

Sur la loi de la somme de variables log-normales : application à la fiabilité des temps de parcours routiers

EL FAOUZI N.-E¹. MAURIN MICHEL².

(¹) Laboratoire d'Ingénierie Circulation Transports (LICIT)
INRETS-ENTPE
25, Avenue François Mitterrand Case 24
69675 Bron Cedex
elfaouzi@inrets.fr

(²) Laboratoire Transports Environnement (LTE)
INRETS
25, Avenue François Mitterrand Case 24
69675 Bron Cedex
maurin@inrets.fr

RESUME : On est amené dans différents domaines comme la finance, les télécommunications, la pharmacodynamique, l'ingénierie du trafic, ... à considérer des phénomènes uniquement positifs, à les représenter par des variables aléatoires sur \mathbb{R}^+ et à envisager la loi de leur somme. Parmi les lois de variables positives la loi log-normale est une loi bien connue ; nous rappelons plusieurs des raisons probabilistes qui invitent à l'introduire, ainsi que les principales approximations pour la loi de la somme de plusieurs variables log-normales.

Nous complétons cet état de l'art par une extension assez naturelle des lois log-normales de vecteurs \mathbf{X} dans \mathbb{R}^{+n} notées LN_n , $n \geq 1$. Cela permet d'interpréter le paramétrage des lois LN_n et de calculer la loi de la somme de variables log-normales indépendantes ou non.

Mots-Clés : Statistique mathématique, traitement statistique du signal, fiabilité.

1. Introduction

Dans différents domaines on est amené à étudier des phénomènes qui prennent uniquement des valeurs positives, et l'on cherche à les modéliser par des variables aléatoires sur \mathbb{R}^+ , puis dans \mathbb{R}^{+n} quand il y en a plusieurs dans l'analyse. On est en outre souvent confronté à faire la somme de ces variables aléatoires positives, et à la loi de la somme (El Faouzi, 2004 ; Leurent 2006). Les résultats généraux sur les lois fermées par rapport à la convolution comme les lois gamma ne sont pas utilisables quand on n'est pas assuré de l'indépendance, ce qui est le cas le plus courant (naturellement). On est ainsi amené à introduire des lois conjointes dans $\mathbb{R}^{+\ell}$ (Maurin et al., 2000) ou des copules (Maurin, 2002). Ci-dessous, nous prenons comme base, la modélisation de la fiabilité du temps de parcours automobile.

2. La loi log-normale : quelques rappels

La loi log-normale est introduite comme la loi de la variable X dont le logarithme Y suit une loi normale, à ce propos on note que la logique du nom de baptême de cette loi est à l'opposé de la logique suivie dans le couple des lois Weibull et log-Weibull, (selon celle-ci la loi log-normale serait la loi expo-normale ou antilog-normale !), (Aitchinson et Brown, 1957 ; Crow et al., 1988 ; Johnson et Kotz, 1970 ; Limpert et al., 2001,). A la différence des transformées de lois $Y = \eta(X)$ pour lesquelles on a seulement des formules approchées entre les moments de X et de Y (Johnson et Kotz 69), il y a ici des relations exactes entre les espérances et variances de X et $Y = \ln X$ (Calot, 1975 ; Johnson et Kotz, 1970).

Une particularité de la loi log-normale est qu'elle n'est pas définie de façon univoque par ses moments. En effet, en reprenant l'exemple de Feller (Feller, 1971)

$$p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\log^2 x/2} \left(1 + \omega \times \sin\left(\sqrt{2\pi} \log(x)\right)\right)$$

où $|\omega| \leq 1$ a les moments qui ne dépendent pas de ω , et ainsi a les mêmes moments que la loi log-normale standard ($\omega = 0$).

3. Justification de la loi log-normale

Il existe plusieurs façons de justifier le recours de la loi log-normale. Même si elles diffèrent dans leurs présentations, elles se ramènent toutes au théorème central limite.

Une des plus anciennes méthodes mais également la plus utilisée pour justifier le recours à la distribution log-normale est le principe dit des *effets proportionnels* (Crow et Shimizu, 1988). Cette règle dit que si le taux de croissance d'une variable, à chaque pas du processus, est aléatoirement proportionnel à sa valeur, alors la valeur de la variable à l'étape n sera approximativement distribuée selon la loi log-normale. En d'autres termes, si la valeur de la variable au temps i est X_i , avec une progression gouvernée par l'équation suivante :

$$X_i = \alpha_i \times X_{i-1}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont des variables aléatoires positives, alors la variable X_n , pour n assez grand, est distribuée log-normalement. Le principe des effets proportionnels trouve sa justification par le théorème central limite. Effet, comme

$$\ln(X_n) = \sum_{i=1}^n \ln(\alpha_i)$$

et la somme de variables aléatoires indépendantes converge en loi vers la loi normale.

Notons que de la même manière que le théorème central limite légitime la loi normale en énonçant que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires est de distribution

approximativement normale, on peut énoncer un résultat analogue en prenant non plus la somme mais le produit d'un grand nombre de variable aléatoire.

THEOREME : Soient X_1, X_2, \dots , une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Alors la distribution de $\mathcal{P}_n = \prod_{i=1}^n X_i$ tend vers la distribution log-normale d'espérance $n \times \mathbb{E}(\ln(X_1))$ et de variance $n \times \text{Var}(\ln(X_1))$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

4. Loi de la somme de variables log-normales

On rencontre souvent la somme de variables aléatoires log-normales dans plusieurs domaines comme les télécommunications, la finance et l'ingénierie du trafic. Etant donné l'importance de la somme de distributions log-normales, des efforts considérables ont été consacrés d'analyser ses propriétés statistiques. Tandis que l'expression analytique exacte de la loi de distribution de la somme de log-normales est inconnue, plusieurs méthodes analytiques d'approximation ont été proposées dans la littérature (Fenton, 1960 ; Schleher, 1977).

Les méthodes proposées peuvent être classées en deux grandes catégories. D'une part, les méthodes de Fenton et Wilkinson (Fenton, 1960), Schwartz et Yeh (Schwartz et Yeh, 1982) et Beaulieu et Xie (Beaulieu et Xie, 2004) qui approximent la somme de variables log-normales par une distribution log-normale unique et fournissent différentes approches pour déterminer les paramètres de la densité log-normale résultante. D'autre part, les méthodes de Farley (Schwartz et Yeh, 1982), de Ben Slimane (Ben Slimane, 2001) et de Schleher (Schleher, 1977) qui calculent des distributions composées ou dérivent les bornes strictes de la véritable loi.

On se place dans le cas de ℓ variables aléatoires log-normales, la loi de la somme $S = \sum_{i=1}^{\ell} e^{Y_i}$ peut être approximée par une loi log-normale e^Z , où $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$.

L'approche dite de Fenton-Wilkinson (Fenton, 1960) est certainement la plus utilisée du fait de la simplicité de sa mise en œuvre. L'espérance et la variance de Z sont obtenues par égalité des premiers moments m_1 et m_2 de $S = \sum_{i=1}^{\ell} e^{Y_i}$:

$$m_1 = \mathbb{E}(S) = e^{\mu_Z + \sigma_Z^2/2} = \sum_{i=1}^{\ell} e^{\mu_{Y_i} + \sigma_{Y_i}^2/2}$$

$$m_2 = \mathbb{E}(S^2) = e^{2\mu_Z + \sigma_Z^2} = \sum_{i=1}^{\ell} e^{2\mu_{Y_i} + \sigma_{Y_i}^2} + 2 \times \sum_{i=1}^{\ell-1} \sum_{j=i+1}^{\ell} e^{\mu_{Y_i} + \mu_{Y_j}} e^{\frac{1}{2}(\sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2 + 2\rho_{ij}\sigma_{Y_i}\sigma_{Y_j})}$$

où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation Y_i et Y_j . Par résolution de ce système d'équation, on obtient :

$$\mu_Z = 2 \ln(m_1) - \frac{1}{2} \ln(m_2)$$

$$\sigma_Z^2 = \ln(m_2) - 2 \ln(m_1)$$

L'analyse des approximations de la loi de la somme par la méthode de Fenton-Wilkinson montre qu'elle peut être appliquées lorsque les lois log-normales composantes sont indépendantes et que les écarts types des log-normales sont relativement faibles (Schwartz et Yeh, 1982). En effet, pour de larges écarts types, la méthode tend à sous estimer la moyenne de la somme et à sur estimer la variance de la somme. Ces biais semblent se corriger lorsqu'il existe une dépendance entre les lois composantes (Abu-Dayya et Beaulieu, 1994). De plus, la précision de l'approximation tend à décroître avec ℓ . En effet, lorsque les variables composantes sont i.i.d. d'espérance μ_c et de variance σ_c^2 , on montre que :

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \ln\left(1 + \frac{1}{\ell}(e^{\sigma_c^2} - 1)\right) \\ &= \ell^{-1}(e^{\sigma_c^2} - 1) + O(\ell^{-2}) \quad \ell \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Une approche plus précise est proposée par Schwartz et Yeh (Schwartz et Yeh, 1982). Son principe est fondé une fois encore sur l'approximation la loi de la somme par une log-normale, avec un calcul exact des moments. Cependant, la complexité des calculs et le gain modeste en termes de précision par rapport à l'approche Fenton-Wilkinson la rendent moins attractive opérationnellement, même si Ho (Ho, 1995) a proposé une version modifiée évitant ce handicap.

5. Application : fiabilité des temps de parcours

5.1 Notion du temps de parcours

La notion de temps de parcours, définie par le sens commun comme le temps nécessaire pour parcourir une section de route par un mode de transport donné, peut être déclinée en plusieurs types correspondant à différentes approches d'estimation et de mesure. On dénombre principalement deux types de temps de parcours :

– *le temps de parcours réalisé* (TPR), qui est le temps de parcours expérimenté par un usager pour parcourir un itinéraire ; les valeurs de cet indicateur ne sont connues qu'a posteriori (i.e. une fois que le déplacement est effectué) et sont généralement obtenues par des moyens de mesures relativement coûteux ;

– *le temps de parcours prédictif ou prévu* (TPP), qui est une prévision du temps de parcours qui sera expérimenté par un usager lors de son déplacement sur l'itinéraire ; cette prévision est fondée sur celle des conditions de circulation à partir des données sur les flux de trafic, traditionnellement mesurées par les capteurs ; les données correspondant à ce type de temps de parcours sont issues d'un calcul a priori ou en temps réel.

Cette dernière définition se heurte à une difficulté d'exploitation opérationnelle, induite à la fois par les difficultés de prévoir précisément les conditions de circulation et de la conversion de ces conditions de circulation prévues en une information sous forme de temps de parcours, si bien que des approximations de ce temps de parcours prédictif sont souvent utilisées. À titre d'exemple, on peut citer la prévision *naïve* qui consiste à prendre pour valeur du TPP la dernière

valeur du temps de parcours connue ou encore à utiliser comme prédicteur un indicateur appelé *temps de parcours instantané*¹ (TPI). Cet indicateur, qui est à la base à l'heure actuelle d'un grand nombre de systèmes d'informations routières, est obtenu par sommation des temps de parcours estimés à un instant donné en différents points du réseau. Ce temps de parcours est une quantité qui n'a pas réellement de signification physique, puisque elle ne correspond pas à un temps de parcours effectif d'un véhicule.

5.2 Fiabilité des temps de parcours

En s'intéressant à la fiabilité de du temps de parcours, la variabilité est une des métriques communément utilisée pour son évaluation (NCHR, 2003). Afin d'appréhender cette variabilité, il est souhaitable de disposer de la distribution des temps de parcours.

Formellement, si on suppose que le temps de parcours, noté T , est une variable aléatoire de densité de probabilité continue f , on peut définir sa fiabilité par :

$$R(t) = \mathbb{P}(T \geq t) = 1 - F(t)$$

En posant $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$, la fonction de fiabilité satisfait l'équation différentielle suivante :

$$R'(t) = -\lambda(t)R(t)$$

La fonction $\lambda(t)$ détermine la loi de T .

Ainsi, dans le cas du temps de parcours d'un itinéraire, défini comme la somme des temps de parcours élémentaires, si on ajuste la loi de chaque composante par une loi log-normale, hypothèse confortée par les données opérationnelles, la loi du temps de parcours de l'itinéraire (somme des temps de parcours) est alors approximée par une loi log-normale selon le schéma décrit ci-dessus.

6. Une généralisation multivariée de la loi log-normale

Les développements ci-dessus nous invitent à introduire une loi conjointe de plusieurs lois log-normales scalaires. Pour cela on peut envisager dans \mathbb{R}^ℓ le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ qui suit la loi normale conjointe $N(m_Y, C_Y)$ de vecteur espérance et de variance covariance C_Y , puis définir la loi log-normale généralisée LN_ℓ dans $\mathbb{R}^{+\ell}$ comme celle du vecteur transformé $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_\ell\}$ avec $\mathbf{X}_k = \exp(\mathbf{Y}_k)$, $k = 1, \dots, \ell$. Ses propriétés générales permettent de poursuivre les calculs de modélisation pour les sommes des temps de parcours.

¹ Terminologie consacrée, signifiant que ce temps de parcours est basé sur les conditions de circulation actuelles (instantanées).

6.1 Propriétés

Cette loi possède les mêmes paramètres que ceux de la loi normale de \mathbf{Y} et elle a pour densité de probabilité

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_\ell) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2} \sqrt{\det(C_Y)}} \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_\ell} e^{-1/2 (\ln \mathbf{x} - \mathbf{m}_Y)' C_Y^{-1} (\ln \mathbf{x} - \mathbf{m}_Y)}$$

en posant $\ln \mathbf{x}$ le vecteur de coordonnées $\ln(x_k)$, $k = 1, \dots, \ell$.

6.2 Les lois marginales et conditionnelles

i) Soit la fonction de répartition conjointe

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_l) &= \text{IP}(\mathbf{X}_1 \leq x_1, \mathbf{X}_2 \leq x_2, \dots, \mathbf{X}_l \leq x_l) \\ &= \text{IP}(\mathbf{Y}_1 \leq \varphi^{-1}(x_1), \mathbf{Y}_2 \leq \varphi^{-1}(x_2), \dots, \mathbf{Y}_l \leq \varphi^{-1}(x_l)) \text{ avec } \varphi = \ln, \text{ monotone,} \\ &\text{pour toute distribution marginale, par exemple celle de } \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p\}, \text{ on a} \end{aligned}$$

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_p) = \text{IP}(\mathbf{Y}_1 \leq \varphi^{-1}(x_1), \dots, \mathbf{Y}_p \leq \varphi^{-1}(x_p), \mathbf{Y}_{p+1} \leq \infty, \dots, \mathbf{Y}_l \leq \infty)$$

qui correspond à une LN_l dans \mathbb{R}^{+p} , (on retrouve les log-normales scalaires comme marges dans \mathbb{R}^+).

ii) Pour les lois conditionnelles on reprend le calcul classique des lois normales, en posant $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y$ centré et les partitions suivantes dans \mathbb{R}^{l_1} et \mathbb{R}^{l_2} , $l_1 + l_2 = l$, (cf. Anderson, 1984) :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \mathbf{m}_Y = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, C_Y = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\mathbf{T} = \mathbf{M} \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_{11} & -C_{12} C_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & I_{22} \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{M} C_Y \mathbf{M}') dans \mathbb{R}^l . On sait$

que $\mathbf{M} C_Y \mathbf{M}'$ est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} C_{(11)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_{22} \end{pmatrix}$ avec $C_{(11)} = C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21}$, que

\mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 sont indépendants et que $\mathbf{T}_2 \sim N(\mathbf{0}, C_{22})$ dans \mathbb{R}^{l_2} . On en déduit classiquement la loi conditionnelle de $\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2$ dans \mathbb{R}^{l_1} à savoir la loi normale $N(m_1 + C_{12} C_{22}^{-1} (\mathbf{Y}_2 - m_2), C_{(11)})$, il en résulte que la loi conditionnelle de $\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2$ dans \mathbb{R}^{+l_1} est la loi LN_{l_1} de paramètres $m_1 + C_{12} C_{22}^{-1} (\ln x_2 - m_2)$ et $C_{(11)}$ pour la valeur du conditionnement $\mathbf{X}_2 = x_2$,

en posant $\ln x_2$ le vecteur de coordonnées $\ln x_{2k}$ dans \mathbb{R}^2 (Maurin, 2006).

Les marginales et les conditionnelles des lois LN_l sont encore des LN_l .

6.3 Variances et covariances

Nous avons rappelés les relations entre les deux premiers moments de \mathbf{X}_i log-normale et \mathbf{Y}_i normale en § 4 :

$$m_{X_i} = e^{m_{Y_i}} e^{\sigma_{Y_i}^2/2} \quad m_{Y_i} = \ln m_{X_i} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_{X_i}^2}{m_{X_i}^2} \right)$$

$$\sigma_{X_i}^2 = m_{X_i}^2 (e^{\sigma_{Y_i}^2} - 1) = e^{2m_{Y_i}} e^{\sigma_{Y_i}^2} (e^{\sigma_{Y_i}^2} - 1) \quad \sigma_{Y_i}^2 = \ln \left(1 + \frac{\sigma_{X_i}^2}{m_{X_i}^2} \right) .$$

A partir de la loi de $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$ on peut en déduire :

- $IE(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2) = m_{X_1} m_{X_2} e^{\rho_{Y_1, Y_2} \sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2}}$,
- puis la relation (Fenton, 1960 ; Maurin et al., 2000) :

$$\text{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = m_{X_1} m_{X_2} (e^{\text{cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)} - 1) \quad , \quad \text{cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \ln \left(1 + \frac{\text{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{m_{X_1} m_{X_2}} \right) ,$$

elle complète le jeu de relations entre les moments d'ordre 1 et 2 des lois conjointes normales et log-normales, un jeu qui permet d'interpréter les paramètres de LN_n .

6.4 Loi de la somme

- On obtient ainsi la variance de la loi de la somme de variables log-normales indépendantes ou non moyennant $\text{var}(\sum_i \mathbf{X}_i) = \sum_i \text{var}(\mathbf{X}_i) + 2 \sum_{i>j} \text{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$, et cela permet d'approcher la loi de la somme avec par exemple une loi log-normale de mêmes moments (Fenton, 1960) ;
- On en déduit aussi la connaissance numérique exacte de la loi de la somme. En effet en partant de l'expression $h_2(u, v)$ de la densité de probabilité de la loi conjointe LN_l de (\mathbf{U}, \mathbf{V}) .

- dans \mathbb{R}^{+2} , la probabilité de l'événement $\{\mathbf{S} \leq s\}$ est égale à :

$$IP\{\mathbf{S} \leq s\} = F_S(s) = \int_{0 \leq u \leq s} h_2(u, s-u) du \quad ;$$

- dans \mathbb{R}^{+3} si $h_3(u, v, w)$ est la densité de probabilité de la loi conjointe de $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$,

W), on a de la même façon :

$$P\{S \leq s\} = F_S(s) = \iint_{D_3(s)} h_3(u, v, s-u-v) du dv$$

sur le domaine d'intégration $D_3(s) = \{0 \leq u, 0 \leq v, u+v \leq s\}$, (un simplexe de dimension 2) ;

- c. dans \mathbb{R}^{+4} si $h_4(u, v, w, t)$ est la densité de probabilité de la loi conjointe de (U, V, W, T) , on a :

$$P\{S \leq s\} = F_S(s) = \iiint_{D_4(s)} h_4(u, v, w, s-u-v-w) du dv dw$$

sur $D_4(s) = \{0 \leq u, 0 \leq v, 0 \leq w, u+v+w \leq s\}$, (un simplexe de dimension 3) ;

etc

On peut ainsi établir la connaissance numérique exacte, via Monte Carlo par exemple, pour tout s de la fonction de répartition avec des intégrations numériques de densités exactes sur des domaines exacts, et les valeurs de la densité de probabilité par dérivation numérique pour $\lambda(t)$ dans l'étude de la fiabilité.

6. References

- ANDERSON T.W., 1984, An introduction to multivariate statistical analysis, J. Wiley and sons
- ABU-DAYYA A. A., N. C. BEAULIEU, "Outage probabilities in the presence of correlated lognormal interferers," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 43, pp. 164–173, Feb. 1994.
- AITCHINSON, J., BROWN, J. A. C. *The lognormal distribution* -Cambridge University, 1957.
- ASMUSSEN S. and L. ROJAS-NANDAYPA. Sums of dependent lognormal random variables: asymptotics and simulation. Preprint, 2005.
- BEAULIEU N. C. and Q. XIE, "An optimal lognormal approximation to lognormal sum distributions," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, pp. 479–489, 2004.
- BEN SLIMANE S. , "Bounds on the distribution of a sum of independent lognormal random variables," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, pp. 975–978, 2001.
- CALOT G., 1975, *Cours de statistique descriptive*, Dunod.
- CROW E. L. and K. SHIMIZU. *Lognormal distribution: theory and application*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.
- EL FAOUZI N.-E. Toward an efficient Travel Time estimation for Transportation Network Reliability Assessment based on Multisource Data Fusion. 2nd *International Symposium on Transport Network Reliability (INSTR)*, Christchurch, NZ, 2004.
- FELLER, W. *Probability Theory and its Applications*, second ed., vol. II. John Wiley & Sons, 1971.
- FENTON L. The sum of lognormal probability distribution in scatter transmission system., *IEEE Trans. Communication Systems.*, Vol CS-8, pp. 57-56, March 1960

- GNEDENKO, B.V. and KOLMOGOROV, A.N. (1954) *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley, Cambridge, Mass.
- HO C.-L. Calculating the mean and variance of power sums with two log-normal components, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 44, pp. 756–762, 1995.
- JOHNSON N. H., KOTZ S. *Discrete distributions*, J. Wiley and sons, 1969.
- JOHNSON N.H., KOTZ S. *Continuous univariate distributions*, J. Wiley and sons, 1970.
- LEURENT F. Une analyse probabiliste des temps de trajet routier, RTS n° 88, 189-204, 2005.
- Limpert E, Stahel WA and Abbt M. Lognormal distributions across the sciences: keys and clues. *Bioscience* 51 (5), 341-352, 2001.
- NCHRP (2003). *Research Plan for Providing a Highway System with Reliable Travel Times*. NCHRP Projet N° 20-58 – Study 3, Draft report, March 2003.
- MAURIN M., ROUGIER F., MAIRE P., 2000, Note de calcul sur les lois de Hill, aspects probabilistes, déterministes et épistémologiques, Hôpital A. Charial - INRETS-LTE 2026
- MAURIN M, 2002, Lois conjointes et copules de Hill, XXXIVe Journées de Statistique, Bruxelles Louvain-la-Neuve.
- MAURIN M., 2006, Note sur les lois log-normales dans R^{+n} , application à la somme de lois log-normales scalaires, note de calcul, INRETS-LTE.
- SCHWARTZ S. and Y. YEH, “On the distribution function and moments of power sums with lognormal components,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 61, pp. 1441–1462, 1982.
- SCHLEHER D. C. Generalized Gram-Charlier series with application to the sum of log-normal variates., *IEEE Trans. Inform. Theory*, pp. 275–280, 1977.