ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA PROBABILITE DE RUINE DANS UN CAS DE REASSURANCE QUOTE-PART AVEC PLUSIEURS SOUS–PORTEFEUILLES

JOSE A. GIL FANA - ANTONIO H. MARTINEZ - JOSE L. VILAR ZANON

RESUME

Dans le travail qui suit nous étudierons, sous des hypothèses qui ne sont pas excessivement restrictives, l'effet d'une réassurance quote part dans la diminution du danger d'un portefeuille, et nous soulignerons le surprenant résultat qui consiste en la diminution de la probabilité de ruine (dans des circonstances déterminées) quand une quote de réassurance augmente. Ceci équivaut donc a affirmer que la probabilité de ruine diminue quand le volume du portefeuille total retenu augmente.

1. INTRODUCTION

Si bien il est vrai que le résultat d'une compagnie d'assurances à la fin de chaque exercice dépend de la réalisation de nombreuses activités, tout au long de ce rapport nous ne considérons que l'activité provenant du côté "purement assurance". C'est ainsi que le modèle sera réduit à la représentation du niveau des réserves (à la fin d'un exercice) comme étant le résultat de la différence entre les recettes par primes chargées et les paiments dûs aux sinistres enregistrés dans les divers sous–portefeuilles composant le portefeuille total des polices de la compagnie.

Dans ce contexte extrêmement simplifié (mais aussi très habituel dans les écrits actuariels), le risque caractéristique auquel une compagnie d'assurances doit faire face consiste en la possible incapabilité pour efectuer les paiments dûs aux sinistres, c'est à dire, de tomber dans un état d'insolvabilité.

La sinistralité X d'un portefeuille pendant une période de temps finie (un exercice par exemple) est certainement une variable aléatorie, cependant que les recettes totales des primes chargées au long de la même période est un montant parfaitement déterminé, à savoir:

$$(1+\lambda)\cdot P$$

où P est la prime pure (qui coincide avec l'espérance mathématique $E\{X\}$), plus une marge de sécurité qui sera établie d'une façon habituelle comme un pourcentage λ de la prime pure. Dans le cas où ces primes chargées seraient insuffisantes pour égaliser la sinistralité, la compagnie aurait recours aux réserves de solvabilité que nous noterons $S \geq 0$.

Une des tâches les plus importantes pour les actuaires est celle de proposer des mesures du danger d'une portefeuille. Celle–ci est une question sans réponse unique, de façon que différentes mesures ont été proposées et employées autant dans la pratique comme dans la litérature actuarielles. Certaines de ces mesures ne considèrent que la sinistralité X d'une période. Ainsi se passe t–il par exemple, avec la variance de X, sa déviation typique, sa semi–variance, etc... Il paraît assez clair que de grandes valeurs pour les mesures précédentes impliquent de grandes probabilités pour la sinistralité de dépasser son espérance mathématique; ce dernier fait apparaît comme un symptône clair du possible danger du portefeuille.

D'autres mesures comme la probabilité de ruine tiennent compte non seulement de la sinistralité, mais aussi des recettes par primes chargées. La probabilité de ruine pendant une période n'est autre que la probabilité pour la sinistralité de cette période de dépasser la somme du total des primes chargées plus les réserves de solvabilité, c'est à dire:

$$P(X > S + (1+\lambda)P) \ .$$

Dans le cas où une quelconque des mesures citées ci–haut nous indiquerait le danger d'un portefeuille, nous pourrions diminuer ce danger au moyen d'un traité de réassurance.

En principe, un traité de réassurance consiste en un partage d'un risque entre deux compagnies, l'assureur et le réassureur. Celui–ci sera responsable d'une partie de la sinistralité de l'autre en fonction du type de traité, et tout cela en échange, évidemment, d'un prix.

Dans le travail qui suit sous étudierons, sous des hypothèses qui ne sont pas excessivement restrictives, l'effet d'une réassurance quote–part dans la diminution du danger d'un portefeuille, et nous soulignerons le surprenant résultat qui consiste en la diminution de la probabilité de ruine (dans des circonstances déterminées) quand une quote de réassurance augmente. Ceci équivaut donc a affirmer que la probabilité de ruine diminue quand le volume du portefeuille total retenu augmente.

2. Hypotheses basiques

Dorénavant un assureur sera caractérisé de la façon suivante:

a) Son portefeuille de polices est divisé en deux sous–portefeuilles(1).

Nous noteson X_1, X_2 les sinistralités respectives dans une période de temps déterminée, et nous les supposerons comme étant des variables aléatoires normales(2) indépendantes $N(\nu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ respectivement. La sinistralité totale sera donc normale $N(\mu_1 + \mu_2,\ \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

b) Les encaissages des primes chargées seront, respectivement pour chaque sous–portefeuille:

$$(1 + \lambda_1) \cdot P_1$$

et

$$(1 + \lambda_2) \cdot P_2$$

avec $P_1 = E\{X_1\}$, $P_2 = E\{X_2\}$, et λ_1, λ_2 les marges de sécurité.

c) L'assureur dispose de réserves de solvabilité égales à $S \geq 0$.

d) Aussi, ce dernier dispose de la possibilité de réassurer chaque sous–portefeuille au moyen d'un traité quote–part. Rappelons en passant que ce traité se caractérise par le fait suivant: une fois fixée la quote de réassurance $a \in [0, 1]$, s'il survient un sinistre de montant X, l'assureur versera $(a \cdot X)$ tandis que $((1 - a) \cdot X)$ sera payé par le réassureur.

Si nous notons a_1 et a_2 les quotes de réassurances de chaque sous–portefeuille, les sinistralités respectives après signature du traité seront encore des variables aléatoires normales, mais cette fois avec paramètres $N(a_1\mu_1, a_1\sigma_1)$ et $N(a_2\mu_2, a_2\sigma_2)$. C'est ainsi que la sinistralité totale de l'assureur après réassurance sera encore une variable aléatoire normale de paramètres:

$$N\left(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_1^2 a_1^2}\right) .$$

(1) Cette supposition n'implique pas une perte de généralité, et nous l'adoptons dans le but d'obtenir une plus grande clarté dans le développement mathématique qui suit.

(2) Quand à l'application de la distribution normale à l'etude de la sinistralité, conférez l'œuvre de Beard, Pentikaïnen et Pesonen (1984).

Finalement, nous supposerons que les primes encaissées par notre assureur sont égales à (respectivement pour chaque sous–portefeuille)

$$a_1(1+\lambda_1)\cdot P_1 \ , \quad a_2(1+\lambda_2)\cdot P_2$$

tandis que celles qui vont être encaissées par le réassureur sont égales à

$$(1-a_1)\cdot(1+\lambda_1)\cdot P_1 \ , \quad (1-a_2)\cdot(1+\lambda_2)\cdot P_2 \ .$$

3. Etude de l'influence du traite de reassurance dans le danger du portefeuille

Nous allons étudier la relation entre les quotes de réassurance et le danger du portefeuille.

Si nous considérons la variance de la sinistralité totale comme mesure de ce danger, il sera suffisant de faire attention à son expression

$$\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2$$

pour se rendre compte qu'il s'agit d'une fonction à deux variables $(a_1, a_2) \in [0,1]^2$ croissante vis à vis des deux. Ce dernier fait s'accorde assez bien avec l'idée que nous avons sur la fonction du traité de réassurance. Nous aurions pu étudier aussi les relations entre la variance (respectivement la déviation typique) et l'espérance mathématique (respectivement les ressources disponibles), études que nous ne développerons pas ici puisque nous pensons que les résultats sont assez confus.

Prenons la probabilité de ruine comme mesure du danger du portefeuille. La probabilité de ruine dans une période n'est que la probabilité de l'évènement "le montant de la sinistralité totale pendant une période est supérieur à la somme des réserves et des encaissages des primes de la même période" (toutes les variables sont considérées ici après réassurance). Nous pouvons donc exprimer cette probabilité après réassurance de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\psi(a_1,a_2) &= P\{X > S + (1+\lambda_1)\mu_1 a_1 + (1+\lambda_2)\mu_2 a_2\} = \\ &= P\left\{\frac{X-\mu_1 a_1 - \mu_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}} > \frac{S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_2^2 + \sigma_2^2 a_2^2}}\right\} \ .\end{aligned}$$

En notant

$$\varphi(a_1, a_2) = \frac{S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_2^2 + \sigma_2^2 a_2^2}} \ ,$$

et en tenant compte de

$$Z = \frac{X - \mu_1 a_1 - \mu_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}}$$

est une variable aléatoire distribuée $N(0,1)$, nous pouvons écrire:

$$\psi(a_1, a_2) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \int_{\psi(a_1,a_2)}^{+\infty} \exp\{-t^2/2\} \cdot dt$$

ou encore,

$$\psi(a_1, a_2) = 1 - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\varphi(a_1,a_2)} \exp\{-\tfrac{t^2}{2}\} \cdot dt \ .$$

L'hypothèse de normalité de la sinistralité totale va nous permettre d'obtenir d'une façon très simple les dérivées partielles de la fonction ψ. En effet, puisque:

$$\varphi(a_1, a_2) = \frac{S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}}$$

et en regardant le diagramme suivant

$$[0,1]^2 \xrightarrow[\varphi]{} [0,+\infty) \xrightarrow[g]{} [0,1]$$

$$(a_1, a_2) \longrightarrow \varphi(a_1, a_2) \longrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varphi(a_1,a_2)} \exp\{-t^2/2\}\, dt = \psi(a_1, a_2)\,.$$

$$\psi = g \circ \varphi$$

nous pouvons calculer $\frac{\partial\psi}{\partial a_1}$ au moyen de la règle de la chaine:

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} = \frac{dg}{d\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\{-(1/2) \cdot \varphi^2(a_1, a_2)\} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} \ .$$

En tenant compte de:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{\mu_1\lambda_1(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2) - (S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2)\sigma_1^2 a_1}{(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2)^{3/2}} \ ,$$

et en remplaçant nous obtenons enfin:

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\{-(1/2) \cdot \varphi^2(a_1, a_2)\} \cdot$$

$$\cdot \frac{(S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2)\sigma_1^2 a_1 - \mu_1\lambda_1(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2)}{(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2)^{3/2}} \, .$$

Il est important d'étudier le signe de cette dérivée partielle ce qui, en plus, n'a pas l'air d'être spécialement compliqué. Il est clair que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_1} < 0$$

si et seulement si

$$(S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2)\sigma_1^2 a_1 - \mu_1\lambda_1(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2) < 0 \, ,$$

ce qui équivalent à:

$$a_1 < \frac{\mu_1\lambda_1\sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2(S + \mu_2\lambda_2 a_2)} \, .$$

Nous aurons donc, évidemment:

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_1} > 0$$

si et seulement si:

$$a_1 > \frac{\mu_1\lambda_1\sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2(S + \mu_2\lambda_2 a_2)} \, .$$

Ainsi, nous venons d'obtenir un résultat intéressant et choquant à la fois: **il se peut q'une fois fixée la quote de réassurance a_2, la probabilité de ruine diminue (intervalle dans lequel la dérivée partielle $\partial\psi/\partial a_1$ est négative) quand la quote a_1 augment (ce qui revient à augmenter le volume de l'affaire retenue). Il nous semble assez clair que ceci est du à l'effet d'une diversification du risque retenue. A partir d'une certaine valeur de la quote a_1, la probabilité de ruine augmente avec la part retenue (intervalle dans lequel la dérivée partielle est positive).**

Il nous semble intéressant de chercher la fonction qui associe à chaque valeur de a_2 celle de a_1 telle que la dérivée partielle $\partial\psi/\partial a_1$ soit nulle (cessant d'être negative et devenant positive).

En posant l'expression suivante

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} = 0$$

nous arrivons facilement à

$$a_1 = f_1(a_2) = \frac{\mu_1\lambda_1\sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2(S + \mu_2\lambda_2 a_2)} \ .$$

Aussi, nous aurions pu calculer $\partial\psi/\partial a_2$ ce qui nous aurait permis d'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial a_2} &< 0 \text{ quand } a_2 < \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2(S + \mu_1\lambda_1 a_1)} \\ \frac{\partial\psi}{\partial a_2} &> 0 \text{ quand } a_2 > \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2(S + \mu_1\lambda_1 a_1)} \end{aligned}$$

pour enfin en déduire d'une façon analogue que si

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_2} = 0$$

alors

$$a_2 = f_2(a_1) = \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2(S + \mu_1\lambda_1 a_1)} \ .$$

Il n'est pas difficile d'étudier les deux fonctions

$$\begin{aligned} a_1 = f_1(a_2) &= \frac{\mu_1\lambda_1\sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2(S + \mu_2\lambda_2 a_2)} \\ a_2 = f_2(a_1) &= \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2(S + \mu_1\lambda_1 a_1)} \end{aligned}$$

dans le sens d'analyser de quelle façon les variations des divers paramètres: $\mu_i, \sigma_i, \lambda_i, a_i (i = 1, 2)$ et S, affectent à l'intervalle de décroissance de ψ. Quand à la fonction f_1 par exemple, et une fois fixés les valeurs de a_2, μ_2, σ_2, λ_2, et S, la quote a_1 pour laquelle la probabilité de ruine atteint son minimum dépendra du rapport entre le bénéfice espéré et la variance du premier sous-portefeuille: à un plus grand rapport correspondra una plus grande quote a_1.

Nous espérons pouvoir approfondir l'étude de ce résultat en réalisant une analyse minutieuse des relations antérieures ainsi qu'une généralisation des hypothèses exposées dans le paragraphe 2.

Finalement, nous concluons ce rapport en ramenant à un cas particulier tout ce qui vient d'être exposé.

4. Etude d'un cas particulier

Supposons que, une fois acceptées les hypothèses de normalité et d'indépendance, l'espérance et la déviation typique des deux sous-portefeuilles sont respectivement:

$$\mu_1 = 90 \ , \quad \sigma_1 = 18 \ ; \quad \mu_2 = 120 \ , \quad \sigma_2 = 27 \ .$$

Nous considérerons aussi des marges de sécurité et une réserve de solvabilité égales à:

$$\lambda_1 = 0,05 \ , \quad \lambda_2 = 0,1 \quad \text{et} \quad S = 20 \ .$$

La probabilité de ruine en fonction des quotes du traité de réassurance sera donc:

$$\psi(a_1, a_2) = 1 - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\varphi(a_1,a_2)} \exp\{-\frac{t^2}{2}\} \cdot dt$$

avec

$$\varphi(a_1, a_2) = \frac{20 + 4,5a_1 + 12a_2}{\sqrt{324a_1^2 + 729a_2^2}} \ .$$

Etant données les valeurs choisies dans notre exemple, si nous fixons $a_2 = 1$ (ce qui implique la retention de la totalité du deuxième sous-portefeuille) alors nous aurons:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{256 \cdot a_1 - 81}{18 \cdot (4a_1^2 + 9)^{3/2}} \ .$$

D'autre part l'expression $a_1 = f_1(a_2)$ devient (après quelques simplifications)

$$a_1 = f_1(a_2) = \frac{81a_2^2}{32 \cdot (3a_2 + 5)} \ .$$

(Nous aurions pu écrire $a_2 = f(a_1)$ en suivant les mêmes pas).

Dans le figure No.1 et 2 se trouvent représentées les fonctions $\partial\psi/\partial a_1$ et $a_1 = f_1(a_2)$.

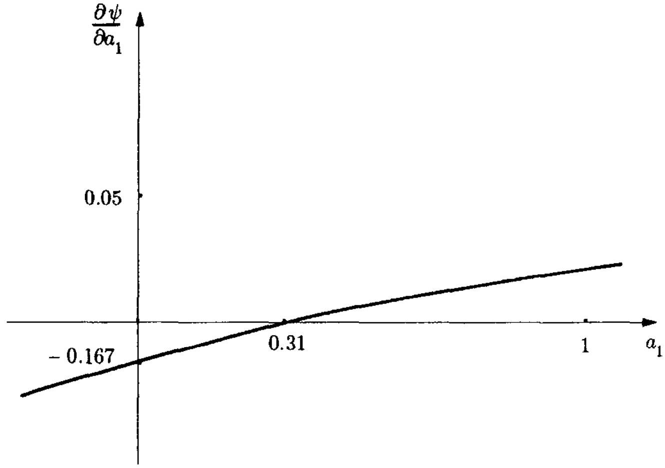

Fig. 1

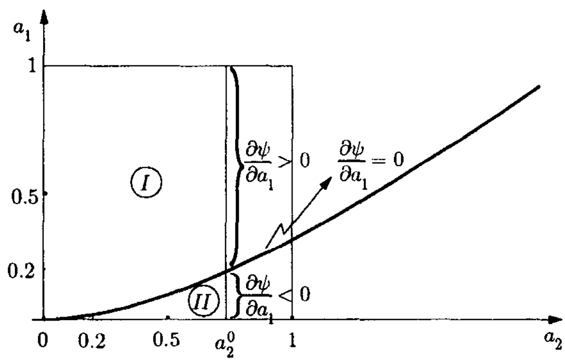

Fig. 2

La première fonction nous donne directement le signe de

$$\frac{\partial\psi(a_1, 1)}{\partial a_1}\ , \quad a_1 \in [0, 1]\ ,$$

étant donné que les deux autres facteurs impliqués dans la dérivée partielle sont toujours positifs. Soulignons que, puisque la dérivée est négative pour tout $a_1 \in (0, 0'31)$, la probabilité de ruine sera décroissante sur ce même intervalle.

La deuxième fonction identifie les couples (a_1, a_2) tels que la dérivée de la probabilité de ruine après réassurance soit nulle. C'est ainsi que le carré $[0, 1]^2$ se trouve divisé en trois régions que nous passons à décrire:
* Si nous fixons une quote $a_2^0 \in [0, 1]$ dans le deuxième sous-portefeuille, les valeurs a_1 pour lesquelles la probabilité de ruine décroît seront celles qui appartiennent au segment de la verticale que est contenu dans la région II. C'est à dire, les valeurs a_1 telles que:

$$0 < a_1 < \frac{81 \cdot (a_2^0)^2}{32 \cdot (3a_2^0 + 5)} \ .$$

* Les valeurs a_1 correspondantes au segment de la verticale qui est inclus dans la région I, seront telles que la probabilité de ruine croît. C'est à dire, les valeurs a_1 telles que:

$$\frac{81 \cdot (a_2^0)^2}{32 \cdot (3a_2^0 + 5)} < a_1 < 1 \ .$$

* Les couples appartennant à la courbe $a_1 = f_1(a_2)$ sont les quotes de réassurance pour lesquelles la probabilité de ruine atteint un point critique:

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = 0 \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. BALBAS, J.A. GIL FANA, *Una applicacion de la programacion multiobjetivo al reaseguro*, Anales del Instituto de Actuarios Españoles, 1938 pp. 35–58.
(2) A. BALBAS, J.A. GIL FANA, A. HERAS, *La desviacion tipica y la varianza como medidas del riesgo en un problema de reaseguro optimo*, Prevision y seguro n. 6, pp. 63–80 (ed. Centro de Estudio del Seguro S.A.) 1990.
(3) BEARD, PENTIKAINEN Y PESONEN, *Risk theory*, Methuen y Co LTD 1984.
(4) H. BUHLMAN, *Mathematical methods in risk theory*, Springer Verlag 1970.
(5) H. GERBER, *An introduction to mathematical risk theory*, S.S. Huebner foundation n. 8, 1979.
(6) J. GRANDELL, *Aspects of risk theory*, Springer Verlag, 1991.
(7) M. PESONEN, *Optimal reinsurances*, Scandinavian actuarial journal, 1984, pp. 65–90.