_1^{(q)}), \dots, (n_t^{(1)}, \dots, n_t^{(q)}) \right) = 100 \times \frac{E(\Lambda / R_t)}{E(\Lambda)}$$

Il faut donc déterminer la loi de  $\Lambda / R_t$  :

$$h_{\Lambda / R_t}(\lambda) = \frac{P(R_t / \Lambda = \lambda) h(\lambda)}{\int_0^{\infty} P(R_t / \Lambda = y) h(y) dy}$$

$$\text{or } P(R_t / \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} \lambda^{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}} \prod_{i=1}^t \prod_{j=1}^q \frac{(a_j v_j^{i-1})^{n_i^{(j)}}}{n_i^{(j)!}} \text{ d'où :}$$

$$h_{\Lambda/R_t}(\lambda) = \frac{h(\lambda) e^{-\lambda \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} \lambda^{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}}}{\int_0^{\infty} h(y) e^{-y \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} y^{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}} dy}$$

**Remarque :** la loi de  $\Lambda/R_t$  ne dépend de la sinistralité passée  $((n_1^{(1)}, \dots, n_1^{(q)}), \dots, (n_t^{(1)}, \dots, n_t^{(q)}))$  que par le nombre total de sinistres  $\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}$ , il en est donc de même pour le coefficient de réduction-majoration.

L'application aux lois Poisson-Gamma multivariée  $(N_1^{(1)}, \dots, N_1^{(q)}) \sim \text{PGm}(a_2, \dots, a_q, r, \beta)$  et Poisson-Inverse Gaussienne multivariée  $(N_1^{(1)}, \dots, N_1^{(q)}) \sim \text{PIGm}(a_2, \dots, a_q, \mu, \beta)$  donne les résultats suivants.

### 1. La loi Poisson-Gamma multivariée

La formule  $h_{\Lambda/R_t}(\lambda) = \frac{h(\lambda) e^{-\lambda \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} \lambda^{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}}}{\int_0^{\infty} h(y) e^{-y \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} y^{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}} dy}$  nous permet de montrer

que :

$$\Lambda/R_t \sim \gamma \left( r + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}, \beta + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1} \right) \text{ d'où } E(\Lambda/R_t) = \frac{r + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}}{\beta + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}}$$

On en déduit donc que :

$$C_{t+1}((n_1^{(1)}, \dots, n_1^{(q)}), \dots, (n_t^{(1)}, \dots, n_t^{(q)})) = 100 \times \frac{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)}}{\beta}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}}{\beta}}$$

### 2. La loi Poisson-Inverse Gaussienne multivariée

De même que précédemment, on peut montrer que :

$$\Lambda/R_t \sim \text{IGG} \left( \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)} - \frac{1}{2}, \frac{\mu}{\sqrt{1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}}}, \beta \left( 1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1} \right)^{-1} \right)$$

$$\text{d'où : } E(\Lambda/R_t) = \frac{\mu}{\sqrt{1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}}} \frac{K_{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)} + \frac{1}{2}} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} \right)}{K_{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)} - \frac{1}{2}} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} \right)},$$

on en déduit donc que :

$$C_{t+1}[(n_1^{(1)}, \dots, n_1^{(q)}), \dots, (n_t^{(1)}, \dots, n_t^{(q)})] \\ = \frac{100}{\sqrt{1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}}} \times \frac{K_{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)} + \frac{1}{2}} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} \right)}{K_{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q n_i^{(j)} - \frac{1}{2}} \left( \frac{\mu}{\beta} \sqrt{1 + 2\beta \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^q a_j v_j^{i-1}} \right)}.$$

### III. APPLICATIONS NUMERIQUES

**Notations :**  $t$  est le nombre d'années d'observation et  $\sum n_i$  est le nombre total de sinistres observés durant ces  $t$  années.  $v$  est le taux de variation de la fréquence moyenne de sinistres d'une année sur l'autre.

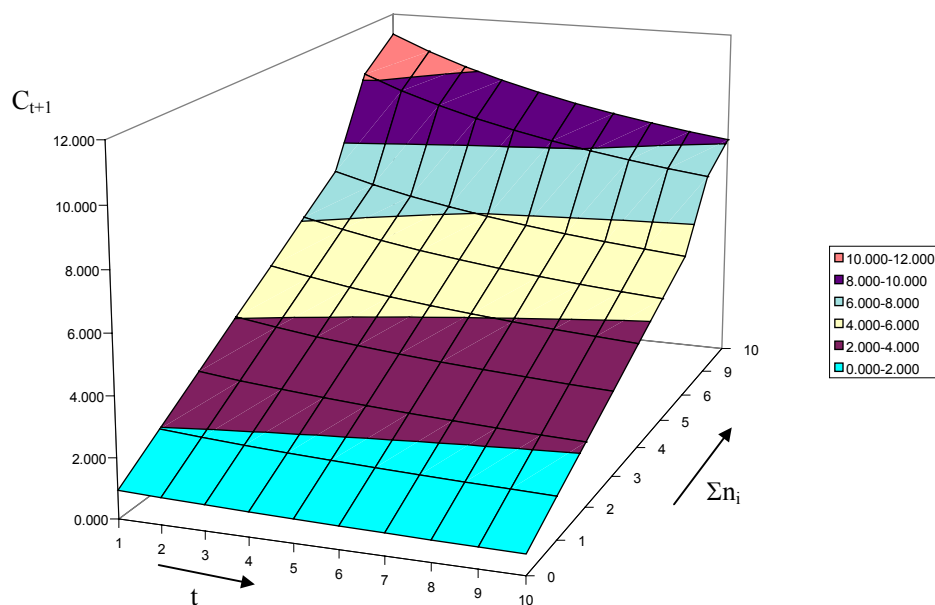
Les tableaux 1 et 2 ci-dessous contiennent les coefficients  $C_{t+1}$  en fonction de  $t$  et de  $\sum n_i$ , pour  $v$  égal à 0,93914 et une variable de structure dont la moyenne est 0,05682717 et la variance 0,00352839.

**Tableau 1 :**  
Coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une **loi Poisson-Gamma**.

$t \setminus \sum n_i$	0	1	2	3	4	5	6	9	10
1	0.942	1.970	2.999	4.028	5.056	6.085	7.114	10.200	11.229
2	0.893	1.868	2.843	3.818	4.793	5.769	6.744	9.669	10.644
3	0.851	1.781	2.710	3.640	4.570	5.500	6.429	9.219	10.148
4	0.815	1.706	2.597	3.488	4.378	5.269	6.160	8.832	9.723
5	0.784	1.641	2.498	3.355	4.212	5.069	5.927	8.498	9.355
6	0.757	1.585	2.413	3.240	4.068	4.895	5.723	8.206	9.033
7	0.734	1.535	2.337	3.139	3.941	4.742	5.544	7.949	8.751
8	0.713	1.492	2.271	3.049	3.828	4.607	5.386	7.722	8.501
9	0.694	1.453	2.211	2.970	3.728	4.487	5.245	7.521	8.280
10	0.678	1.418	2.158	2.899	3.639	4.380	5.120	7.341	8.082

**Graphique 1 :**

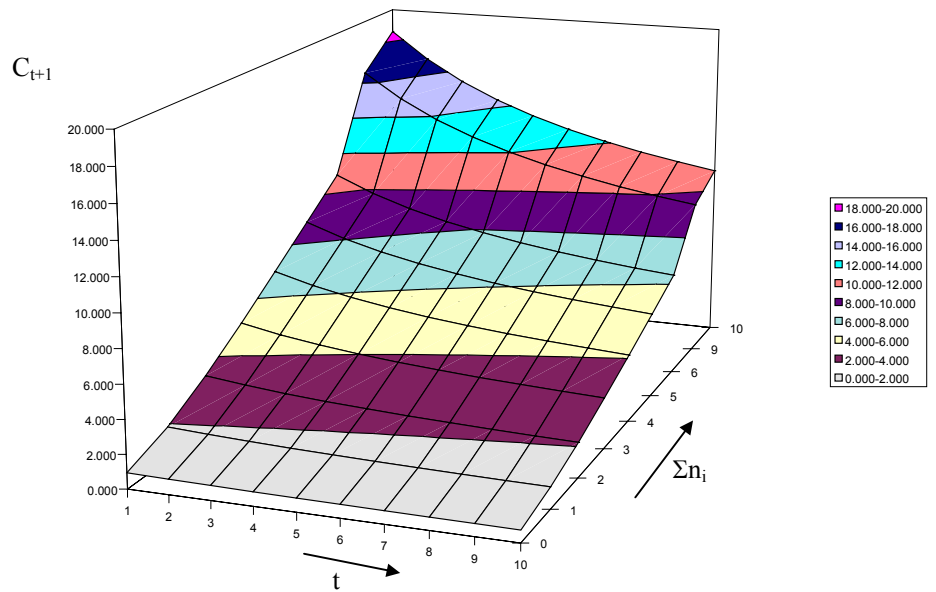
$C_{t+1}$  en fonction de  $t$  et de  $\Sigma n_i$  pour une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma (tableau 1).

**Tableau 2 :**

Coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une **loi Poisson-Inverse Gaussienne**.

$t \setminus \Sigma n_i$	0	1	2	3	4	5	6	9	10
1	0.943	1.915	3.380	5.123	6.977	8.875	10.791	16.583	18.520
2	0.898	1.778	3.095	4.663	6.337	8.052	9.786	15.030	16.784
3	0.861	1.670	2.871	4.304	5.836	7.409	9.001	13.816	15.427
4	0.830	1.581	2.691	4.015	5.434	6.893	8.370	12.842	14.339
5	0.803	1.508	2.543	3.779	5.106	6.471	7.855	12.046	13.449
6	0.781	1.447	2.419	3.582	4.832	6.120	7.426	11.383	12.708
7	0.761	1.394	2.315	3.416	4.602	5.824	7.064	10.824	12.083
8	0.744	1.349	2.226	3.274	4.405	5.571	6.755	10.347	11.550
9	0.729	1.310	2.149	3.152	4.235	5.354	6.489	9.936	11.091
10	0.716	1.276	2.081	3.046	4.088	5.164	6.258	9.579	10.692

**Graphique 2 :**  $C_{t+1}$  en fonction de  $t$  et de  $\Sigma n_i$  pour une modélisation de la fréquence de sinistres par un loi Poisson-Inverse Gaussienne (tableau 2).



On peut remarquer une grande similarité entre les coefficients obtenus par chacune des deux modélisations proposées. Cependant il existe des différences que le tableau 3 et le graphique 3 permettent de mieux cerner.

Le tableau 3 ci-dessous contient les différences relatives observées entre les tableaux 2 et 3.

**Tableau 3 :** Différences relatives entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne.

$t \setminus \Sigma n_i$	0	1	2	3	4	5	6	9	10
1	-0.002	0.028	-0.127	-0.272	-0.380	-0.458	-0.517	-0.626	-0.649
2	-0.006	0.048	-0.089	-0.221	-0.322	-0.396	-0.451	-0.554	-0.577
3	-0.011	0.062	-0.059	-0.182	-0.277	-0.347	-0.400	-0.499	-0.520
4	-0.018	0.073	-0.036	-0.151	-0.241	-0.308	-0.359	-0.454	-0.475
5	-0.024	0.081	-0.018	-0.126	-0.212	-0.277	-0.325	-0.418	-0.438
6	-0.031	0.087	-0.003	-0.106	-0.188	-0.250	-0.298	-0.387	-0.407
7	-0.037	0.092	0.009	-0.088	-0.168	-0.228	-0.274	-0.362	-0.381
8	-0.044	0.095	0.020	-0.074	-0.151	-0.209	-0.254	-0.340	-0.359
9	-0.050	0.098	0.028	-0.061	-0.136	-0.193	-0.237	-0.321	-0.340

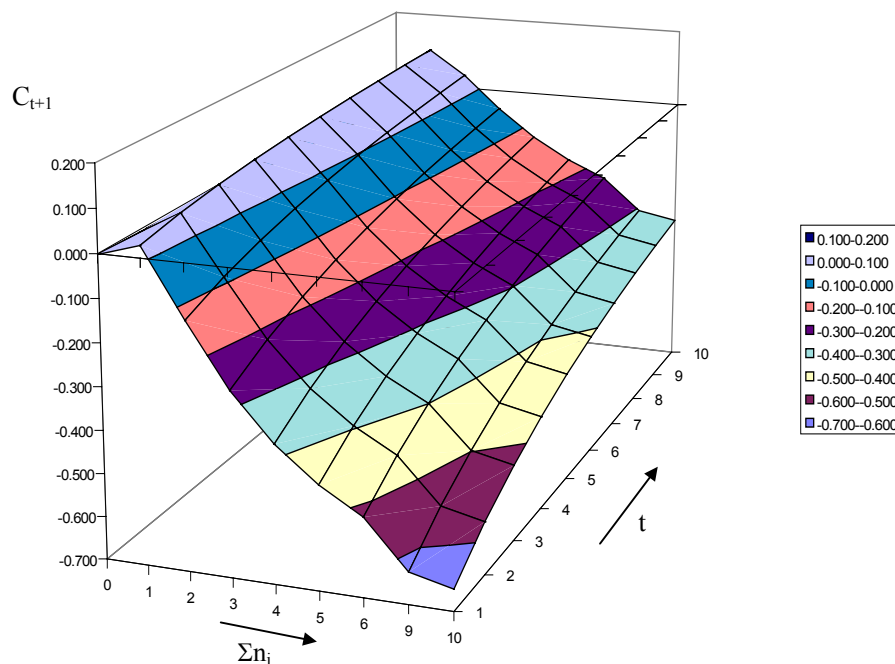
10	-0.056	0.100	0.036	-0.051	-0.123	-0.179	-0.222	-0.305	-0.323
----	--------	-------	-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

C1 = Coefficient obtenu avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma.

C2 = Coefficient obtenu avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Inverse Gaussienne.

Différence relative =  $(C1 - C2) / C1$

**Graphique 3 :** Différences relatives entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne en fonction de  $t$  et de  $\sum n_i$  (tableau 3).



A propos des **tableaux 1 et 2**, on remarque que :

- pour une durée d'observation donnée ( $t$  fixé), les coefficients augmentent avec le nombre de sinistres ( $\sum n_i$ ). Cette situation est évidente : plus un assuré a eu de sinistres au cours de la durée d'observation considérée, plus sa probabilité d'en avoir d'autres est importante et par conséquent plus sa prime est élevée ;
- pour un nombre de sinistres donné ( $\sum n_i$  fixé), les coefficients diminuent quand la durée d'observation  $t$  augmente. Cette situation est tout aussi évidente que la précédente.

Quant au **tableau 3**, on remarque que pour un nombre de sinistres ( $\sum n_i$ ) faible, les différences relatives entre les coefficients obtenus à partir de chacune des lois sont très faibles. Lorsque le nombre de sinistres augmente ces différences s'accroissent. D'autre part, pour un nombre de sinistres fixé, les différences relatives augmentent quand la durée

d'observation diminue. En fait, la différence relative augmente avec le nombre de sinistres par unité de temps ( $\sum n_i / t$ ).

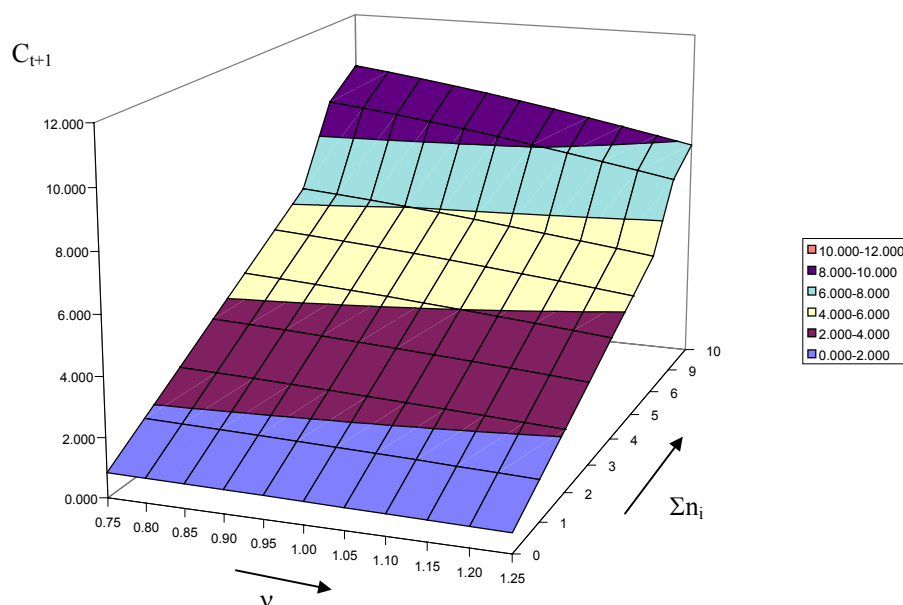
Les tableaux 4 et 5 ci-dessous contiennent les coefficients  $C_{t+1}$  en fonction de  $v$  et de  $\sum n_i$ , pour une durée d'observation,  $t$ , égale à 5 et une variable de structure dont la moyenne est 0,05682717 et la variance 0,00352839.

**Tableau 4 :** Coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma.

$v \setminus \sum n_i$	0	1	2	3	4	5	6	9	10
0.75	0.841	1.759	2.678	3.597	4.515	5.434	6.352	9.108	10.027
0.80	0.827	1.731	2.635	3.539	4.443	5.347	6.251	8.963	9.867
0.85	0.813	1.701	2.589	3.477	4.365	5.253	6.141	8.806	9.694
0.90	0.797	1.668	2.540	3.411	4.282	5.153	6.024	8.637	9.508
0.95	0.781	1.634	2.487	3.340	4.193	5.046	5.899	8.458	9.311
1.00	0.763	1.597	2.431	3.264	4.098	4.932	5.766	8.267	9.101
1.05	0.745	1.558	2.372	3.185	3.999	4.812	5.626	8.066	8.880
1.10	0.725	1.517	2.310	3.102	3.894	4.687	5.479	7.856	8.648
1.15	0.705	1.475	2.245	3.015	3.786	4.556	5.326	7.637	8.407
1.20	0.684	1.431	2.179	2.926	3.673	4.421	5.168	7.410	8.157
1.25	0.662	1.386	2.110	2.834	3.558	4.281	5.005	7.177	7.900

**Graphique 4 :**  $C_{t+1}$  en fonction de  $v$  et de  $\sum n_i$  pour une modélisation de la fréquence de sinistres par un loi Poisson-Gamma (tableau 4).

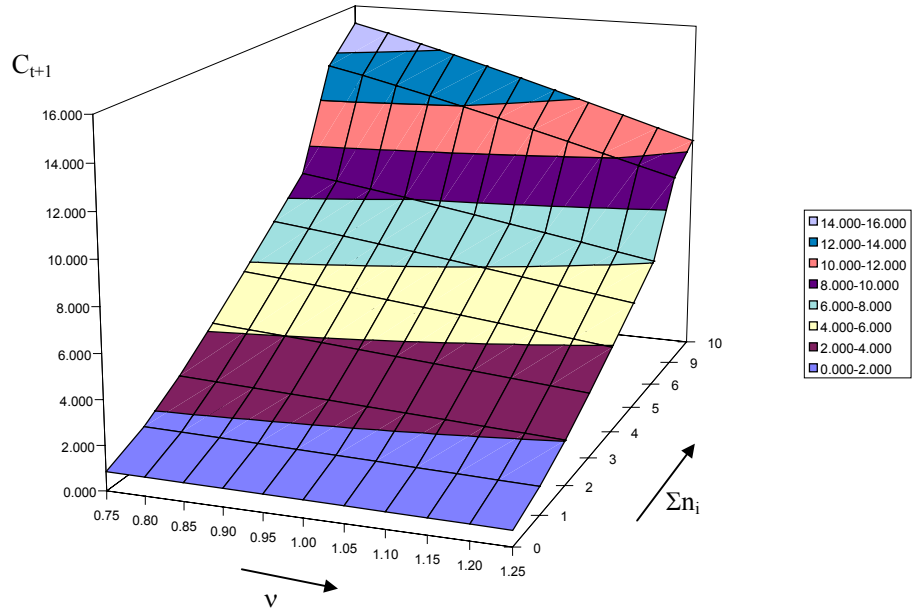




**Tableau 5 :** Coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Inverse Gaussienne.

$v \setminus \Sigma n_i$	0	1	2	3	4	5	6	9	10
0.75	0.852	1.644	2.818	4.219	5.719	7.258	8.816	13.532	15.109
0.80	0.840	1.611	2.750	4.111	5.567	7.064	8.579	13.165	14.699
0.85	0.827	1.576	2.679	3.996	5.408	6.859	8.329	12.778	14.267
0.90	0.814	1.538	2.604	3.876	5.241	6.645	8.067	12.374	13.815
0.95	0.800	1.500	2.526	3.751	5.068	6.422	7.795	11.953	13.345
1.00	0.785	1.460	2.445	3.623	4.889	6.193	7.514	11.520	12.861
1.05	0.770	1.418	2.362	3.491	4.706	5.958	7.227	11.076	12.365
1.10	0.754	1.376	2.278	3.357	4.520	5.719	6.936	10.625	11.861
1.15	0.738	1.332	2.193	3.222	4.332	5.478	6.641	10.170	11.353
1.20	0.721	1.289	2.107	3.086	4.143	5.236	6.346	9.714	10.843
1.25	0.704	1.245	2.021	2.951	3.956	4.995	6.052	9.260	10.335

**Graphique 5 :**  $C_{t+1}$  en fonction de  $v$  et de  $\Sigma n_i$  pour une modélisation de la fréquence de sinistres par un loi Poisson-Inverse Gaussienne (tableau 5).



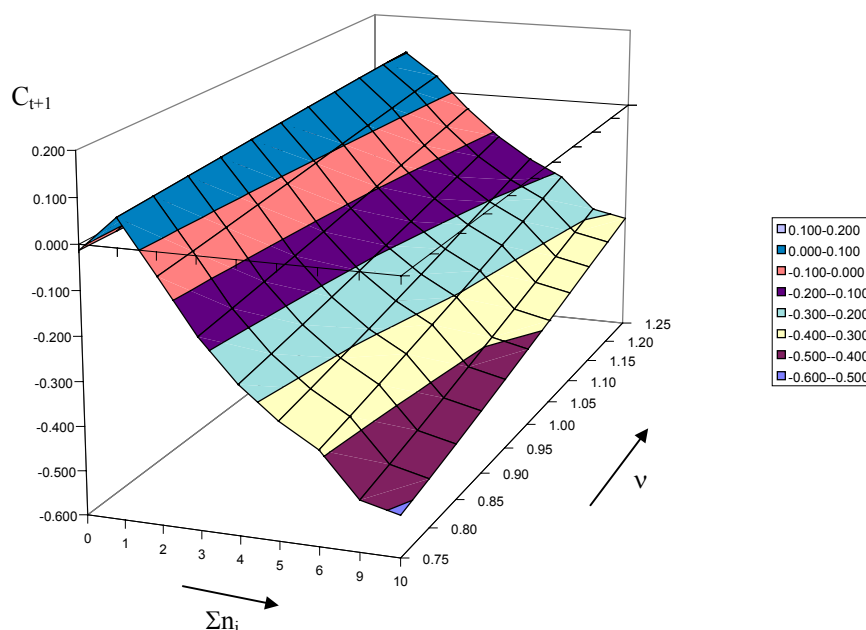
Comme lors de la première analyse des coefficients de réduction-majoration en fonction de  $t$  et de  $\Sigma n_i$ , on peut remarquer une grande similarité entre les coefficients obtenus par chacune des deux modélisations proposées. Cependant, il existe des différences que le tableau 6 et le graphique 6 permettent de mieux cerner.

Le tableau 6 ci-dessous contient les différences relatives observées entre les tableaux 4 et 5.

**Tableau 6 : Différences relatives** entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne

$v \setminus \Sigma n_i$	0	1	2	3	4	5	6	9	10
0.75	0.841	1.759	2.678	3.597	4.515	5.434	6.352	9.108	10.027
0.80	0.827	1.731	2.635	3.539	4.443	5.347	6.251	8.963	9.867
0.85	0.813	1.701	2.589	3.477	4.365	5.253	6.141	8.806	9.694
0.90	0.797	1.668	2.540	3.411	4.282	5.153	6.024	8.637	9.508
0.95	0.781	1.634	2.487	3.340	4.193	5.046	5.899	8.458	9.311
1.00	0.763	1.597	2.431	3.264	4.098	4.932	5.766	8.267	9.101
1.05	0.745	1.558	2.372	3.185	3.999	4.812	5.626	8.066	8.880
1.10	0.725	1.517	2.310	3.102	3.894	4.687	5.479	7.856	8.648
1.15	0.705	1.475	2.245	3.015	3.786	4.556	5.326	7.637	8.407
1.20	0.684	1.431	2.179	2.926	3.673	4.421	5.168	7.410	8.157
1.25	0.662	1.386	2.110	2.834	3.558	4.281	5.005	7.177	7.900

**Graphique 6 :** Différences relatives entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne en fonction de  $v$  et de  $\Sigma n_i$  (tableau 6).



A propos des **tableaux 4 et 5**, on remarque que :

- comme nous l'avons déjà constaté auparavant, les coefficients augmentent avec le nombre de sinistres (pour une valeur de  $v$  fixée).
- pour un nombre de sinistres fixé, les coefficients augmentent quand le taux de variation,  $v$ , diminue. En effet, un taux de variation faible ( $<1$ ) signifie une diminution de la fréquence moyenne de sinistres au cours du temps. Ainsi pour un nombre de sinistres donné, le malus augmente quand  $v$  diminue car la tendance de l'ensemble des assurés est d'avoir moins de sinistres. De la même façon, le bonus des assurés non sinistrés diminue (c'est à dire : le coefficient de réduction-majoration des assurés non sinistrés augmente). De même, un taux de variation élevé ( $>1$ ) signifie une augmentation de la fréquence moyenne de sinistres. Ainsi, pour un nombre fixé de sinistres, le malus diminue quand  $v$  augmente puisque la tendance de l'ensemble des assurés est d'avoir plus de sinistres. De la même façon, le bonus des assurés non sinistrés augmente.

Quant au **tableau 6**, on remarque, comme pour le tableau 3, que pour un nombre de sinistres faible, les différences relatives entre les coefficients obtenus à partir de chacune des lois sont très faibles (pour une valeur de  $v$  fixée). D'autre part pour un nombre de sinistres fixé, lorsque le taux de variation diminue, la différence relative augmente.

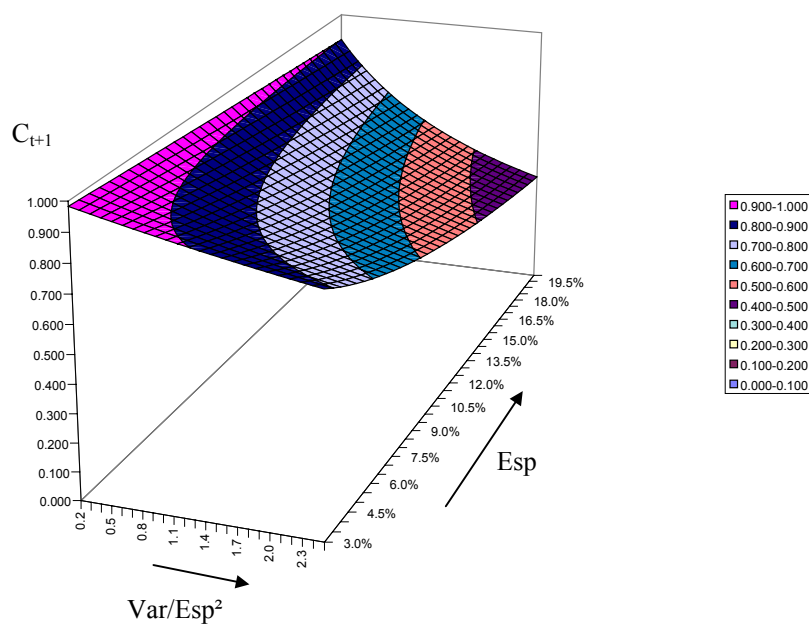
**Notations** : Esp et Var sont, respectivement, l'espérance et la variance de la variable de structure de la loi Poisson-mélange qui modélise la fréquence de sinistres.

Les tableaux 7 et 8 ci-dessous contiennent les coefficients  $C_{t+1}$  en fonction de Esp et de  $(\text{Var}/\text{Esp}^2)$ , pour  $v$  égal à 0,93914,  $t$  égal à 5 et  $\Sigma_i$  égal à 0.

**Tableau 7 :**  
Coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une **loi Poisson-Gamma**. (Coefficients de BONUS)

Var/Esp <sup>2</sup> → Esp ↓	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.0
2%	0.989	0.973	0.957	0.942	0.927	0.912	0.899
4%	0.978	0.947	0.917	0.890	0.864	0.839	0.816
6%	0.967	0.922	0.881	0.843	0.808	0.777	0.747
8%	0.957	0.899	0.847	0.801	0.760	0.723	0.689
10%	0.947	0.876	0.816	0.763	0.717	0.676	0.639
12%	0.937	0.855	0.787	0.729	0.678	0.635	0.596
14%	0.927	0.835	0.760	0.697	0.644	0.598	0.559
16%	0.917	0.816	0.735	0.668	0.613	0.566	0.526
18%	0.908	0.798	0.711	0.642	0.584	0.537	0.496
20%	0.899	0.780	0.689	0.617	0.559	0.510	0.470

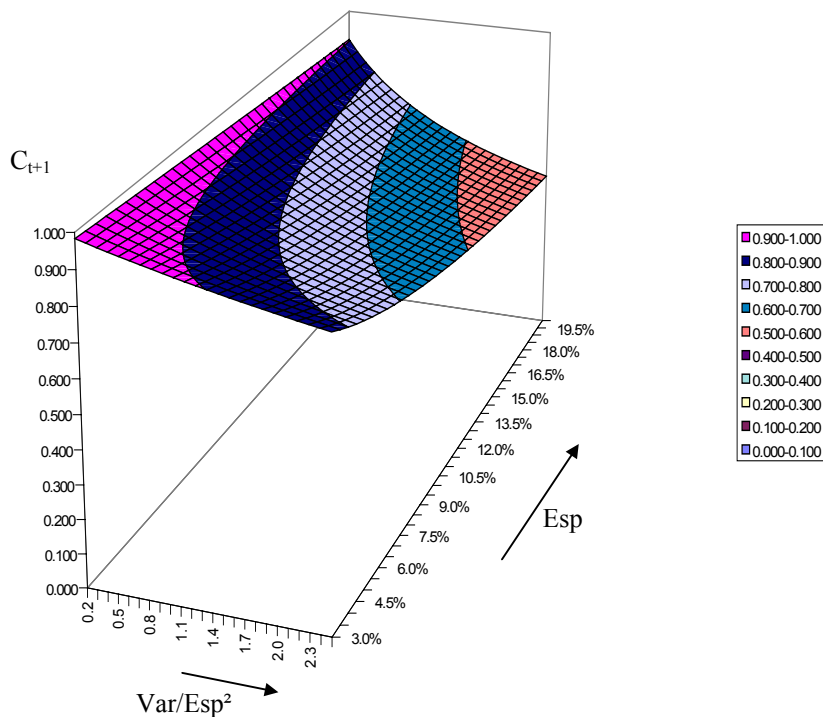
**Graphique 7 :**  $C_{t+1}$  en fonction de Esp et de  $\text{Var}/\text{Esp}^2_i$  pour une modélisation de la fréquence de sinistres par un loi Poisson-Gamma (tableau 7).  
(Coefficients de Bonus)



**Tableau 8 :**  
Coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une **loi Poisson-Inverse Gaussienne**.  
(Coefficients de Bonus)

$Var/Esp^2 \rightarrow$ $Esp \downarrow$	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.0
2%	0.989	0.973	0.958	0.943	0.929	0.916	0.903
4%	0.978	0.948	0.920	0.895	0.872	0.850	0.830
6%	0.968	0.925	0.887	0.854	0.824	0.797	0.772
8%	0.958	0.903	0.857	0.817	0.783	0.752	0.725
10%	0.948	0.883	0.830	0.786	0.747	0.714	0.685
12%	0.938	0.864	0.805	0.757	0.717	0.682	0.652
14%	0.929	0.847	0.783	0.731	0.689	0.653	0.623
16%	0.920	0.830	0.762	0.708	0.665	0.628	0.597
18%	0.912	0.814	0.743	0.687	0.643	0.606	0.574
20%	0.903	0.800	0.725	0.668	0.623	0.585	0.554

**Graphique 8 :**  $C_{t+1}$  en fonction de  $Esp$  et de  $Var/Esp^2_i$  pour une modélisation de la fréquence de sinistres par un loi Poisson-Inverse Gaussienne (tableau 8).  
(Coefficients de Bonus)



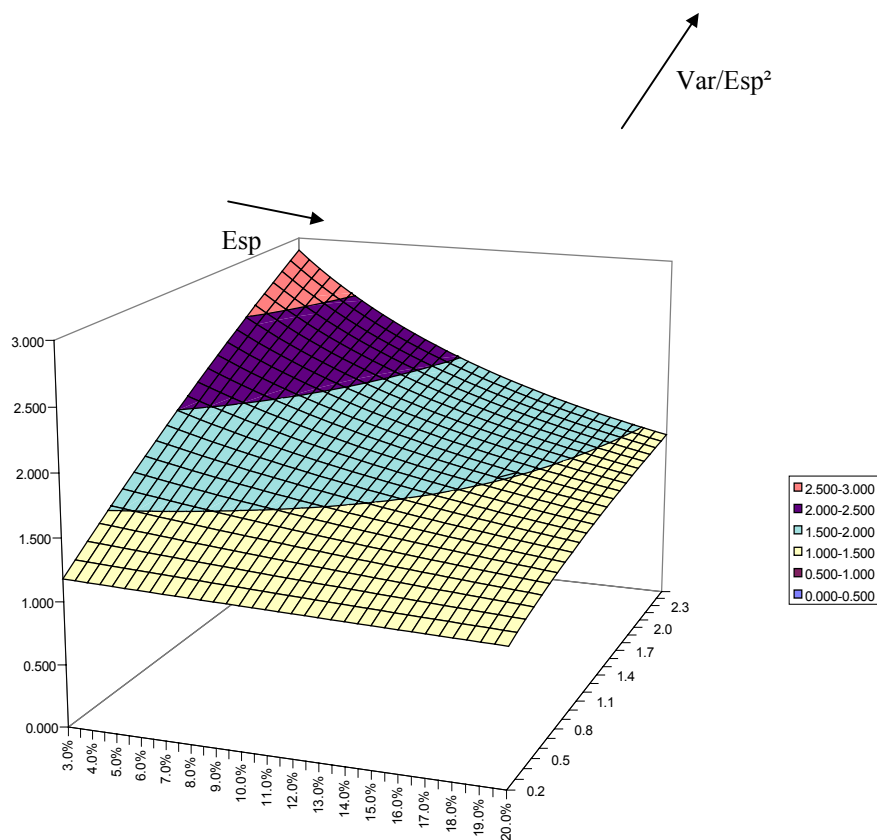
Une nouvelle fois on peut remarquer une grande similarité entre les coefficients obtenus par chacune des deux modélisations proposées. Cependant il existe des différences que le tableau 10 et le graphique 10 permettent de mieux cerner.

**Tableau 9 :** Coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma. (Coefficients de Malus)

Var/Esp <sup>2</sup> → Esp ↓	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.0
2%	1.187	1.459	1.722	1.977	2.224	2.464	2.696
4%	1.174	1.420	1.651	1.868	2.073	2.265	2.448
6%	1.161	1.383	1.585	1.770	1.940	2.097	2.241
8%	1.148	1.348	1.525	1.682	1.824	1.951	2.067
10%	1.136	1.315	1.469	1.603	1.720	1.825	1.918
12%	1.124	1.283	1.416	1.530	1.628	1.714	1.789
14%	1.112	1.253	1.368	1.464	1.545	1.615	1.676
16%	1.101	1.224	1.322	1.403	1.471	1.528	1.577
18%	1.089	1.196	1.280	1.347	1.403	1.449	1.488
20%	1.078	1.170	1.240	1.296	1.341	1.378	1.409

**Graphique 9 :** C<sub>t+1</sub> en fonction de Esp et de Var/Esp<sup>2</sup><sub>i</sub> pour une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma (tableau 9). (Coefficients de Malus)

$C_{t+1}$



Les **tableaux 7 et 8** concernent les coefficients à appliquer aux assurés non sinistrés et qui bénéficient donc d'un bonus. On remarque que :

- les coefficients de réduction-majoration diminuent (c'est-à-dire que le bonus augmente) lorsque la fréquence moyenne de sinistres augmente (pour  $\text{Var}/\text{Esp}^2$  fixé). Cela signifie, tout à fait logiquement, que, dans une classe d'assurés dont la fréquence moyenne de sinistres est importante, l'assuré non sinistré bénéficie d'une diminution de prime plus importante que s'il fait partie d'une classe d'assurés dont la fréquence moyenne de sinistres est plus faible.
- le rapport  $\text{Var}/\text{Esp}^2$  mesure l'hétérogénéité résiduelle de la classe d'assurés considérée. Les coefficients de réduction-majoration diminuent quand l'hétérogénéité augmente (pour une fréquence moyenne de sinistres donnée). Cela signifie que plus la classe est hétérogène plus les assurés non sinistrés auront une diminution de prime importante (bonus). Ce phénomène s'accroît lorsque, en plus d'être hétérogène, la classe d'assurés a une fréquence moyenne de sinistres importante.

Le **tableau 9** concerne les coefficients à appliquer aux assurés ayant eu un sinistre et qui ont donc un malus. Il est construit avec les coefficients obtenus en utilisant la loi Poisson-Gamma pour la modélisation. Si on remplaçait cette dernière par la loi Poisson-Inverse Gaussienne ou encore si on considérait des assurés ayant eu plusieurs sinistres, l'analyse qui suit serait la même. On remarque que :

- les coefficients de réduction-majoration diminuent (c'est-à-dire que le malus diminue) lorsque la fréquence moyenne de sinistres augmente (pour  $\text{Var}/\text{Esp}^2$  fixé). Cela signifie que dans une classe d'assurés dont la fréquence moyenne de sinistres est élevée, l'assuré, qui a eu un sinistre, a une augmentation de prime moins importante que s'il fait partie d'une classe d'assurés dont la fréquence moyenne de sinistres est plus faible.
- d'autre part, à l'inverse des coefficients de bonus, les coefficients de malus augmentent avec l'hétérogénéité (pour une fréquence moyenne de sinistres donnée). Ce phénomène s'accroît lorsque la fréquence moyenne de sinistres est faible.

Le tableau 10 ci-dessous contient les différences observées entre les tableaux 7 et 8.

C1 = Coefficient obtenu avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma (Tableau 7).

C2 = Coefficient obtenu avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Inverse Gaussienne (Tableau 8).

Différence = C1 - C2

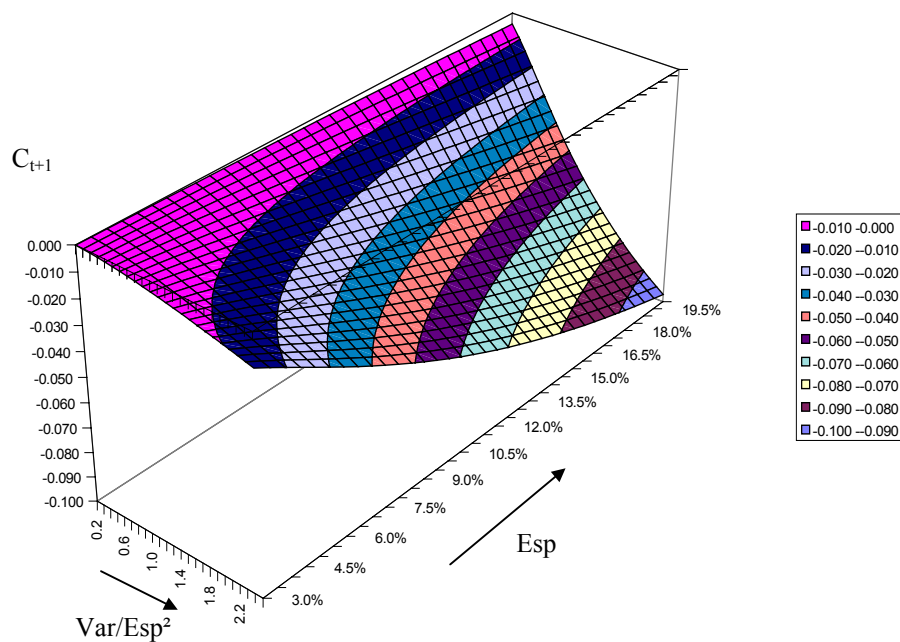
#### **Tableau 10 :**

**Différences** entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne.  
(Coefficients de Bonus uniquement ( $\sum n_i = 0$ )).



Var/Esp <sup>2</sup> → Esp ↓	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.0
2%	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.002	-0.004	-0.005
4%	0.000	-0.001	-0.003	-0.005	-0.008	-0.011	-0.014
6%	-0.001	-0.003	-0.006	-0.011	-0.015	-0.020	-0.025
8%	-0.001	-0.005	-0.010	-0.016	-0.023	-0.029	-0.036
10%	-0.001	-0.007	-0.014	-0.022	-0.031	-0.039	-0.046
12%	-0.002	-0.009	-0.019	-0.028	-0.038	-0.047	-0.055
14%	-0.002	-0.012	-0.023	-0.034	-0.045	-0.055	-0.064
16%	-0.003	-0.014	-0.027	-0.040	-0.052	-0.062	-0.071
18%	-0.004	-0.017	-0.032	-0.046	-0.058	-0.069	-0.078
20%	-0.005	-0.020	-0.036	-0.051	-0.064	-0.075	-0.084

**Graphique 10 :** Différences entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne en fonction de Esp et de Var/Esp<sup>2</sup> (tableau 10).

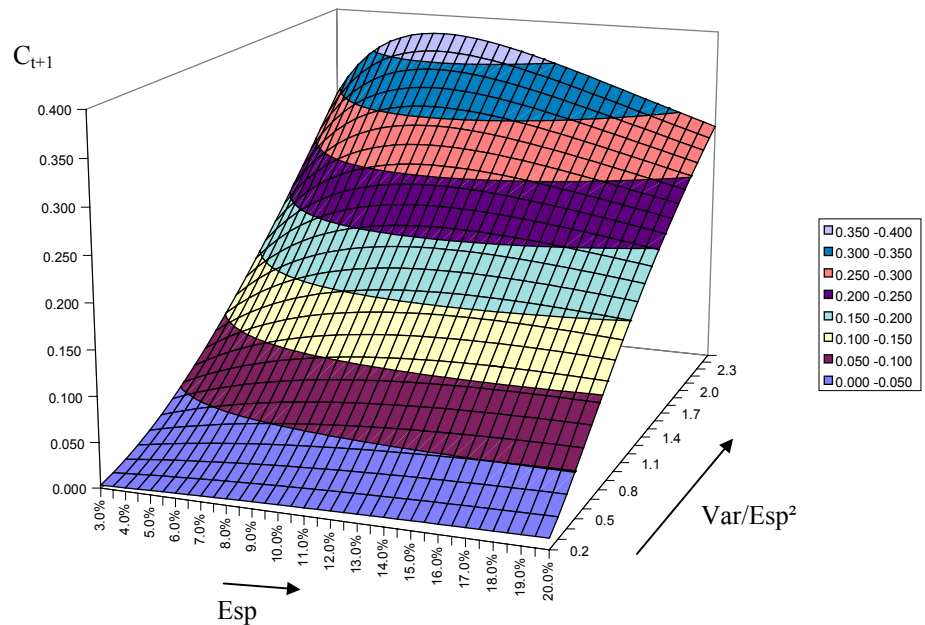


Le tableau 11 ci-dessous contient les différences observées entre les tableaux 9 et le même tableau obtenu avec une modélisation par une loi Poisson-Inverse Gaussienne.

**Tableau 11 : Différences** entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne. (Coefficients de Malus uniquement ( $\Sigma n_i=1$ )).

Var/Esp <sup>2</sup> → Esp ↓	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.0
2%	0.002	0.013	0.031	0.056	0.086	0.121	0.161
4%	0.004	0.023	0.053	0.092	0.137	0.187	0.240
6%	0.006	0.031	0.069	0.115	0.167	0.221	0.277
8%	0.007	0.037	0.080	0.130	0.183	0.237	0.291
10%	0.008	0.041	0.087	0.138	0.191	0.243	0.293
12%	0.009	0.045	0.092	0.143	0.193	0.242	0.288
14%	0.010	0.048	0.095	0.144	0.192	0.236	0.278
16%	0.011	0.049	0.096	0.143	0.188	0.229	0.267
18%	0.011	0.050	0.096	0.141	0.182	0.220	0.254
20%	0.012	0.051	0.095	0.137	0.176	0.210	0.241

**Graphique 11 :** Différences entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne en fonction de Esp et de Var/Esp<sup>2</sup> (tableau 11).

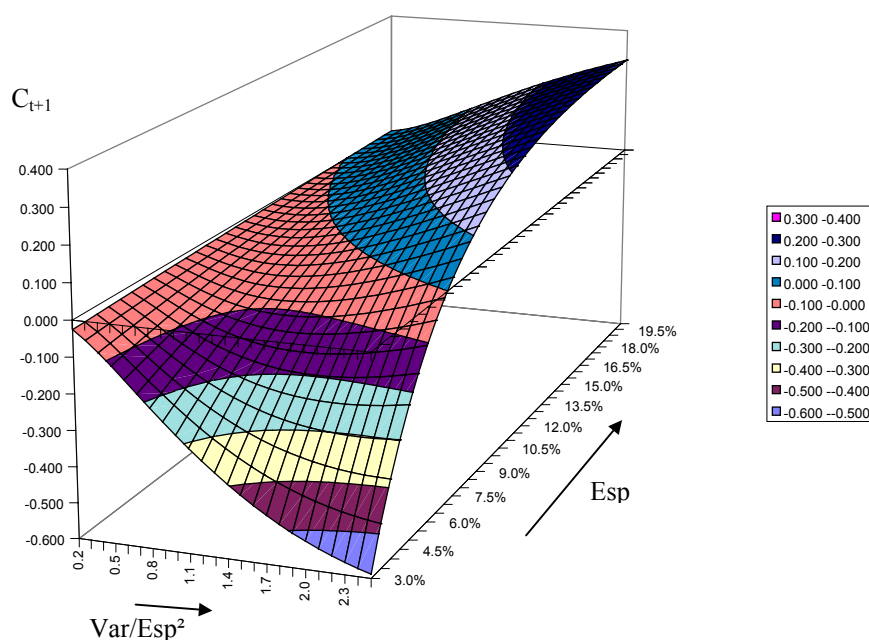


Le tableau 12 ci-dessous contient les différences observées entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne. Ces différences sont exprimées en fonction de Esp et de Var/Esp<sup>2</sup>, pour un nombre de sinistre,  $\Sigma n_i=2$ .

**Tableau 12 : Différences** entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne. (Coefficients de Malus uniquement ( $\Sigma n_i=2$ )).

Var/Esp <sup>2</sup> → Esp ↓	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.0
2%	-0.028	-0.129	-0.256	-0.386	-0.509	-0.622	-0.724
4%	-0.023	-0.098	-0.178	-0.248	-0.303	-0.342	-0.367
6%	-0.019	-0.071	-0.117	-0.147	-0.160	-0.159	-0.146
8%	-0.015	-0.049	-0.069	-0.072	-0.060	-0.036	-0.004
10%	-0.011	-0.030	-0.031	-0.015	0.012	0.048	0.088
12%	-0.007	-0.014	-0.001	0.027	0.064	0.106	0.150
14%	-0.004	0.000	0.024	0.060	0.102	0.146	0.190
16%	-0.001	0.012	0.043	0.084	0.129	0.174	0.217
18%	0.001	0.021	0.059	0.103	0.149	0.193	0.234
20%	0.003	0.030	0.071	0.117	0.162	0.205	0.244

**Graphique 12 :** Différences entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne en fonction de Esp et de Var/Esp<sup>2</sup> (tableau 12).

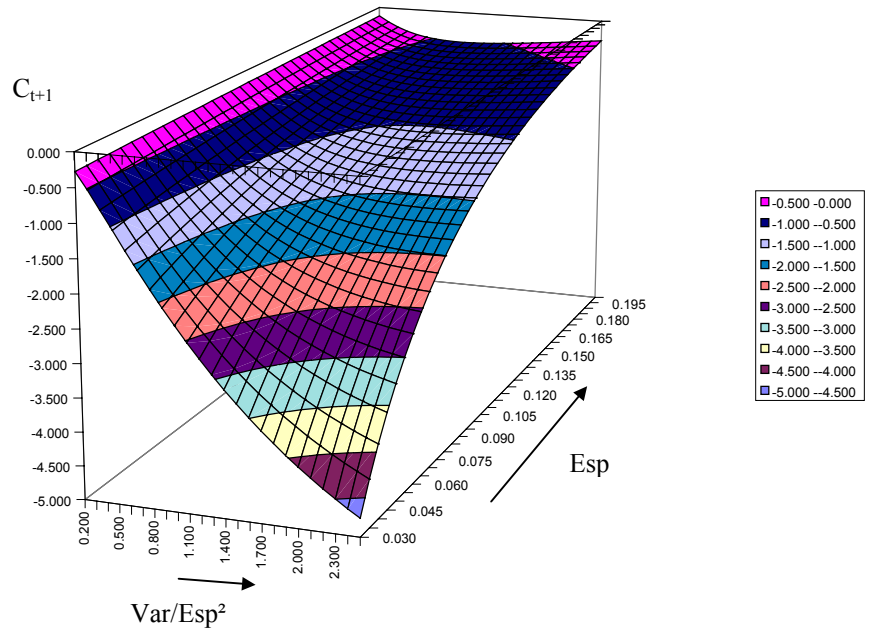


Le tableau 13 ci-dessous contient les différences observées entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne. Ces différences sont exprimées en fonction de  $\text{Esp}$  et de  $\text{Var}/\text{Esp}^2$ , pour un nombre de sinistre,  $\Sigma n_i=5$ .

**Tableau 13 : Différences** entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne. (Coefficients de Malus uniquement ( $\Sigma n_i=5$ )).

Var/Esp <sup>2</sup> → Esp ↓	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.0
2%	-0.283	-1.115	-1.991	-2.813	-3.567	-4.252	-4.872
4%	-0.264	-0.989	-1.683	-2.275	-2.766	-3.170	-3.498
6%	-0.247	-0.879	-1.432	-1.860	-2.181	-2.417	-2.586
8%	-0.231	-0.783	-1.224	-1.534	-1.742	-1.874	-1.951
10%	-0.215	-0.698	-1.050	-1.273	-1.404	-1.471	-1.495
12%	-0.201	-0.623	-0.904	-1.063	-1.140	-1.165	-1.157
14%	-0.187	-0.556	-0.780	-0.891	-0.931	-0.929	-0.902
16%	-0.175	-0.497	-0.674	-0.748	-0.763	-0.743	-0.705
18%	-0.163	-0.444	-0.584	-0.630	-0.626	-0.595	-0.551
20%	-0.152	-0.397	-0.505	-0.530	-0.513	-0.476	-0.429

**Graphique 13 :** Différences entre les coefficients obtenus avec une modélisation de la fréquence de sinistres par une loi Poisson-Gamma et une loi Poisson-Inverse Gaussienne en fonction de Esp et de Var/Esp<sup>2</sup> (tableau 13).



Le **tableau 10** concerne les coefficients à appliquer aux assurés non sinistrés et qui bénéficient donc d'un bonus. On remarque que :

- toutes les différences sont négatives, ce qui signifie que les coefficients obtenus en utilisant la loi Poisson-Gamma sont inférieurs à ceux obtenus à partir de la loi Poisson-Inverse Gaussienne. Un assuré non sinistré aura donc un bonus plus avantageux si la loi de fréquence de sinistres est modélisée à partir d'une loi Poisson-Gamma.
- d'autre part, les différences entre les deux modélisations augmentent avec l'hétérogénéité résiduelle de la classe considérée (la fréquence moyenne de sinistres étant fixée). Ce phénomène est d'autant plus important que la fréquence moyenne de sinistres est grande.

Le **tableau 11** concerne les coefficients à appliquer aux assurés ayant eu un sinistre et qui ont donc un malus. On remarque que :

- à l'inverse de la situation où l'assuré n'est pas sinistré, toutes les différences sont positives. En effet si la loi Poisson-Gamma permet d'accorder un bonus plus intéressant aux assurés non sinistrés que la loi Poisson-Inverse Gaussienne, elle est en revanche plus sévère en ce qui concerne les malus.
- d'autre part, comme pour le tableau 10, les différences entre les deux modélisations augmentent avec l'hétérogénéité résiduelle de la classe d'assurés.

Le **tableau 12** concerne les coefficients à appliquer aux assurés ayant eu 2 sinistres. On remarque que :

- cette fois les différences sont positives ou négatives. Lorsque la fréquence moyenne de sinistres est importante, c'est la loi Poisson-Gamma qui donne les coefficients de malus les plus désavantageux, alors que pour une fréquence moyenne de sinistres faible, c'est la loi Poisson-Inverse Gaussienne qui est la plus sévère.
- d'autre part, les différences augmentent, cette fois encore, avec l'hétérogénéité résiduelle de la classe d'assurés.

Le **tableau 13** concerne toujours les coefficients à appliquer en cas de malus, pour un nombre de sinistres plus important ( $\sum n_i = 5$ ). On remarque que :

- les coefficients obtenus à partir de la loi Poisson-Inverse Gaussienne sont plus importants que ceux obtenus à partir de la loi Poisson-Gamma. La loi Poisson-Inverse Gaussienne est une modélisation qui pénalise plus les assurés ayant un nombre important de sinistres. Cette remarque va dans le même sens que ce qui avait été observé dans le cas précédent.
- on constate toujours l'augmentation des différences lorsque l'hétérogénéité croît.

## Conclusion

L'étape suivante, dans la mise en place de ce système Bonus-Malus, est l'application à des données. En effet, il va falloir calculer les estimateurs des lois

multivariées afin de pouvoir, ensuite, procéder à l'adéquation des lois utilisées aux données.

D'autre part, il serait certainement intéressant d'utiliser des lois à plus de deux paramètres pour la variable de structure du risque : par exemple, la loi Inverse Gaussienne Généralisée.

#### REFERENCES

BESSION J.L. et PARTRAT C., *Trend et système de Bonus-Malus*, 1992, ASTIN Bulletin, Vol. 22, N 1

BIENAIME P. et RICHARD N., *Fréquence de sinistres et Bonus-Malus*, 1998, Mémoire d'actuariat, Institut des Sciences Financière et d'Assurances

KOCHERLAKOTA S. et KOCHERLAKOTA K., *Bivariate discrete distributions*, 1992, Marcel Dekker

PARTRAT C., *Risque et Statistique*, 1992, Bulletin de l'I.A.F. N° spécial centenaire 1ère partie Sept-Déc 92 n 356 et 357

Philippe BIENAIME

Nathalie RICHARD

G.P.A.

Service Actuariat

Direction fonctionnelle IRD

18, place des Cinq Martyrs du Lycée Buffon

75695 Paris Cedex 14

Tél : (0)-1-40-47-11-93 (Nathalie RICHARD)

(0)-1-40-47-11-79 (Philippe BIENAIME)

Fax : (0)-1-42-18-51-05

Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière, I.S.F.A

Université Claude Bernard Lyon 1

43, boulevard du 11 Novembre 1918

69622 Villeurbanne Cedex.