

Arnaud At
Aurélien Fortin
Céline Gosselin
Marc Lenoir

CRÉATION DE TABLES DE MORTALITÉ PROSPECTIVES EN FRANCE

Mémoire de Statistique Appliquée

sous la direction de M. Arthur Charpentier

Année 2004 - 2005



CRÉATION DE TABLES DE MORTALITÉ PROSPECTIVES EN FRANCE

Table des matières

Introduction	7
I Les fondements de l'assurance vie et des tables de mortalité	9
1 Outils mathématiques	10
1.1 Probabilités de survie et de décès	10
1.2 Loi de survie	10
1.3 Le taux instantané de mortalité	11
1.4 Espérance de vie	12
2 Tables de mortalité	12
2.1 Principe de calcul de q_t^x	12
2.2 Méthodes de lissage et d'ajustement	13
2.3 Tables de mortalité longitudinales	14
II La Modélisation des tables de mortalité	17
1 Le Modèle de Lee Carter (1992-2000)	18
1.1 Présentation du modèle	18
1.2 Estimation des paramètres	18
1.3 La prise en compte des personnes âgées	20
1.4 Application aux données françaises	22
1.5 Améliorations et limites de la méthode de Lee Carter	30
2 Une amélioration du modèle de Lee-Carter : Loi de Poisson (Brouhns et al. - 2002) .	30
2.1 Principe	30
2.2 Détail de la méthode de résolution du maximum de vraisemblance	31
2.3 Résultats obtenus avec la régression poissonnienne et comparaison avec Lee Carter.	31

		5
III	Application aux calculs actuariels	35
1	Engagements Viagers	36
1.1	Le capital différé	36
1.2	Annuités Viagères	36
1.3	Rente Viagère	38
2	Espérance de vie	39
	Conclusion	41
	Annexes	43
1	Exemple de table de mortalité	44
2	Résultats Détaillés	46
2.1	Calcul des alpha	46
2.2	Calcul des beta	47
2.3	Calcul des Kt	48
	Bibliographie	49

Introduction

Depuis le début du XX^{ème} siècle, nous assistons à une forte diminution du taux de mortalité. Cet effet est généralement associé à deux tendances majeures : une importante réduction de la mortalité causée par les maladies infectieuses touchant les enfants en bas âge, et la chute de la mortalité concernant les personnes âgées (allongement de la durée de vie). Aujourd'hui, les assurances proposent en grands nombres des contrats de type «rente viagère» pour les personnes retraitées plus particulièrement. Or, à cause des évolutions en terme d'allongement de la durée de vie, le calcul classique effectué par les compagnies d'assurance semble aujourd'hui obsolète, sous-estimant les primes de ces rentes.¹

En effet, les tables de mortalité usuelles, basées sur un recensement fini («tables statiques»), permettent de donner à une date précise la probabilité de décès dans l'année pour un âge donné mais ne permettent pas de réaliser des calculs de rente d'un point de vue prospectif : ils conduisent quasiment systématiquement à des sous estimations des primes d'assurance liées à la vie d'une personne. C'est pourquoi il paraît essentiel de mettre en place des tables de mortalité prospectives en vue de faire face entre autres à ces phénomènes d'allongement de l'espérance de vie.

L'étude présentée ici vise ainsi à étudier dans un premier temps le principe de calcul de ces tables au travers notamment de la présentation des outils mathématiques nécessaires.

Ensuite, nous présenterons successivement le modèle de Lee-Carter et le modèle de régression poissonienne qui permettent d'élaborer les tables de mortalité prospectives. Nous appliquerons ces modèles au cas de la France, tout en précisant les modifications nécessaires préalablement effectuées sur les données brutes préalables (problèmes de correction dus à l'immigration et aux modifications du territoire français) et les techniques d'extrapolation aux grands âges permettant d'avoir des résultats plus robustes concernant les âges (très) élevés du fait de la faible quantité de données concernant ces personnes âgées. Ces résultats mèneront par la suite à une comparaison et une critique de ces deux modèles.

Enfin, nous appliquerons les résultats de la construction de ces tables au calcul des rentes viagères et nous montrerons l'effet de la prise en compte des tables de mortalité dynamiques en mettant en évidence le phénomène de sous-estimation des rentes viagères par une comparaison des résultats utilisant tables statiques et tables dynamiques.

¹cf Bibliographie [10]

Première partie

Les fondements de l'assurance vie et des tables de mortalité

Suivant la nomenclature proposée par l'Insee, une table de mortalité se définit de la façon suivante : «Une table de mortalité annuelle suit le cheminement d'une génération fictive de 100 000 nouveau-nés à qui l'on fait subir aux divers âges les conditions de mortalité observées sur les diverses générations réelles, durant l'année étudiée.»² La table de mortalité donne donc, pour la suite des anniversaires x , le nombre de survivants S_x à ces anniversaires, le nombre de décès D_x entre deux anniversaires successifs et le quotient annuel de mortalité (s'interprétant comme une probabilité de décès) Q_x à l'âge x . Ces tables sont alors très utiles notamment pour les assureurs, qui les utilisent pour déterminer leurs primes d'assurance.

1 Outils mathématiques

Lorsqu'on construit une table de mortalité, on cherche à obtenir des résultats sur les probabilités de survie des individus. Une formalisation mathématique est donc nécessaire, et la partie qui suit se propose de présenter les principaux outils mathématiques qui sont utilisés.

1.1 Probabilités de survie et de décès

Considérons à une époque 0 origine des temps, un individu d'âge x . Désignons par T_x sa durée de vie résiduelle à partir de cet instant. Ainsi, cet individu décèdera à l'âge de $x + T_x$.

La durée de vie résiduelle T_x constitue une variable aléatoire. Nous caractérisons la loi de probabilité de T_x par la fonction de survie $p_x^t = \mathbb{P}[T_x > t]$ où t est un réel positif³.

Inversement, on désigne par $q_x^{t/t'}$ la probabilité de décès entre t et $t + t'$ d'un individu pris en observation à l'âge x et q_x^t la probabilité de décès avant la date t d'un individu pris en observation à l'âge x . Notons que $q_x^t = 1 - p_x^t$.

La probabilité de décès s'exprime alors en fonction de la probabilité de survie :

$$q_x^{t/t'} = \mathbb{P}[t < T_x < t + t'] = \mathbb{P}[t < T_x] - \mathbb{P}[t + t' < T_x]$$

Soit,

$$q_x^{t/t'} = p_x^t - p_x^{t+t'}$$

Exemple : Si on suppose que les probabilités de survie d'une tête d'âge actuel 60 ans sont les suivantes :

$$p_{60}^3 = 0,932, p_{60}^5 = 0,879$$

Alors, la probabilité qu'une personne qui a aujourd'hui 60 ans décède entre 63 et 65 ans est, d'après la formule précédente :

$$q_{60}^{3/5} = p_{60}^3 - p_{60}^5 = 0,932 - 0,879 = 0,053$$

1.2 Loi de survie

Considérons à l'intérieur d'un groupe homogène, à un instant pris comme origine, l'ensemble des individus d'âge x en nombre L_x . Nous allons supposer qu'ils décèdent indépendamment les uns des

²Un exemple de table de mortalité se trouve en annexe

³ p_t^x représente donc la probabilité de survie de l'individu jusqu'à la date t

autres. Dans ce cas, on peut attacher à chaque élément du groupe une variable aléatoire $X_i(t)$ que nous appellerons *indicateur de survie* et qui prend la valeur 1 si l'individu est vivant et la valeur 0 s'il est mort à la date t . Les variables $X_i(t)$ sont alors en nombre égal à L_x et on suppose de plus que les décès sont indépendants. Donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i(t)) &= 1 \cdot p_x^t + 0 \cdot q_x^t = p_x^t \\ V(X_i(t)) &= \mathbb{E}(X_i(t)^2) - [\mathbb{E}(X_i(t))]^2 = p_x^t - (p_x^t)^2 = p_x^t \cdot q_x^t\end{aligned}$$

A l'époque t le nombre de survivants du groupe initialement composé de L_x individus est :

$$L_{x+t} = X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_{L_x}(t)$$

D'où, $E(L_{x+t}) = L_x \cdot p_x^t$

Et, comme les variables $X_i(t)$ sont indépendantes, on a :

$$V(L_{x+t}) = L_x \cdot p_x^t \cdot q_x^t$$

On appelle *nombre probable de vivants*⁴ à l'âge $x + t$ et on le désigne par l_{x+t} la quantité :

$$E(L_{x+t}) = L_x \cdot p_x^t$$

Et on obtient notamment en faisant tendre t vers 0 l'égalité :

$$l_x = E(L_x) = L_x$$

Remarquons qu'on obtient ainsi l'égalité $p_x^t = l_{x+t}/l_x$. On peut alors à partir d'une constante de proportionnalité $L_x = l_x$ calculer le nombre probable de vivants pour toutes les périodes : l'ensemble des valeurs obtenues constitue alors une *loi de survie*.

Exemple : On observe 24 personnes âgées de 60 ans. On peut alors calculer le nombre probable de vivants à l'âge de 65 ans :

$$\mathbb{E}(L_{60+5}) = L_{60} \cdot p_{60}^5 = 24 \cdot 0,872 = 20,928$$

1.3 Le taux instantané de mortalité

Etant donné un individu pris en observation à l'âge x et supposé vivant à l'époque t (c'est-à-dire à l'âge $x + t$), nous allons chercher la probabilité qu'il décède entre les dates t et $t + \Delta t$. Le nombre cherché est :

$$\mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t | T_x > t) = \mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t) / \mathbb{P}(T_x > t) = (p_x^t - p_x^{t+\Delta t}) / p_x^t$$

En supposant la fonction p_x^t dérivable par rapport à t , on obtient alors,

$$p_x^t - p_x^{t+\Delta t} = -(p_x^t)' \cdot \Delta t$$

Or, $p_x^t = l_{x+t}/l_x$ donc $(p_x^t)' = l'_{x+t}/l_x$ et $p_x^t - p_x^{t+\Delta t} = -l'_{x+t} \cdot \frac{\Delta t}{l_x}$

⁴Si la population est suffisamment grande, alors le nombre probable de vivants à l'âge $x + t$ est une bonne estimation du nombre de survivants du groupe initial à l'âge $x + t$

D'où $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t | T_x > t) / \Delta t = -l'_{x+t} / l_{x+t}$

Cette limite est une fonction μ_{x+t} que l'on appelle le *taux instantané de mortalité* à l'âge $x + t$. Pour un âge y , on a donc :

$$\mu_y = -l'_y / l_y = -\frac{d[\ln(l_y)]}{dy}$$

Inversement, si l'on connaît la fonction μ_y , on aura par intégration entre x et $x + t$:

$$p_x^t = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y \cdot dy}$$

Exemple : Dans l'exemple précédent, la probabilité de décès entre 63 et 65 ans pour une personne âgée de 60 ans s'écrit alors :

$$P(63 < t < 65) = \frac{p_{60}^5 - p_{60}^3}{p_{60}^5} = 0,06$$

1.4 Espérance de vie

Enfin, l'espérance de vie est sans doute l'indicateur le plus célèbre, tant il est utilisé couramment dans la presse. Cette année par exemple, il fit la une de nombreux journaux pour avoir dépassé les 80 ans en France, et fait parlé de lui aux Etats-Unis car pour la première fois depuis bien longtemps, il risque de régresser.

L'espérance de vie à l'âge x est l'espérance mathématique de la durée de vie résiduelle T_x . En notant ω la durée de vie maximale, on a ainsi :

$$e_x^0 = \int_0^{\omega-x} t \cdot q_x^t dt = -\frac{1}{l_x} \int_0^{\omega-x} l_{x+t} dt$$

2 Tables de mortalité

Une table de mortalité suit, sur une centaine d'année, l'évolution d'un groupe de personnes, et propose à chaque période le nombre de vivants, le nombre probable de vivants, le nombre de décès, et l'espérance de vie. A la base de la construction de cette table se trouve donc la probabilité de décès, q_t^x , qu'il va s'agir de calculer⁵.

2.1 Principe de calcul de q_t^x

Pour évaluer q_t^x , on met en observation L_x personnes atteignant l'âge x dans l'année. Au bout d'un an, il reste $L_{x+1} = L_x - D_x$ personnes vivantes avec D_x le nombre de décès parmi le groupe observé dans l'année écoulée. On note alors $Q_x = \frac{D_x}{L_x}$ le quotient annuel de mortalité.

On démontre alors que, pour cette variable aléatoire Q_x :

$$\mathbb{E}(Q_x) = q_x$$

⁵Un exemple de table de mortalité est présent en annexe

$$V(Q_x) = \frac{q_x \cdot p_x}{L_x}$$

Et le théorème central limite nous indique alors que Q_x suit une loi normale d'espérance q_x et de variance $\frac{q_x \cdot p_x}{L_x}$, et se met donc sous la forme :

$$Q_x = q_x + Z \cdot \sqrt{\frac{p_x \cdot q_x}{L_x}}$$

où la variable Z suit une loi normale centrée réduite.

Ainsi, la valeur exacte des variables étudiées ne pouvant être déterminée, on doit se contenter d'une approximation, dont on pourra déterminer un intervalle de confiance à partir de la forme normale de Q_x . Afin de garantir l'estimation la plus précise possible, on aura donc tout intérêt à avoir :

- Un grand nombre de variables
- Des groupes de population les plus homogènes possibles

Dans les faits, la série des observations des Q_x est souvent très désordonnée, en raison d'aléas statistiques. On présume que la série des probabilités présente une certaine régularité et notamment qu'à partir de 30 ans, les taux augmentent continûment. On utilise donc des méthodes de lissage des résultats et d'ajustement.

2.2 Méthodes de lissage et d'ajustement

La première étape, lorsqu'on recueille des résultats, est donc de lisser la série des Q_x , c'est à dire de remplacer les valeurs observées Q_x par des valeurs q_x plus régulières, mais qui ne s'éloignent pas trop des observations.

Sans les expliciter, signalons simplement que de nombreuses méthodes de lissage existent : ajustement par les splines, programme de minimisation d'écarts (Wittaker-Anderson)...

Le lissage effectué, il est alors possible d'utiliser des méthodes d'ajustement. En effet, les observations statistiques ne nous donnent pas précisément q_x mais plutôt un intervalle de confiance. Cette incertitude n'est pas compatible avec la nécessité de disposer d'une table de mortalité en vue des calculs de primes d'assurance. Pour la réduire, on essaie donc d'éliminer les aberrations fortuites de taux observées, en déterminant une courbe continue $q_x = f(x)$ passant à l'intérieur des intervalles de confiance.

2.2.1 Deux remarques préalables

- Tout d'abord, si les calculs d'assurance se font souvent à partir des valeurs de l_x , les ajustements se doivent bien d'être faits sur la courbe des q_x , car une erreur de calcul sur q_x de ϵ entraîne une erreur de calcul de l'ordre de $\frac{\epsilon}{2}$ sur l_x .
- L'allure observée des courbes de mortalité montre une certaine régularité uniquement à partir d'un âge voisin de 20 ans, ce qui limite la validité de la méthode d'ajustement mais n'est pas gênant car les calculs sont souvent réalisés pour des sujets adultes.

2.2.2 Formule de Makeham

Historiquement, on a commencé par ajuster les taux annuels de mortalité, pour obtenir des formules sur les l_x . Toutefois, en remarquant que le taux annuel de mortalité ($q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$) était peu différent du taux instantané de mortalité au même âge ($\mu_x = -\frac{d(l_x)/dx}{l_x}$), et que cette dernière formule nous permettait également de retrouver l_x , des formules plus précises furent trouvées, basées sur l'ajustement du taux instantané de mortalité. La plus célèbre, et la plus utilisée d'entre elles, est la formule de Makeham :

$$\mu_x = \alpha + \beta \cdot c^x$$

avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $c > 1$. Ce qui nous permet d'obtenir :

$$l_x = l_{x_0} \cdot e^{-\int_{x_0}^x (\alpha + \beta \cdot c^t) dt}$$

On a alors longtemps interprété cette équation de la façon suivante : α rend compte des décès accidentels, et $\beta \cdot c^x$ du processus de vieillissement. Toutefois, des études récentes ont montré que cette interprétation n'était pas satisfaisante, et qu'en réalité le facteur α n'était qu'un facteur de normalisation, et que la formule de Makeham n'était finalement «qu'une» formule d'ajustement dépendant de trois paramètres.

2.3 Tables de mortalité longitudinales

Les tables de mortalité longitudinales permettent de déterminer le temps restant à vivre pour un individu compte tenu, non pas des conditions du moment, mais de l'évolution future présumée des conditions de vie. Pour ce faire, nous utilisons des indicateurs démographiques doublement indicés, par l'âge et l'année. Plus précisément, nous allons travailler avec les quantités $q_x(t)$ et $\mu_x(t)$ définies comme suit :

- $q_x(t)$: probabilité de décéder à l'âge x pendant l'année t .
- $\mu_x(t)$: taux instantané de mortalité à l'âge x pendant l'année t

Tout naturellement, nous supposons ici que le taux instantané de mortalité $\mu_x(t)$ est constant dans chaque carré du diagramme de Lexis représenté ci dessous.

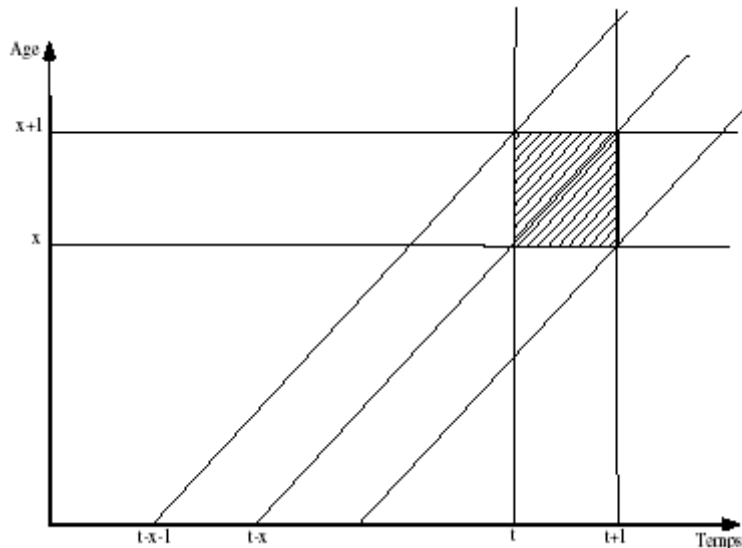


FIG. 1 – Carré dans lequel le taux de mortalité est supposé constant

Quels que soient l'âge x et l'année t , pour x et t entiers, nous avons

$$\mu_{x+\epsilon}(t + \tau) = \mu_x(t) \text{ pour tout } 0 \leq \epsilon, \tau < 1$$

Cette hypothèse entraîne notamment que $p_x(t) = 1 - q_x(t) = e^{-\mu_x(t)}$

Sous cette hypothèse, l'espérance de vie d'un individu d'âge x l'année t vaut :

$$e_x(t) = \int_{\epsilon \geq 0} Pr[T_x(t) \geq \epsilon] d\epsilon = \int_{\epsilon=0}^1 e^{-\mu_x(t)\epsilon} d\epsilon + \sum_{k \geq 1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} e^{-\mu_{x+j}(t+j)} \right) \int_{\epsilon=k}^{k+1} e^{-\mu_{x+k}(t+k)(\epsilon-k)} d\epsilon$$

Soit

$$e_x(t) = \frac{1 - e^{-\mu_x(t)}}{\mu_x(t)} + \sum_{k \geq 1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} e^{-\mu_{x+j}(t+j)} \right) \frac{1 - e^{-\mu_{x+k}(t+k)}}{\mu_{x+k}(t+k)}$$

Contrairement à l'évaluation de l'espérance de vie basée sur les tables transversales (statiques), la quantité définie ci-dessus est effectivement l'espérance de vie restante de l'individu concerné. Cette manière de procéder permet de savoir combien de temps a vécu en moyenne chaque génération et, dans le cas où cette génération n'est pas encore éteinte, combien de temps il lui reste à vivre.

On obtient également, toujours sous la même hypothèse, l'exposition au risque à l'âge x durant l'année t (c'est à dire le temps total vécu par ces individus durant l'année t), donnée par :

$$L_x(t) = \int_{\epsilon=0}^1 l_{x+\epsilon}(t) d\epsilon = \frac{-l_x(t)q_x(t)}{\ln(1 - q_x(t))}$$

et le prix d'une rente viagère (l'individu verse une prime pour percevoir un euro tous les ans jusqu'à sa mort) vendue l'année t à un individu d'âge x

$$a_x(t) = \sum_{k \geq 0} \left[\prod_{j=0}^k p_{x+j}(t+j) \right] \frac{1}{1+i}^{k+1}$$

où i est le taux d'intérêt annuel.

Après avoir exposé les principaux outils utiles à la construction de tables de mortalité, il est maintenant possible de passer à la construction de ces dernières. Pour cela, un modèle s'est imposé comme le modèle fondateur de l'actuariat moderne : le modèle de Lee Carter. Sa présentation fait l'objet de la partie suivante. Par la suite, nous tenterons d'en comprendre les limites, et présenterons quelques extensions permettant d'améliorer ses résultats.

Deuxième partie

La Modélisation des tables de mortalité

1 Le Modèle de Lee Carter (1992-2000)

1.1 Présentation du modèle

Le modèle de Lee Carter ⁶décompose le logarithme du taux instantané de mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle. Le modèle s'écrit sous la forme log bilinéaire suivante :

$$\ln(\mu_x(t)) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \epsilon_{x,t}$$

où :

$\mu_x(t)$ est le taux instantané de mortalité à la date t pour l'âge x (ce taux est supposé constant par morceaux),

α_x représente la composante spécifique à l'âge x et décrit le comportement moyen des $\ln(\mu_x(t))$ au cours du temps,

κ_t est un indice qui décrit l'évolution générale de la mortalité,

β_x indique la sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution générale de la mortalité c'est-à-dire l'écart des $\ln(\mu_x(t))$ par rapport à κ_t . En effet,

$$\frac{d}{dt} \ln(\mu_x(t)) = \beta_x \cdot \frac{d}{dt} \kappa_t \implies \beta_x = \frac{\frac{d}{dt} \ln(\mu_x(t))}{\frac{d}{dt} \kappa_t}$$

En particulier, les âges x pour lesquels les β_x sont importants seront plus sensibles à l'évolution générale de la mortalité.

$\epsilon_{x,t}$ est un terme d'erreur qui reflète les particularités propres à l'âge x ou à la date t qui ne sont pas capturées par le modèle. Par hypothèse, ce terme d'erreur est de moyenne nulle.

1.2 Estimation des paramètres

Le modèle à estimer est alors $\ln(\mu_x(t)) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \epsilon_{x,t}$

Comme dans le cas de l'estimation par les MCO, l'objectif est de minimiser la somme des carrés des résidus. Cependant, la spécificité de ce modèle réside dans le fait qu'il n'y a pas de variable explicative exogène. En effet, tout comme α_x et β_x , les κ_t sont des paramètres du modèle qu'il va falloir estimer.

Par ailleurs, ce modèle n'est pas identifié car, si les vecteurs α , β , et κ sont solutions du problème de minimisation, alors, pour n'importe quel scalaire c , les vecteurs $\alpha - \beta \cdot c$, b et $\kappa + c$ sont également solutions. Pour s'assurer de l'identifiabilité du modèle il est nécessaire de rajouter des contraintes sur les paramètres κ_t et β_x . Ces paramètres doivent être tels que :

$$\sum_t \kappa_t = 0; \sum_x \beta_x = 1$$

L'estimation des paramètres se fait alors en quatre étapes.

⁶cf Bibliographie [12] [11]

1.2.1 Etape 1

Dans un premier temps, il faut estimer les taux instantanés de mortalité . Sous l'hypothèse que ces taux sont constants par morceaux (i.e sont constants pendant l'année t entre l'âge x et l'âge $x + 1$), l'estimation des $\mu_x(t)$ est donnée par :

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{D_x(t)}{L_x(t)}$$

où $L_x(t) = -\frac{l_x(t) \cdot \hat{q}_x(t)}{\ln(1-\hat{q}_x(t))}$ et $D_x(t)$ le nombre de décès pour des individus d'âge x lors de l'année t

D'où

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{-\ln(1-\hat{q}_x(t))d_x(t)}{l_x(t)\hat{q}_x(t)}$$

où $l_x(t)$ est le nombre d'individus d'âge x lors de l'année t , et $\hat{q}_x(t)$ l'estimation de la probabilité de décéder à l'âge x durant l'année t .

1.2.2 Etape 2

Une fois les $\mu_x(t)$ estimés, les estimations des α_x sont obtenues grâce à :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T} \sum_t \ln(\hat{\mu}_x(t))$$

En effet, $\sum_t \ln(\hat{\mu}_x(t)) = \sum_t \alpha_x + \beta_x \cdot \sum_t \kappa_t + \sum_t \epsilon_{x,t}$ et, d'après la contrainte, $\sum_t \kappa_t = 0$. De plus, $\sum_t \epsilon_{x,t} = 0$.

1.2.3 Etape 3

Pour estimer κ_t et β_x , il faut construire la matrice Z définie par $z_{x,t} = \ln(\hat{\mu}_x(t)) - \hat{\alpha}_x$. L'estimation se fait en procédant à la décomposition en valeur singulière de la matrice Z . Si u_1 (resp. v_1) est le vecteur propre de $Z'Z$ (resp. ZZ') associé à la plus grande valeur propre λ_1 , les estimations de κ_t et β_x sont :

$$\hat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}} \quad \text{et} \quad \hat{\kappa} = \lambda_1 \cdot (\sum_j v_{1,j}) \cdot u_1$$

Notons que ces estimations vérifient bien les contraintes définies précédemment.

1.2.4 Etape 4

Enfin, il faut que les $\hat{\kappa}_t$ soient réajustés de façon à ce que le nombre total de décès enregistrés chaque année corresponde à celui prédit par le modèle étant donnés les $\hat{\alpha}_x$ et les $\hat{\beta}_x$. Pour chaque valeur de t , il faut donc trouver $\hat{\kappa}_t$ tel que :

$$\sum_x d_x(t) = \sum_x e^{(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \hat{\kappa}_t)} \cdot L_x(t)$$

Pour respecter les contraintes, les estimations de κ_t et α_x sont redéfinies par : $\kappa_t^* = \hat{\kappa}_t - \bar{\kappa}$ et $\alpha_x^* = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \bar{\kappa}$ où $\bar{\kappa}$ est la moyenne des $\hat{\kappa}_t$ dans le temps.

1.2.5 Extrapolation de la composante temporelle

La série des κ_t^* peut être modélisée à l'aide des processus ARIMA en appliquant la méthode de Box et Jenkins.

Après s'être assuré de la stationnarité de la série, l'étude des autocorrélogrammes et autocorrélogrammes partiels permet de déterminer les ordres AR et MA. Pour finir, l'estimation des paramètres se fait par la méthode du maximum de vraisemblance.

Il est ensuite possible de projeter les valeurs de κ_t^* dans le futur. Ceci permet finalement de construire des prévisions des taux instantanés de mortalité en utilisant α_x^* et $\beta_x^* = \hat{\beta}_x$.

1.3 La prise en compte des personnes âgées

Concernant les âges élevés, se pose le problème de l'estimation des quotients et des taux de mortalité ($q_x(t)$ et $\mu_x(t)$) et de l'extrapolation jusqu'à $x = 110$ ans pour avoir des tableaux rectangulaires. Vu le peu d'observations disponibles, le lissage demeure la principale méthode afin d'atténuer la forte variabilité de ces indicateurs aux âges avancés.

Une des principales critiques de ces méthodes provient du fait que cette méthode se sert de données disponibles pour estimer la mortalité aux grands âges. Ainsi cela a pour effet de gonfler l'information contenue dans les données que nous avons initialement.

1.3.1 La méthode de Coale et Kisker

La technique proposée par Coale et Kisker (1990⁷) travaille sur les taux bruts de mortalité μ_x . Elle propose de recalculer ces valeurs et de les extrapoler pour les grands âges (jusqu'à $x = 110$ ans) en se basant sur la formule :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{65} \cdot e^{g_x(x-65)}$$

où g_x représente le taux moyen de croissance de μ_x entre 65 et x ans.

Le but de la méthode est donc de calculer les coefficients g_x jusqu'à un certain âge et de les extrapoler afin de pouvoir recomposer les taux μ_x .

Les auteurs, après avoir examiné différents graphiques relatifs aux pays d'Europe occidentale, ont remarqué que les courbes des g_x possèdent en général un pic aux alentours de 80 ans, avant de décroître linéairement.

Par conséquent d'après ces résultats empiriques, nous posons :

$$g_x = g_{80} + s(x - 80) \text{ pour } x \geq 80$$

Afin de déterminer le coefficients relatif à la pente, nous devons fixer une valeur limite à l'extrémité de la table. Avec l'hypothèse classique $q_{120} = 1$, et sous l'hypothèse de constance par morceaux des taux de mortalité, il vient :

$$\mu_{120} = -\ln(1 - q_{120}) = +\infty$$

Pour éviter ce problème, Coale et Kisker (1990) fixent arbitrairement le taux de mortalité pour un âge ultime (110 ans) :

$$\left| \begin{array}{l} \mu_{110} = 0,8 \text{ pour les femmes} \\ \mu_{110} = 1 \text{ pour les hommes} \end{array} \right.$$

On doit alors résoudre l'équation :

⁷cf Bibliographie [4]

$$\hat{\mu}_{110} = \hat{\mu}_{79} \cdot e^{\sum_{x=80}^{110} g_x} = \hat{\mu}_{79} \cdot e^{\sum_{x=80}^{110} (g_{80} + s(x-80))}$$

d'où

$$s = -\frac{\ln(\hat{\mu}_{79} + 31 \cdot g_{80})}{465}$$

On calcule alors les taux de mortalité au delà de 80 ans de la manière suivante :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{79} \cdot e^{\sum_{y=80}^x (g_{80} + s(y-80))}, x \in \{80, 81, \dots, 109\}$$

ou encore

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} \cdot e^{g_{80} + s(x-80)}, x \in \{80, 81, \dots, 109\}$$

On remarque que les taux au delà de 80 ans sont uniquement déterminés par μ_{79} et $g_{80} = \frac{\ln(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}})}{15}$.

1.3.2 Justification du choix de la méthode et interprétation des résultats

Au vu de la base de données que nous possédons⁸, nous disposons des données brutes concernant les μ_x et les q_x que jusqu'à l'âge de 88 ans. C'est pourquoi la méthode de Coale et Kisker paraît la plus appropriée pour l'extrapolation aux grands âges.

Cependant notre étude de données concerne des populations mixtes. Or la méthode de Coale et Kisker utilise des contraintes de fermeture μ_{110} qui sont différentes entre les hommes et les femmes. Néanmoins, le choix de cette variable est arbitraire, c'est pourquoi nous avons fixé la valeur $\mu_{110} = 0.9$ pour le calcul de l'extrapolation aux grands âges. D'après le calcul des μ_x extrapolés, on remarque que les μ entre 80 et 88 ans sont assez différents, l'erreur d'extrapolation n'est pas négligeable. Le problème de cette méthode est le choix de la valeur de μ_{110} . On voit clairement qu'une modification de cette valeur a un impact significatif.

On pourrait penser à utiliser d'autres méthodes d'extrapolation.

On peut par exemple citer la méthode de Denuit et Goderniaux(2005⁹). Cette méthode travaille sur les quotients de mortalité et introduit une contrainte de fermeture des tables de mortalité. Cette méthode consiste à ajuster par moindres carrés le modèle log-quadratique :

$$\ln \hat{q}_x = a + bx + cx^2 + \epsilon_x$$

avec ϵ_x iid suivant une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

sur base des observations relatives aux âges les plus élevés, avec les deux contraintes :

$$\left| \begin{array}{l} q_{130} = 1 \\ q'_{130} = 0 \end{array} \right.$$

où q'_x désigne la dérivée première de q_x , considéré comme fonction de l'âge x . Les contraintes conduisent alors à l'équation :

$$a + bx + cx^2 = c(130^2 - 260x + x^2) \quad (1)$$

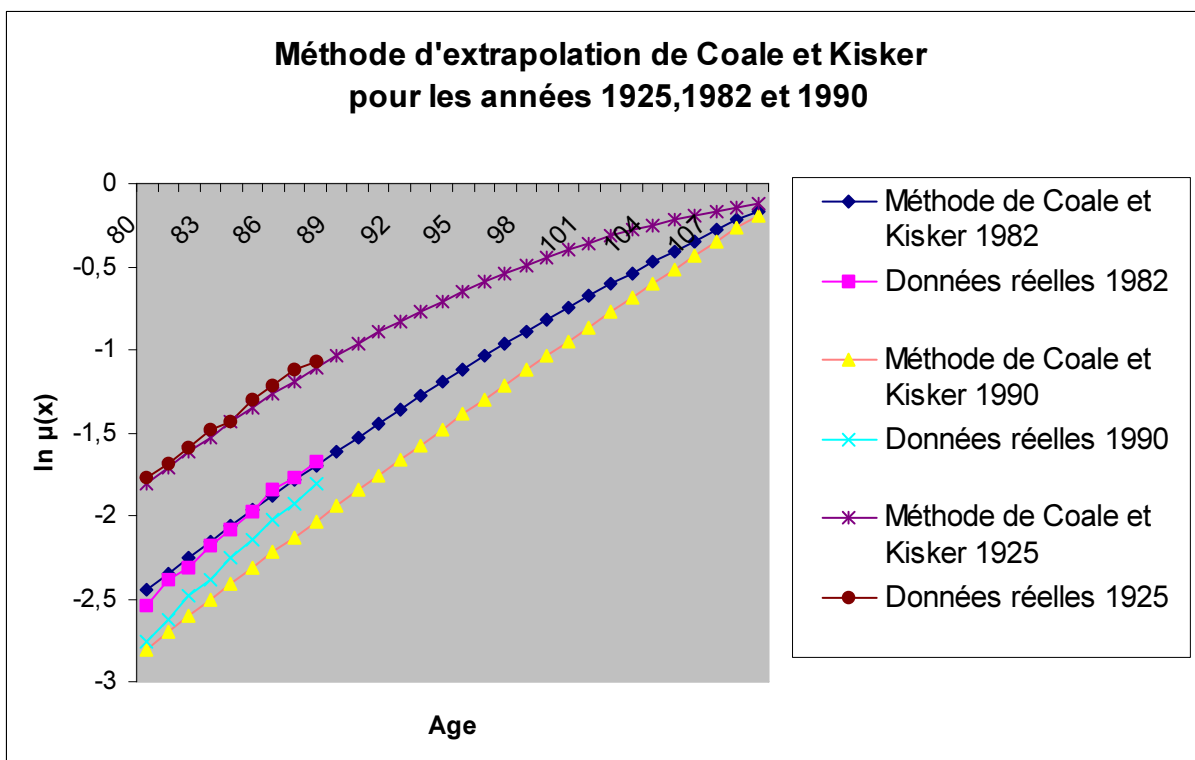
⁸cf Bibliographie [10]

⁹cf Bibliographie[6]

Ces contraintes imposent ainsi à la courbe des quotients de mortalité une allure concave aux grands âges, et l'existence d'une tangente horizontale au point $x = 130$ ans, fixé comme âge limite de fin de vie. Il a été prouvé empiriquement que cette méthode est plus efficace et plus précise. Cependant, elle demande d'avoir des données brutes assez complètes concernant les âges élevés ce qui n'est pas le cas ici.

De la même manière, la méthode logistique qui postule que $\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1 + \sigma^2 \frac{a}{b}(e^{bx} - 1)}$ n'est pas véritablement applicable pour les mêmes raisons.

Nous nous sommes ainsi restreints par la force des choses à utiliser la méthode de Coale et Kisker. On remarque clairement en regardant les résultats entre données réelles (brutes) et celles extrapolées que les résultats ne sont pas parfaits (cf. année 1990) même si cela n'est pas systématique (approximations assez bonnes pour l'année 1982 et 1925).



1.4 Application aux données françaises

1.4.1 Présentation des données et corrections nécessaires

Les données dont nous disposons sont tirées des travaux de J. Vallin et F. Mesle. Les variables sur lesquelles nous allons travailler sont le nombre de naissances et la population au premier janvier sur le territoire français de 1899 à 1997, pour les deux sexes réunis. Le premier problème qui se pose est que le territoire français a été modifié à sept reprises entre 1899 et 1997. Par ailleurs, la population n'ayant pas été corrigée de l'immigration, nous devons en tenir compte lors du calcul des taux de mortalité.

1.4.1.1 Le problème des changements de territoire Qu'il s'agisse des décès ou de la population, les données recueillies portent, selon l'époque, sur un territoire variable, en raison, d'une part de l'occupation de l'Alsace-Lorraine avant la première guerre mondiale et, d'autre part, des perturbations administratives engendrées par les guerres elles-mêmes. Ainsi, de 1899 à 1914, le territoire français ne comprenait que

87¹⁰ départements. De 1914 à 1920, la statistique n'a pu être établie que sur 77¹¹ départements. De 1920 à 1939, la France recouvre presque exactement son territoire actuel, alors divisé en 90 départements. Durant la seconde guerre mondiale, la couverture statistique a changé plusieurs fois : 87 départements de 1939 à 1942 puis en 1945 et 86 en 1943-1944¹².

Depuis 1946 toutes les statistiques couvrent le territoire métropolitain actuel.

Il est cependant possible de calculer les quotients de mortalité car, les années où le territoire a changé, les populations et décès ont été estimés tant sur l'ancien que sur le nouveau territoire.

1.4.1.2 Calcul des quotients de mortalité du moment et correction de l'immigration De façon à pouvoir en déduire aussi les quotients de mortalité du moment, les risques de mortalité sont calculés dans les triangles du diagramme de Lexis (figure ci dessous).

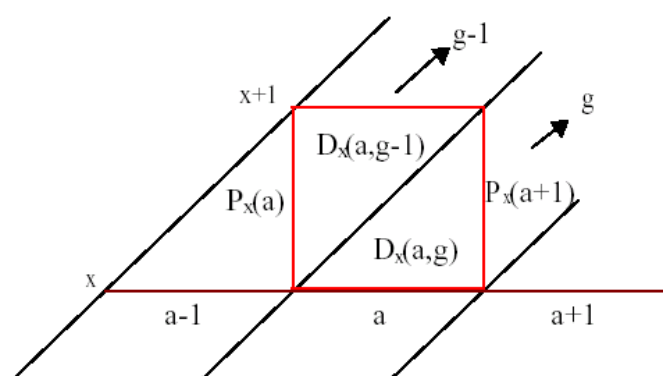


FIG. 2 – Diagramme de Lexis

En l'absence de migration, pour une année a, les décès d'âge révolu x de la génération g, rapportés à l'effectif de population fêtant son $x^{ième}$ anniversaire au cours de la même année, donnent le quotient «partiel» de mortalité q_x^1 de la manière suivante :

$$q_x^1 = \frac{D_x(a, g)}{D_x(a, g) + P_x(a+1)}$$

De même, le second quotient partiel q_x^2 est égal à

$$q_x^2 = \frac{D_x(a, g-1)}{P_x(a)}$$

Si le risque migratoire n'est pas nul, pour un âge donné, les quotients partiels précédents ne représentent plus le risque de décès recherché. D'une part, en cas de solde migratoire positif, q_x^1 sous estime le risque réel puisque $P_x(a+1)$ (population d'âge x au 1^{er} janvier de l'année a) inclut des immigrants nets qui n'ont pas connu la totalité du risque de décès sur le sol français et d'autre part, q_x^2 surestime le risque réel puisque $D_x(a, g-1)$ (décès pour la génération g-1 des personnes d'âge x durant l'année a) inclut les décès d'un certain nombre d'immigrants nets qui n'étaient pas présents dans $P_x(a)$.

¹⁰Manquaient alors la Moselle, le Bas-Rhin et le Haut-Rhin

¹¹Manquaient alors, outre l'Alsace-Lorraine : Aisne, Ardennes, Marne, Meurthe-et-Moselle, Meuse, Nord, Oise, Pas-de-Calais, Somme et Vosges.

¹²Durant toute la période 1939-1945 il manquait l'Alsace-Lorraine et, en 1943-1944, il manquait en plus la Corse

Pour prendre en compte les migrations, nous faisons l'hypothèse qu'elles se répartissent uniformément sur un intervalle d'un an. Dès lors, dans le premier triangle de Lexis, l'immigration nette est estimée à :

$$\frac{1}{2}[P_x(a+1) - P_{x-1}(a) + D_x(a, g) + D_{x-1}(a, g)]$$

Et pour obtenir l'effectif d'individus fêtant leur $x^{ième}$ anniversaire au cours de l'année a , il faut déduire ce solde de l'estimation précédente. Mais, pour calculer le quotient il faut porter au dénominateur cette nouvelle estimation diminuée de la moitié du solde migratoire. On a alors :

$$q_x^1 = \frac{D_x(a, g)}{\frac{3}{4}[D_x(a, g) + P_x(a+1)] + \frac{1}{4}[P_{x-1}(a) - D_{x-1}(a, g)]}$$

De même, pour le deuxième triangle de Lexis, on a :

$$q_x^2 = \frac{D_x(a, g-1)}{\frac{3}{4}P_x(a) + \frac{1}{4}[P_{x+1}(a+1) + D_x(a, g) + D_x(a, g-1)]}$$

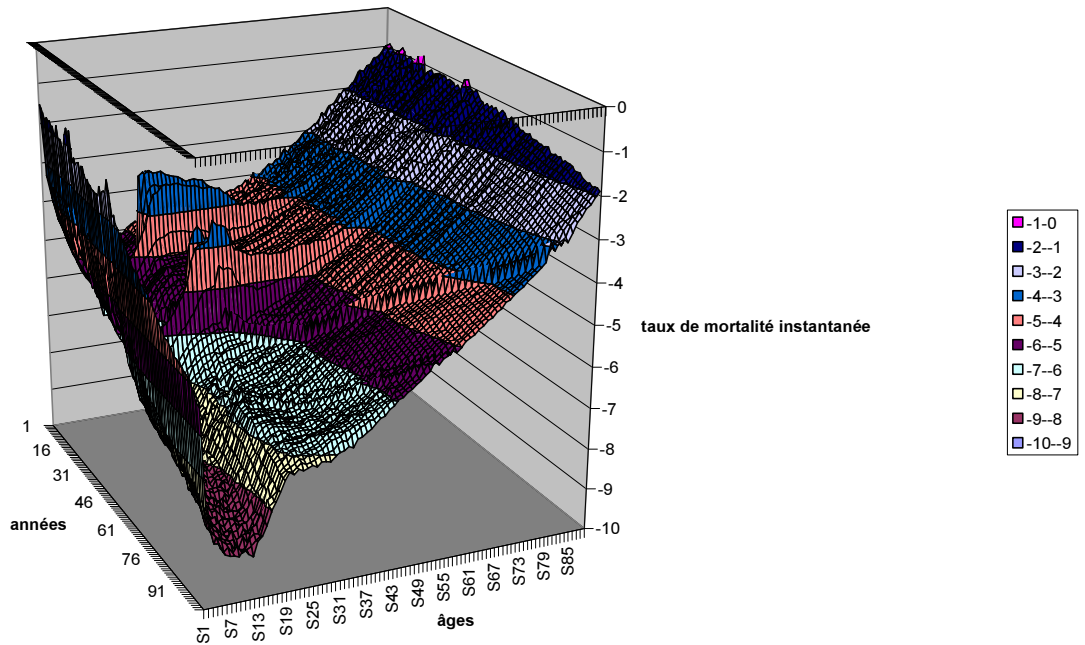
Une fois ces quotients partiels obtenus, on peut les recombinaer pour obtenir le quotient du moment prenant en compte les deux triangles d'un même carré de Lexis :

$$q_x(a) = 1 - (1 - q_x^1(a))(1 - q_x^2(a))$$

1.4.2 Mise en oeuvre de Lee Carter

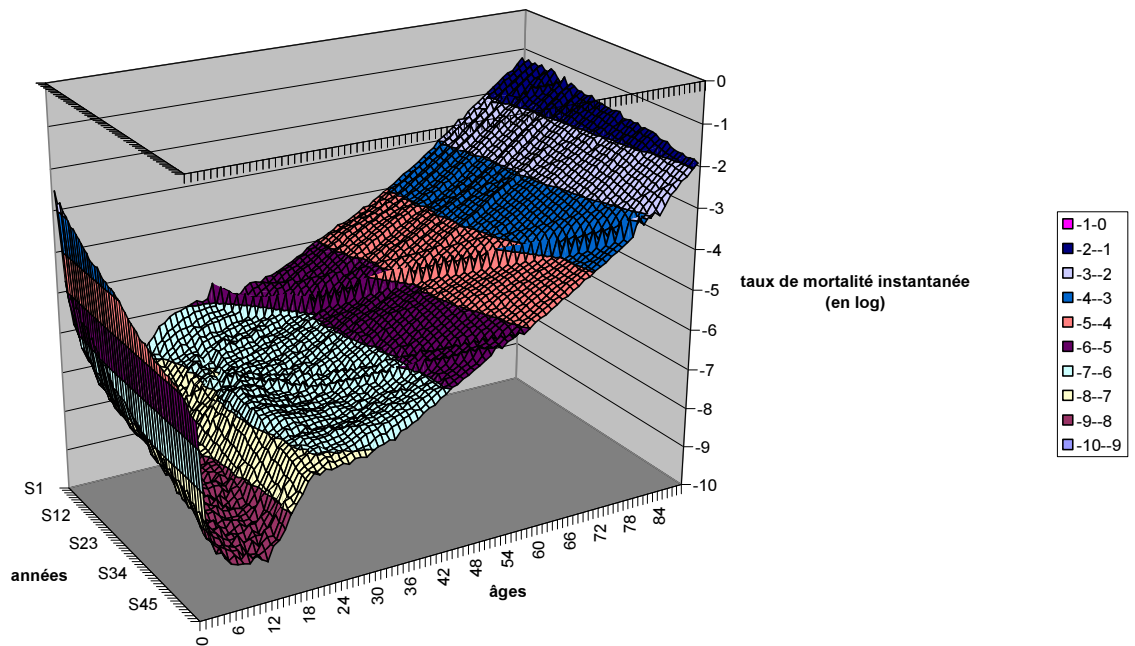
1.4.2.1 Etape 1 Après avoir apporté les corrections nécessaires, nous pouvons calculer les logarithmes des taux instantanés de mortalité à partir de données concernant l'ensemble de la population. La représentation en trois dimensions en fonction de l'âge et de l'année, nous permet de constater la présence de points aberrants liés à la forte hausse de la mortalité durant les deux guerres mondiales (voir figure ci-contre).

représentation des taux de mortalité instantanée (en log) de 1899 à 1997



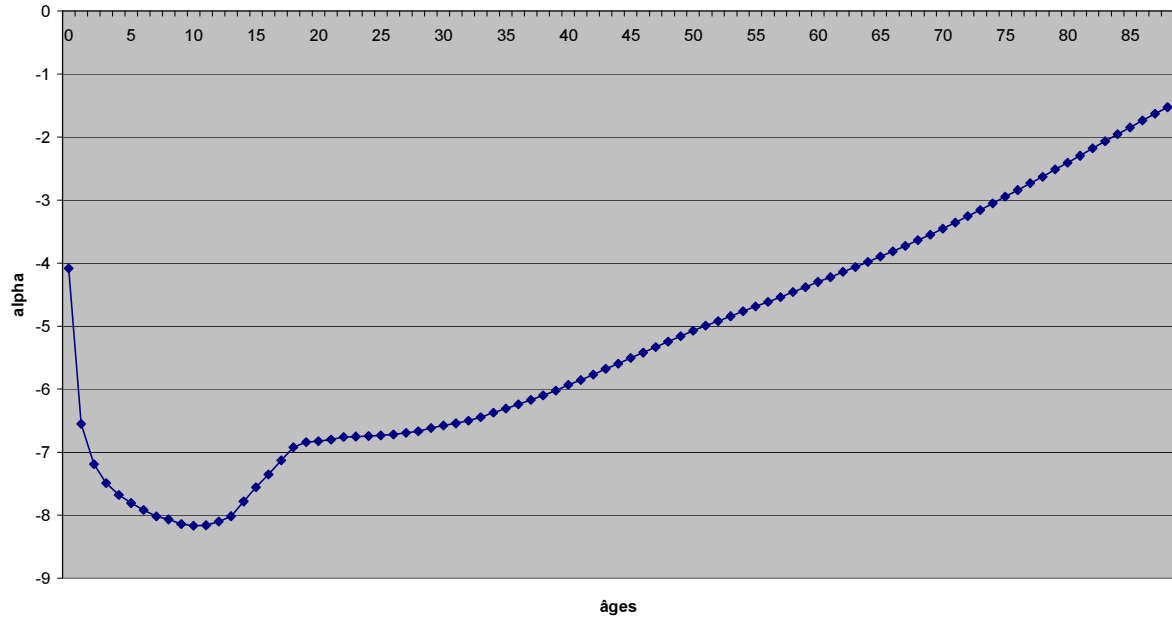
Nous avons donc choisi de restreindre notre analyse à la période 1947-1997, ce qui nous permet d'éliminer les points aberrants.

représentation des taux de mortalité instantanée (en log) de 0 à 88 ans et de 1947 à 1997



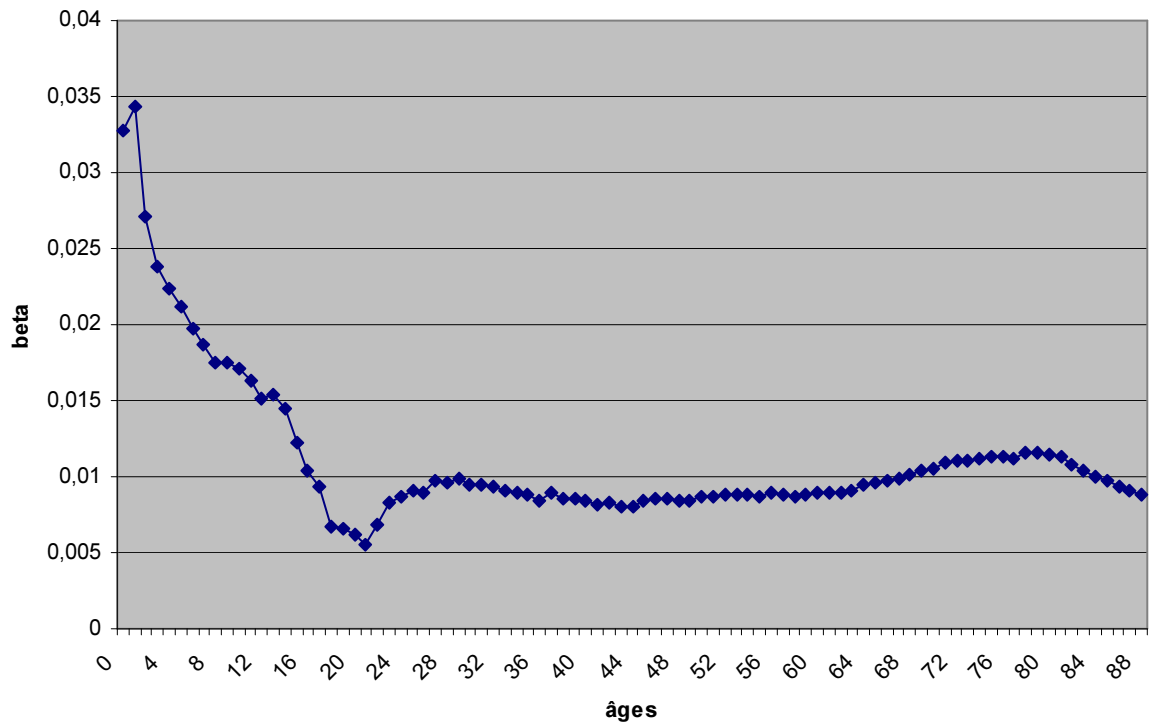
1.4.2.2 Etape 2 La figure suivante reprend l'estimation des α_x pour l'ensemble de la population. Nous pouvons y constater que la courbe des $\hat{\alpha}_x$ est conforme à nos attentes : le taux de mortalité progresse avec l'âge excepté chez les nouveaux-nés tandis que la bosse «accident» aux alentours de 20-25 ans est présente.

représentation des valeurs de alpha en fonction de l'âge
(méthode de lee carter)



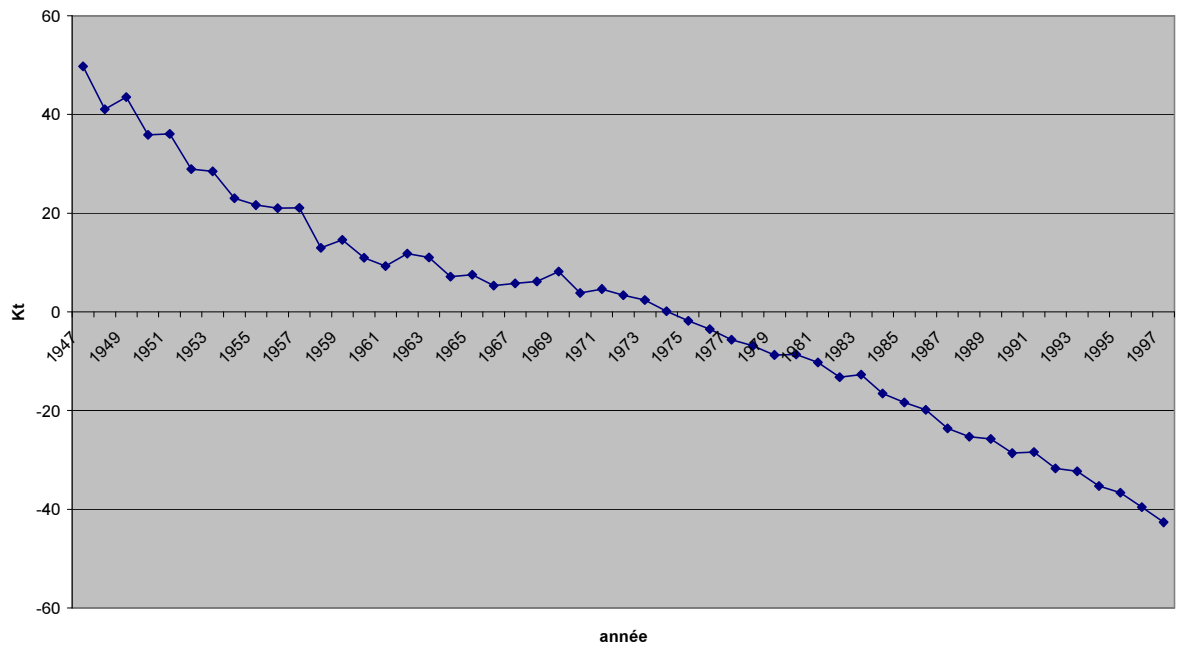
1.4.2.3 Etape 3 La décomposition en valeur singulière (effectuée sous SAS avec la proc IML) nous permet de trouver un taux d'inertie de 0.7103 ; l'approximation semble donc être de qualité. Les figures qui suivent représentent les estimations des paramètres β_x et κ_t . Les plus grandes variations temporelles du taux de mortalité ($\hat{\beta}_x$) se situent chez les jeunes et sont probablement le résultat des progrès réalisés par la médecine pour freiner la mortalité infantile et juvénile.

représentation des valeurs de beta en fonction de l'âge
(méthode de Lee Carter)



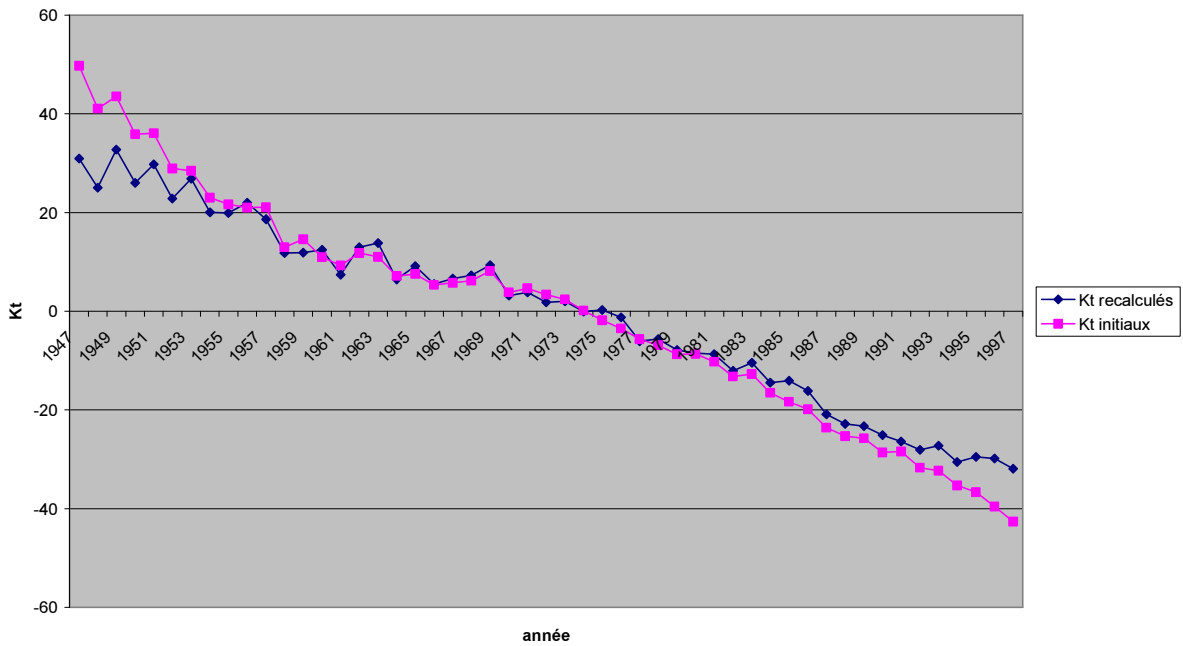
Enfin, la courbe des $\hat{\kappa}_t$ est en constante décroissance, reflétant principalement les progrès de la médecine induisant le rallongement de la durée de vie.

Evolution des K_t entre 1947 et 1997



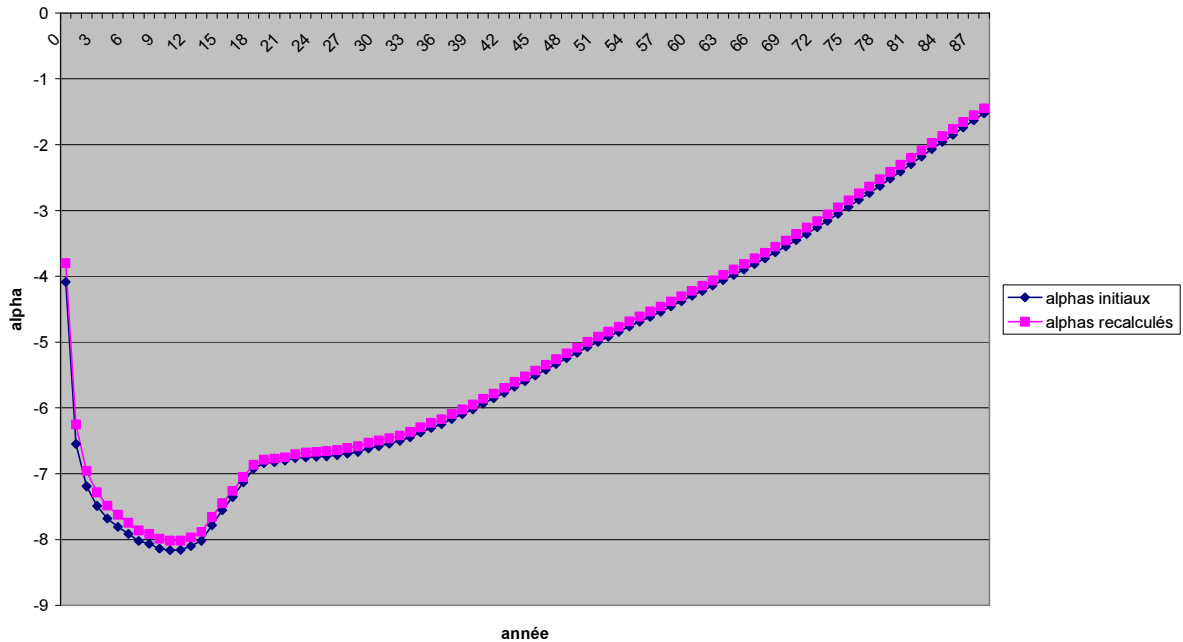
1.4.2.4 Etape 4 La ré estimation des $\hat{\kappa}_t$ nous donne les résultats suivants :

Comparaison entre les Kt initiaux et recalculés



Il faut en outre recalculer les estimations des α . Les modifications sont illustrées par le graphique qui suit. Nous pouvons remarquer que la courbe a juste subi une translation verticale.

Comparaison entre les alphas initiaux et recalculés



1.4.3 Extrapolation de la tendance temporelle

Nous disposons d'une série temporelle κ_t^* . Nous appliquons la méthodologie de Box et Jenkins à cette série, ce qui va nous permettre d'effectuer des projections de notre série jusqu'en 2097.

1.4.3.1 Stationnarisation de la série La première étape consiste à étudier si κ_t^* est bien stationnaire. Au vu des graphiques précédents, ce n'est bien évidemment pas le cas. Il est donc nécessaire de différencier la série. En outre, le test de Dickey Fuller Augmenté (ADF) appliqué à la série différenciée une fois nous confirme que celle-ci est bien stationnaire.

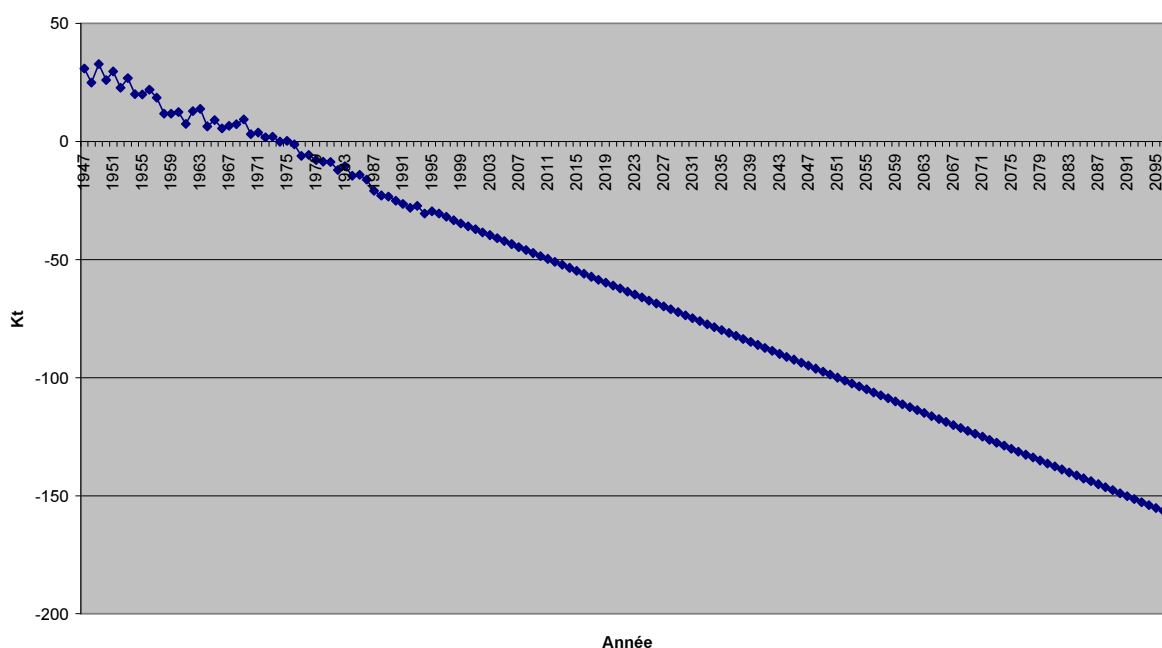
1.4.3.2 Identification du modèle L'analyse des autocorrélogrammes et autocorrélogrammes partiels obtenus avec SAS nous permet de conjecturer que la série en différence première suit un processus ARMA(1,2). L'estimation par le maximum de vraisemblance aboutit au modèle suivant :

$$\Delta\kappa_t^* - 0.71227\Delta\kappa_{t-1}^* = -1.25592 + \epsilon_t + 0.07053\epsilon_{t-1} + 0.336\epsilon_{t-2}$$

où ϵ est un bruit blanc de variance 6,92

1.4.3.3 Prévision Finalement nous pouvons projeter les valeurs de κ_t^* dans le futur. Nous avons représenté sur le graphique suivant la projection des κ_t^* à l'horizon 2097. Il convient ici d'insister sur le fait que nos 51 années d'observation ne nous autorisent normalement pas à effectuer des projections à un horizon aussi lointain.

Projection des κ_t à l'horizon 2097



1.4.4 Prévision des taux de mortalité futurs

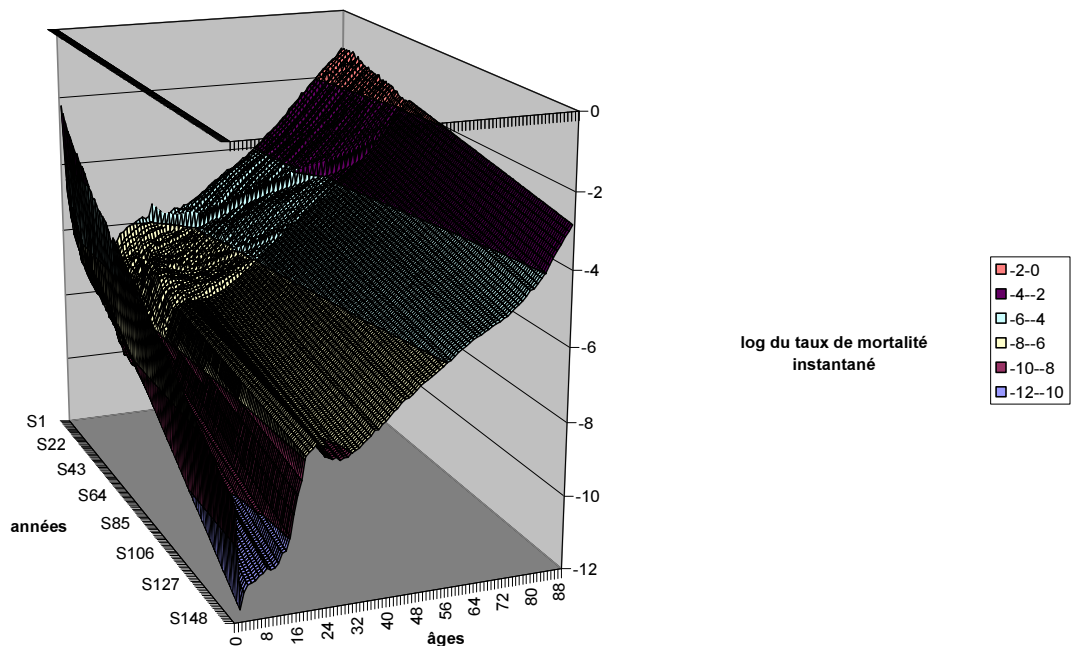
Il suffit d'utiliser les projections de κ_t^* pour obtenir les tables de mortalité prospectives. Une fois la projection $\hat{\kappa}_{1997+s}^*$, $s = 1, 2, \dots$ obtenue, nous en déduisons

$$\hat{\mu}_x(1997 + s) = e^{\alpha_x^* + \beta_x^* \hat{\kappa}_{1997+s}^*}, s = 1, 2, \dots$$

Nous avons représenté les prévisions des logarithmes des taux instantanés sur le graphique suivant :

La dernière étape consiste à fermer les tables, c'est-à-dire à reconstituer les taux de mortalité jusqu'à l'âge limite que nous nous sommes fixés (110ans). Nous suivons pour cela l'approche de Coale et Kisker que nous avons présentée précédemment.

Projection des log des taux de mortalité instantanés par la méthode de Lee Carter



1.5 Améliorations et limites de la méthode de Lee Carter

La méthode de Lee Carter a fait l'objet de plusieurs extensions. L'une des plus connues est celle proposée par Haberman et Renshaw (2003). Ces derniers se sont intéressés au rôle potentiel des méthodes de séries temporelles bivariées pour générer des prévisions quand l'approche de Lee Carter est augmentée et prend en compte les deux premières composantes de la décomposition en valeurs singulières.

Une critique émise par Gutterman et Vanderhoof (1999) porte sur l'approche purement extrapolative de la méthode de Lee et Carter. Aucune autre information que l'histoire passée ne peut être introduite dans le modèle. Si la médecine fait l'objet de nouveaux progrès, le fait que le modèle ne puisse prendre en compte cette information rendra les projections biaisées.

Par ailleurs, cette méthode repose sur les moindres carrés ordinaires, et à ce titre, il faut pour que l'estimateur soit optimal que les résidus vérifient l'hypothèse d'homoscédasticité. Ceci n'est pas très réaliste dans la mesure où les taux de mortalité sont beaucoup plus variables chez les personnes les plus âgées, en raison du nombre plus faible de décès (à cause d'effectifs très réduits).

Il est possible de s'affranchir de cette contrainte en suivant la démarche de Brouhns et Al. (2002) qui consiste à effectuer une régression poissonienne sur les décès.

2 Une amélioration du modèle de Lee-Carter : Loi de Poisson (Brouhns et al. - 2002)

2.1 Principe

Dans le modèle de Lee-Carter, afin de conserver une hypothèse d'homoscédasticité des résidus, on suppose que les erreurs sont distribuées normalement, ce qui est dans les faits très irréaliste. Le logarithme de μ est en effet bien plus volatile aux grands âges qu'aux faibles, ne serait-ce que de par le nombre bien plus faible de décès pour les âges les plus élevés.

Afin de corriger ce problème, et de tenter d'obtenir ainsi une estimation plus précise, on considère donc le modèle suivant :

$$\left| \begin{array}{l} D_{xt} \rightarrow \text{Poisson}(E_{xt}\mu_x(t)) \\ \mu_x(t) = e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, la méthode de recherche de valeur singulière ne convient plus pour l'estimation des paramètres du modèle, et on utilise la méthode du maximum de vraisemblance. On cherche donc à maximiser la quantité :

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} (D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - E_{xt}e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t})$$

La présence du terme bilinéaire $\beta_x \kappa_t$ empêche l'utilisation de fonctions prédéfinies pour la résolution. On utilise donc une méthode algorithmique.

2.2 Détail de la méthode de résolution du maximum de vraisemblance

On cherche donc à maximiser la quantité suivante :

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} (D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - E_{xt}e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t})$$

Pour cela, on utilise un algorithme unidimensionnel de Newton, dont la première application à la résolution de tels problèmes a été proposée par Goodman (1979). Cette méthode est itérative. Nous ne présentons ici que son application au problème étudié, et non pas la méthode générale.

On dispose ici de 3 paramètres, α , β et κ . Afin d'appliquer l'itération, on les initialise de la façon suivante¹³ :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_x^{(0)} &= 0 \\ \hat{\beta}_x^{(0)} &= 0 \\ \hat{\kappa}_t^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

Puis, on applique l'itération en modifiant à chaque étape les paramètres de la façon suivante :

$$\text{Etape 1 } \hat{\alpha}_x^{(\nu+1)} = \hat{\alpha}_x^{(\nu)} - \frac{\sum_t (D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(\nu)})}{-\sum_t \hat{D}_{xt}^{(\nu)}} \quad \hat{\beta}_x^{(\nu+1)} = \hat{\beta}_x^{(\nu)} \quad \hat{\kappa}_t^{(\nu+1)} = \hat{\kappa}_t^{(\nu)}$$

$$\text{Etape 2 } \hat{\kappa}_t^{(\nu+2)} = \hat{\kappa}_t^{(\nu+1)} - \frac{\sum_x (D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(\nu+1)}) \hat{\beta}_x^{(\nu+1)}}{-\sum_x \hat{D}_{xt}^{(\nu+1)} (\hat{\beta}_x^{(\nu+1)})^2} \quad \hat{\alpha}_x^{(\nu+2)} = \hat{\alpha}_x^{(\nu+1)} \quad \hat{\beta}_x^{(\nu+2)} = \hat{\beta}_x^{(\nu+1)}$$

$$\text{Etape 3 } \hat{\beta}_x^{(\nu+3)} = \hat{\beta}_x^{(\nu+2)} - \frac{\sum_t (D_{xt} - \hat{D}_{xt}^{(\nu+2)}) \hat{\kappa}_t^{(\nu+2)}}{-\sum_t \hat{D}_{xt}^{(\nu+2)} (\hat{\kappa}_t^{(\nu+2)})^2} \quad \hat{\alpha}_x^{(\nu+3)} = \hat{\alpha}_x^{(\nu+2)} \quad \hat{\kappa}_t^{(\nu+3)} = \hat{\kappa}_t^{(\nu+2)}$$

où on a ici noté $\hat{D}_{xt}^{(\nu)} = E_{xt}e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}$ le nombre estimé de décès après l'itération ν . Le critère de fin de procédure est une légère augmentation de la log vraisemblance (qu'on a fixé à 10^{-10}). Notons enfin que l'identification du modèle est assurée par la contrainte $\sum_t \kappa_t = 0$, tout comme dans le modèle de Lee-Carter.

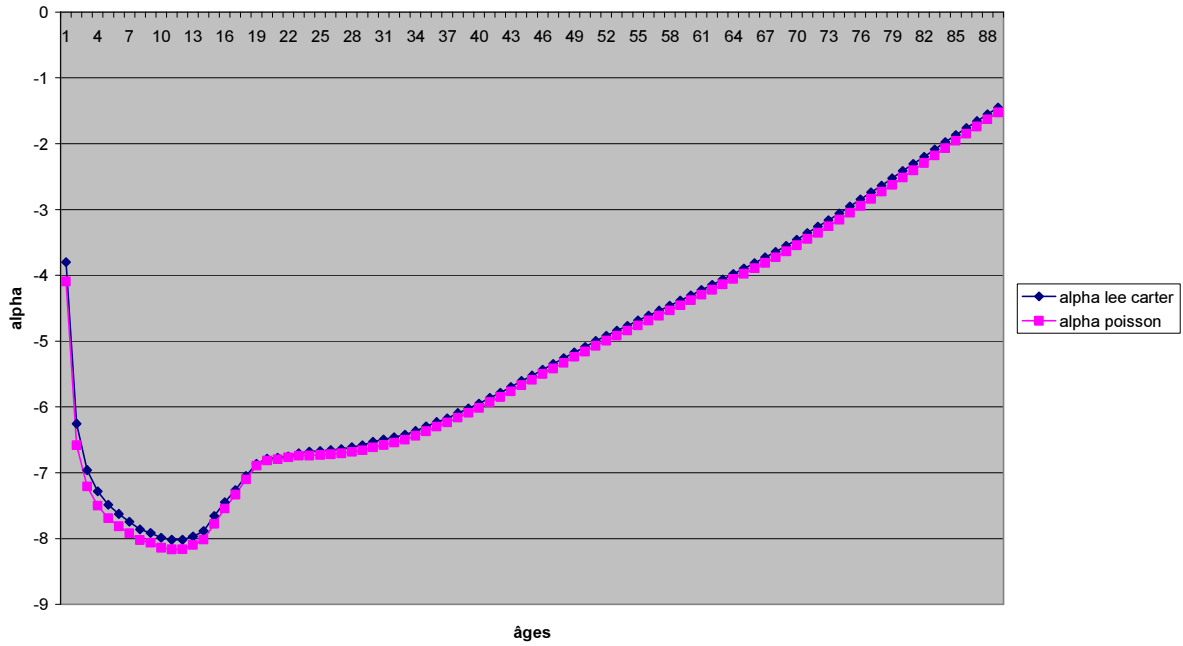
2.3 Résultats obtenus avec la régression poissonienne et comparaison avec Lee Carter.

Après avoir estimé les paramètres avec la régression poissonienne, il faut leur appliquer les mêmes contraintes que pour le modèle de Lee Carter, afin de rendre la comparaison possible.

Les estimations des paramètres alpha obtenues sont similaires à celles obtenues avec Lee Carter mais sont toutefois légèrement inférieures. Comme précédemment, le taux de mortalité progresse avec l'âge excepté chez les nouveaux-nés tandis que la bosse accident aux alentours de 20-25 ans est présente.

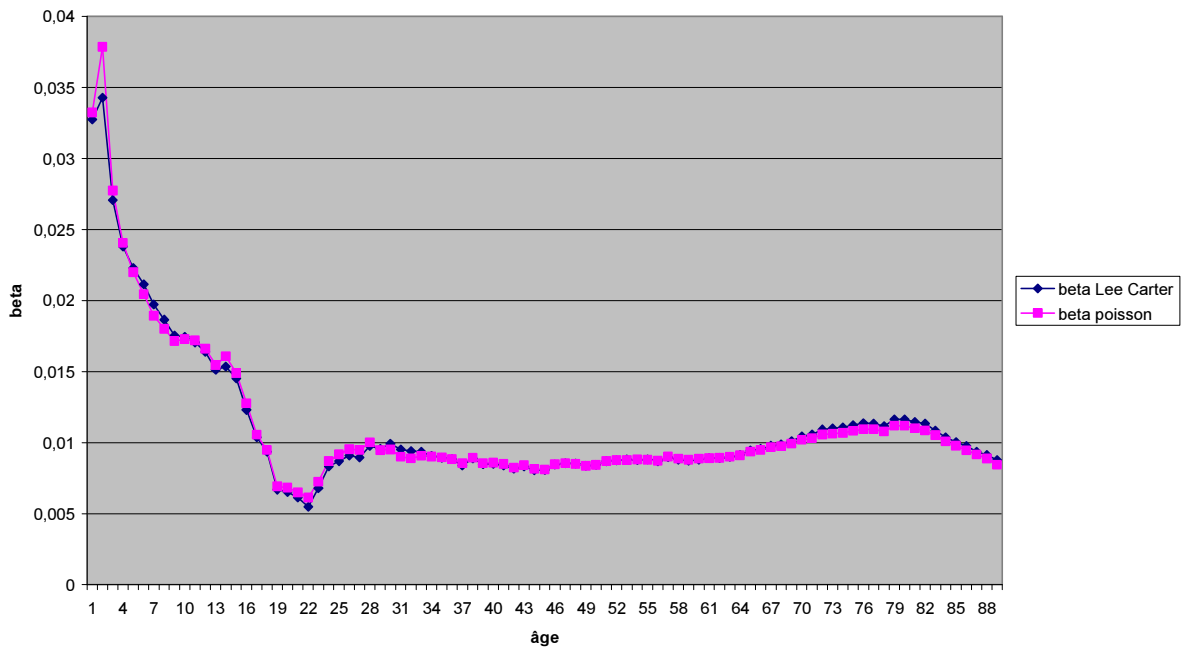
¹³La limite de convergence étant indépendante des conditions initiales, on pourrait également utiliser des variables aléatoires

Comparaison des alpha obtenus avec les méthodes de Lee Carter et de Poisson



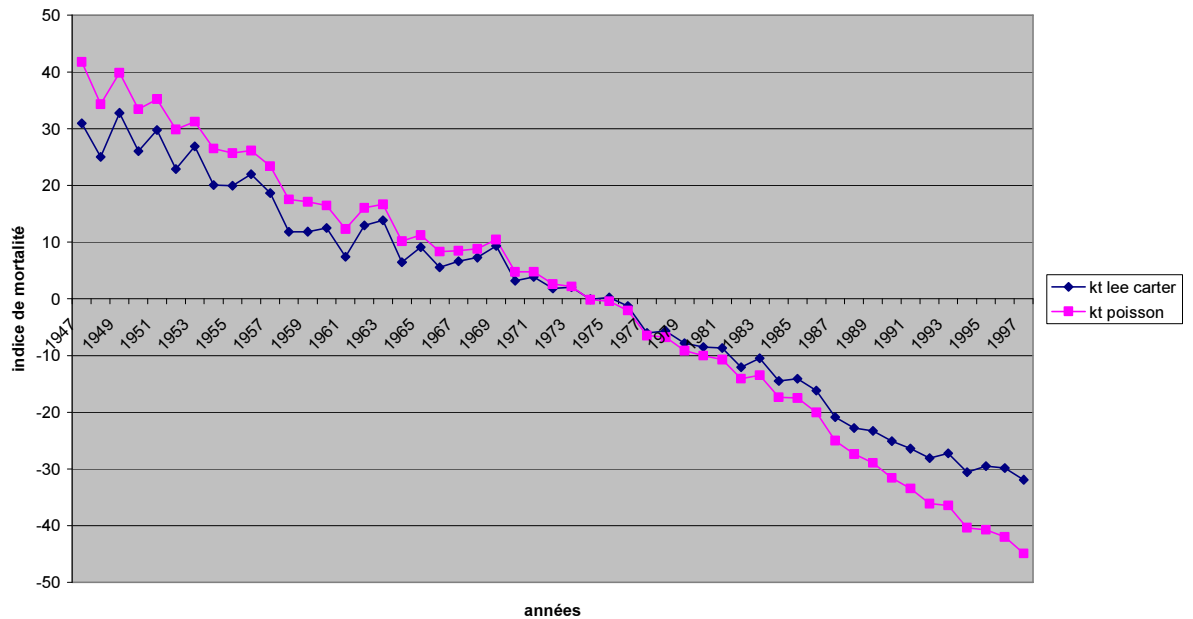
En ce qui concerne les estimations des beta, nous constatons que les valeurs sont presque identiques à celles obtenues avec Lee Carter.

Comparaison des beta obtenus avec les méthodes de Lee Carter et de Poisson



La série des \hat{k}_t , par contre, décroît beaucoup plus vite dans le cas de l'estimation par la régression poissonnienne. Ceci ne sera pas sans conséquence sur l'espérance de vie.

représentation de l'évolution de l'indice de mortalité pour la méthode de Lee Carter et pour la méthode de Poisson



2.3.1 Extrapolation de la tendance temporelle

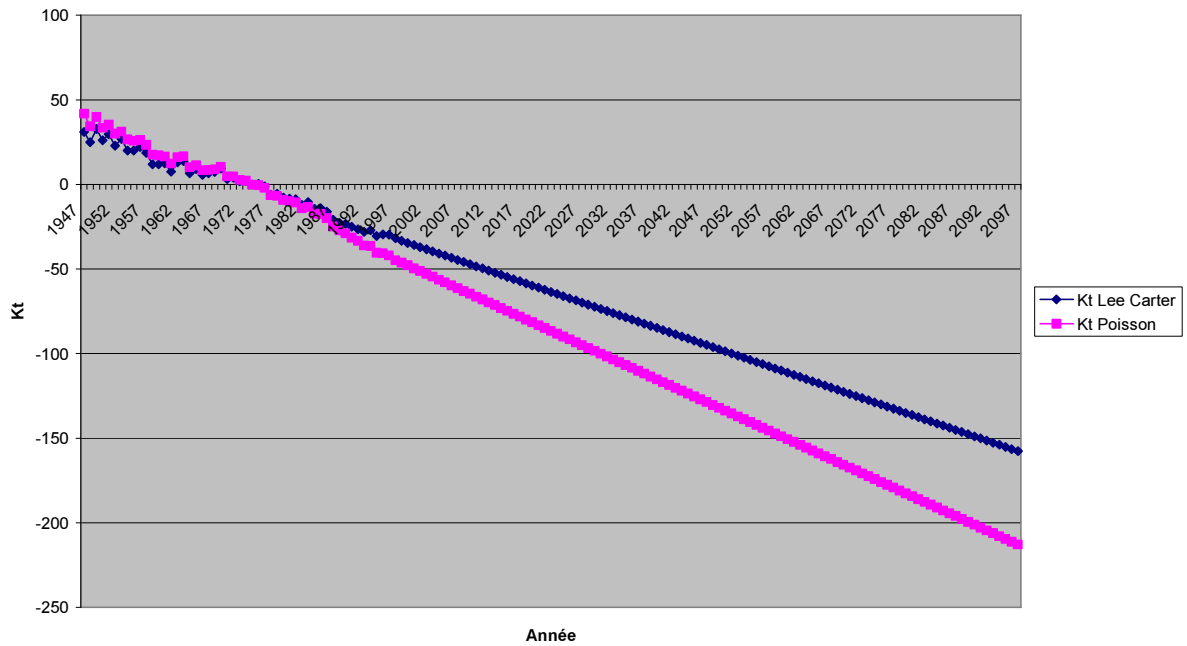
Nous adoptons ici la même démarche que pour le modèle de Lee Carter. La série des $\hat{\kappa}_t$, passée en différence première, peut être modélisée par un ARMA(1,2). L'estimation par le maximum de vraisemblance nous donne les résultats suivants.

$$\Delta\hat{\kappa}_t - 0.95120\Delta\hat{\kappa}_{t-1} = -1.68463 + \epsilon_t + 0.33241\epsilon_{t-1} + 0.38648\epsilon_{t-2}$$

où ϵ est un bruit blanc de variance 4,6

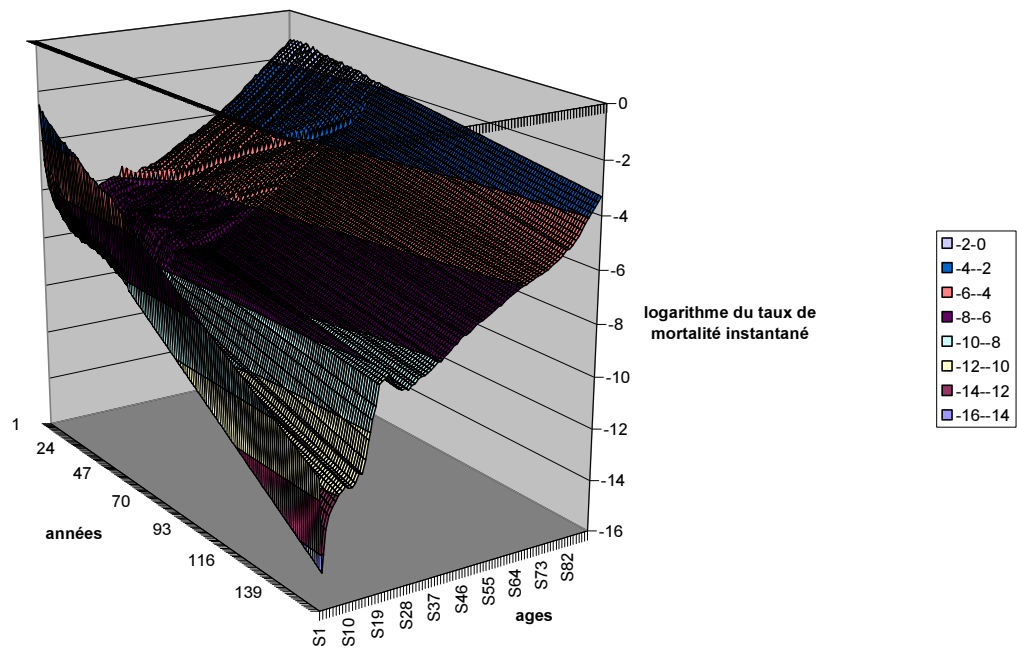
Finalement nous pouvons, comme précédemment projeter les valeurs de $\hat{\kappa}_t$ dans le futur. Nous avons représenté sur le graphique suivant les projections des $\hat{\kappa}_t$ à l'horizon 2097, ainsi que celles des κ_t^* obtenues avec Lee Carter. Nous pouvons constater qu'il y a un écart important entre les projections des deux séries.

Comparaison des previons de Kt avec Lee Carter et avec Poisson



Nous avons déterminé les tables de mortalité prospectives en suivant toujours la même démarche que celle utilisée pour Lee Carter. La représentation graphique des logarithmes des taux est donnée sur la figure qui suit :

Projection des logarithmes des taux de mortalités (poisson)



Pour obtenir des tables de mortalité prospective complètes, il suffit de fermer la table comme nous l'avons vu précédemment.

Troisième partie

Application aux calculs actuariels

1 Engagements Viagers

Parmi les engagements viagers, on trouve les engagements viagers en cas de vie, les engagements viagers en cas de décès ainsi que les assurances et rentes de survie. Tout d'abord, les engagements viagers en cas de vie sont des engagements de régler des capitaux à des époques prédéterminées en cas de survie d'une tête assurée ou d'un groupe de têtes. Ils reposent donc sur la détermination de la survie probable d'un individu ou d'un groupe de têtes.

Il existe deux types d'engagements en cas de vie, qui sont d'une part le capital différé, et d'autre part les annuités viagères.

1.1 Le capital différé

Le capital différé est l'engagement de verser x euros à une époque fixée à l'avance en cas de survie à ce moment là d'une tête ou d'un groupe assuré.

Dans le cas d'une tête d'âge x à la souscription, on désigne ainsi par E_x^n l'engagement de verser 1 euro à l'époque n si l'assuré atteint l'âge $x + n$.

On a donc, $E_x^n = \frac{p_x^n}{(1+i)^n} = v^n \cdot p_x^n$ avec $v = \frac{1}{1+i}$

De plus, $p_x^t = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ donc $E_x^n = v^{x+n} \cdot \frac{l_{x+n}}{v^x \cdot l_x}$

On note alors $D_x = v^x \cdot l_x$ le nombre de commutation et pour bénéficier du contrat l'assuré doit verser :

$$E_x^n = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

1.2 Annuités Viagères

1.2.1 Théorie

Une annuité viagère est une suite de versements périodiques payables en cas de survie d'une tête ou d'un groupe.

Dans ce cas, une annuité sur une tête d'âge x comportant des paiements toutes les k années entre les époques m et $m + n$ s'exprime comme une somme de capitaux différés. Si $f(j)$ est la valeur du j ème paiement, la valeur de l'annuité est donc :

$$(fa)_x^{(m|n)^{(k)}} = \sum_{j=1}^{nk} E_x^{m+\frac{j}{k}} \cdot f(j)$$

Dans le cas d'une annuité sur une tête d'âge x comportant des paiements d'un euro tous les ans entre les époques m et $m + n$, on a ainsi :

$$a_x^{m|n} = \sum_{j=1}^n E_x^{m+j}$$

Donc

$$a_x^{m|n} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=1}^n D_{x+m+j}$$

On note $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_\omega$ où ω désigne la borne supérieure de la durée de la vie humaine (ω à peu près égal à 100 ans).

Alors, pour bénéficier de ce contrat, l'assuré doit verser :

$$a_x^{m|n} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

Exemple : On considère le cas d'une annuité sur une tête de 40 ans comportant des paiements d'un euro tous les ans à partir de 50 ans jusqu'à 70 ans :
Avec la table TV¹⁴ 88-90 où $i = 0\%$, on trouve :

$$a_{40}^{10|20} = \frac{N_{40+10+1} - N_{40+10+20+1}}{D_{40}} = 18,69$$

Avec la table TV 88-90 où $i = 3,5\%$, on trouve :

$$a_{40}^{10|20} = \frac{N_{40+10+1} - N_{40+10+20+1}}{D_{40}} = 9,48$$

Avec la table TD 88-90 où $i = 3,5\%$, on trouve :

$$a_{40}^{10|20} = \frac{N_{40+10+1} - N_{40+10+20+1}}{D_{40}} = 8,66$$

1.2.2 Mise en pratique avec les données

D'après les tables de mortalité établies, on dispose du taux de mortalité instantané μ . A partir de celui-ci, on peut déterminer une table prospective des nombres probables de vivants l_x en fonction des l_x des années précédentes.

En effet, si l'on dispose de l_x pour une date t alors $l_{x+1} = l_x * (1 - \mu)$

Les nombres probables de vivants déterminés, les nombres de commutation peuvent être calculés ainsi que les annuités.

Si l'on effectue ces calculs avec d'une part les μ estimés avec la méthode de Lee Carter et d'autre part les μ estimés avec la méthode de Poisson, on trouve des résultats quasiment identiques, les annuités étant à peine plus élevées avec les estimations de la méthode de Poisson.

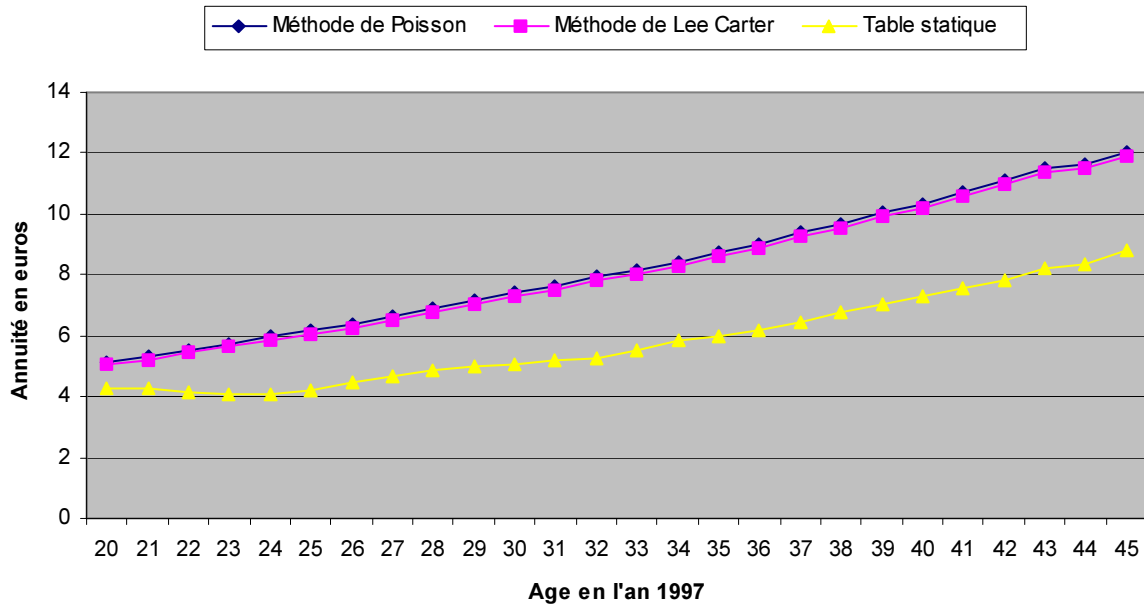
Par exemple, la table suivante donne l'annuité qui permet de recevoir un euro par an pendant 20 ans entre 50 et 70 ans suivant l'âge du souscripteur en l'an 2000 :

Age en 2000	Poisson)	Lee Carter	Age en 2000	Poisson)	Lee Carter
20	5.23	5.15	33	8.19	8.07
21	5.42	5.33	34	8.48	8.35
22	5.61	5.52	35	8.77	8.64
23	5.80	5.71	36	9.08	8.94
24	6.00	5.91	37	9.40	9.26
25	6.21	6.11	38	9.73	9.59
26	6.44	6.33	39	10.07	9.93
27	6.67	6.56	40	10.42	10.28
28	6.91	6.80	41	10.79	10.64
29	7.15	7.04	42	11.28	11.13
30	7.40	7.28	43	11.56	11.41
31	7.65	7.54	44	12.17	12.02
32	7.92	7.80	45	12.47	12.32

ANNUITÉ EN EURO SUIVANT LA MÉTHODE DE CALCUL EMPLOYÉE

Maintenant, si l'on compare de tels calculs aux annuités dans le cas d'une table statique, on s'aperçoit que les calculs des annuités avec la table statique sous-estiment fortement le coût d'un tel engagement viager.

Annuité pour obtenir un euro par an entre 50 et 70 ans



1.3 Rente Viagère

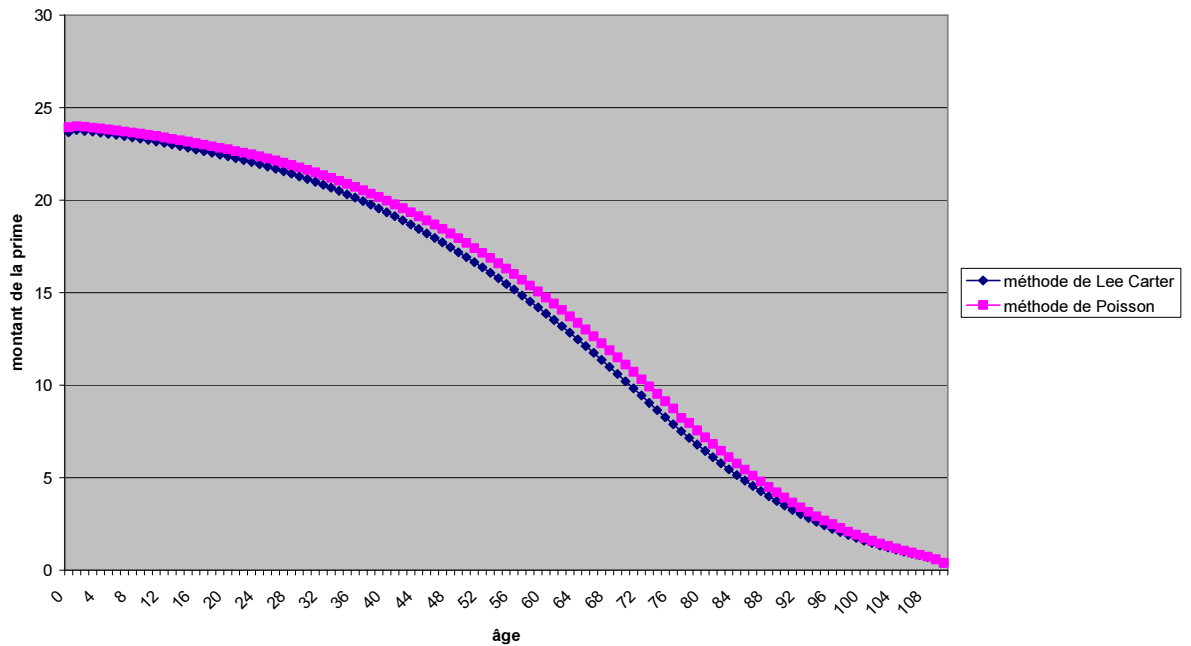
A partir des résultats obtenus, nous pouvons comparer les montants de la prime pure pour rente viagère obtenus avec les deux méthodes. Les valeurs obtenues pour le montant de la prime diffèrent peu.

Rappel : prix d'une rente viagère vendue l'année t à un individu d'âge x

$$a_x(t) = \sum_{k \geq 0} \prod_{j=0}^k p_{x+j}(t+j) \frac{1}{1+i}^{k+1}$$

Le graphique suivant montre l'évolution du montant de la prime d'une rente viagère souscrite en 1997 (en prenant un taux d'intérêt de 4%) en fonction de l'âge du souscripteur

prime pure d'une rente viagère souscrite en 1997 en fonction de l'âge



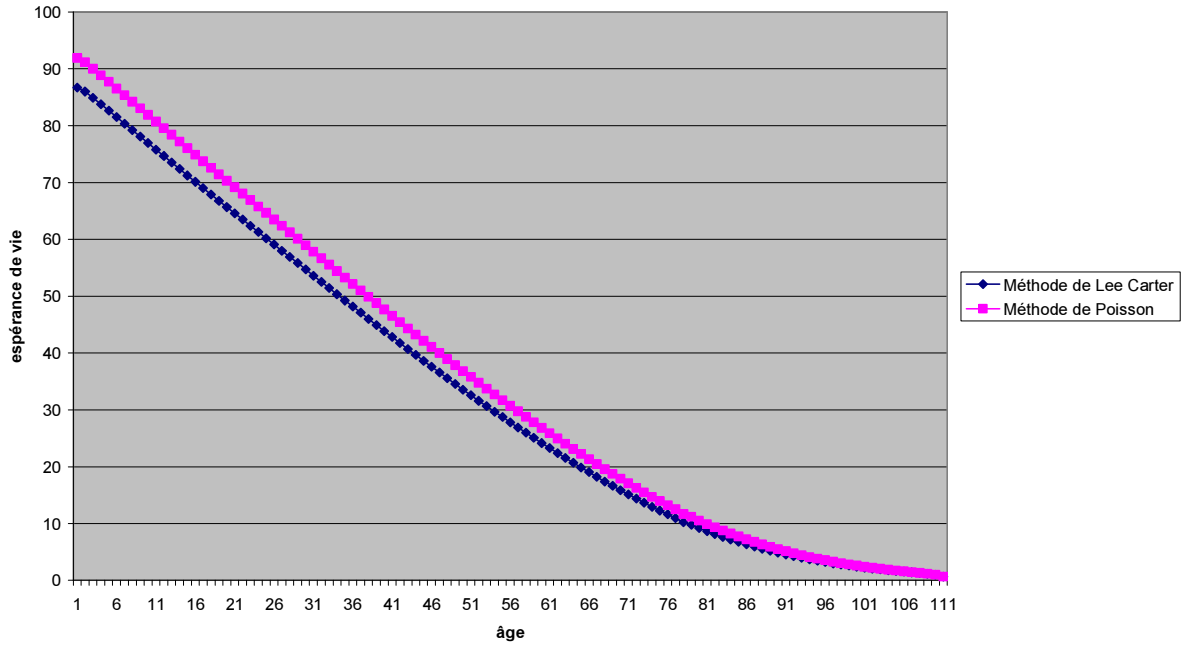
2 Espérance de vie

Nous pouvons aussi comparer l'espérance de vie à la naissance et l'espérance de vie pour chaque âge en 1997. Comme nous l'avons prévu, les espérances de vie obtenues avec la méthode de Poisson sont supérieures à celles obtenues avec Lee Carter.

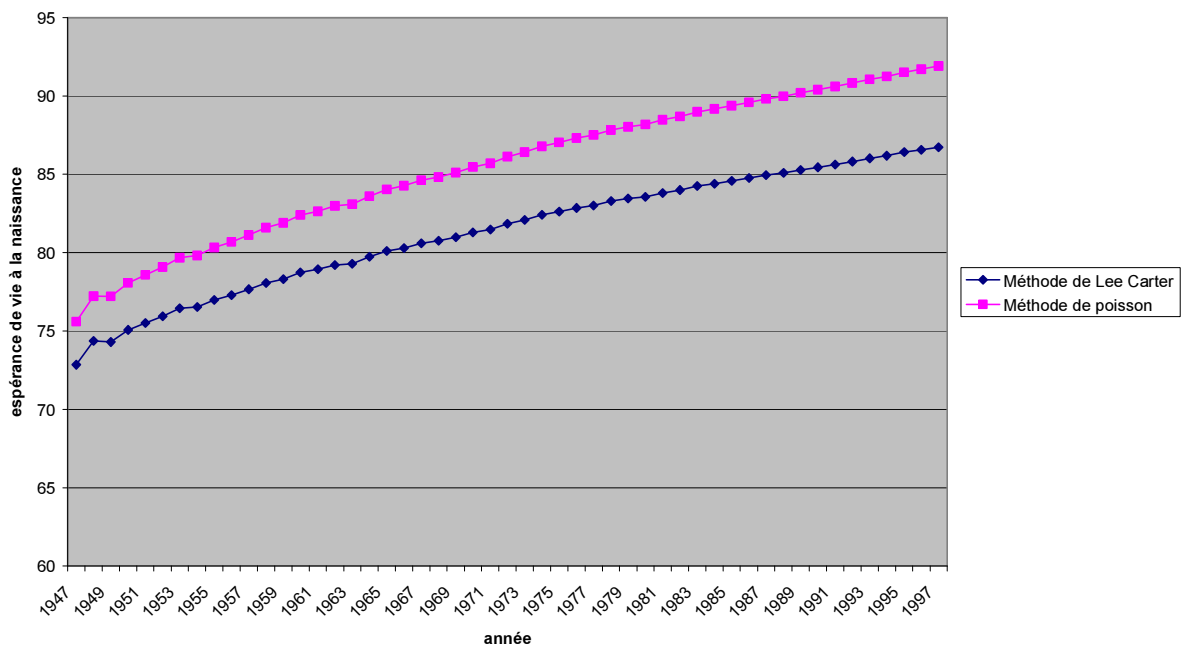
$$e_x(t) = \frac{1 - e^{-\mu_x(t)}}{\mu_x(t)} + \sum_{k \geq 1} \prod_{j=0}^{k-1} e^{-\mu_{x+j}(t+j)} \frac{1 - e^{-\mu_{x+k}(t+k)}}{\mu_{x+k}(t+k)}$$

Les graphiques suivants montrent l'évolution de l'espérance de vie à la naissance et l'espérance de vie pour chaque âge en 1997.

Espérance de vie en fonction de l'âge en 1997



Evolution de l'espérance de vie à la naissance



Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons construit des tables de mortalité prospectives en utilisant deux méthodes différentes. La première, celle proposée par Lee et Carter (1992, 2000), ne prend pas en compte l'hétéroscédasticité des résidus. La seconde, développée par Brouhns et al (2002), permet de s'affranchir de l'hypothèse d'homoscédasticité. Cependant, les résultats obtenus diffèrent sensiblement au niveau de l'évolution de la mortalité globale. Les taux de mortalité estimés diminuent plus rapidement avec la méthode de poisson qu'avec la méthode de Lee Carter.

Grâce aux projections réalisées, nous avons pu, pour chacune des deux méthodes, étudier l'espérance de vie et les montants des primes pour des rentes viagères en prenant en compte l'évolution future présumée de la mortalité. Logiquement, il apparaît que les montants des primes et les espérances de vie sont supérieurs lorsque nous utilisons les projections obtenues avec la méthode de Poisson. Par ailleurs, les montants des primes obtenus sont supérieurs à ceux calculés sur des tables statiques.

Cependant, les deux méthodes que nous mettons en œuvre sont des méthodes purement extrapolatives et ne s'intéressent pas aux facteurs sous jacents à l'évolution de la mortalité. Une variation de ces facteurs dans le futur rendra caduque nos projections.

Enfin, nous avons choisi de travailler sur l'ensemble de la population. Il aurait également été possible d'étudier séparément les hommes et les femmes afin de pouvoir vérifier si l'évolution de la mortalité est différente suivant le sexe.

Annexes

1 Exemple de table de mortalité

Exemple d'une table des mortalités (année 1997 - hommes et femmes réunies)

x	Sx	D(x,x+a)	aQx	Ex	P(x,x+a)
0	100000	475	0,00475	78,46	99762
1	99525	45	0,00045	77,83	99502
2	99480	26	0,00026	76,86	99467
3	99454	23	0,00023	75,88	99443
4	99431	18	0,00018	74,9	99422
5	99414	15	0,00015	73,91	99406
6	99399	14	0,00014	72,92	99392
7	99385	13	0,00014	71,93	99379
8	99372	13	0,00013	70,94	99365
9	99359	15	0,00015	69,95	99351
10	99344	13	0,00013	68,96	99337
11	99330	12	0,00012	67,97	99324
12	99318	17	0,00017	66,98	99310
13	99302	19	0,00019	65,99	99292
14	99283	24	0,00024	65	99271
15	99259	32	0,00032	64,02	99243
16	99227	39	0,0004	63,04	99207
17	99187	47	0,00048	62,07	99164
18	99140	63	0,00063	61,09	99109
19	99078	74	0,00074	60,13	99041
20	99004	68	0,00069	59,18	98970
21	98936	78	0,00079	58,22	98897
22	98858	74	0,00075	57,26	98821
23	98784	77	0,00078	56,31	98745
24	98707	79	0,0008	55,35	98667
25	98628	74	0,00075	54,39	98590
26	98553	80	0,00081	53,43	98513
27	98473	81	0,00082	52,48	98433
28	98392	78	0,00079	51,52	98353
29	98314	87	0,00088	50,56	98271
30	98227	95	0,00097	49,6	98180
31	98132	96	0,00098	48,65	98084
32	98036	104	0,00106	47,7	97984
33	97932	98	0,001	46,75	97883
34	97834	116	0,00119	45,8	97776
35	97718	123	0,00125	44,85	97657
36	97595	132	0,00135	43,91	97529
37	97463	141	0,00145	42,96	97393
38	97322	155	0,00159	42,03	97245
39	97167	173	0,00178	41,09	97081
40	96994	178	0,00183	40,16	96905
41	96816	203	0,00209	39,24	96715
42	96614	216	0,00224	38,32	96505
43	96397	243	0,00252	37,4	96276

55	91980	549	0,00597	26,87	91706
56	91432	589	0,00645	26,03	91137
57	90842	604	0,00665	25,2	90540
58	90238	676	0,0075	24,36	89900
59	89562	722	0,00806	23,54	89201
60	88840	762	0,00858	22,73	88459
61	88078	826	0,00938	21,92	87665
62	87251	891	0,01021	21,12	86806
63	86361	962	0,01114	20,34	85880
64	85398	1020	0,01195	19,56	84888
65	84378	1096	0,01299	18,79	83830
66	83282	1165	0,01399	18,03	82700
67	82117	1283	0,01563	17,28	81475
68	80834	1337	0,01654	16,55	80165
69	79497	1449	0,01823	15,82	78772
70	78048	1546	0,01981	15,1	77275
71	76502	1622	0,0212	14,39	75691
72	74880	1754	0,02342	13,7	74003
73	73126	1877	0,02567	13,01	72187
74	71249	1990	0,02793	12,34	70254
75	69259	2137	0,03085	11,68	68190
76	67122	2278	0,03393	11,04	65983
77	64844	2435	0,03755	10,41	63626
78	62409	2631	0,04215	9,8	61094
79	59778	2828	0,04731	9,2	58364
80	56950	2953	0,05185	8,64	55474
81	53998	3167	0,05865	8,08	52414
82	50831	3230	0,06354	7,55	49216
83	47601	3473	0,07297	7,03	45865
84	44128	3585	0,08124	6,55	42336
85	40543	3740	0,09225	6,08	38673
86	36803	3777	0,10262	5,65	34915
87	33027	3789	0,11471	5,24	31132
88	29238	3772	0,12902	4,85	27352
89	25466	3714	0,14584	4,5	23609
90	21752	3445	0,15838	4,18	20029
91	18307	3204	0,17503	3,87	16704
92	15102	2887	0,19119	3,58	13659
93	12215	2519	0,20619	3,31	10956
94	9696	2205	0,22736	3,04	8594
95	7492	2039	0,27213	2,79	6472
96	5453	1561	0,28629	2,65	4672
97	3892	1159	0,29784	2,51	3312
98	2733	865	0,31646	2,37	2300
99	1868	621	0,33248	2,23	1557
100	1247	441	0,35374	2,09	1026
101	806	308	0,38275	1,96	652
102	497	204	0,40941	1,86	396
103	294	125	0,42617	1,81	231
104	169	69	0,41045	1,78	134
105	99	1,68	77		

2 Résultats Détaillés

2.1 Calcul des alpha

âge	alpha Lee Carter	alpha poisson	âge	alpha Lee Carter	alpha poisson
0	-3,801473394	-4,090325521	45	-5,432628448	-5,500337523
1	-6,252202981	-6,581508481	46	-5,345420668	-5,414705257
2	-6,957611774	-7,208406972	47	-5,259302015	-5,329286967
3	-7,282402665	-7,502028202	48	-5,169533254	-5,238223595
4	-7,486758426	-7,688509724	49	-5,08731052	-5,156778834
5	-7,624626692	-7,812752798	50	-4,996502952	-5,068833975
6	-7,746781099	-7,919265526	51	-4,919328014	-4,992236199
7	-7,860527579	-8,021534851	52	-4,843400285	-4,91662989
8	-7,914800742	-8,065494495	53	-4,767440055	-4,840144453
9	-7,988604833	-8,138950304	54	-4,686102529	-4,759199605
10	-8,018370461	-8,164212879	55	-4,613001742	-4,685017854
11	-8,018322771	-8,160645448	56	-4,53735748	-4,611726071
12	-7,968436461	-8,0976219	57	-4,460541041	-4,533749103
13	-7,885232318	-8,014436656	58	-4,381230061	-4,453682268
14	-7,658677925	-7,776707085	59	-4,303469589	-4,376776748
15	-7,448459008	-7,544778061	60	-4,221718146	-4,295033165
16	-7,262984614	-7,330266524	61	-4,144138684	-4,218330558
17	-7,049324233	-7,102249132	62	-4,062555716	-4,137452345
18	-6,865807725	-6,892130844	63	-3,980214958	-4,05580021
19	-6,785282317	-6,814938135	64	-3,897287463	-3,974917781
20	-6,772006419	-6,794002966	65	-3,81233287	-3,891022485
21	-6,751258592	-6,766153244	66	-3,728260444	-3,808650934
22	-6,703426422	-6,74032138	67	-3,64317506	-3,724141013
23	-6,68052105	-6,738743552	68	-3,548313578	-3,632568877
24	-6,667546989	-6,730014545	69	-3,456859983	-3,543786861
25	-6,655376041	-6,72110147	70	-3,357960939	-3,446664685
26	-6,640646034	-6,704484423	71	-3,261385421	-3,353500007
27	-6,61065671	-6,684305526	72	-3,16066967	-3,253349632
28	-6,584326432	-6,658310009	73	-3,059560504	-3,152695188
29	-6,53023931	-6,612569744	74	-2,953615	-3,048737604
30	-6,496980045	-6,57663043	75	-2,846301974	-2,942031676
31	-6,461487555	-6,541771059	76	-2,741123488	-2,836376622
32	-6,418624615	-6,497240528	77	-2,634414552	-2,727971554
33	-6,366408104	-6,438289402	78	-2,526551148	-2,624487037
34	-6,29653782	-6,367897293	79	-2,414955239	-2,512795105
35	-6,229000461	-6,300007364	80	-2,307521007	-2,403579775
36	-6,170400847	-6,235989358	81	-2,198978784	-2,293760455
37	-6,09181836	-6,163251073	82	-2,085444534	-2,17795704
38	-6,022901464	-6,091342359	83	-1,975085519	-2,063871135
39	-5,950638702	-6,016973978	84	-1,868261635	-1,954708027
40	-5,858742	-5,92528406	85	-1,763410006	-1,847667926
41	-5,783920441	-5,846349179	86	-1,655826209	-1,736767672
42	-5,696780254	-5,762555285	87	-1,549489025	-1,62858343
43	-5,606019624	-5,667766926	88	-1,447042445	-1,524596518
44	-5,523345034	-5,587303144			

2.2 Calcul des beta

âge	beta Lee Carter	beta poisson	âge	beta Lee Carter	beta poisson
0	0,032755772	0,033234987	45	0,008458018	0,008468921
1	0,034279867	0,037856878	46	0,008559279	0,008555984
2	0,027062958	0,027744675	47	0,008527641	0,008499378
3	0,023800276	0,024052747	48	0,008369378	0,008362637
4	0,022306529	0,02199631	49	0,008444988	0,008431041
5	0,021150298	0,020452288	50	0,008689821	0,008698291
6	0,019730449	0,018932024	51	0,008747893	0,008765536
7	0,018650058	0,018004125	52	0,008802234	0,00875933
8	0,017539149	0,017149971	53	0,008758973	0,008802218
9	0,01744311	0,01727696	54	0,00881921	0,008795129
10	0,017047758	0,017191268	55	0,008697962	0,00872572
11	0,016379491	0,016603133	56	0,008979926	0,009024133
12	0,015120791	0,015458059	57	0,008814797	0,008864523
13	0,015336842	0,016071574	58	0,008727381	0,008792138
14	0,014520382	0,014899726	59	0,008805214	0,008860339
15	0,012295987	0,012759238	60	0,008899211	0,008909674
16	0,010385279	0,01056464	61	0,008924184	0,008920984
17	0,009367765	0,009476708	62	0,008999295	0,009003615
18	0,006690134	0,006913296	63	0,009130027	0,009096177
19	0,006519021	0,006834747	64	0,009445128	0,009371886
20	0,006149838	0,006493602	65	0,009550032	0,009474139
21	0,005488203	0,006123427	66	0,009781361	0,009676417
22	0,006794321	0,007245424	67	0,009874506	0,0097441
23	0,008321009	0,008694272	68	0,010097186	0,009935427
24	0,00869972	0,009175566	69	0,010448183	0,010200168
25	0,009090789	0,009531489	70	0,010574573	0,010305567
26	0,008961405	0,009484761	71	0,010925088	0,010578015
27	0,009768581	0,010009421	72	0,010993085	0,010624277
28	0,009571489	0,009468258	73	0,011082606	0,01068647
29	0,009930635	0,009513401	74	0,0112349	0,010833647
30	0,009516728	0,0090097	75	0,011361514	0,010945898
31	0,009409761	0,008888867	76	0,01133597	0,010944425
32	0,009366847	0,009069664	77	0,011160045	0,010779584
33	0,009061188	0,00901759	78	0,011638072	0,011187335
34	0,008935528	0,008958114	79	0,01162478	0,011189635
35	0,008842051	0,008841962	80	0,011459492	0,011002914
36	0,008407471	0,008552214	81	0,011348075	0,010860808
37	0,00888203	0,008930329	82	0,010845015	0,010514077
38	0,00848795	0,008558674	83	0,010377199	0,010078566
39	0,008498804	0,008577534	84	0,010046064	0,009779127
40	0,008401626	0,008494621	85	0,009762047	0,009446655
41	0,008163338	0,008237466	86	0,009350053	0,009152744
42	0,008335674	0,008413532	87	0,009126008	0,008879376
43	0,008069831	0,008152136	88	0,008785736	0,008446985
44	0,008081117	0,008110613			

2.3 Calcul des Kt

année	kt lee carter	kt poisson
1947	30,96255028	41,78144519
1948	25,01908412	34,32319892
1949	32,77078	39,86157168
1950	26,04622299	33,45551593
1951	29,74823117	35,19324209
1952	22,85851005	29,8758614
1953	26,86385665	31,22384221
1954	20,06233182	26,47741013
1955	19,96510514	25,67512396
1956	21,99818741	26,14184088
1957	18,63689285	23,39085743
1958	11,81079893	17,54924996
1959	11,85366376	17,10255528
1960	12,47653846	16,42927294
1961	7,4242106	12,29711857
1962	12,97913706	16,01561103
1963	13,84384371	16,66403275
1964	6,478836528	10,15306674
1965	9,113639236	11,22845592
1966	5,541701316	8,317668221
1967	6,631865002	8,458777832
1968	7,270206666	8,814349664
1969	9,334854072	10,42738918
1970	3,193108558	4,747031566
1971	3,848905804	4,783250585
1972	1,822106796	2,611909112
1973	2,024826917	2,185993908
1974	-0,067761076	-0,191539301
1975	0,250731706	-0,407643817
1976	-1,257993395	-2,081920318
1977	-6,04967021	-6,507553963
1978	-5,65695098	-6,769967292
1979	-7,833395046	-9,145730362
1980	-8,489565168	-10,01744533
1981	-8,663698051	-10,70801604
1982	-12,06156754	-14,09535477
1983	-10,46337273	-13,45198777
1984	-14,46674009	-17,35219488
1985	-14,08043633	-17,50175199
1986	-16,15451391	-20,03226458
1987	-20,88149921	-25,00629724
1988	-22,79753243	-27,36014991
1989	-23,28827693	-28,93492491
1990	-25,08158064	-31,58810816
1991	-26,42235523	-33,44923271
1992	-28,08475202	-36,11567233
1993	-27,22718088	-36,44936327
1994	-30,55603419	-40,37897436
1995	-29,53198027	-40,73886336
1996	-29,82285011	-42,00628316
1997	-31,89102116	-44,89440324

Bibliographie

- [1] Denuit M. Brouhns, N. and J Vermunt. A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance : Mathematics and Economics* 31, 373-393., 2002.
- [2] N. Brouhns and M Denuit. Risque de longévité et rentes viagères i. evolution de la mortalité en belgique de 1880 à nos jours. *Discussion Paper, Institut de Statistique, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.*, 2001.
- [3] N. Brouhns and M Denuit. Risque de longévité et rentes viagères ii. tables de mortalité prospectives pour la population belge. *Discussion Paper, Institut de Statistique, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.*, 2001.
- [4] A. COALE and E.E. KISKER. Defects in data on old age mortality in the united states : New procedures for calculating approximatively accurate mortality schedules and life tables at the highest ages. *Asian and Pacific Population Forum* 4, 1-31., 1990.
- [5] A. COALE and E.E KISKER. Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges. . *Institut des Sciences Actuarielles and Institut de Statistique Université Catholique de Louvain Louvain-la-Neuve, Belgique*, 1990.
- [6] M. DENUIT and A-C. GODERNIAUX. Closing and projecting lifetables using log-linear models. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires, sous presse*, 2005.
- [7] L.A Goodman. Simple models for the analysis of association in cross-classifications having ordered categories. *Journal of the American Statistical Association* 74, 537-552., 1979.
- [8] S. Gutterman and I.T Vanderhoof. Forecasting changes in mortality : a search for a law of causes and effects. *North American Actuarial Journal* 2, 135-138., 1999.
- [9] Sam Gutterman and Irwin T.Vanderhoof. Forecasting changes in mortality : A search for a law of causes and effects. 1998.
- [10] Mesle F.and Vallin J. Comment améliorer la précision des tables de mortalité aux grands âges ? le cas de la france. *INED, Population n° 4, 2002 - page 603*, 2002.
- [11] R.D. Lee. The lee-carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal* 4, 80-93., 2000.
- [12] R.D. Lee and L Carter. Modelling and forecasting the time series of us mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87, 659-671., 1992.
- [13] Ronald Lee. The lee-carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. 2000.
- [14] Pierre Petauton. Théorie et pratique de l'assurance vie. *DUNOD*, 1996.
- [15] A.E. Renshaw and S. Haberman. Lee-carter mortality forecasting with age specific enhancement. *Insurance : Mathematics and Economics* 33, 255-272., 2003.