

# ÉVALUER LA VALEUR ÉCONOMIQUE DES CONTRATS D'ASSURANCE VIE AVEC DES DÉFLATEURS STOCHASTIQUES

Version 1.8 du 20/12/2020

KAMAL ARMEL<sup>1</sup> FRÉDÉRIC PLANCHET<sup>2</sup>

Cet article propose une démarche de construction d'un générateur de scénarios économiques (GSE) sous la probabilité historique, permettant de diffuser les taux d'intérêt et les prix d'investissements risqués, adapté au processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne avec des clauses de participation aux bénéficiaires et cohérent avec les référentiels Solvabilité 2 et IFRS 17. Il intègre donc la construction du noyau d'actualisation (déflateur) permettant de calculer les prix.

Il propose des méthodes de calibrage des modèles et des primes de risques basées sur des formules fermées et présente des approches de diffusion avec des discrétisations exactes adaptés à des besoins de simulations à long terme.

L'article propose également une étude des sensibilités de la valeur d'un passif d'épargne avec participation aux bénéficiaires aux calibrages du générateur de scénarios économiques en probabilité historique.

Enfin, ce papier montre que les problèmes numériques, qui ont longtemps constitué un obstacle à l'utilisation pratique de déflateurs, peuvent être levés et que l'approche par les déflateurs est opérationnelle pour les assureurs et ne se limite pas à un exercice de style académique. Il montre aussi que passer d'un calcul « risque neutre » à une approche par les déflateurs ne nécessite que des travaux relativement marginaux pour adapter les modèles en place.

---

<sup>1</sup>Kamal Armel est actuaire qualifié et consultant. Contact : [kamal.armel@armelconsulting.fr](mailto:kamal.armel@armelconsulting.fr)

<sup>2</sup>Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé à PRIM'ACT. Contact : [frederic@planchet.net](mailto:frederic@planchet.net)

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Approche par les déflateurs avec un modèle de taux de type CIR++</b> .....	<b>5</b>
2.1	Modèle général .....	5
2.2	Modèle de taux et prix des obligations zéro-coupons .....	8
2.2.1	Sous la mesure de probabilité risque neutre .....	8
2.2.2	Sous la mesure de probabilité historique .....	9
2.3	Déflateur et processus de vraisemblance .....	11
2.4	Prix de l'actif risqué et prime de risque .....	11
2.4.1	Prix de l'actif risqué .....	11
2.4.2	Rendement espéré de l'actif risqué .....	12
2.4.3	L'espérance de l'excès de rendement en régime permanent .....	12
2.5	Calibrage .....	13
2.5.1	Calibrage du modèle de taux .....	13
2.5.2	Calibrage de la prime de risque .....	14
2.6	Simulation sous la probabilité historique .....	15
<b>3</b>	<b>Application : calibrage du modèle et sensibilités du <i>best-estimate</i></b> .....	<b>16</b>
3.1	Données .....	16
3.2	Résultats du calibrage des modèles .....	16
3.2.1	Calibrage du modèle de taux sur les prix des <i>caps</i> et des <i>swaptions</i> .....	16
3.2.2	Estimation du facteur de la prime de risque .....	17
3.2.3	Tests de <i>matingalité</i> .....	18
3.3	Étude d'impact sur le <i>best-estimate</i> .....	20
<b>4</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Références</b> .....	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Annexes</b> .....	<b>25</b>
6.1	Annexe 1 : Changement de probabilité - rappel théorique .....	25
6.2	Annexe 2 : le prix d'une obligation zéro coupon sous P .....	27
6.3	Annexe 3 : la forme du déflateur .....	30
6.4	Annexe 4 : le prix de l'actif risqué sous P .....	31
6.5	Annexe 5 : l'espérance des rendements de l'actif risqué .....	32
6.6	Annexe 6 : l'excès de rendement de l'actif risqué .....	36

## 1 Introduction

Les contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices proposent une capitalisation de l'investissement avec un taux garanti augmenté éventuellement d'un bonus au titre de la participation de l'assuré aux résultats financiers du fonds général géré par l'assureur. Ces contrats offrent la possibilité de rachats de l'épargne qui peuvent être exercés à tout moment.

Les options incluses dans les contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices peuvent être synthétisées en trois catégories :

- Options financières : l'assureur s'engage sur une rémunération minimale de l'épargne en garantissant un taux minimal de revalorisation ou un bonus garanti.
- Options comportementales : l'assureur propose des options de rachat, d'arbitrage entre le fonds garanti et des actifs non-garantis, de versements libres ou programmés, bonus de fidélité... L'activation de ces options est à l'appréciation de l'assuré.
- Options biométriques : sont les options dépendant du risque de mortalité (ou de longévité) comme la proposition par l'assureur de rentes différées.

L'assuré bénéficie donc de trois options à caractère financier (cf. Brys et de Varenne [1994]) :

- L'option de taux technique ou de taux de participation aux bénéfices garantis, assimilable à une option vanille européenne ;
- L'option de rachat, assimilable à une option de vente américaine ;
- L'option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés, assimilable à une *swaption*.

Sous la norme Solvabilité 2, la valorisation « économique » du passif correspond au *best-estimate* (flux futurs actualisés) et est le cas échéant complétée d'une marge de risque compensant l'immobilisation du capital de solvabilité requis des risques non-couvrables (se traduisant par un coût du capital des risques non-financiers ou des imperfections de couverture pour les risques financiers)<sup>3</sup>. Bien que les deux normes, Solvabilité 2 et IFRS 17, présentent des divergences sensibles, les conclusions présentées dans ce papier se généralisent naturellement à la norme IFRS 17.

Les travaux de mise en place des modèles d'évaluation de provisions *best estimate* pour des contrats avec une clause de participation aux bénéfices ont abouti à une forme de consensus de place articulant un générateur de scénarios économiques risque-neutre avec un modèle de projection de flux. L'article Armel et Planchet [2019] met en évidence les défauts de conception du schéma standard de la valeur des contrats d'épargne en France.

Armel et Planchet [2020b] montrent par ailleurs que l'utilisation d'une mesure de probabilité risque-neutre pour valoriser les passifs d'épargne avec une clause de

---

<sup>3</sup> Les questions liées aux calculs de la marge de risque ne seront pas abordées dans ce papier. Nous ne ferons donc pas la distinction dans la suite entre les termes *best-estimate* et « valeur du passif ».

participation aux bénéfiques est largement discutable. L'approche par les déflateurs, consistant à utiliser un générateur de scénarios économiques (GSE) sous la probabilité historique, paraît dans ce cadre pertinente. Elle permet d'avoir une meilleure rationalisation des valorisations économiques (notamment les comportements des agents) et supprime les interactions directes entre la construction des flux et le calcul des prix.

Le défaut d'une approche par les déflateurs réside dans la complexité de sa mise en œuvre opérationnelle. Une première étape a été franchie par la démarche proposée par Cheng et Planchet [2019]. Cette démarche est cependant inadaptée au cadre normatif Solvabilité 2 et est difficile à utiliser en pratique. En effet, Cheng et Planchet [2019] :

- Supposent que le processus du taux d'intérêt sans risque est un processus CIR simple. Cela implique que les taux d'intérêt ne peuvent être négatifs. Aussi, ce choix ne permet pas de prendre en compte la courbe de taux sans risque anticipée et en particulier, celle communiquée par l'EIOPA ce qui rend le générateur de scénarios économiques inadapté au référentiel Solvabilité 2.
- Ne proposent pas de démarche pour calibrer les paramètres des modèles ;
- Proposent, pour la diffusion, de retenir une discrétisation non exacte des équations différentielles stochastiques par la méthode d'Euler et la méthode de Milstein. Ces méthodes sont assez lourdes à mettre en place et peuvent générer des erreurs de convergence assez significatives quand elles sont utilisées en assurance vie, compte tenu de l'horizon de projection à long terme et du nombre réduit de trajectoires simulées retenu par les praticiens.

L'objectif de cet article est de proposer un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique, permettant de diffuser les taux d'intérêt et les prix d'investissements risqués (en actions et en immobilier)<sup>4</sup>, adapté au processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne avec participation aux bénéfiques.

Pour ce faire, nous proposons notamment :

- De supposer que le modèle de taux d'intérêt suit un processus de type CIR++. Ce modèle prend en compte les taux négatifs et permet de reproduire la courbe de taux sans risque anticipée par le marché, et en particulier, celle proposée par l'EIOPA ; la pertinence de ce modèle dans ce contexte a été analysée dans Armel et Planchet [2020a].
- Une méthode de calibrage du générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique adaptée au cadre normatif Solvabilité 2 ;
- Une méthode de simulation avec discrétisations exactes permettant ainsi une optimisation de la mise en œuvre opérationnelle et des écarts de convergence.

---

<sup>4</sup> Un générateur de scénarios économiques permettant de valoriser des obligations, des actions, des investissements en immobilier et des titres monétaires couvre 98 % de l'actif des entreprises d'assurance en France en 2016 et permet de diffuser les taux d'intérêt sans risque (cf. Armel et Planchet [2019]).

Nous proposons donc un modèle opérationnel et adapté à la norme Solvabilité 2, basé sur un modèle de taux CIR++, qui rend donc l'approche par les déflateurs applicable en pratique.

Les tests de sensibilité réalisés dans Armel et Planchet ([2018], [2019] et [2020a]) sont complétés en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique dans Armel et Planchet [2020b]. Ils ne sont par conséquent pas détaillés ici.

## 2 Approche par les déflateurs avec un modèle de taux de type CIR++

Nous présentons dans cette section notre approche de construction d'un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique destiné à valoriser les contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéficiaires. Après un bref rappel du cadre général de modélisation nous présentons dans la suite :

- Le modèle de taux et le prix des obligations zéro-coupon ;
- La forme du déflateur et le processus de vraisemblance ;
- Le prix de l'actif risqué permettant de prendre en compte les investissements de type actions ou en immobilier ;
- Les méthodes de calibrage et de simulation des modèles.

### 2.1 Modèle général<sup>5</sup>

Soit  $\{r(t)\}_{0 \leq t}$  le taux court instantané sans risque et soit  $\{S(t)\}_{0 \leq t}$  le prix de l'actif risqué (correspondant ici aux prix des investissements en actions et en immobilier).

Sous la probabilité historique  $P$ , supposons que les équations différentielles de  $\{r(t)\}_{0 \leq t}$  et de  $\{S(t)\}_{0 \leq t}$  s'écrivent comme suit :

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dW_{rate}^P(t)$$

$$dS(t) = \mu_{risk}(t).S(t).dt + \sigma_{risk}(t).S(t).dW_{risk}^P(t)$$

où  $W_{rate}^P(t)$  et  $W_{risk}^P(t)$  sont deux mouvements browniens standards dont le coefficient de corrélation est noté  $\rho = Corr(dW_{rate}^P(t); dW_{risk}^P(t))$ .

Soit  $\{\lambda(t)\}_{0 \leq t}$  un processus adapté tel que le processus de vraisemblance  $L$  défini par :  $dL(t) = -L(t).\lambda(t)dW_{rate}^P(t)$  soit intégrable.

Alors, le processus  $L$  est une  $P$ -martingale et on a :

<sup>5</sup> L'annexe 6.1 rappelle sommairement le cadre théorique de changement de probabilité et de construction des déflateurs.

$$L(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) dW_{rate}^P(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda(s)^2 ds\right)$$

La mesure de probabilité  $Q$ , dont le processus de vraisemblance est  $L$ , est une mesure martingale équivalente à  $P$  et le processus  $\{W_{rate}^Q(t)\}_{0 \leq t}$  est un  $Q$ -mouvement brownien standard où :

$$dW_{rate}^Q(s) = dW_{rate}^P(s) + \lambda(s) ds$$

Dans la suite, on appelle la mesure  $Q$ , la mesure de probabilité risque-neutre.

Par définition, le déflateur s'écrit (cf. annexe 6.1) :

$$D(t) = L(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)$$

L'équation différentielle stochastique du déflateur  $\{D(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  s'écrit :

$$dD(t) = -D(t) \cdot r(t) dt - D(t) \lambda(t) dW_{rate}^P(t)$$

Par ailleurs, il faut choisir un drift et une volatilité de l'actif risqué tels que :

- Le processus  $\left\{S(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)\right\}_{0 \leq t}$  soit une martingale sous  $Q$  ;
- Le processus  $\{D(t)S(t)\}_{0 \leq t}$  soit une martingale sous  $P$ .

On se place ici dans le même cadre de travail que Cheng et Planchet [2019] et on suppose que  $\mu_{risk}(t) = r(t) + \lambda(s) \sigma_{risk}(s) \rho$ . On peut prouver par le lemme d'Itô que :

$$\begin{aligned} D(t)S(t) = D(0)S(0) \exp\left(\int_0^t \left(\lambda(s) \sigma_{risk}(s) \rho - \frac{1}{2} \sigma_{risk}(s)^2\right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \lambda(s)^2\right) ds\right) \cdot \exp\left(\int_0^t (\sigma_{risk}(s) \rho - \lambda(s)) dW_{rate}^P(s)\right) \\ + \int_0^t \sigma_{risk}(s) \sqrt{1 - \rho^2} dW_{risk}^P(s) \end{aligned}$$

Si les processus  $\{\sigma_s(s)\}_{0 \leq t}$  et  $\{\lambda(s)\}_{0 \leq t}$  sont constants, il est alors évident que le processus  $\{D(t)S(t)\}_{0 \leq t}$  est une martingale sous  $P$ .

Dans le cas où les deux processus  $\{\sigma_s(s)\}_{0 \leq t}$  et  $\{\lambda(s)\}_{0 \leq t}$  sont stochastiques, une condition suffisante pour que le processus  $\{D(t)S(t)\}_{0 \leq t}$  soit une martingale sous  $P$  est de supposer que :

$$\lambda(s) \sigma_{risk}(s) \rho - \frac{1}{2} \sigma_{risk}(s)^2 - \frac{1}{2} \lambda(s)^2 = 0$$

Cette hypothèse a été retenue par Cheng et Planchet [2019].

Il en découle que :

$$\sigma_{risk}(s) = \lambda(s)\rho \pm \lambda(s)\sqrt{\rho^2 - 1}$$

Puisque  $\rho \leq 1$  cette équation n'admet de solution réelle que si  $|\rho| = 1$ . Dans ce cas  $\sigma_{risk}(s) = \lambda(s)\rho$  et  $W_{risk}^P(t) = \rho W_{rate}^P(t)$ .

On en déduit que  $\sigma_{risk}(s) \cdot W_{risk}^P(t) = \lambda(s) \cdot W_{rate}^P(t)$  et  $\mu_{risk}(t) = r(t) + \lambda(s)^2$ .

La dynamique de l'actif risqué sous  $P$  s'écrit donc :

$$dS(t) = (r(t) + \lambda(s)^2) \cdot S(t) \cdot dt + \lambda(t) \cdot S(t) \cdot dW_{rate}^P(t)$$

Sous  $Q$ , la dynamique de l'actif risqué est une dynamique de type Black-Sholes s'écrivant :

$$dS(t) = r(t) \cdot S(t) \cdot dt + \lambda(t) \cdot S(t) \cdot dW_{rate}^Q(t)$$

On peut noter que la solution de cette équation différentielle s'écrit, en appliquant le lemme d'Itô :

$$S_T = S_t \exp \left( \int_t^T r(u) du - \int_t^T \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_t^T \lambda(u) dW_{rate}^Q(u) \right)$$

Donc :

$$E^Q \left( S_t \cdot \int_0^t -r(u) du \right) = S_0 E^Q \left( \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_0^t \lambda(u) dW_{rate}^Q(u) \right) \right)$$

Or par construction :

$$\begin{aligned} E^Q \left( \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_0^t \lambda(u) dW_{rate}^Q(u) \right) \right) \\ = E^P \left( L(t) \cdot \exp \left( \int_0^t \frac{\lambda(u)^2}{2} du + \int_0^t \lambda(u) dW_{rate}^P(u) \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

Donc le processus  $\left\{ S(t) \cdot \exp \left( - \int_0^t r(s) ds \right) \right\}_{0 \leq t}$  est une  $Q$ -martingale.

Nous avons décrit ici le modèle général d'un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique en supposant que les taux d'intérêt courts instantanés suivent la dynamique générale :

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dW_{rate}^P(t)$$

Nous présentons dans les sections suivantes une application de ce cadre général en supposant que les taux d'intérêt courts instantanés suivent un modèle de type CIR++.

## 2.2 Modèle de taux et prix des obligations zéro-coupons

### 2.2.1 Sous la mesure de probabilité risque neutre

Le modèle CIR++ décrit le processus du taux court instantané  $r$  à partir d'une fonction déterministe notée  $\varphi$  et d'un processus CIR noté  $x$ , dont le vecteur de paramètres est noté  $\alpha = (k, \theta, \sigma)$ , défini sous  $Q$  comme suit :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^Q(t)$$

où :  $x(0) = x_0$  et  $x_0, k, \theta, \sigma$  sont des constantes positives et on a :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

La fonction  $\varphi$  permet de reproduire la courbe de taux anticipée par le marché. Soit  $f^M(0, t)$  le taux forward instantané du marché observé à la date 0 pour la maturité  $t$  :

$$f^M(0, t) = -\frac{\partial \ln(P^M(0, t))}{\partial t}$$

En notant  $\varphi(t) = \varphi^{CIR}(t; \alpha)$  on a :

$$\varphi^{CIR}(t; \alpha) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t; \alpha)$$

où

$$f^{CIR}(0, t; \alpha) = \frac{2k\theta(\exp\{th\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)} + x_0 \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)]^2}$$

avec  $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma_x^2}$ .

Aussi, l'intégrale de  $\varphi$  s'écrit :

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}$$

avec :

- $P^M(0, T)$  est le prix de marché de l'obligation zéro-coupon sans risque observée à l'instant 0 pour la maturité  $T$ .
- $A(t, T)$  et  $B(t, T)$  sont définis par :

$$A(t, T) = \left[ \frac{2h \exp\left\{\frac{(k + h)(T - t)}{2}\right\}}{2h + (k + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma_x^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)}$$

avec  $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma_x^2}$



Afin que le taux court instantané reste strictement positif, les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller suivante :

$$2k\theta > \sigma_x^2$$

Comme précisé dans Armel et Planchet [2020a], le processus  $x(t)$  conditionnellement à  $x(s)$  suit la loi  $\chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$  :

$$x(t)|x(s) = \chi^2(v, \lambda_{t,s})/c_{t-s}$$

où :

- $\chi^2(v, \lambda_{t,s})$  est une loi du Khi-deux non-centrée à  $v$  degrés de liberté et dont le paramètre de décentralisation est  $\lambda_{t,s}$  ;
- $c_{t-s} = \frac{4k}{\sigma_x^2(1-\exp(-k(t-s)))}$  ;
- $v = 4k\theta/\sigma_x^2$  ;
- $\lambda_{t,s} = c_{t-s}x_s \exp(-k(t-s))$ .

La moyenne et la variance de  $x(t)$  conditionnellement à  $F_s$  sont données par :

$$E^Q\{x(t)|F_s\} = x(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)})$$

$$Var\{x(t)|F_s\} = \frac{x(s)\sigma_x^2}{k}(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma_x^2}{2k}(1 - e^{-k(t-s)})^2$$

Le prix à l'instant  $t$  d'une obligation zéro coupon de maturité  $T$  peut être écrit sous la forme (cf. Brigo et Mercurio [2007]) :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

$$\text{où } \bar{A}'(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T)$$

Le taux d'intérêt composés à l'instant  $t$  pour l'échéance  $T$  est donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left( \ln \left( \frac{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

Le prix  $P(t, T)$  et le taux  $R(t, T)$  sont des fonctions des paramètres du modèle CIR à un facteur  $x$  et de la valeur initiale  $x_0$ . Nous pouvons donc caractériser la dynamique de  $R(t, T)$  sans avoir à calculer la fonction  $\varphi(t)$ .

Par ailleurs, la diffusion des taux d'intérêt composés revient à diffuser le processus  $x$ . Celui-ci peut être simulé à partir de la diffusion d'une loi du Khi-deux non-centrée (cf. Armel et Planchet [2020a]).

### 2.2.2 Sous la mesure de probabilité historique

Comme présenté dans la section précédente, le taux d'intérêt instantané est supposé s'écrire sous la forme  $r(t) = x(t) + \varphi(t)$ , où  $\varphi$  est une fonction déterministe et  $x$  est un processus CIR dont la dynamique sous  $Q$  est la suivante :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^Q(t); x(0) = x_0$$

et :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

Définissons la prime de risque par :  $\lambda(t) = \lambda \sqrt{x(t)} / \sigma_x$  où  $\lambda$  est un nombre réel. Et posons :  $dW_{rate}^Q(t) = dW_{rate}^P(t) + \lambda(t)dt$ .

Cette prime de risque dépend directement du processus CIR. Elle dépend donc des variables modélisées et ne suit pas un processus indépendant de ces variables comme le proposent Cheng et Planchet [2019].

La forme retenue pour la prime de risque permet de garder les principales propriétés analytiques du modèle lors du changement de probabilité. Un cadre général adapté aux modèles affines, et permettant de garder leurs propriétés analytique sous  $P$  et sous  $Q$ , est présenté et analysé dans Duffee [2002].

Le processus  $W_{rate}^P$  est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité historique et le taux d'intérêt court instantané s'écrit sous  $P$  comme  $r(t) = x(t) + \varphi(t)$ , avec :

$$dx(t) = (k - \lambda) \left( \frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^P(t); x(0) = x_0$$

Le processus  $r$  suit donc un processus CIR++ sous la probabilité historique. Il permet de prendre en compte des taux négatifs et de reproduire la courbe de taux anticipée. On peut évaluer les prix des obligations zéro-coupons par des formules fermées et diffuser, en discrétisation exacte, le processus  $r$  en diffusant des lois Khi-deux non centrées comme présenté dans Armel et Planchet [2020a].

Par ailleurs, la contrainte de Feller est vérifiée sous la mesure  $Q$  si elle l'est sous la mesure  $P$  :  $2(k - \lambda) \frac{k\theta}{k - \lambda} = 2k\theta > \sigma_x^2$ .

Sous la mesure de probabilité historique, le prix à l'instant  $t$  d'une obligation zéro coupon de maturité  $T$  s'écrit sous la forme (cf. démonstration en annexe 6.2) :

$$P(t, T) = \bar{A}^t(t, T) e^{-B(t, T)x(t)}$$

Le taux d'intérêt composés à l'instant  $t$  pour l'échéance  $T$  est donc :

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \left( \ln \left( \frac{P^M(0, t) A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T) P^M(0, T) A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} \right) + B(t, T)x(t) \right)$$

Le taux  $R(t, T)$  est une fonction affine de  $x(t)$  dont les coefficients sont déterministes et est de fait une écriture affine d'une loi du Khi-deux non-centrée.

## 2.3 Déflateur et processus de vraisemblance

L'équation différentielle stochastique du déflateur sous la mesure de probabilité historique est :

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = -r(t) - \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Le déflateur stochastique s'écrit (cf. démonstration en annexe 6.3) :

$$D(T) = D(t) \exp\left(\frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2}(T-t)\right) \exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T)-x(t))\right) \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right)$$

Rappelons par ailleurs que :  $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$ .

Le processus de vraisemblance de  $Q$  par rapport à  $P$  s'écrit :

$$L(t) = \frac{D(t)}{D(0)} \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$$

Soit :

$$L(t) = \exp\left(\frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2} t\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(t)-x(0))\right) \exp\left(-\left(\frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda(k-\lambda)}{\sigma_x^2}\right) \int_0^t x(s) ds\right)$$

## 2.4 Prix de l'actif risqué et prime de risque

### 2.4.1 Prix de l'actif risqué

Comme présenté dans la section 2.1, le processus de l'actif risqué s'écrit sous la mesure de probabilité historique  $P$  :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) + \lambda(t)^2)dt + \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Le prix de l'actif risqué s'écrit (cf. annexe 6.4 pour une démonstration de ce résultat) :

$$S(T) = S(t) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k \theta (T-t)\right) \cdot \exp\left(\int_t^T \varphi(s) ds\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T)-x(t))\right) \cdot \exp\left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right)$$

Rappelons par ailleurs que :  $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$ .

### 2.4.2 Rendement espéré de l'actif risqué

Notons  $s_t$  le rendement logarithmique de l'actif risqué à la date  $t$  sur un horizon d'un an. Par définition :

$$s_{t+1} = \ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right)$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire  $s_{t+1}$  sous la probabilité historique  $P$  s'écrit (cf. annexe 6.5 pour une démonstration de ce résultat) :

$$E^P(s_{t+1}) = R^M(t, t+1) - \left( \ln\left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)}\right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t)) \right) + \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right)$$

Avec :

- $R^M(t, t+1)$  : le taux observé du marché entre la date  $t$  et  $t+1$  ;
- $A(t, T)$  et  $B(t, T)$  sont des fonctions déterministes définies dans la section 2.2.1 ;
- $x_0$  est la valeur initiale du processus  $x_t$ .

L'espérance de l'excès de rendement, noté  $e_t$ , par rapport au taux observé du marché s'écrit donc :

$$E^P(e_{t+1}) = - \left( \ln\left(\frac{A(0, t)}{A(0, t+1)}\right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t)) \right) + \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right)$$

Cette écriture permet de faire le lien entre le facteur  $\lambda$  de la prime de risque et le surplus de rendement qu'offre l'actif risqué par rapport aux taux sans risque.

### 2.4.3 L'espérance de l'excès de rendement en régime permanent

À long terme, en régime permanent ( $t \gg 0$ ), l'excès de rendement ne dépend que du facteur de risque  $\lambda$  et des paramètres du modèle CIR ( $k, \theta$  et  $\sigma_x$ ) et s'écrit (cf. annexe 6.6) :

$$E^P(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2} (k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

Cette formule décrit explicitement le facteur  $\lambda$  de la prime de risque en fonction de l'excès de rendement de l'actif risqué par rapport au taux sans risque observé à long terme.

Le calibrage du modèle de taux permet de disposer des paramètres :  $k, \theta$  et  $\sigma_x$ . L'estimation de l'excès de rendement espéré permet donc de construire un estimateur de  $\lambda$ .

## 2.5 Calibrage

Le calibrage du générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique nécessite de définir les paramètres suivants :

- Les paramètres du modèle de taux :  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma_x$  ;
- Le facteur de la prime de risque  $\lambda$ .

Pour ce faire, nous proposons de retenir la démarche en deux étapes suivantes :

- Calibrer des paramètres  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma_x$  en s'aidant des caractéristiques analytiques qu'offre le modèle CIR++ sous la probabilité risque-neutre. On peut en effet valoriser des *caps*, des *floors* et des *swaptions* par des formules fermées (cf. Armel et Planchet [2020a]). Ce point est discuté dans la section 2.5.1.
- Calibrer  $\lambda$  sur des données historiques. Ce point est discuté dans la section 2.5.2.

### 2.5.1 Calibrage du modèle de taux

Le calibrage d'un modèle peut être réalisé soit en utilisant une estimation basée sur des données historiques, soit par une évaluation implicite des paramètres basée sur les prix du marché observés à date.

Avec l'approche historique, les paramètres du modèle sont déterminés sur la base d'une analyse statistique de séries chronologiques des grandeurs de marché pertinentes. Avec l'approche implicite, les paramètres sont évalués dans l'objectif de reproduire les prix de marché observés des produits dérivés retenus pour le calibrage.

Bien que le modèle théorique suppose que les paramètres historiques et les paramètres implicites soient égaux, ils sont différents en pratique.

L'exemple classique est le modèle de Black-Scholes impliquant que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique du sous-jacent. Or on peut observer des phénomènes de *smile* et de *skew* et un aplatissement de la volatilité implicite en fonction du *strike* pour les grandes maturités. Ce point est discuté par exemple dans Tankov [2015].

Pour les modèles de taux, les paramètres calibrés sur des données historiques dépendent des choix de ces données (indice, taille, fréquence, etc.). Les paramètres implicites dépendent eux du prix des instruments financiers, du prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque et éventuellement des facteurs de décalage utilisés pour permettre aux modèles de prendre en compte des taux négatifs. Aussi, les surfaces de volatilité implicites ne résultent pas forcément d'une mesure de prix directe mais d'une reconstruction par le fournisseur de prix (par exemple *via* un modèle SABR pour Bloomberg).

Dans le cadre de l'évaluation des produits dérivés, on observe que les universitaires et les praticiens ont tendance à retenir une approche de calibrage implicite qui semble plus adaptée pour produire des prix cohérents avec les observations du marché. Ce point est discuté dans Rebonato [2004].

Par ailleurs, dans le référentiel Solvabilité 2, les scénarios économiques utilisés pour l'évaluation du *best-estimate* doivent être cohérents avec les prix du marché (*Market-Consistent*). Une évaluation en valeur de marché consiste à valoriser des grandeurs d'intérêt en se référant aux valeurs des actifs et des passifs réellement échangés.

Appliquer une démarche *Mark to Market* pour évaluer le passif en juste valeur implique de disposer *a priori* des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est donc mené dans un cadre *Marked-to-Model* (cf. Armel et Planchet [2019] et Armel et Planchet [2020b]).

Les spécifications techniques QIS [2010] encadrent ce cadre de valorisation en imposant la prise en compte de la courbe de taux sans risque publiée par l'EIOPA et en faisant référence à un calibrage des modèles en prenant en compte les volatilités implicites<sup>6</sup>.

Nous proposons donc ici une approche de calibrage (1) implicite pour les paramètres du modèle de taux et (2) historique pour la prime de risque. Dans un cadre de valorisation largement normatif, cette démarche conduit à séparer de manière nette la détermination du coût des options, incluses dans le déflateur et la production des flux du contrat. Elle respecte également les exigences réglementaires.

Armel et Planchet [2020a] présentent par ailleurs les propriétés analytiques du modèle CIR++ et proposent une démarche de calibrage de ce modèle sur les *caps* et les *swaption* cohérente avec le cadre normatif Solvabilité 2.

## 2.5.2 Calibrage de la prime de risque

La démarche que nous proposons pour estimer le facteur  $\lambda$  se base sur l'excès de rendement historique moyen que génère l'actif risqué par rapport au taux sans risque. L'idée est d'injecter en espérance dans le modèle de l'actif risqué un surplus de rendement égal à l'excès de rendement historique à long terme.

Soit  $\llbracket 1, d \rrbracket$  un intervalle de données historiques d'intérêt de  $d$  points et notons  $\{e_i^M\}_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$  l'historique de l'excès de rendement annuel de l'actif risqué.

D'après la section 2.4.3, l'espérance mathématique de l'excès de rendement à long terme s'écrit :

$$E^P(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

Nous proposons d'estimer le facteur de risque  $\lambda$  par la résolution de l'équation :

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d e_i^M \approx E^P(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

<sup>6</sup> Cf. le Q&A du QIS 5, publié par l'EIOPA, question 76 du document : <https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/CEIOPS-Q-and-A-document-20101104.pdf>

Cette équation est équivalente à une équation polynomiale de second ordre et peut admettre des solutions complexes. Si tel est le cas, nous proposons de retenir la solution réelle suivante :

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmin}_{\lambda} \left( \left| \frac{k\theta}{\sigma_x^2} (k - h) + \frac{k\theta}{k - \lambda} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d s_i^M \right| \right)$$

## 2.6 Simulation sous la probabilité historique

La diffusion des taux d'intérêt, du prix de l'actif risqué et du déflateur repose essentiellement sur la diffusion d'un processus CIR simple. Armel et Planchet [2020a] expliquent comment diffuser exactement un processus CIR en diffusant des lois du Khi-deux non-centrée.

La dynamique du taux court instantané suit le modèle CIR++ comme défini dans la section 2.2.2. La diffusion de  $\{x(t)\}_{0 \leq t}$  permet de diffuser les prix des obligations zéro-coupons et les taux d'intérêt composés. Rappelons en effet que :

$$P(t, T) = \exp(-(T - t)R(t, T)) = \bar{A}'(t, T) e^{-B(t, T)x(t)}$$

Par ailleurs, nous proposons d'évaluer la quantité  $\int_0^T x(s) ds$  en s'appuyant sur l'intégration de Riemann. On peut écrire en effet pour un entier  $N$  adapté :

$$\int_t^T x(s) ds \approx \frac{T - t}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x\left(t + \frac{i}{N}(T - t)\right)$$

La diffusion de  $\{x(t)\}_{0 \leq t}$  et l'évaluation de  $\int_t^T x(s) ds$  permettent de simuler le prix de l'actif risqué et le déflateur dont les dynamiques s'écrivent, pour rappel, comme suit :

$$S(T) = S(0) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta T\right) \cdot \exp\left(\int_0^T \varphi(s) ds\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x_0)\right) \cdot \exp\left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_0^T x(s) ds\right)$$

$$D(T) = D(0) \exp\left(\frac{\lambda k\theta}{\sigma_x^2} T\right) \exp\left(-\int_0^T \varphi(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x_0)\right) \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_0^T x(s) ds\right)$$

Dans cette section nous avons présenté une approche de construction, de calibrage et de simulation d'un modèle de génération de scénarios économiques, en probabilité historique, adapté au processus de valorisation des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices et cohérents avec la norme Solvabilité 2.

Nous présentons dans la section suivante (section 3) une application de cette approche comprenant notamment des études de sensibilités du *best-estimate* aux choix des modèles et des données.

### 3 Application : calibrage du modèle et sensibilités du *best-estimate*

Nous complétons dans cette section les tests de sensibilité réalisés dans Armel et Planchet ([2018], [2019] et [2020a]) en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique, dont le modèle de taux est le modèle CIR++, sur le *best-estimate* des contrats d'épargne. Des sensibilités aux choix des données et du facteur de décalage du modèle de Black, utilisé dans le processus de calibrage, ont été réalisées également.

Nous avons repris ici les mêmes modèles et paramètres d'évaluation des passifs présentés dans Armel et Planchet [2019]. Les taux d'intérêt sont calibrés sur les prix du marché, comme présenté dans Armel et Planchet [2020a] et la prime de risque est calibrée sur les données historiques.

#### 3.1 Données

Les données retenues pour calibrer les générateurs de scénarios économiques étudiés ici sont celles présentées dans l'article Armel et Planchet [2018].

Pour les modèles de taux, nous retenons la convention de calibrage présentée dans Armel et Planchet [2020a].

Pour le calibrage de la prime de risque, nous avons retenu un historique des rendements des actions et des investissements en immobilier de 2011 à 2018 afin de prendre en compte une situation économique proche de celle qui se présente à la date de projection et de calibrage retenue ici (fin 2018). Nous avons ainsi exclu la crise de 2007 et pris en compte la politique d'assouplissement monétaire suite à la crise de la dette grecque en 2011.

En supposant que les actions représentent 67 % de l'actif risqué et que l'immobilier représente 33 %, l'excès de rendement moyen est de 2,7 %.

#### 3.2 Résultats du calibrage des modèles

##### 3.2.1 Calibrage du modèle de taux sur les prix des *caps* et des *swaptions*

Nous reprenons ici les résultats de calibrage du modèle CIR++ réalisés dans Armel et Planchet [2020a]. Pour plus de matière sur le processus de calibrage et sur l'analyse des résultats, le lecteur peut se référer à cet article.

Le [Tableau 1](#) présente les résultats du calibrage du modèle CIR++ (noté aussi CIR1F dans la suite) sur les prix de *caps* ATM et le [Tableau 2](#) présente les résultats du calibrage sur les prix de *swaptions* ATM.

Le méta-paramètre  $x_0$  du modèle CIR++ représentant la valeur initiale du processus CIR doit être fixé en amont du processus de calibrage. Ce paramètre n'a aucun impact sur la reproduction de la courbe de taux d'intérêt initiale mais peut avoir un impact sur la



dynamique du taux d'intérêt diffusé. Trois niveaux du méta-paramètre  $x_0$  sont testés : 0,4 %, 1 % et 2 %.

Par la notation  $CIR1F(i, j)$  nous désignons le modèle CIR++ calibré sur des caps ou des swaptions avec le  $i^{\text{ème}}$  facteur de décalage de Black et le  $j^{\text{ème}}$  méta-paramètre du modèle CIR++, tous les deux appartenant à (0,4 % ; 1 % ; 2 % ; 0,4 % ; 1 % ; 2 %).

Tableau 1 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Caps

Paramètres	CIR1F(1,1)	CIR1F(1,2)	CIR1F(1,3)	CIR1F(2,1)	CIR1F(2,2)	CIR1F(2,3)	CIR1F(3,1)	CIR1F(3,2)	CIR1F(3,3)
k	1,95%	2,91%	3,89%	2,20%	3,12%	4,09%	2,62%	3,45%	4,37%
$\Theta$	99,39%	99,22%	99,16%	98,77%	99,98%	99,24%	99,05%	99,34%	99,24%
$\sigma$	2,57%	2,10%	1,81%	3,68%	3,06%	2,68%	5,45%	4,69%	4,14%
Erreur totale au carré relative	<b>1,05%</b>	<b>1,19%</b>	<b>1,35%</b>	<b>1,00%</b>	<b>1,15%</b>	<b>1,34%</b>	<b>0,88%</b>	<b>1,03%</b>	<b>1,21%</b>

Tableau 2 : résultats du calibrage du modèle CIR++ sur des Swaptions

Paramètres	CIR1F(4,1)	CIR1F(4,2)	CIR1F(4,3)	CIR1F(5,1)	CIR1F(5,2)	CIR1F(5,3)	CIR1F(6,1)	CIR1F(6,2)	CIR1F(6,3)
k	2,63%	2,99%	3,45%	3,52%	3,85%	4,31%	4,95%	5,19%	5,50%
$\Theta$	99,95%	99,99%	100,00%	99,97%	99,99%	100,00%	99,90%	99,96%	99,98%
$\sigma$	5,76%	5,31%	4,87%	7,05%	6,65%	6,20%	9,53%	9,16%	8,70%
Erreur totale au carré relative	<b>2,92%</b>	<b>3,19%</b>	<b>3,60%</b>	<b>3,45%</b>	<b>3,73%</b>	<b>4,15%</b>	<b>4,89%</b>	<b>5,16%</b>	<b>5,60%</b>

L'erreur totale est calculée comme la somme des erreurs au carré (fonction objectif) divisée par la somme des prix de Black au carré.

Les paramètres calibrés respectent la contrainte de Feller.

Armel et Planchet [2020a] ont étudié l'impact de la valeur initiale du modèle CIR sur les caractéristiques distributionnelles du modèle CIR++ sous  $Q$ . Compte tenu du faible impact de la valeur initiale du modèle CIR, nous nous contentons dans la suite de l'article d'étudier l'impact du facteur de décalage du modèle de Black et nous fixons la valeur initiale des modèles CIR++ à 1 %.

### 3.2.2 Estimation du facteur de la prime de risque

Le calibrage des modèles CIR++ sur les prix du marché permet de déduire le paramètre de la prime de risque à partir de l'excès de rendement historique comme expliqué dans la section 2.5.2.

En synthèse le calibrage des modèles étudiés ici est présenté dans le [Tableau 3](#).

Tableau 3 : résultats du calibrage du modèle CIR++ pour  $x_0 = 1\%$  et pour différents facteurs de décalage de Black

Paramètres	Cap			Swaption		
	CIR1F(1,2)	CIR1F(2,2)	CIR1F(3,2)	CIR1F(4,2)	CIR1F(5,2)	CIR1F(6,2)
k	2,91%	3,12%	3,45%	2,99%	3,85%	5,19%
$\Theta$	99,22%	99,98%	99,34%	99,99%	99,99%	99,96%
$\sigma$	2,10%	3,06%	4,69%	5,31%	6,65%	9,16%
$\lambda$	-0,70%	-1,36%	-2,58%	-3,30%	-4,09%	-5,68%

### 3.2.3 Tests de martingalité

Nous présentons dans cette section des illustrations graphiques pour valider des tests de martingalité réalisés avec un nombre de trajectoires de 2000 et un pas de simulation pour l'intégration de Riemann présentée dans la section 2.6 de 1/500 ( $N=500$ ).

Nous avons retenu 2000 trajectoires pour la validation des tests car c'est le nombre de simulations que nous retenons pour l'évaluation du *best-estimate* dans la section 3.3. Par ailleurs, le rapport publié par l'Institut des actuaires [2016] précise que, communément, le nombre de scénarios retenus par les praticiens est de l'ordre du millier pour valoriser les produits d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices par des méthodes de Monte-Carlo.

L'objectif ici est de vérifier que les prix déflatés des obligations zéro-coupons et de l'actif risqué sont martingales. Cela se traduit par la vérification des égalités suivantes pour des réels  $t$  et  $T$  avec  $t \leq T$  et  $D(0) = 1$  :

$$E^P(D(t).P(t,T)) = P^M(0,T)$$

$$E^P(D(t).S(t)) = S(0)$$

Les prix des zéro-coupons de maturité  $T$  observés et construits à partir de la courbe de taux par termes EIOPA sont notés  $P^M(0,T)$ .

Nous présentons dans la suite les cinq tests de martingalité réalisés :

- Le test 1 consiste à poser  $T = t$  et vise à vérifier que le déflateur converge vers les prix observés du marché :  $E^P(D(t)) = P^M(0,t)$  ;
- Le test 2 consiste à poser  $T = t + 5$  et vise à vérifier que les prix déflatés des zéro-coupons de maturité 5 ans sont martingales :  $E^P(D(t) * P(t,t+5)) = P^M(0,t+5)$  ;
- Le test 3 consiste à poser  $T = t + 10$  et vise à vérifier que les prix déflatés des zéro-coupons de maturité 10 ans sont martingales :  $E^P(D(t) * P(t,t+10)) = P^M(0,t+10)$  ;
- Le test 4 consiste à poser  $T = t + 20$  et vise à vérifier que les prix déflatés des zéro-coupons de maturité 20 ans sont martingales :  $E^P(D(t) * P(t,t+20)) = P^M(0,t+20)$ .
- Le test 5 consiste à vérifier la martingalité de l'actif risqué :  $E^P(D(t).S(t)) = S(0)$

Nous observons dans les figures suivantes que les prix déflatés convergent bien vers les prix de marché observés initialement.

Figure 1 : test 1 - convergence du déflateur vers les prix observés du marché :  $E^P(D(t)) = P^M(0, t)$

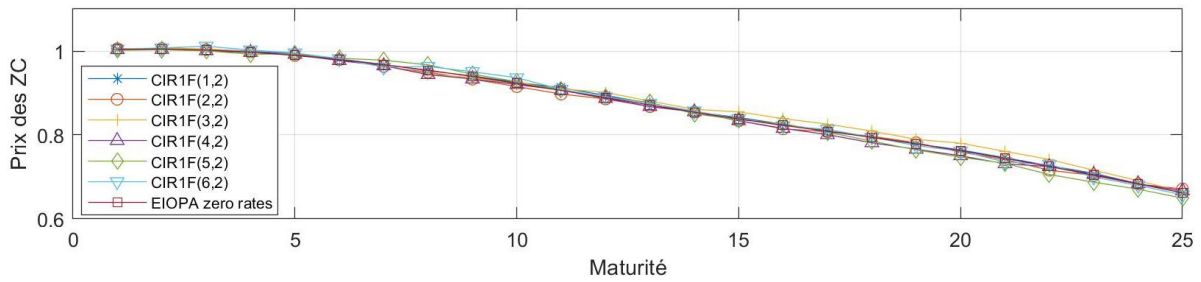


Figure 2 : test 2 - convergence des ZC 5 ans déflatés vers les prix observés du marché :  $E^P(D(t) * P(t, t + 5)) = P^M(0, t + 5)$

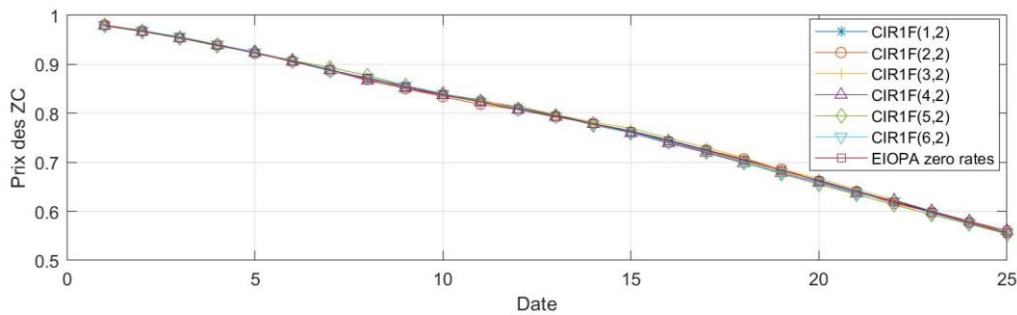


Figure 3 : test 3 - convergence des ZC 10 ans déflatés vers les prix observés du marché :  $E^P(D(t) * P(t, t + 10)) = P^M(0, t + 10)$

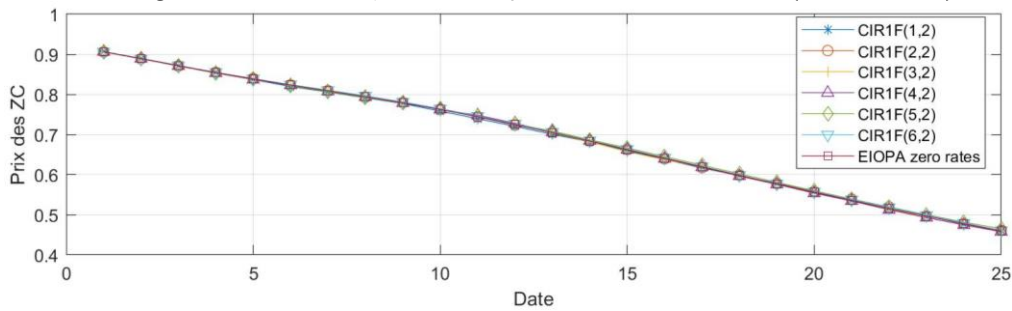


Figure 4 : test 4 - convergence des ZC 20 ans déflatés vers les prix observés du marché :  $E^P(D(t) * P(t, t + 20)) = P^M(0, t + 20)$

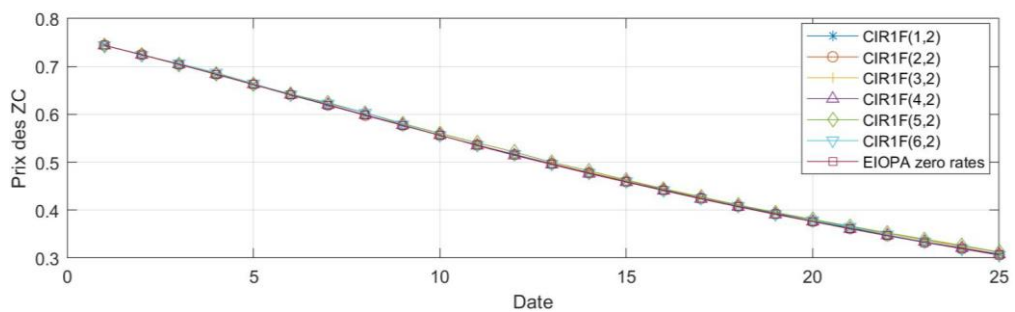
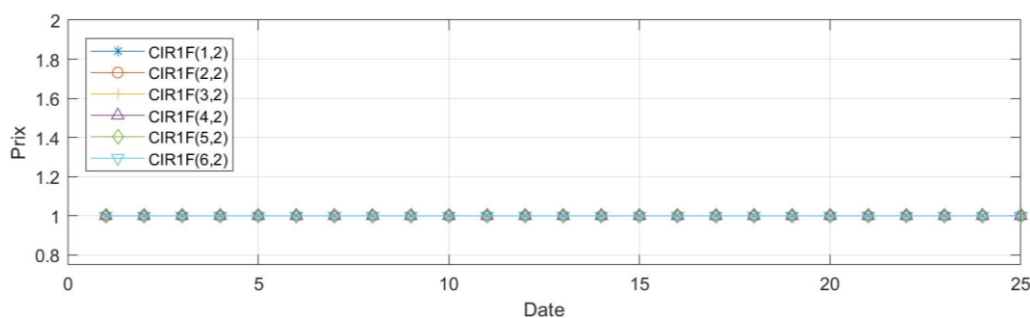


Figure 5 : test 5 - martingalité de l'actif risqué :  $E^P(D(t).S(t)) = S(0)$



### 3.3 Étude d'impact sur le *best-estimate*

Dans Armel et Planchet [2019] et Armel et Planchet [2020a] nous avons étudié la sensibilité du *best-estimate* au choix de cinq modèles de génération de scénarios économiques sous la mesure risque neutre dont les modèles de taux sont les modèles : CIR++, CIR2++, Hull & White, G2++ et LMM décalé. Les modèles de taux ont été calibrés sur deux types de produits financiers (*caps* et *swaptions*). Ces modèles respectent notamment les contraintes réglementaires.

Nous complétons dans cette section ces tests de sensibilité en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique dont le modèle de taux est le modèle CIR++ sur le *best-estimate* des contrats d'épargne avec participation aux bénéfices français (les contrats en euro).

Afin d'évaluer ces impacts, nous avons repris ici les mêmes modèles et paramètres d'évaluation des passifs présentés dans Armel et Planchet [2019]. Nous avons donc utilisé le package R SimBEL<sup>7</sup> alimenté par des données réelles modifiées d'un assureur. La valeur de marché de l'actif est de 100M€, la provision mathématique est de 70 M€ et l'horizon de projection est de 20 ans.

Le Tableau 4 présente la sensibilité du *best-estimate* aux différents calibrages *market-consistent* du générateur de scénarios économique sous la probabilité historique.

Tableau 4 : *best-estimate* par le modèle CIR++ *market-consistent*

Montants en M€	Cap			Swaption		
	CIR1F(1,2)	CIR1F(2,2)	CIR1F(3,2)	CIR1F(4,2)	CIR1F(5,2)	CIR1F(6,2)
Best-estimate net de frais	78,77	78,48	77,33	78,17	77,95	78,24
Frais	7,97	7,84	7,71	7,72	7,72	7,81
Best-estimate	86,74	86,32	85,03	85,89	85,67	86,05

Si l'on reprend les résultats de sensibilités présentés dans Armel et Planchet [2019] et Armel et Planchet [2020a], nous observons que l'impact sur la valeur du *best-estimate* peut apparaître assez contenu : en ne retenant que les modèles de taux *market-consistent*, la différence entre les valeurs minimale et maximale représente 8,1 % de la valeur moyenne des *best-estimates* et 10,5 % des provisions mathématiques. Cet impact est cependant

<sup>7</sup> Voir <http://www.ressources-actuarielles.net/simbel>

substantiel s'il est comparé aux fonds propres. En effet, ces derniers représentent en France en moyenne 6,1 % des encours des contrats d'épargne avec clause de participation aux bénéficiaires à fin 2018 (FFA [2019]).

Une analyse détaillée des écarts entre les valorisations des passifs sous les probabilités  $P$  et  $Q$  est présentée dans Armel et Planchet [2020b].

Il ressort de l'analyse des valorisations réalisées avec des GSE sous la probabilité historique et des GSE risque-neutres dont les modèles de taux sont des modèles CIR++ que la baisse des *Best-estimates*, évalués en probabilité historique, s'expliquent notamment par l'étalement des rachats sur l'horizon de projection à la suite de la baisse des rachats dynamiques. Quand on retient une approche par les déflateurs, on constate en effet que l'espérance des flux garantis est plus faible sur la quasi-totalité de l'horizon de projection et que leur durée est plus importante comme le montre le Tableau 5.

Tableau 5 : Durations des flux et étalement des rachats<sup>8</sup>

Durations des flux garantis en année	Calibrage sur des Caps ATM			Calibrage sur des Swaptions ATM		
	0,4%	1,0%	2,0%	0,4%	1,0%	2,0%
Facteur de décalage Black au calibrage CIR++	0,4%	1,0%	2,0%	0,4%	1,0%	2,0%
Evaluation sous Q	8,2	8,2	8,1	8,2	8,2	8,4
Evaluation sous P	9,0	9,1	9,3	9,2	9,2	9,0
Ecart	0,8	1,0	1,1	1,0	0,9	0,5

Les rachats dynamiques sont donc plus importants quand la valorisation des engagements est réalisée sous la probabilité risque-neutre. Par conséquent, l'algorithme de revalorisation de l'assureur, sous la probabilité historique, est moins contraint à distribuer un surplus de la richesse disponible pour tenter de baisser les rachats dynamiques lui permettant ainsi d'améliorer sa marge (quand la *moneyness* lui est favorable). Ayant moins de rachat l'assiette des chargements sur encours est plus importante, ce qui se traduit par le transfert d'une partie de la richesse vers les fonds propres économiques et par la baisse du *best-estimate*.

## 4 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une démarche de construction d'un générateur de scénarios économiques sous la probabilité historique, permettant de diffuser les taux d'intérêt et les prix d'investissements risqués (en actions et en immobilier). Ce GSE est adapté au processus de valorisation des passifs des contrats d'épargne avec des clauses de participation aux bénéficiaires et est cohérent avec le cadre normatif du référentiel Solvabilité 2.

Ce papier propose des méthodes de calibrage des modèles et des primes de risques basées sur des formules fermées et présente des approches de diffusion avec des discrétisations exactes optimales et adaptées à des besoins de simulations à long terme.

<sup>8</sup> Le *best-estimate* garanti (BEG) est l'espérance des flux sortants intégrant la garantie de taux actualisés.

Aussi, nous avons complété les tests de sensibilité réalisés dans Armel et Planchet ([2018], [2019] et [2020a]) en évaluant l'impact du choix d'un générateur de scénarios économiques sous la mesure de probabilité historique, dont le modèle de taux est le modèle CIR++, sur le *best-estimate* des contrats d'épargne avec une clause de participation aux bénéfices français.

Les écarts de *best-estimate* observés entre l'approche par les déflateurs et l'évaluation risque neutre s'expliquent par les fonctions de réaction implémentées dans le modèle traduisant les actions de l'assureur et des assurés.

La justification des comportements de ces fonctions est délicate sous la mesure de probabilité risque-neutre comme discuté dans Armel et Planchet [2020b] et une approche par les déflateurs paraît plus adaptée.

Dans un cadre de valorisation largement normatif, l'approche par les déflateurs présentée dans cet article conduit par ailleurs à séparer de manière nette la détermination du coût des options, incluses dans le déflateur et la production des flux du contrat. Elle permet également de répondre aux exigences réglementaires.

Enfin, les travaux présentés dans cet article montrent que les problèmes numériques qui ont longtemps constitué un obstacle à l'utilisation pratique de déflateurs peuvent être levée et que donc l'approche par les déflateurs est opérationnelle pour les assureurs et ne se limite pas à un exercice de style académique. Ils montrent aussi que passer d'un calcul « risque neutre » à une approche par les déflateurs ne nécessite que des travaux relativement marginaux pour adapter les modèles en place.

## 5 Références

- ACPR [2013] « [Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II](#) », Document de travail.
- Armel K., Planchet F. [2020a] « [Use of CIR-Type Interest Rate Models to Assess the Economic Value of Participating Savings Contracts](#) », LSAF, Document de travail.
- Armel K., Planchet F. [2020b] « [The Economic Evaluation of Life Insurance Liabilities: Pitfalls, Best Practices and Recommendations for Relevant Implementation](#) », Opinions & Débats, à paraître.
- Armel K., Planchet F. [2019] « [How to Define the Quality of an Economic Scenario Generator to Assess the Best Estimate of a French Savings Contract in € ?](#) », *Bankers Markets Investors*, n°157, June 2019.
- Armel K., Planchet F. [2018] « [Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ?](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 85 (1-2).
- Briys E., de Varenne F. [1994] « [Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications](#) », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 19, 53-72.
- Brigo D., Mercurio F. [2007] « [Interest Rate Models - Theory and Practice](#) ». 2nd Edition. Springer.
- Cheng P.K., Planchet F. [2019] « [Stochastic Deflator for an Economic Scenario Generator with Five Factors](#) », *Bankers Markets Investors*, n°157, June 2019.
- Duffee G.R. [2002] « [Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models](#) » *The Journal of Finance* 57(1):405-443.
- Duffie D. [2001] « [Dynamic Asset Pricing Theory](#) », Third version, Princeton University Press.
- El Karoui N. [2004] « [Couverture des risques dans les marchés financiers](#) », École Polytechnique, CMAP, 91128.
- FFA (Fédération Française de l'Assurance) [2019] « [Rapport 2018 - Cahier statistique](#) », Rapport annuel publié sur le site officiel de la FFA.
- Harrison J.M., Kreps D. [1979] « [Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets](#) », *Journal of Economic Theory*, **20**.
- Harrison J.M., Pliska S. [1981] « [Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading](#) », *Stochastic Processes and their Applications*, **11**.
- Institut des actuaires [2016] « [Best Estimate Liabilities Vie - Exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français](#) », Document de travail.

QIS5 [2010] « [Technical Specifications, Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5](#) », European Commission.

Rebonato R. [2004] « [Volatility and correlation the perfect hedger and the fox](#) », 2nd ed. Chichester: John Wiley and Sons Ltd.

Tankov P. [2015] « [Surface de volatilité](#) », Université Paris-Diderot (Paris VII).



## 6 Annexes

### 6.1 Annexe 1 : Changement de probabilité - rappel théorique

L'objectif de cette section est de rappeler sommairement le cadre théorique de changement de probabilité et de construction des déflateurs. Nous nous sommes appuyés sur Duffie [2001] et El Karoui [2004] pour la réalisation de cette synthèse.

Soit  $F$  un sigma algèbre et soit  $P$  et  $Q$  deux mesures de probabilité  $F$ -mesurables. On dit que  $P$  et  $Q$  sont équivalentes si et seulement si pour tout  $A \in F$  on a :  $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$ .

Si  $P$  et  $Q$  sont deux mesures de probabilité équivalentes sur  $F$  alors il existe une unique variable aléatoire  $L^F$  sur  $F$ , strictement positive et dont l'espérance sous  $P$  est égale à 1, vérifiant pour tout  $A \in F$  :  $Q(A) = \int_A L^F dP$ .

La variable aléatoire s'écrit alors :  $L^F = dQ/dP$  sur  $F$  et est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de  $Q$  par rapport à  $P$  (appelée également la densité ou vraisemblance de  $Q$  par rapport à  $P$ ).

Si  $G \subseteq F$  alors on a, pour toute variable aléatoire  $X$   $F$ -mesurable :

$$E^Q(X|G) = \frac{E^P(L^F \cdot X|G)}{E^P(L^F|G)}$$

En particulier :  $E^Q(X) = E^P(L^F \cdot X)$ .

Par ailleurs, si  $G \subseteq F$  est un sous sigma-algèbre de  $F$ , alors  $Q$  et  $P$  sont équivalentes sur  $G$  et la densité de  $Q$  par rapport à  $P$  sur  $G$  noté  $L^G$  s'écrit :  $L^G = E^P(L^F|G) = E^P(dQ/dP|G)$ .

Soient maintenant  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$  une filtration et  $P$  et  $Q$  deux mesures de probabilité équivalentes sur  $F_T$ . On définit le processus  $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  par :

$$L(t) = E^P(L(T)|F_t) = E^P\left(\frac{dQ}{dP} \middle| F_t\right)$$

Par définition, le processus de densité (ou de vraisemblance)  $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale sous  $P$ .

Pour tous instants  $(t, s) \in [0, T]^2$  et  $t \leq s$ , et toute variable aléatoire  $F_s$ -mesurable  $X$  telle que  $E^Q(|X|) < +\infty$  :

$$E^Q(X|F_t) = \frac{E^P(L(s)X|F_t)}{L(t)}$$

Ainsi, un processus  $\{X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -martingale sous  $Q$  si et seulement si le processus  $\{L(t)X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ -martingale sous  $P$ .

Une mesure de probabilité  $Q$  équivalente à  $P$  est une mesure martingale équivalente pour le processus de prix  $X$  de  $N$  titres si  $X$  est une martingale par rapport à  $Q$  et si la dérivé

Radon-Nikodym  $dQ/dP$  a une variance finie<sup>9</sup>. Une mesure martingale équivalente est communément qualifiée de mesure « risque neutre ».

Supposons qu'il existe un processus de taux court instantané noté  $\{r(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  et soit  $\{\delta(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  un processus défini par :

$$\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

Supposons, après actualisation par  $\{\delta(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ , qu'il existe une mesure martingale  $Q$  équivalente à  $P$  avec le processus de densité  $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ . Alors un déflateur  $\{D(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est défini par :

$$D(t) = L(t) \cdot \delta(t)$$

à condition que  $var(D(t)) < +\infty$  pour tout  $t$ .

Inversement, supposons que  $\{D(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  soit un déflateur pour le processus  $\{X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ , i.e le processus  $\{D(t) \cdot X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est une  $P$ -martingale.

Soit le processus  $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$L(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \cdot \frac{D(t)}{D(0)}$$

Alors, pourvu que  $var(L(T)) < +\infty$ ,  $\{L(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est le processus de densité permettant de définir une mesure martingale équivalente à  $P$ .

Soit  $\{W^P(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  un processus  $P$ -Wiener et supposons que la filtration  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$  est la filtration naturelle complétée ( $F_t = Vect(W(s), 0 \leq s \leq t)$ ).

Alors, pour chaque processus  $X$  ( $P, F_t$ )-martingale, il existe un nombre réel  $x$  et un processus adapté  $h$  (vérifiant la condition de Novikov) tels que :

$$X(t) = x + \int_0^t h_s dW^P(t)$$

et donc :

$$dX(t) = h_t dW^P(t)$$

Ce théorème est connu sous le nom du théorème de représentation. Il garantit l'existence d'un processus  $h$  vérifiant l'équation ci-dessus mais ne nous dit cependant pas comment trouver ou construire ce processus  $h$ . C'est ce que nous proposons dans le paragraphe suivant.

Supposons que nous voulions changer la mesure de  $P$  à  $Q$  sur  $F_T$ . Pour ce faire, nous avons besoin d'une  $P$ -martingale  $L$  avec  $L_0 = 1$  à utiliser comme processus de vraisemblance. Afin de garantir la stricte positivité du processus  $L$  et donc l'équivalence entre  $P$  et  $Q$ , on peut choisir un processus adapté  $\theta$  et supposer que le processus  $L$  s'écrit :

$$dL(t) = L(t) \cdot \theta(t) dW^P(t)$$

<sup>9</sup> La condition de variance finie est une propriété technique qui n'est pas uniformément adoptée dans la littérature.

Le processus  $L$  est une  $P$ -martingale et on a par le lemme d'Itô :

$$L(t) = \exp\left(\int_0^t \theta(s) dW^P(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds\right)$$

Maintenant que nous avons défini le processus de vraisemblance de  $Q$ , la question qui se pose naturellement est de savoir quelles sont les propriétés de  $\{W^P(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  sous la nouvelle mesure  $Q$ . Ce problème est résolu par le théorème de Girsanov que nous rappelons dans la suite.

Soit  $W^P$  un processus  $P$ -Wiener et soit  $T$  un horizon d'intérêt.

Soit  $\theta$  un processus adapté et définissons le processus  $L$  par :  $dL(t) = L(t)\theta(t)dW^P(t)$  et  $L(0) = 1$ .

Supposons que  $E^P(L(T)) = 1$  et soit  $Q$  une mesure de probabilité vérifiant :

$$dQ = L(t)dP | F_t$$

Alors  $Q$  est équivalente à  $P$  et le processus  $W^Q$ , défini par :

$$W^Q(t) = W^P(t) - \int_0^t \theta(s) ds$$

est  $Q$ -Wiener et on peut écrire :  $dW^Q(s) = dW^P(s) - \theta(s) ds$ .

Enfin, notons que si le processus des flux actualisés par le taux sans risque,  $\exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)$ , est une martingale sous  $Q$ , alors le processus des flux actualisés par le déflateur,  $\exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)L(t)$ , est martingale sous  $P$ .

Sous les hypothèses de complétude du marché et d'absence d'opportunité d'arbitrage, les travaux de Harrison et Kreps [1979] et Harrison et Pliska [1981] ont montré qu'il existe une unique mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique telle que les prix actualisés aux taux sans risque soient, sous cette probabilité, des martingales. Cette probabilité est connue sous la dénomination de « mesure de probabilité risque-neutre ».

## 6.2 Annexe 2 : le prix d'une obligation zéro coupon sous P

Nous présentons dans cette annexe la démonstration de l'écriture en formule fermée du prix d'une obligation zéro-coupon.

Soit  $r(t)$  le taux court instantané à la date  $t$  défini par  $r(t) = x(t) + \varphi(t)$  où  $x$  est un processus CIR à un facteur dont l'équation différentielle stochastique sous la probabilité historique  $P$  s'écrit :

$$dx(t) = (k - \lambda) \left( \frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^P(t); x(0) = x_0$$

Et  $\varphi$  est une fonction déterministe permettant au modèle de reproduire la structure par termes des taux d'intérêt.

Supposons que la prime de risque s'écrit :  $\lambda(t) = \lambda \sqrt{x(t)} / \sigma_x$ .

Alors le prix du zéro coupon à la date  $t$  et de maturité  $T$  s'écrit :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

où

- $\bar{A}'(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}} A(t, T)$  ;
- $P^M(0, T)$  est le prix de marché de l'obligation zéro-coupon sans risque observée à l'instant 0 pour la maturité  $T$  ;
- $A(t, T)$  et  $B(t, T)$  sont définis dans la suite :

$$A(t, T) = \left[ \frac{2h \exp\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

et

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)\exp\{-B(0, t)x_0\}}{P^M(0, t)A(0, T)\exp\{-B(0, T)x_0\}}$$

### **Démonstration**

Sous la probabilité risque neutre  $Q$ , le taux court instantané à la date  $t$  est défini par  $r(t) = x(t) + \varphi(t)$  où  $x$  est un processus CIR à un facteur dont l'équation différentielle stochastique sous la probabilité  $Q$  s'écrit :

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^Q(t) ; x(0) = x_0$$

Le prix d'une obligation zéro coupon à la date  $t$  de maturité  $T$  s'écrit sous la probabilité  $Q$  (Brigo et Mercurio [2007]) :

$$P(t, T) = \bar{A}'(t, T)e^{-B(t, T)x(t)}$$

Notons que :

- $B(t, T)$  est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$1 - \frac{1}{2}B(t, T)^2\sigma_x^2 - k \cdot B(t, T) + \frac{dB(t, T)}{dt} = 0$$

- $a(t, T) = \ln(A(t, T))$  est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{da(t, T)}{dt} - B(t, T)k\theta = 0$$

En utilisant le lemme d'Itô on peut montrer que l'équation différentielle de  $P(t, T)$  sous  $Q$  s'écrit :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = (x(t) + \varphi(t))dt - B(t, T)\sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^Q(t)$$

On a alors sous la mesure de probabilité historique  $P$  :

$$\lambda(t) = \lambda\sqrt{x(t)}/\sigma_x$$

$$dW_{rate}^Q(t) = dW_{rate}^P(t) + \lambda(t)dt$$

et donc :

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \varphi(t)dt + x(t)(1 - \lambda B(t,T))dt - B(t,T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t)$$

En appliquant le Lemme d'Itô sur  $\ln(P(t,T))$  on obtient :

$$d\ln(P(t,T)) = 0 \cdot dt + \frac{dP(t,T)}{P(t,T)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{P(t,T)^2} \left( B(t,T)P(t,T)\sigma_x \sqrt{x(t)} \right)^2 dt$$

Donc :

$$d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt + x(t)(1 - \lambda B(t,T))dt - B(t,T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t) - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 x(t)dt$$

$$d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left( 1 - \lambda B(t,T) - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 \right) dt - B(t,T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t)$$

Or

$$B(t,T)\sigma_x \sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t) = B(t,T) \left( dx(t) - (k - \lambda) \left( \frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt \right)$$

Donc

$$d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left( 1 - \lambda B(t,T) - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 \right) dt - B(t,T) \left( dx(t) - (k - \lambda) \left( \frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt \right)$$

Ainsi

$$d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left( 1 - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 - k \cdot B(t,T) \right) dt - B(t,T)dx(t) + B(t,T)k\theta dt$$

En utilisant le lemme d'Itô on peut écrire :

$$B(t,T)dx(t) = d(B(t,T)x(t)) - x(t) \cdot \frac{dB(t,T)}{dt} \cdot dt$$

Donc :

$$d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt + x(t) \left( 1 - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 - k \cdot B(t,T) \right) dt - d(B(t,T)x(t)) \\ + x(t) \cdot \frac{dB(t,T)}{dt} \cdot dt + B(t,T)k\theta dt$$

Or :

$$1 - \frac{1}{2}B(t,T)^2\sigma_x^2 - k \cdot B(t,T) + \frac{dB(t,T)}{dt} = 0 \\ \frac{da(t,T)}{dt} - B(t,T)k\theta = 0 \\ d\ln(P(t,T)) = \varphi(t)dt - d(B(t,T)x(t)) + B(t,T)k\theta dt$$

Sachant que  $P(T,T) = 1$  et  $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s)ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$  on peut écrire la dynamique de  $P(t,T)$  sous P comme :

$$P(t,T) = \bar{A}^t(t,T)e^{-B(t,T)x(t)}$$

### 6.3 Annexe 3 : la forme du déflateur

L'équation différentielle stochastique du déflateur sous la mesure de probabilité historique est :

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = -r(t) - \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Le déflateur stochastique s'écrit en utilisant le lemme d'Itô :

$$D(T) = D(t)\exp\left(-\int_t^T r(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda(s)^2 ds - \int_t^T \lambda(s)dW_{rate}^P(s)\right)$$

et on a :

- $\int_t^T r(s)ds = \int_t^T \varphi(s)ds + \int_t^T x(s)ds$  ;
- $\lambda(s) = \lambda\sqrt{x(t)}/\sigma_x$  donc  $\frac{1}{2}\int_t^T \lambda(s)^2 ds = \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\int_t^T x(t)ds$  ;
- En utilisant l'EDS des taux d'intérêt :

$$\lambda(s)dW_{rate}^P(t) = \frac{\lambda}{\sigma_x}\sqrt{x(t)}dW_{rate}^P(t) = \frac{\lambda}{\sigma_x^2}\left(dx(t) - (k - \lambda)\left(\frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t)\right)dt\right)$$

donc :

$$\int_t^T \lambda(s)dW_{rate}^P(t) = \frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T) - x(t)) - \frac{\lambda k\theta}{\sigma_x^2}(T - t) + \frac{\lambda(k - \lambda)}{\sigma_x^2}\int_t^T x(s)ds.$$

Ainsi :

$$D(T) = D(t) \exp\left(\frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2}(T-t)\right) \exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T)-x(t))\right) \exp\left(-\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right)$$

avec :  $\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$

#### 6.4 Annexe 4 : le prix de l'actif risqué sous P

Comme présenté dans la section 2.1, le processus de l'actif risqué s'écrit sous la mesure de probabilité historique P :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) + \lambda(t)^2)dt + \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Le prix de l'actif risqué s'écrit :

$$S(T) = S(t) \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma_x^2}k\theta(T-t)\right) \cdot \exp\left(\int_t^T \varphi(s) ds\right) \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\sigma_x^2}(x(T)-x(t))\right) \cdot \exp\left(\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2}\right) \int_t^T x(s) ds\right)$$

Rappelons par ailleurs que :

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(s) ds\right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$$

#### **Démonstration**

Comme présenté dans la section 2.1, le processus de l'actif risqué s'écrit sous la mesure de probabilité historique P :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) + \lambda(t)^2)dt + \lambda(t)dW_{rate}^P(t)$$

Donc :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\varphi(t) + x(t) \left(1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2}\right)\right) dt + \lambda \sqrt{x(t)} / \sigma_x dW_{rate}^P(t)$$

Or :

$$\sqrt{x(t)} dW_{rate}^P(t) = \frac{1}{\sigma_x} \left( dx(t) - (k - \lambda) \left( \frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt \right)$$

Et on a donc :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left( \varphi(t) + x(t) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} \right) \right) dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} \left( dx(t) - (k - \lambda) \left( \frac{k\theta}{k - \lambda} - x(t) \right) dt \right)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left( \varphi(t) - \frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta \right) dt + x(t) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (k - \lambda) \right) dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} dx(t)$$

En appliquant le Lemme d'Itô sur  $\ln(S(t))$  on obtient :

$$d\ln(S(t)) = 0 \cdot dt + \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S(t)^2} \lambda(t)^2 S(t)^2 dt$$

Ainsi :

$$d\ln(S(t)) = 0 \cdot dt + \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} x(t) dt$$

Donc :

$$d\ln(S(t)) = \left( \varphi(t) - \frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta \right) dt + x(t) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (k - \lambda) \right) dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} dx(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\sigma_x^2} x(t) dt$$

Ainsi :

$$d\ln(S(t)) = \left( \varphi(t) - \frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta \right) dt + x(t) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (k - \lambda) \right) dt + \frac{\lambda}{\sigma_x^2} dx(t)$$

Enfin :

$$S(T) = S(t) \exp \left( -\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta(T - t) \right) \cdot \exp \left( \int_t^T \varphi(s) ds \right) \cdot \exp \left( \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x(t)) \right) \cdot \exp \left( \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^T x(s) ds \right)$$

$$\text{avec : } \exp \left( -\int_t^T \varphi(s) ds \right) = \frac{P^M(0,T)A(0,t)\exp\{-B(0,t)x_0\}}{P^M(0,t)A(0,T)\exp\{-B(0,T)x_0\}}$$

## 6.5 Annexe 5 : l'espérance des rendements de l'actif risqué

Notons  $s_t$  le rendement logarithmique de l'actif risqué à la date  $t$  sur un horizon d'un an. Par définition :

$$s_{t+1} = \ln \left( \frac{S(t+1)}{S(t)} \right)$$



L'espérance mathématique de la variable aléatoire  $s_{t+1}$  sous la probabilité historique  $P$  s'écrit :

$$E^P(s_{t+1}) = R^M(t, t+1) - \left( \ln \left( \frac{A(0, t)}{A(0, t+1)} \right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t)) \right) \\ + \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right)$$

Avec :

- $R^M(t, t+1)$  : le taux observé du marché entre la date  $t$  et  $t+1$  ;
- $A(t, T)$  et  $B(t, T)$  sont des fonctions déterministes définie dans la section 2.2.1 ;
- $x_0$  est la valeur initiale du processus  $x_t$ .

L'espérance de l'excès de rendement, noté  $e_t$  par rapport au taux observé du marché s'écrit donc :

$$E^P(e_{t+1}) = - \left( \ln \left( \frac{A(0, t)}{A(0, t+1)} \right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t)) \right) \\ + \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right)$$

### Démonstration

D'après la section 2.4.1, on a sous  $P$  :

$$S(T) = S(t) \exp \left( -\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta(T-t) \right) \cdot \exp \left( \int_t^T \varphi(s) ds \right) \cdot \exp \left( \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(T) - x(t)) \right) \cdot \exp \left( \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^T x(s) ds \right)$$

Et

$$dx(t) = k_2(\theta_2 - x(t))dt + \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_{rate}^P(t) ; x(0) = x_0$$

Avec :

- $k_2 = k - \lambda$  ;
- $\theta_2 = \frac{k\theta}{k-\lambda}$ .

On peut écrire :

$$s_{t+1} = -\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta + \int_t^{t+1} \varphi(s) ds + \left( \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(t+1) - x(t)) \right) + \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^{t+1} x(s) ds$$

Et donc

$$E^P(s_t) = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$$

Avec

- $\Lambda_0 = -\frac{\lambda}{\sigma_x^2} k\theta$
- $\Lambda_1 = E^P \left( \int_t^{t+1} \varphi(s) ds \right)$
- $\Lambda_2 = E^P \left( \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(t+1) - x(t)) \right)$
- $\Lambda_3 = E^P \left( \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^{t+1} x(s) ds \right)$

On a :

$$\exp \left( - \int_t^{t+1} \varphi(s) ds \right) = \frac{P^M(0, t+1)}{P^x(0, t+1)} \cdot \frac{P^x(0, t)}{P^M(0, t)} = \frac{\exp(-R^M(t, t+1))}{\exp(-U^x(t, t+1))}$$

Où :

$$\begin{aligned} U^x(t, t+1) &= \ln(P^x(0, t)) - \ln(P^x(0, t+1)) \\ &= \ln \left( \frac{A(0, t)}{A(0, t+1)} \right) + x_0(B(0, t+1) - B(0, t)) \end{aligned}$$

Et donc :

$$\Lambda_1 = E^P \left( \int_t^{t+1} \varphi(s) ds \right) = R^M(t, t+1) - U^x(t, t+1)$$

Aussi, l'espérance de  $x$  s'écrit sous  $P$  :

$$E^P\{x(t)|F_s\} = x(s)e^{-k_2(t-s)} + \theta_2(1 - e^{-k_2(t-s)})$$

Donc

$$E^P(x(t)) = x(0)e^{-k_2t} + \theta_2(1 - e^{-k_2t})$$

et :

$$E^P(x(t)) = x_0e^{-k_2t} + \theta_2(1 - e^{-k_2t})$$

Et donc :

$$\Lambda_2 = E^P \left( \frac{\lambda}{\sigma_x^2} (x(t+1) - x(t)) \right) = \frac{\lambda}{\sigma_x^2} e^{-k_2t} (\theta_2 - x_0)(1 - e^{-k_2})$$

Par ailleurs :

$$E^P \left( \int_t^{t+1} x(s) ds \right) = \int_t^{t+1} E^P(x(s)) ds = \int_t^{t+1} (x(0)e^{-k_2s} + \theta_2(1 - e^{-k_2s})) ds$$

Ainsi :

$$E^P \left( \int_t^{t+1} x(s) ds \right) = e^{-k_2t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2$$

Donc :

$$\Lambda_3 = E^p \left( \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \int_t^{t+1} x(s) ds \right)$$

$$\Lambda_3 = \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k}{\sigma_x^2} \right) \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right)$$

$$\Lambda_3 = \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda k_2}{\sigma_x^2} \right) \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right)$$

$$\Lambda_3 = \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right) + \frac{\lambda k_2}{\sigma_x^2} \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right)$$

$$\Lambda_3 = \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right) + \frac{\lambda k_2}{\sigma_x^2} \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) \right) + \frac{\lambda k_2 \theta_2}{\sigma_x^2}$$

$$\Lambda_3 = \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right) + e^{-k_2 t} \frac{\lambda(\theta_2 - x_0)}{\sigma_x^2} (e^{-k_2} - 1) + \frac{\lambda k \theta}{\sigma_x^2}$$

$$\Lambda_3 = \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right) - \Lambda_2 - \Lambda_0$$

Enfin :

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-k_2 t} \frac{(\theta_2 - x_0)}{k_2} (e^{-k_2} - 1) + \theta_2 \right) \\ &= \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-(k-\lambda)t} \frac{\left( \frac{k\theta}{k-\lambda} - x_0 \right)}{k-\lambda} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$E^p(s_{t+1}) = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$$

donc :

$$\begin{aligned} E^p(s_{t+1}) &= R^M(t, t+1) - \left( \ln \left( \frac{A(0, t)}{A(0, t+1)} \right) + x_0 (B(0, t+1) - B(0, t)) \right) \\ &+ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right) \left( e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \right) \end{aligned}$$

ainsi :

$$E^p(e_{t+1}) = -\left(\ln\left(\frac{A(0,t)}{A(0,t+1)}\right) + x_0(B(0,t+1) - B(0,t))\right) + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)\left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)$$

## 6.6 Annexe 6 : l'excès de rendement de l'actif risqué

A long terme, en régime permanent ( $t \gg 0$ ), l'excès de rendement ne dépend que du facteur de risque  $\lambda$  et des paramètres du modèle CIR ( $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma_x$ ) et s'écrit :

$$E^p(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k-h) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

### Démonstration

L'excès de rendement s'écrit en espérance :

$$E^p(e_{t+1}) = -\left(\ln\left(\frac{A(0,t)}{A(0,t+1)}\right) + x_0(B(0,t+1) - B(0,t))\right) + \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)\left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)$$

$$E^p(e_{t+1}) = F_1(t+1) + F_2(t+1) + F_3(t+1)$$

où :

-  $F_1(t+1) = -\ln\left(\frac{A(0,t)}{A(0,t+1)}\right)$  et donc :

$$F_1(t+1) = -\frac{2k\theta}{\sigma_x^2} \ln \left[ \frac{\exp\left\{\frac{(k+h)t}{2}\right\}}{\exp\left\{\frac{(k+h)(t+1)}{2}\right\}} \times \frac{2h + (k+h)(\exp\{(t+1)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{th\} - 1)} \right]$$

$$F_1(t+1) = -\frac{2k\theta}{\sigma_x^2} \ln \left[ \exp\left\{\frac{-(k+h)}{2}\right\} \times \frac{2h + (k+h)(\exp\{(t+1)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{th\} - 1)} \right]$$

-  $F_2(t+1) = -x_0(B(0,t+1) - B(0,t))$  et donc :

$$F_2(t+1) = -x_0 \left( \frac{2(\exp\{(t+1)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(t+1)h\} - 1)} - \frac{2(\exp\{th\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{th\} - 1)} \right)$$

-  $F_3(t+1) = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)\left(e^{-(k-\lambda)t} \frac{(k\theta - x_0(k-\lambda))}{(k-\lambda)^2} (e^{-(k-\lambda)} - 1) + \frac{k\theta}{k-\lambda}\right)$

En régime permanent,  $t \gg 0$  on peut observer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t+1) = -\frac{2k\theta}{\sigma_x^2} \ln \left[ \exp\left\{\frac{-(k+h)}{2}\right\} \times \exp(h) \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_2(t+1) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2}(k-h)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_2(t+1) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_3(t+1) = \frac{k\theta}{k-\lambda} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

Donc, à long terme, en régime permanent, l'excès de rendement s'écrit :

$$E^p(e_\infty) = \frac{k\theta}{\sigma_x^2} (k - h) + \frac{k\theta}{k-\lambda} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2} \right)$$