Gestion du niveau de la franchise d'un contrat avec bonus-malus

Pierre-E. Thérond [*†‡]   Stéphane Bonche[§]

Résumé

Réduire la franchise d'un contrat d'assurance permet d'améliorer la qualité du contrat du point de vue de l'assuré. Pour l'assureur, une telle décision va avoir des effets mécaniques : il va payer davantage pour les sinistres pour lesquels il payait déjà et va se voir déclarer les sinistres dont les montants sont compris entre la nouvelle et l'ancienne franchise. Or l'assureur ne dispose pas d'information concernant le nombre de ces sinistres ; pour réviser son tarif, il va devoir faire des hypothèses sur la forme de la distribution du coût des sinistres supérieurs à la nouvelle franchise. Dans le modèle collectif, ce travail est facilité par la propriété d'indépendance entre les coûts et le nombre de sinistres que l'on conserve quel que soit le niveau de la franchise.

Par ailleurs, lorsque le contrat est tarifé grâce à un système bonus-malus, le phénomène connu sous le nom de *soif de bonus* a pour conséquence de tronquer partiellement l'information concernant les sinistres dépassant la franchise. En effet les assurés vont conserver à leur charge les sinistres de faible coût de manière à ne pas voir augmenter leurs primes futures. Après avoir analysé ce phénomène, nous proposons un modèle dans le but d'estimer les caractéristiques des sinistres qui n'ont pas été déclarés.

Mots-clefs : franchise déductible, modèle collectif, bonus-malus, soif de bonus, *véritable franchise*.

Keywords : deductible, collective model, bonus-malus, hunger for bonus, *true deductible*.

JEL Classification : C51, G22.

[*]Actuaire conseil chez WINTER & Associés, doctorant et chargé de cours à l'ISFA. Contact : +33 (0) 4 37 37 80 90, ptherond@winter-associes.fr.

[†]Cabinet WINTER & Associés - 18, avenue Félix Faure F-69007 Lyon et 43-47, avenue de la Grande Armée F-75116 Paris.

[‡]ISFA, Université Lyon 1 - 50, avenue Tony Garnier F-69007 Lyon.

[§]Actuaire. Contact : stbonche@yahoo.fr.

1 Introduction

Dans un contexte de forte concurrence où les prix sont serrés, certains assureurs peuvent être été tentés de diminuer le niveau de leur franchise plutôt que de diminuer leurs primes. La diminuation de la franchise est, en effet, un moyen d'améliorer la qualité du contrat du point de vue de l'assuré tout en conservant un volant financier important à placer sur les marchés financiers.

Il s'agit néanmoins de bien peser les conséquences d'une telle politique. Au-delà des aspects sociaux d'une telle mesure - l'amélioration du contrat ne profite qu'aux *mauvais conducteurs*, *i. e.* ceux qui ont des sinistres - la mise en œuvre technique d'une telle mesure n'est pas aisée. En effet, de manière mécanique l'assureur va se retrouver à payer davantage pour les sinistres qu'il réglait déjà et va voir apparaître de nouveaux sinistres dont les montants sont compris entre la nouvelle et l'ancienne franchise. Or l'assureur ne dispose pas d'information au sujet de ces sinistres ; en particulier, il n'en connaît ni le coût (qui est toutefois majoré par le niveau de l'actuelle franchise), ni surtout le nombre.

A ce phénomène mécanique s'ajoute un phénomène économique connu sous le nom de soif de bonus (*hunger for bonus*) qui a notamment été étudié dans Lemaire (1977). Cette soif de bonus conduit les assurés à ne pas déclarer certains sinistres supérieurs à la franchise de manière à éviter un malus sur les primes futures. C'est ce comportement qui a conduit Holtan (2000) à distinguer la *véritable franchise* (le montant à partir duquel un sinistre est déclaré) de la franchise contractuelle. Ce comportement conduit à une tronquature partielle des données de sinistres supérieurs à la franchise contractuelle. En particulier en France, les contrats auto étant obligatoirement assortis d'un système bonus-malus indépendant des montants de sinistres, certains sinistres supérieurs à l'ancienne franchise, que les assurés ne déclaraient pas en vue d'éviter un malus, vont à présent l'être. L'assureur n'ayant pas eu connaissance de ces sinistres, leur intégration dans le calcul de la prime va devoir reposer sur des estimations réalisées en faisant des hypothèses sur le comportement des assurés vis-à-vis de la déclaration ou non des sinistres.

Ces différents phénomènes vont être étudiés successivement. Dans un premier temps, nous nous placerons dans le cadre idéal où l'assureur dispose de toutes les informations relatives aux sinistres dont le montant dépasse le niveau de la franchise et étudierons quelles sont les méthodes à sa disposition pour estimer la charge des sinistres dont le montant est inférieur à la franchise.

Ensuite, nous verrons de quelle manière la soif de bonus altère l'information dont dispose l'assureur vis-à-vis des sinistres dépassant la franchise contractuelle et de quelle manière celui-ci peut utiliser les caractéristiques du système bonus-malus pour améliorer sa connaissance des sinistres non déclarés. En particulier, la modélisation en chaîne de Markov des systèmes bonus-malus à classes (cf. Lemaire (1995) et Kelle (2000)) permet une formalisation générale de ce comportement. Ce problème a déjà été abordé par Wahlin et Paris (2000) dans le cas d'un contrat sans franchise sous l'hypothèse que les assurés connaissent leur propre fréquence moyenne de sinistres et qu'ils déclarent les sinistres supérieurs au niveau de rétention optimal déterminé selon l'algorithme proposé par Lemaire (1977). Nous proposons ici une approche sensiblement différente. En effet, l'assuré ne connaît pas sa propre fréquence moyenne de sinistres. Pour décider s'il déclare ou non un sinistre, il en fait donc implicitement une estimation. Ainsi deux assurés de même qualité de risque peuvent prendre des décisions de déclaration différentes. Nous proposons de modéliser cette anticipation de manière à détordre l'information disponible. Le raisonnement effectué dans un premier temps sur un assuré particulier est ensuite étendu au collectif de risques.

Cet article est un prolongement des travaux réalisés par Bonche et al. (2005).

2 Réduction de franchise en l'absence de système bonus-malus

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre d'un contrat ne faisant pas l'objet d'une personalisation *a posteriori* du tarif fondée sur la sinistralité individuelle des assurés : la prime que paie l'assuré est identique à celle des assurés appartenant à la même classe de risque ; elle n'est pas révisée en fonction de sa sinistralité individuelle.

Dans ce cadre, nous supposerons que tous les sinistres dont le montant est supérieur à la franchise sont déclarés, puisqu'il n'est pas rationnel de ne pas déclarer de tels sinistres (cela n'engendre pas d'augmentation de la prime future).

Après avoir rappelé les caractéristiques du modèle collectif en l'absence de franchise, nous étudions l'impact de la mise en place d'une franchise déductible sur la loi de la charge des sinistres nets de franchise puis les conséquences d'une diminution de la franchise sur le niveau de la prime pure.

2.1 Notations et hypothèses

Dans la suite, nous noterons $X_1, X_2, ...$ les montants de sinistres survenus et N la variable aléatoire modélisant le nombre total de sinistres touchant le portefeuille de l'assureur (que ceux-ci soient ou non déclarés).

En l'absence de franchises, le montant total des sinistres à la charge de l'assureur est donné par la variable aléatoire S définie par

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i. \qquad (1)$$

Conformément aux hypothèses classiques du modèle collectif, nous supposerons que les coût individuels de sinistres $X_1, X_2, ...$ sont mutuellement indépendants et identiquement distribués et que les variables aléatoires $N, X_1, X_2, ...$ sont mutuellement indépendantes. Par ailleurs, nous noterons F la fonction de répartition de X_1. Connaissant les lois du nombre de sinistres et des montants de sinistres, il est possible d'extraire la loi de la charge brute de sinistres. En effet,

$$\Pr(S \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(s), \tag{2}$$

où F^{*n} désigne le produit de convolution à l'ordre n de F, *i. e.* la fonction de répartition de $X_1 + X_2 + ... + X_n$, et $p_n := \Pr(N = n)$.

Ce résultat classique est obtenu à l'aide du théorème des probabilités totales en conditionnant par rapport au nombre de sinistres survenus. En pratique, l'obtention de loi de S est l'objet de procédures telles que l'algorithme de Panjer (cf. Partrat et Besson (2005)) qui, le plus souvent, nécessitent la discrétisation des lois des montants individuels de sinistres. Ce sujet fait l'objet de développements à part entière sur lequels nous ne nous attarderons pas davantage.

Considérons à présent un contrat de franchise déductible d. Nous noterons N_d le nombre de sinistres strictement supérieurs à d et ${}_dX_1, {}_dX_2, ...$ les montants des sinistres à la charge de l'assureur, de fonction de répartition ${}_dF$, dont la loi est donnée par

$${}_dF(x) := \Pr({}_dX \leq x) = \Pr(X \leq x + d \mid X > d). \tag{3}$$

Le montant total de sinistres à la charge de l'assureur, que nous noterons S_d, est donné par

$$S_d := \sum_{i=1}^{N} (X_i - d)^+ = \sum_{j=1}^{N_d} {}_dX_j. \tag{4}$$

Quels que soient $\delta \geq 0$ et $d \geq \delta$, l'ordre stochastique ($\prec_{st}$) (cf. Planchet et al. (2005)) permet de classer S, S_d et S_δ :

$$S_d \prec_{st} S_\delta \prec_{st} S. \tag{5}$$

Ce résultat traduit formellement l'intuition que le risque supporté par l'assureur est d'autant plus petit que la franchise est grande.

2.2 Caractéristiques de l'engagement avec franchise

Dans ce paragraphe, nous étudions l'impact de la mise en place de la franchise sur le coût et le nombre des sinistres restant à la charge de l'assureur. Une attention particulière est accordée à la loi de la charge totale de ces sinistres.

2.2.1 Coût des sinistres dépassant la franchise

La suite $({}_dX_j)_{j\geq 1}$ peut être définie à partir de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$. En effet, pour tout $j \geq 1$,

$$ {}_dX_j = X_{U_j} - d, \tag{6}$$

où $U_j := \inf\left\{k \in \mathbf{N}^* | \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{X_i>d} = j\right\}$. Les termes de la suite $(U_j)_{j\geq 1}$ prennent pour valeurs, dans leur ordre croissant, les indices des termes de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ qui dépassent la franchise.

Comme la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ est mutuellement indépendante et identiquement distribuée, il en est de même pour la suite $({}_dX_j)_{j\geq 1}$. La loi de ${}_dX_1$ est donnée par

$$ {}_dF(y) := \Pr[{}_dX_1 \leq y] = \frac{F(d+y) - F(d)}{1 - F(d)}. \tag{7}$$

2.2.2 Nombre de sinistres dépassant la franchise

La loi de N_d est obtenue en remarquant que

$$ N_d = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{X_n>d}, \tag{8}$$

et en utilisant le théorème des probabilités totales en conditionnant par rapport à N, ce qui nous permet d'écrire

$$ {}_dp_k := \Pr(N_d = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i>d} = k\right). \tag{9}$$

Puisque les $X_1, X_2, ...$ sont indépendants, on a

$$ \Pr\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i>d} = k\right) = C_n^k \left(1 - \Pr(X \leq d)\right)^k \left(\Pr(X \leq d)\right)^{n-k}. \tag{10}$$

Comme de plus, les k premiers termes de la somme sont nuls, la loi de N_d est donc donnée par

$$ {}_dp_k = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left[1 - F(d)\right]^k F(d)^{n-k} p_n. \tag{11}$$

2.2.3 Charge des sinistres nets de franchise

En présence d'une franchise, les hypothèses du modèle collectif nous permettent d'extirper aisément les deux premiers moments de S_d. En effet,

$$ \mathrm{E}(S_d) = \mathrm{E}(N)\mathrm{E}\left[(X-d)^+\right], \tag{12}$$

et

$$\mathrm{Var}(S_d) = \mathrm{E}(N)\mathrm{Var}\left[(X-d)^+\right] + \mathrm{Var}(N)\mathrm{E}\left[(X-d)^+\right]^2. \tag{13}$$

Le résultat suivant (démontré en annexe A) est fondamental, puisqu'il nous permet de continuer à travailler sous les hypothèses du modèle collectif lorsque l'on travaille avec une franchise.

Proposition 1 *La variable aléatoire N_d est indépendante de la suite $\left({}_dX_j\right)_{j\geq 1}$.*

Ainsi la loi de S_d est finalement donnée par

$$\Pr(S_d \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_dF^{*n}(s) {}_dp_n, \tag{14}$$

où ${}_dF^{*n}$ désigne le produit de convolution à l'ordre n de ${}_dF$.

Cette propriété nous assure que, dès lors que l'on connaît les lois du coût et du nombre de sinistres et que l'on souhaite augmenter la franchise, on se retrouve dans une situation dont on connaît la loi de l'engagement de l'assureur et *a fortiori* la prime pure.

2.2.4 Diminution de la franchise : impact sur la prime pure

Notons Π_d la prime pure du contrat avec une franchise déductible de niveau d. Supposons que l'assureur veuille diminuer cette franchise jusqu'à un niveau $\delta < d$. Comme présenté *supra*, l'augmentation de la prime pure peut être décomposée en deux effets : l'augmentation de la charge de l'assureur de $d - \delta$ pour les sinistres qu'il réglait déjà et l'apparition des sinistres dont le montant est compris entre δ et d. Formellement, on a

$$\Pi_\delta = \mathrm{E}(N_\delta)\mathrm{E}({}_\delta X). \tag{15}$$

L'équation (4) nous permet d'exprimer facilement Π_d en fonction de Π. En effet,

$$\begin{aligned} \Pi_d &= \mathrm{E}(N)\mathrm{E}\left[(X-d)^+\right] \\ &= \mathrm{E}(N)\mathrm{E}\left[X-d|X>d\right]\Pr(X>d). \end{aligned} \tag{16}$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\Pi_d = \frac{\mathrm{E}\left[X-d|X>d\right]}{\mathrm{E}(X)}\Pr(X>d)\Pi. \tag{17}$$

Cette expression ne fait pas apparaître explicitement le nombre des sinistres supérieurs à la franchise. Cette information est néanmoins contenue dans le rapport des termes Π et $\mathrm{E}(X)$.

En conséquence, une diminution de la franchise de d à δ, entraînera une augmentation de la prime pure de Π_d à

$$\Pi_\delta = \frac{\mathrm{E}\,(X-\delta|X>\delta)\,\mathrm{Pr}(X>\delta)}{\mathrm{E}\,(X-d|X>d)\,\mathrm{Pr}(X>d)}\Pi_d. \tag{18}$$

Néanmoins, en pratique, on ne dispose pas d'information sur les sinistres dont le montant est compris entre δ et d. En particulier, on ne connaît ni leur coût moyen ni leur nombre.

Pour calculer la nouvelle prime pure, l'assureur va donc devoir faire des hypothèses au sujet de la distribution des montants de sinistres.

2.3 Modélisation des montants de sinistres

On a vu dans le paragraphe précédent, qu'il est suffisant de se donner la loi des montants de sinistres dépassant la nouvelle franchise $\delta < d$ pour pouvoir déterminer la prime pure Π_δ.

Une solution pratique consiste à faire des hypothèses paramétriques sur la forme de la distribution des montants de sinistres qui dépassent δ à estimer les paramètres de la loi retenue sur les données observées.

2.3.1 Choix de la loi sous-jacente

Ce choix constitue une étape primordiale dans notre problématique puisqu'il va conditionner les résultats de manière importante. Pour savoir vers quelle type de loi se tourner, on pourra se référer à Partrat et Besson (2005) qui présentent, pour les lois les plus usuelles, les principales branches d'assurance qu'elles se prêtent à modéliser. Dans le même esprit, on trouvera dans Antal (2003) les lois les plus couramment utilisées en réassurance ainsi que des indications sur la valeur du paramètre de forme de certaines distributions pouvant s'appliquer à différents risques (lois Pareto-généralisée et Beta-généralisée).

La figure 1 illustre la difficulté du choix de la loi. En effet lorsque l'on observe uniquement les sinistres supérieurs à un montant (par exemple 2,5 sur notre graphique), il est assez délicat de faire une hypothèse sur la forme de la distribution non-tronquée.

Aussi, en pratique, un avis d'expert sur la distribution des coûts sera apprécié. En France, les assureurs réglant les sinistres causés par des tiers à leurs assurés, ceux-ci disposent d'une information statistique (incomplète) permettant d'apprécier la distribution des petits sinistres.

2.3.2 Estimation des paramètres

La structure de la loi censée modéliser la variable "coût des sinistres de montant supérieur à δ" choisie, l'estimation de ses paramètres pourra être effectuée par la méthode des moments ou par la méthode du maximum de vraisemblance sur la distribution tronquée par la franchise actuelle d.

Méthode des moments

A partir des réalisations de sinistres observées, l'assureur peut, par exemple, estimer les ${}_dm_k := \mathrm{E}(X^n|X > d)$ de manière à retrouver les paramètres de la loi de X. Cette méthode ne pourra néanmoins être mise en œuvre que si ces moments existent jusqu'à un ordre au moins égal au nombre de paramètres à estimer.

Si l'assureur dispose d'un échantillon de n sinistres $({}_dx_1, ..., {}_dx_n)$ qui ont été déclarés (et donc qui dépassent le niveau de la franchise), il va pouvoir estimer les moments de la loi tronquée par

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {}_dx_i{}^k \longrightarrow \mathrm{E}\left[X^k|X > d\right]. \tag{19}$$

On aura, au préalable, exprimé $\mathrm{E}\left[X^k|X > d\right]$ en fonction des paramètres de la loi sous-jacente.

Certaines lois, telles que la loi de Pareto, se prêtent particulièrement à cet exercice ; pour d'autres des manipulations plus complexes devront intervenir. On trouvera, par exemple, dans Ter Berg (1994), les expressions des deux premiers moments d'une loi inverse gaussienne tronquée.

Maximum de vraisemblance

Rappelons que si X admet une densité f, ${}_dX$ admet une densité ${}_df$ donnée par

$${}_df(x) = \frac{f(d+x)}{1-F(d)}, \quad x > 0. \tag{20}$$

Il s'agit pour l'assureur de déterminer les paramètres de la loi de X qui maximisent la vraisemblance

$$L({}_dx_1, ..., {}_dx_n) = [1-F(d)]^{-n}\prod_{i=1}^{n} f({}_dx_i + d). \tag{21}$$

Rappelons que, s'ils sont sans biais, les estimateurs du maximum de vraisemblance fournissent la meilleure estimation possible. Néanmoins, l'application de cette méthode sur une loi tronquée conduit rarement à des expressions analytiques. Le cas échéant, on se tournera avec profit vers des techniques plus adaptées aux problèmes avec données incomplètes telles que l'algorithme EM (cf. Dempster et al. (1977)).

2.3.3 Exemple : Loi de Pareto

Supposons que l'on veuille ajuster nos données selon une loi de Pareto. Rappelons qu'une variable aléatoire X est distribuée selon une loi de Pareto de paramètres α et d ($X \sim \mathcal{P}ar(\alpha, d)$) si

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \left(\frac{d}{x}\right)^{\alpha}, \quad x > d. \tag{22}$$

Une telle variable aléatoire possède des moments jusqu'à l'ordre $[\alpha]$ qui sont donnés, pour $k \in \{0, ..., [\alpha]\}$, par

$$\mathrm{E}\left[X^k\right] = \frac{\alpha}{\alpha - k} d^k. \tag{23}$$

Dans notre situation, on supposera que le paramètre d est connu : c'est le montant de la franchise. La loi de Pareto possède la propriété de translation suivante qui s'avère utile dans notre problématique.

Propriété 1 *Si* ${}_dX \sim \mathcal{P}ar(\alpha, d)$*, alors pour tout* $\delta > d$*,*

$$\Pr({}_dX \leq x | {}_dX > \delta) = \Pr({}_\delta X \leq x), \tag{24}$$

où ${}_\delta X \sim \mathcal{P}ar(\alpha, \delta)$*.*

Cette propriété traduit le fait que si l'on modifie le niveau de la franchise, le paramètre de forme α reste inchangé. En pratique, on pourra donc estimer α sur les sinistres connus et utiliser le même α pour tarifer le contrat avec une nouvelle franchise.

Concernant l'estimation du paramètre α, le recours à la méthode des moments est à proscrire dans la mesure où leur existence n'est pas assurée. Il est donc naturel de se tourner vers la méthode du maximum de vraisemblance.

Connaissans le niveau de la franchise d, l'estimateur du maximum de vraisemblance pour α est

$$\widehat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_i \ln \frac{x_i}{d}\right)^{-1}. \tag{25}$$

Il convient de remparquer que, dans ce contexte de réduction de franchise, le choix de la loi de Pareto apparaît prudent dans la mesure où la densité d'une telle loi est strictement décroissante : dans l'intervalle de coût $[\delta, d]$, il y a plus de sinistres que dans n'importe quel autre intervalle de même taille avec des montants plus élevés.

Dans le cas de la loi de Pareto, la réduction du niveau de la franchise du contrat conduit à une augmentation de la prime pure qui peut s'exprimer aisément en fonction du paramètre de queue α, du montant de l'ancienne franchise d et de celui de la nouvelle $\delta < d$. En effet, sous réserve que $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_\delta}{\Pi_d} &= \frac{\mathrm{E}\left({}_\delta X - \delta\right)}{\mathrm{E}\left({}_d X - d\right)} \frac{\Pr(X > \delta)}{\Pr(X > d)} \\ &= \frac{\delta/(\alpha-1)}{d/(\alpha-1)} \left(\frac{d}{\delta}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{d}{\delta}\right)^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{26}$$

2.3.4 Illustration

Considérons un contrat avec une franchise de 3.5 pour lequel on dispose de 1000 coûts de sinistre observés. Ces données ont été ajustées par des distributions log-normale et Pareto tronquées à gauche. Les paramètres ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance (cf. Partrat et Besson (2005) pour la procédure à suivre concernant la loi log-normale tronquée). La figure 2 reprend les observations (densité empirique) ainsi que les densités des lois tronquées qui leur ont été ajustées.

Les paramètres des lois sous-jacentes complètes étant estimés, il est possible à l'aide de l'équation 18 d'estimer l'augmentation de la prime pure qui résulterait de la diminuation du niveau de la franchise. Le graphique 3 résume cette information. Ce graphique permet d'observer que le choix de la loi sous-jacente a peu d'impact lorsque l'on ne souhaite réduire que légèrement la franchise.

Il offre également une mesure intéressante de l'incertitude liée au choix de la loi sous-jacente : en l'absence d'information *a priori* sur la forme de celle-ci, la réduction de franchise pourra être limitée aux situations dans lesquelles les deux ajustements donnent des résultats proches. Dans notre exemple, d'un point de vue purement technique, il serait judicieux de ne pas fixer une nouvelle franchise inférieure à 1,5.

3 Les systèmes bonus-malus (SBM)

En présence d'un système bonus-malus, nous allons voir que la situation se complexifie. En effet, les SBM étant, le plus souvent, indépendants des montants de sinistres, certains assurés ne déclarent pas des sinistres de montant faible de manière à ne pas voir leurs primes futures augmenter.

Après avoir présenté le système bonus-malus en vigueur en France, nous proposons de modéliser le comportement des assurés de manière à estimer les montants et surtout le nombre de sinistres supérieurs à la franchise mais non-déclarés.

3.1 Généralités

En auto, la tarification des risques s'organise en deux étapes. On parle de tarifications *a priori* et *a posteriori*. Si la première repose sur les techniques de segmentation en fonction de caractéristiques de l'assuré (âge, sexe, puissance de la voiture, indications géographiques, etc.) qui doivent permettre à l'assureur d'affiner son jugement de la qualité du risque, la seconde dépend quant à elle directement de l'historique de sinistres du conducteur et passe, le plus souvent, par la mise en place d'un système bonus-malus, qu'il soit imposé par la réglementation (comme en France) ou établi par chaque compagnie. On trouvera dans Lemaire (1995) une présentation très complète des différents sytèmes bonus-malus et de leurs propriétés mathématiques.

Concernant spécifiquement le système bonus-malus français, le lecteur en trouvera dans Partrat et Besson (2005) une description détaillée.

Il s'agit d'un système normalisé qui s'impose à tous les assureurs. Il consiste en l'introduction d'un coefficient de réduction (bonus) ou de majoration (malus) de la prime. Le niveau de ce coefficient dépend uniquement de l'historique des nombres d'accidents dont est responsable l'assuré. Il ne dépend aucunement du coût de ces sinistres.

Nous rappelons ici ses principales caractéristiques :

- Une année sans sinistre fait diminuer le coefficient de réduction-majoration des primes de 5%.
- Chaque sinistre majore ce même coefficient de 25% pour la prochaine période d'assurance.
- Le coefficient de réduction-majoration ne peut sortir de l'intervalle $[0,5;3,5]$.
- Une clause de retour rapide est prévue : au bout de deux années sans sinistre responsable, l'assuré retrouve automatiquement un coefficient de 100 % s'il avait un malus.
- Une clause de protection des conducteurs disposant du bonus maximum (coef. $= 0,5$) depuis au moins trois ans leur permet de ne pas supporter de malus lors de leur prochain sinistre responsable.

3.2 Modélisation en chaîne de Markov

Le parcours d'un assuré dans une échelle bonus-malus à classes se décrit aisément à l'aide de la modélisation en chaîne de Markov (cf. Denuit et Charpentier (2005) et Partrat et Besson (2005)).

Considérons une échelle à s classes numérotées de 1 à s ordonnées selon le coefficient de réduction-majoration auquel elles donnent droit ; la classe 1 étant celle donnant le droit à la plus forte réduction de prime.

Les règles de passage d'une classe à une autre dépendent, le plus souvent, du nombre de sinistres responsables causés dans l'année et plus généralement de l'historique sinistres dans sa globalité. Par exemple, dans le SBM français, on perd automatiquement tout malus au bout de deux années sans sinistre responsable.

En dédoublant les classes, il est souvent possible de se ramener dans une situation où les règles de passage d'une classe à une autre dépendent exclusivement de la classe de départ et du nombre de sinistres causés dans l'année (cf. Kelle (2000) pour le cas français). Nous nous plaçons dans cette situation dans la suite de ce paragraphe.

3.2.1 Le modèle

Intéressons-nous à un assuré dont le facteur de risque θ sera supposé constant au cours du temps. Le parcours de cet assuré dans l'échelle peut être modélisé par le processus $L = (L_k)_{k\in\mathbf{N}}$ où L_k désigne la classe occupée par l'assuré pendant la $(k+1)$-ème période.

Notons $p_\theta(l_1, l_2)$ la probabilité pour l'assuré de facteur de risque θ de passer de la classe l_1 à la classe l_2 la période suivante, *i. e.*

$$p_\theta(l_1, l_2) := \Pr\left[L_{k+1} = l_2 | L_k = l_1, \Theta = \theta\right]. \tag{27}$$

Par définition, $p_\theta(l_1, l_2) \in [0; 1]$ et $\sum\limits_{l_2} p_\theta(l_1, l_2) = 1$. Aussi, la matrice

$$\mathbf{P}_\theta := \begin{pmatrix} p_\theta(1,1) & \cdots & p_\theta(1,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_\theta(s,1) & \cdots & p_\theta(s,s) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

est la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours de l'assuré dans l'échelle bonus-malus. Dans la suite, nous nous placerons sous l'hypothèse que pour un facteur de risque donné, la probabilité de passer d'un degré de l'échelle à un autre reste constante au cours du temps[1]. Sous cette hypothèse la chaîne de Markov est donc homogène.

Notons $\mathbf{p}_\theta^{(k)}(l_0)$ le vecteur de probabilité dont la l-ème composante est la probabilité qu'un assuré de facteur de risque θ passe du degré l_0 au degré l en k périodes. $\mathbf{p}^{(0)}(l_0)$ est un vecteur formé d'un 1 dans sa l_0-ème composante et de 0 sur les autres. On a

$$\mathbf{p}_\theta^{(k)}(l_0)' = \mathbf{p}_\theta^{(k-1)}(l_0)'\mathbf{P}_\theta, \tag{29}$$

et

$$\mathbf{p}_\theta^{(k)}(l_0)' = \mathbf{p}^{(0)}(l_0)'\mathbf{P}_\theta^k. \tag{30}$$

Comme le soulignent Denuit et Charpentier (2005), en pratique, tous les SBM ont un nombre fini de classes avec un état dont le bonus est maximal

[1] Cette hypothèse, classique en assurance, doit tout de même être prise avec précaution puisque de nombreuses mesures de nature politique (campagne de prévention, augmentation du nombre de radars) peuvent modifier sensiblement le comportement des conducteurs.

qui, une fois atteint, n'est quitté qu'en cas de sinistre. La matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours d'un assuré dans cette échelle est régulière (il existe un entier ξ_0 tel que tous les termes de la matrice $\mathbf{P}_\theta^{\xi_0}$ soient strictement positifs) ; la chaîne associée est donc ergodique. En particulier, il est possible d'atteindre avec une probabilité strictement positive n'importe quel état à partir de n'importe quel autre au bout d'un temps fini. De plus, l'échelle admet toujours une distribution stationnaire, *i. e.* un vecteur π_θ tel que

$$\begin{cases} \pi'_\theta = \pi'_\theta \mathbf{P}_\theta \\ \pi'_\theta e = 1 \end{cases} \tag{31}$$

où $e = (1, ..., 1)'$.

Le résultat suivant (démontré dans Rolski et al. (1999), page 288) permet de déterminer la distribution stationnaire.

Propriété 2 *Si $\mathbf{P}_\theta$ est régulière et de dimension finie, l'unique distribution stationnaire est donnée par*

$$\pi'_\theta = e' \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\theta - \mathbf{E}\right)^{-1}, \tag{32}$$

où $\mathbf{E}$ est la matrice $s \times s$ formée uniquement de 1.

On dira, de plus, que l'échelle bonus-malus est équilibrée, si le vecteur $\rho = (\rho_1, ..., \rho_s)$ des coefficients de réduction-majoration de la prime est tel que

$$\pi_\theta \rho = 1. \tag{33}$$

3.2.2 Illustration

Considérons une échelle bonus-malus à trois classes avec les règles de passage suivantes :

- une année sans sinistre responsable fait descendre d'une classe,
- une année avec au moins un sinistre responsable fait remonter à la classe n°3.

Supposons que le nombre annuel de sinistres causés par un assuré de facteur de risque θ soit distribué selon une loi de Poisson de paramètre θ. On fait donc ici l'hypothèse implicite que le comportement de l'assuré (modélisé par θ) n'est pas affecté par le degré dans lequel il se situe : il n'est pas plus, ou moins, prudent que s'il occupait un autre degré.

La probabilité qu'un tel assuré n'ait pas de sinistre dans l'année étant égale à $e^{-\theta}$, la matrice de passage de la chaîne de Markov vaut

$$\mathbf{P}_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1 - e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1 - e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1 - e^{-\theta} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Cette chaîne de Markov admet pour distribution stationnaire

$$\pi_\theta = \begin{pmatrix} e^{-2\theta} \\ \left(1 - e^{-\theta}\right) e^{-\theta} \\ 1 - e^{-\theta} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Quelle que soit la classe de départ, cette distribution est atteinte au bout de deux périodes, *i. e.*

$$\forall l_0 \in \{1, ..., 3\}, \quad \mathbf{p}_\theta^2(l_0) = \pi_\theta. \tag{36}$$

Si de plus π_θ est la distribution stationnaire du portefeuille dans son ensemble, le SBM sera équilibré si les coefficients $\rho_1, ..., \rho_3$ sont tels que

$$\begin{cases} e^{-2\theta}(\rho_1 - \rho_2) + e^{-\theta}(\rho_2 - \rho_3) + \rho_3 - 1 = 0 \\ 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 \end{cases} \tag{37}$$

3.3 Modèle d'anticipation d'un assuré

3.3.1 Notations et hypothèses

Considérons la situation où l'assuré de facteur de risque θ a un sinistre de montant x en toute fin d'année. La franchise du contrat vaut d et la prime pure correspondante Π_d. Ce tarif a été établi en référence à la classe de risque à laquelle l'assuré appartient sur la base de la segmentation *a priori* du portefeuille sans référence à l'historique individuel de sinistralité.

Ce contrat fait de plus l'objet d'une tarification d'expérience basée sur un système bonus-malus à s classes auxquelles correspondent les coefficients de réduction-majoration de la prime $(\rho_i)_{i\in\{1,...,s\}}$.

Notons L_1^+ la classe dans laquelle se trouverait l'asuré en l'année suivante s'il déclarait le sinistre, et L_1^- la classe dans laquelle il se trouverait dans le cas contraire.

3.3.2 Le modèle

Il convient de rappeler ici ce que l'on cherche à obtenir. En effet, on souhaite modéliser, du point de vue de l'assureur, le comportement de l'assuré vis-à-vis de la déclaration de sinistres et non à déterminer, du point de vue de l'assuré, le niveau de rétention optimal. Ce-dernier problème a notamment été traité dans Lemaire (1977) qui propose un algorithme de programmation dynamique.

La principale différence entre les deux points de vue provient du comportement des assurés. En effet, l'algorithme de Lemaire repose sur l'hypothèse implicite que l'assuré connaît sa propre fréquence de sinistres. En réalité ce n'est pas le cas. En outre, de nombreux assurés fondent implicitement leur décision en faisant l'hypothèse qu'ils n'auront plus de sinistres : "si je déclare ce sinistre, il me faudra tant d'années avant de retrouver mon bonus". C'est cette différence entre le comportement optimal et le comportement réel des assurés qui justifie, dans Wahlin et Paris (2000), l'introduction d'un paramètre représentant la proportion des conducteurs qui déclarent tous leurs sinistres.

Dans ce cadre, nous proposons d'intégrer dans le modèle, non pas le facteur de risque de l'assuré, mais plutôt l'estimation qui en est faite par l'assuré : pour choisir s'il va, ou non, déclarer le sinistre, l'assuré compare l'estimation qu'il fait de ses primes futures actualisées dans les deux situations et déclarer le sinistre si la différence est inférieure à l'indemnisation qu'il va recevoir de la part de l'assureur.

Pour modéliser cela nous proposons d'introduire :

- ψ_k le facteur d'escompte "psychologique" (en base annuelle) de la prime à payer dans k années,
- $\tilde{\theta}$ l'estimation faite par l'assuré de son propre facteur de risque,
- $p^{(k)}_{\tilde{\theta}}(i,j)$ l'estimation faite par l'assuré de la probabilité qu'il passe de la classe i à la classe j en k année et $\mathbf{P}^k_{\tilde{\theta}}$ la matrice associée.

L'assuré compare son estimation de la valeur actuelle probable des primes futures s'il déclare le sinistre

$$\Pi_d \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+)\right)' \mathbf{P}^k_{\tilde{\theta}} \rho e^{-\psi_k k}, \tag{38}$$

à celle obtenue s'il ne déclare pas le sinistre

$$\Pi_d \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \mathbf{P}^k_{\tilde{\theta}} \rho e^{-\psi_k k}. \tag{39}$$

Il y aura donc déclaration si

$$\Pi_d \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \mathbf{P}^k_{\tilde{\theta}} \rho e^{-\psi_k k} < x - d. \tag{40}$$

Comme la chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}$ est régulière, il existe un entier ξ tel que

$$\left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \mathbf{P}^\xi_{\tilde{\theta}} = \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+)\right)' \mathbf{P}^\xi_{\tilde{\theta}}. \tag{41}$$

Du point de vue de l'assuré, la "franchise économique" du contrat vaut donc

$$d^{eco}(\tilde{\theta}, \psi, L_1^-, L_1^+) = d + \Pi_d \sum_{k=0}^{\xi-1} \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \mathbf{P}^k_{\tilde{\theta}} \rho e^{-\psi_k k}. \tag{42}$$

Ce résultat met en évidence le fait, qu'en présence d'un système bonus-malus, la véritable franchise du contrat est une combinaison de la franchise contractuelle et de la perte de bonus. Ce point est notamment abordé dans Holtan (2000).

Remarques :

- Dans le cas où le facteur d'escompte psychologique $\psi > 0$ est choisi constant au cours du temps, alors $\left(\mathbf{P}_{\tilde{\theta}} e^{-\psi}\right)^n \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc $\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{\theta}} e^{-\psi}$ est inversible et l'on a

$$\sum_{k=0}^{\xi-1} \left(\mathbf{P}_{\tilde{\theta}} e^{-\psi}\right)^k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{\theta}} e^{-\psi}\right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{P}_{\tilde{\theta}} e^{-\psi}\right)^{\xi}\right). \tag{43}$$

  Ce résultat est démontré dans Rolski et al. (1999).
  On a vu que $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}$ est régulière d'ordre ξ et donc que quels que soient les vecteurs de distribution de probabilité $s \times 1$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, on a $\mathbf{u}'\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^{\xi} = \mathbf{v}'\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^{\xi}$.
  Le niveau de la franchise économique peut ainsi se réécrire

$$d^{eco} = d + \Pi_d \left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{\theta}} e^{-\psi}\right)^{-1} \rho. \tag{44}$$

  Cette dernière expression ne sera utilisée que dans les cas où l'inversion de la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{\theta}} e^{-\psi}$ ne pose pas de problème.

- Le fait que la somme dans l'expression 42 soit finie implique que vue comme une fonction de $\tilde{\theta}$ et de ψ, d^{eco} admet un maximum pour $\tilde{\theta} = \psi_1 = \psi_2 = ... = 0$. Cette estimation correspond à celle d'un assuré qui estime qu'il n'aura pas de sinistre dans le futur (estimation courante) et qui, sous cette hypothèse, projette les primes futures sans les actualiser (situations bien moins fréquentes). Ainsi, pour chaque degré de l'échelle, on dispose d'un seuil

$$d_{max}^{eco}(L_1^-, L_1^+) = d^{eco}(0, 0, L_1^-, L_1^+), \tag{45}$$

  au delà duquel on est sûrs que tous les sinistres ont été déclarés.

- Pour les mêmes raisons, en faisant l'hypothèse que les assurés sinistrés comptent s'assurer à nouveau pour la période suivante, il existe un minimum d_{min}^{eco} obtenu pour $\tilde{\theta} = \psi_1 = \psi_2 = ... = \infty$. Ce cas de figure est celui d'un assuré qui pense qu'il aura sur chaque période ultérieure un nombre de sinistres qui ne le fera pas décoller du degré de l'échelle le plus coûteux.

- Une situation intuitive courante pour le choix des paramètres pourrait être $\tilde{\theta} = 0$ et $\psi_1 = 1, \psi_2 = \psi_3 = ... = 0$. Ce paramétrage correspond à celui d'un assuré qui raisonne uniquement sur la prime de la période suivante et fait l'hypothèse qu'il n'aura pas de sinistre sur cette période.

3.3.3 Illustration (suite)

Considérons l'échelle bonus-malus présentée dans le paragraphe 3.2.2. Supposons que l'assuré n'ait pas eu d'autre sinistre dans l'année : s'il le déclare, il sera l'année suivante directement dans la classe 3 ($L_1^+ = 3$) ; s'il ne le déclare pas, il descendra d'une classe ($L_1^- = \max\{L_0 - 1, 1\}$).

Hypothèse : L'assuré estime qu'il n'aura aucun sinistre avec une probabilité $e^{-\tilde{\theta}}$ (cette situation est un cas particulier de celle où il modélise le nombre d'accidents qu'il va avoir au cours d'une année par une variable de loi de Poisson de paramètre $\tilde{\theta}$).

Comme la probabilité estimée par l'assuré de ne pas avoir de sinistre au cours d'une année vaut $e^{-\tilde{\theta}}$, on a

$$\mathbf{P}_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} e^{-\tilde{\theta}} & 0 & 1-e^{-\tilde{\theta}} \\ e^{-\tilde{\theta}} & 0 & 1-e^{-\tilde{\theta}} \\ 0 & e^{-\tilde{\theta}} & 1-e^{-\tilde{\theta}} \end{pmatrix}. \tag{46}$$

On a vu que la chaîne de Markov de matrice de passage $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}$ est régulière et converge vers la distribution d'équilibre au bout de deux itérations. Il s'agit donc de déterminer si

$$\left(\mathbf{p}^{(0)}(L_1^+) - \mathbf{p}^{(0)}(L_1^-)\right)' \left(\mathbf{I} + e^{-\psi_1}\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}\right)\rho < \frac{x-d}{\Pi_d}. \tag{47}$$

Que l'assuré soit initialement dans les classes n°1 ou n°2, la "franchise économique" sera la même puisque, dans les deux cas, $L_1^- = 1$ et $L_1^+ = 3$. En revanche, cette franchise sera différente s'il est initialement dans la classe n°3 ($L_1^- = 2$).

Application numérique : Avec $\psi_1 = 10$ %, $\tilde{\theta} = 0,1$, $d = 75$, $\Pi_d = 100$, et les coefficients de réduction-majoration

Classe	ρ
1	70 %
2	165 %
3	300 %

on a

$$\begin{cases} d^{eco}(L_0 = 1; 2) = 382,78 \\ d^{eco}(L_0 = 3) = 287,78 \end{cases} \tag{48}$$

Ainsi cet assuré ne déclarera

- s'il est actuellement dans les degrés 1 ou 2 de l'échelle, que les sinistres supérieurs à 382,78 ;
- s'il est dans le degré 3, les sinistres supérieurs à 287,78.

Une étude de sensibilité à la fréquence de sinistre anticipée par l'assuré $\tilde{\theta}$ fait apparaître des optima.

La figure 4 fait apparaitre le fait qu'il existe un seuil, fonction du degré occupé actuellement par l'assuré, au-delà duquel tous les sinistres sont déclarés. Ce seuil est obtenu pour $\tilde{\theta} = \psi = 0$. De même, on observe un niveau en deçà duquel les sinistres ne seront pas déclarés.

3.4 Modèle d'anticipation du portefeuille

L'assureur ne connaît pas individuellement les estimations faites par les assurés.

3.4.1 Notations et hypothèses

Considérons toujours le même contrat de franchise d et intéressons-nous à l'ensemble des assurés se trouvant dans la classe L_0 et ayant eu un sinistre en toute fin de période. Notons ${}_dF_{obs}$ la fonction de répartition empirique des montants des sinistres déclarés pour ces assurés.

Chacun de ces assurés calcule sa propre franchise économique d^{eco} de manière à déterminer s'il va déclarer son sinistre. Du point de vue de l'assureur, ces estimations sont des réalisations d'une variable aléatoire D^{eco}.

Ces franchises sont établies à partir des estimations individuelles θ, $\mathbf{P}_\theta$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2, ...)$. L'assureur ne sait pas quel assuré a fait quelles estimations : on se retrouve dans une situation de troncature gauche partielle.

3.4.2 Le modèle

Intéressons-nous aux sinistres déclarés par les assurés qui occupent le degré L_0 de l'échelle. On a vu qu'il existe un seuil d^{eco}_{max} au-delà duquel tous les sinistres sont déclarés.

Pour estimer la distribution des estimations $\tilde{\theta}$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2, ...)$ qui ont été faites par les assurés occupant le degré L_0 et qui ont eu un sinistre, il est naturel d'ajuster aux données complètes (montants de sinistres supérieurs à d^{eco}_{max}) une loi paramétrique tronquée au niveau d^{eco}_{max} en suivant la procédure présentée dans le paragraphe 2.

Une fois cet ajustement effectué, il est possible de prolonger, jusqu'à la franchise réglementaire d, la distribution obtenue. On notera ${}_d\hat{F}$ la distribution ainsi obtenue et ${}_d\hat{S}$ la fonction de survie associée. En faisant l'hypothèse que cette distribution correspond à celle des montants de sinistres supérieurs à d réellement survenus (*i. e.* intégrant les sinistres non-déclarés), il est possible d'estimer la probabilité qu'un sinistre de montant $x > d$ soit déclaré.

Comme tous les sinistres supérieurs à d^{eco}_{max} ont été déclarés, il est possible d'estimer

– le pourcentage de sinistres non-déclarés :

$$\frac{{}_d\hat{F}(d_{max}^{eco}) - {}_dF_o(d_{max}^{eco})}{1 - {}_dF_o(d_{max}^{eco})}, \tag{49}$$

– $\Pr[X > D^{eco}|X > x]$ la probabilité qu'un sinistre de montant supérieur à $x < d_{max}^{eco}$ soit déclaré :

$$\frac{{}_dS_o(x)}{{}_d\hat{S}(x)} \frac{{}_d\hat{S}(d_{max}^{eco})}{{}_dS_o(d_{max}^{eco})}. \tag{50}$$

Ce dernier point va nous permettre de mieux appréhender la loi de D^{eco}. En effet, on a

$$\begin{aligned} \Pr\left[X \geq D^{eco}|X > x\right] &= \frac{\Pr\left[X > D^{eco}, X > x\right]}{\Pr\left[X > x\right]} \\ &= \frac{\int_x^\infty \Pr[D^{eco} \leq y] f_X(y) dy}{\Pr\left[X > x\right]}. \end{aligned} \tag{51}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} \Pr[D^{eco} \leq y] f_X(y) dy = \Pr\left[X \geq D^{eco}|X > x\right] \Pr\left[X > x\right] \\ - \Pr\left[X \geq D^{eco}|X > x+h\right] \Pr\left[X > x+h\right]. \end{aligned} \tag{52}$$

En prenant h petit, il vient l'approximation

$$\Pr[D^{eco} \leq x] \sim \frac{\Pr\left[X \geq D^{eco}, X > x\right] - \Pr\left[X \geq D^{eco}, X > x+h\right]}{\Pr\left[X > x\right] - \Pr\left[X > x+h\right]}. \tag{53}$$

D'après ce qui précède, la quantité de droite a pour estimateur

$$\frac{{}_dS_o(x) - {}_dS_o(x+h)}{{}_d\hat{S}(x) - {}_d\hat{S}(x+h)} \times \frac{{}_d\hat{S}(d_{max}^{eco})}{{}_dS_o(d_{max}^{eco})}. \tag{54}$$

Dans le cas particulier, où la distribution observée et la distribution prolongée ont pu être modélisées par des lois à densité, on voit apparaître le rapport de ces densités.

Cette dernière quantité permet donc d'estimer la loi de D^{eco}. A ψ fixé, le passage de la loi de D^{eco} à cette de Θ est immédiat grâce à la relation monotone qui lie les deux grandeurs (cf. la figure 4).

En pratique, on pourra être confronté à des problèmes d'estimation lorsque l'on observe pas suffisamment de sinistres de montant inférieur à d_{max}^{eco}.

Considérons la situation dans laquelle les observations ont été ajustées par une distribution paramétrique à densité, on a alors

$$\Pr\left[D^{eco} \leq x\right] = \lim_{h \to 0} \frac{{}_dS_o(x) - {}_dS_o(x+h)}{{}_d\hat{S}(x) - {}_d\hat{S}(x+h)} \times \frac{{}_d\hat{S}(d^{eco}_{max})}{{}_dS_o(d^{eco}_{max})} = \frac{{}_df_o(x)}{{}_d\hat{f}(x)} \frac{{}_d\hat{S}\left(d^{eco}_{max}\right)}{{}_dS\left(d^{eco}_{max}\right)}. \quad (55)$$

De part la relation monotone liant d^{eco} et θ, on est en mesure d'exprimer la distribution de Θ pour une franchise de niveau d :

$$\Pr\left[{}_d\tilde{\theta} \leq y\right] = 1 - \frac{{}_df_o(d^{eco}(y))}{{}_d\hat{f}(d^{eco}(y))} \frac{{}_d\hat{S}\left(d^{eco}_{max}\right)}{{}_dS\left(d^{eco}_{max}\right)}. \quad (56)$$

Intéressons-nous à présent à ce qui se passe si la franchise est réduite à $\delta < d$. La fonction de survie ${}_\delta\hat{S}$ est obtenue en prolongeant ${}_d\hat{S}$ à gauche comme vu précédemment. Il nous faut estimer la loi des sinistres qui seront réellement observés.

Grâce à l'indépendance fréquence/coûts des sinistres, la distribution de ${}_\delta\tilde{\theta}$ est donnée par

$$\Pr\left[{}_\delta\tilde{\theta} < y\right] = \Pr\left[{}_d\tilde{\theta} < y \times_\delta \hat{S}(d)\right]. \quad (57)$$

Le terme ${}_\delta\hat{S}(d)$ joue ici le rôle d'un paramètre de distorsion permettant de passer de la distribution de $d\tilde{\theta}$ à celle de ${}_\delta\tilde{\theta}$.

Il nous faut à présent déterminer δ^{eco}_{max} ainsi que la fonction δ_{eco}.

Si l'assureur décide de baisser sa franchise sans augmenter ses primes, ces composantes relatives à la nouvelle franchise s'estiment suivant la procédure du paragraphe 2. En revanche, s'il souhaite ajuster les primes, ces quantités ne peuvent être calculées directement.

4 Réduction de franchise en présence d'un système bonus-malus

Ce paragraphe a pour objet de rappeler la démarche à appliquer et à la mettre en œuvre dans une illustration.

4.1 Récapitulatif de la procédure

Rappelons les différentes étapes qui vont permettre à un assureur d'estimer la charge moyenne (prime pure) résultant d'une diminution de la franchise d'un contrat avec bonus-malus. Ces étapes sont au nombre de trois :

1. Détermination du seuil d^{eco}_{max} au-delà duquel tous les sinistres sont déclarés.
2. Ajustement d'un modèle paramétrique tronqué sur ces données.

3. Sur les sinistres dont les montants sont compris entre d et d^{eco}_{max}, estimation de la loi de D^{eco} grâce à l'étude de l'abattement observé entre les sinistres supposés survenus (issus de l'ajustement paramétrique) et les sinistres observés.
4. Déduction de la loi de Θ pour une franchise de niveau d.
5. Déduction de la loi de Θ pour une franchise de niveau δ.
6. A partir du modèle paramètrique, estimation des sinistres survenus au-delà de la nouvelle franchise δ.
7. Abattement de ceux-ci grâce à la loi de Θ pour une franchise de niveau δ, de manière à obtenir les sinistres que l'on observera.
8. Estimation de la prime pure pour un contrat de franchise δ à partir de ces sinistres.

4.2 Illustration

L'illustration suivante a été établie à partir de données simulées dans la situation standard évoquée ici, celle de la réduction de franchise à prime constante.

Le graphique 5 présente l'évolution de la prime pure en fonction du niveau de la franchise pour les assurés qui occupent les degrés 1 et 2 de l'échelle simplifiée présentée *supra* selon que la loi des coûts de sinistre est log-normale ou Pareto. La franchise initiale est fixée à 75.

5 Conclusion

L'impact sur la prime pure d'une réduction de franchise est délicat à anticiper. En effet l'assureur doit pour cela faire des hypothèses sur des données qu'il n'observe pas (données tronquées à gauche de la franchise contractuelle) ou qu'il n'observe que partiellement à cause du phénomène de "soif de bonus".

Dans cette article, nous avons présenté et illustré la démarche à suivre pour estimer la nouvelle prime pure. Celle-ci, bien que reposant sur un certain nombre d'hypothèse, a été rendue possible grâce à la conservation des hypothèses d'indépendance du modèle collectif lorsque l'on modifie le niveau de la franchise.

Outre les aspects sociaux d'une telle mesure qui ne favorise que les assurés qui ont des sinistres, la décision de réduire la franchise d'un contrat d'assurance doit être pilotée pour s'assurer que les réalisations observées sont en accord avec les hypothèses effectuées. On pourra en particulier suivre le ratio du nombre de sinistres observés entre la nouvelle et l'ancienne franchise et sa valeur théorique déduite du modèle utilisé.

Une telle mesure conduirait également à augmenter, relativement à la charge des sinistres, le poids des frais de gestion qui, pour les petits sinistres, dépassent souvent le montant indemnisé.

Par ailleurs, en France, la convention IDA (cf. Partrat et Besson (2005)) permet aux assureurs de régler les sinistres subis pas ses assurés en se faisant rembourser un montant forfaitaire par l'assureur du responsable de l'accident. La diminution de franchise conduirait à la déclaration de davantage de petits sinistres de montant inférieur au forfait convenu par la convention IDA.

A contrario, la décision d'augmenter le niveau de la franchise pose moins de problèmes sur le plan technique. Elle aura néanmoins pour conséquence non-négligeable de diminuer l'information disponible au sujet des sinistres.

A Modèle collectif en présence d'une franchise

Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et N une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendante de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$. Notons F la fonction de répartition de X_1 et $(p_n)_{n\geq 0}$ la loi de N. Soit $d \geq 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - d)^+ = \sum_{j=1}^{N_d} Y_j, \tag{58}$$

où $N_d = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{X_i > d}$ et $Y_j = X_{U_j} - d$ où $U_j = \inf \left\{ k \in \mathbf{N}^* | \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{X_i > d} = j \right\}$.

La suite $(Y_j)_{j\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et de même loi donnée par

$$_dF(y) := \Pr[Y_1 \leq y] = \frac{F(d+y) - \pi}{1-\pi}, \tag{59}$$

où $\pi = \Pr[X \leq d]$.

La variable aléatoire N_d est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et sa loi est donnée par

$$_dp_k := \Pr[N_d = k] = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \, (1-\pi)^k \, (\pi)^{n-k} \, p_n. \tag{60}$$

Pour tout $l \in \mathbf{N}^*$, U_l est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et sa loi est donnée par

$$\begin{aligned} \Pr\left[U_l = j\right] &= \Pr\left[\sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{1}_{X_i > d} = l-1, X_j > d\right] \\ &= C_{j-1}^{l-1} (1-\pi)^l \pi^{j-l}. \end{aligned} \tag{61}$$

Proposition 2 *La variable aléatoire N_d est indépendante de la suite $(Y_j)_{j\geq 1}$.*

Démonstration **:** Soient $l \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$ et $y \in \mathbf{R}_+^*$.

Remarque 1 : Comme N est indépendante de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$, N est indépendante de U_l. Ainsi, pour tout $j \geq l$, $\Pr[N = n|U_j = l] = p_n$ et $\Pr[U_j = l|N = n] = \Pr[U_j = l]$.

Remarque 2 : Si $(l \leq k, n < j - (l - k))$ ou $(l > k, n > j - (l - k))$, alors $\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k|U_l = j\right] = 0$.

Remarque 3 : Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$,

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y|U_l = j\right] = \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k|U_l = j\right] {}_dF(y).$$

En effet, pour $j \leq n$, on a

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y|U_l = j\right] \\
&\qquad = \Pr\left[\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k-1, X_j \leq d + y|U_l = j\right].
\end{aligned}$$

Comme la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ est mutuellement indépendante,

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k-1, X_j \leq d + y|U_l = j\right] \\
&\qquad = \Pr\left[\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k-1|U_l = j\right] {}_dF(y) \\
&\qquad = \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k|U_l = j\right] {}_dF(y).
\end{aligned}$$

Pour $j > n$, le caractère i.i.d. des X_i implique directement le résultat.

Cas 1 : $k \geq l$. D'après la remarque 1, on a

$$\begin{aligned}
\Pr[N_d = k, Y_l \leq y] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr[N_d = k, Y_l \leq y|N = n]\, p_n \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y\right] p_n \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k, Y_l \leq y|U_l = j\right] \Pr[U_l = j].
\end{aligned}$$

D'après les remarques 2 et 3, on a

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[N_d = k, Y_l \leq y\right] \\
&\quad = \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \sum_{j=l}^{n-k+l} {}_dF(y) \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j\right] \Pr\left[U_l = j\right] \\
&\quad = {}_dF(y) \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr[U_l = j] \sum_{n=j+k-l}^{+\infty} p_n \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j\right].
\end{aligned}$$

Enfin, la remarque 1 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[N_d = k, Y_l \leq y\right] \\
&\quad = {}_dF(y) \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr[U_l = j] \Pr\left[N_d = k | U_l = j\right] \\
&\quad = {}_dF(y) \Pr[N_d = k].
\end{aligned}$$

Cas 2 : $k < l$. D'après la remarque 1, on a

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[N_d = k, Y_l \leq y\right] \\
&\quad = \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr\left[N_d = k, Y_l \leq y | U_l = j\right] \Pr\left[U_l = j\right] \\
&\quad = \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr[U_l = j] \sum_{n=k}^{+\infty} \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k, X_j \leq d + y | U_l = j\right] p_n.
\end{aligned}$$

D'après les remarques 2 et 3, il vient

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[N_d = k, Y_l \leq y\right] \\
&\quad = \sum_{j=l}^{+\infty} \Pr[U_l = j] \sum_{n=k}^{j-l+k} \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j\right] {}_dF(y) p_n \\
&\quad = {}_dF(y) \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \sum_{j=n+l-k}^{+\infty} \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k | U_l = j\right] \Pr[U_l = j].
\end{aligned}$$

Enfin, la remarque 1 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\Pr\left[N_d = k, Y_l \leq y\right] &= {}_dF(y) \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > d} = k\right] \\
&= {}_dF(y) \Pr[N_d = k].
\end{aligned}$$

Au final, pour tout $l \in \mathbf{N}^*$, Y_l est indépendante de N_d. Par ailleurs, comme la suite $(Y_j)_{j \geq 1}$ est mutuellement indépendante, N_d est indépendante de la suite $(Y_j)_{j \geq 1}$. $\square$

Références

Antal, P. (2003) Quantitative methods in reinsurance. Notes de cours, ETH Zürich.

Bonche, S., Brau, L., Olympio, N. (2005) Decreasing the deductible in an automobile insurance policy. Mémoire de groupe de travail, ISFA.

Dempster, A., Laird, N., Rubin, D. (1977) Maximum likelihood from incomplete data via em algorithm (with discussion). Journal of the Royal Statistical Society B 39, 1–38.

Denuit, M., Charpentier, A. (2005) Mathématiques de l'assurance non-vie. Vol. 2. Economica, Paris.

Holtan, J. (2000) Optimal loss financing under bonus-malus contracts. ASTIN Bulletin 31 (1), 161–73.

Kelle, M. (2000) Modélisation du système bonus-malus français. Bulletin français d'actuariat 7 (7), 61–82.

Lemaire, J. (1977) La soif du bonus. ASTIN Bulletin 9, 181–90.

Lemaire, J. (1995) Bonus-malus systems in automobile insurance. Kluwer Academic Publishers.

Partrat, C., Besson, J.-L. (2005) Assurance non-vie. Modélisation, simulation. Economica, Paris.

Planchet, F., Thérond, P.-E., Jacquemin, J. (2005) Modèles financiers en assurance - Analyses de risque dynamiques. Economica, Paris.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999) Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley, New York.

Ter Berg, P. (1994) Deductibles and the inverse gaussian distribution. ASTIN Bulletin 24 (2), 319–23.

Wahlin, J.-F., Paris, J. (2000) The true claim amount and frequency distributions within a bonus-malus system. ASTIN Bulletin 30 (2), 391–403.

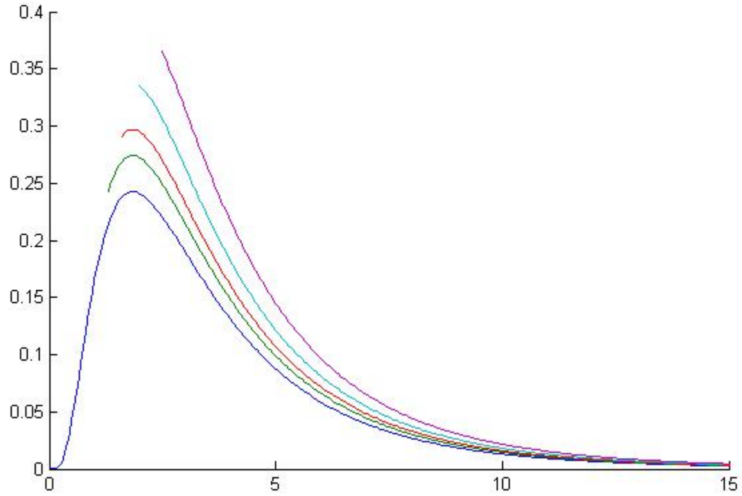

FIG. 1 – Densités de lois log-normales tronquées

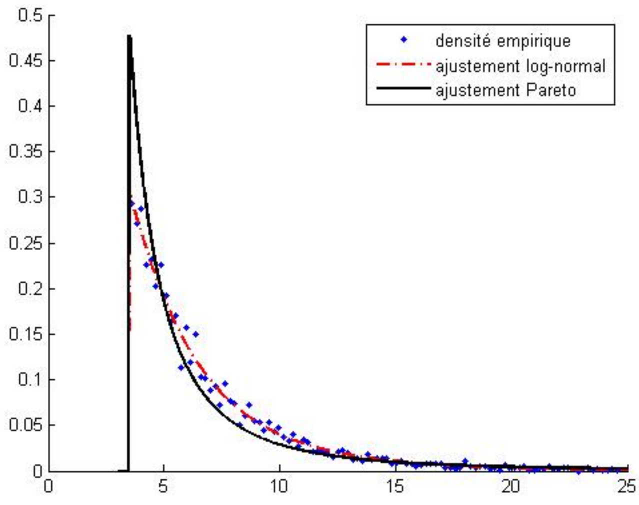

FIG. 2 – Ajustement des coûts de sinistres dépassant la franchise

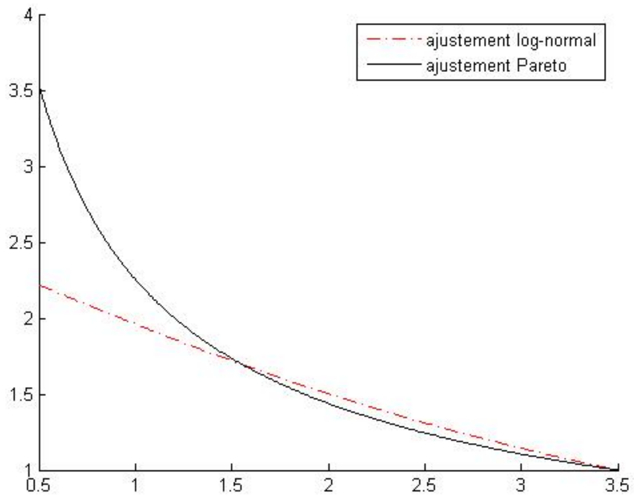

FIG. 3 – Augmentation de la prime pure en fonction du niveau de la nouvelle franchise

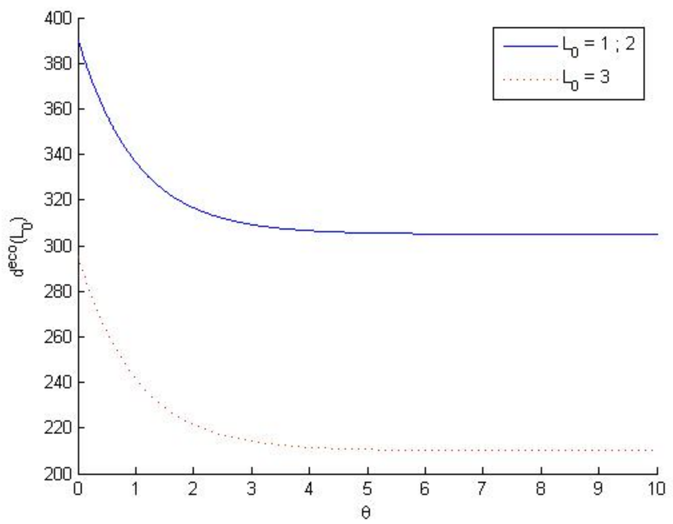

FIG. 4 – Sensibilité à la fréquence de sinistres anticipée

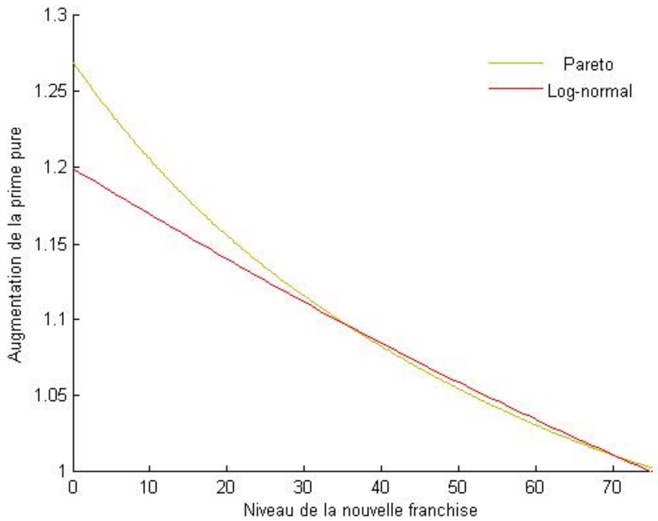

FIG. 5 – Evolution de la prime pure selon le niveau de la franchise