

Dépendance entre les risques actuariels

Par Étienne Marceau, A.S.A. , Ph.D.

professeur à l'École d'Actuariat, Université Laval

En assurance vie et en assurances générales, les actuaires doivent évaluer le plus justement possible les risques souscrits par un assureur. Un contrat d'assurance a pour but de protéger son titulaire, par le transfert du risque à une compagnie d'assurance, contre les conséquences d'événements fortuits (incendie, accident automobile, décès, invalidité) qui pourraient entraîner pour lui (ou ses héritiers) des pertes financières importantes. La théorie du risque sert à évaluer le risque global, pour une compagnie d'assurance, d'un portefeuille de risques couverts en vertu d'un contrat d'assurance, par exemple, habitation, automobile, accidents de travail ou collective. Ce risque global est mesuré à l'aide de la distribution du montant total des sinistres pour un portefeuille. Pour faciliter l'évaluation de celle-ci ainsi que la tarification des produits d'assurance, il est généralement supposé que les risques assurés sont indépendants. Cependant, dans bon nombre de situations, cette hypothèse n'est pas vérifiée. Prenons par exemple, le cas d'une assurance collective dont les assurés sont des ouvriers dans une mine, dans une raffinerie ou dans une usine papetière. Considérons également des assurés couverts par une assurance-habitation tout risque auprès d'une même compagnie d'assurance qui sont situés près d'une rivière ou d'une zone exposée au risque de verglas. Dans ces cas, les risques assurés ne sont pas indépendants.

En ne tenant pas compte de la possibilité d'une relation de dépendance entre les risques, l'actuaire mésestime le risque auquel la compagnie d'assurance est exposée. D'autre part, la modélisation de la dépendance entre les risques devient de plus en plus importante pour l'examen dynamique pour suffisance de capital (Dynamic Solvency Analysis) et l'analyse financière dynamique (Dynamic Financial Analysis) des compagnies d'assurance.

Pour tenir compte d'une éventuelle dépendance entre les risques, il importe d'utiliser des modèles appropriés. Par ailleurs, l'utilisation de méthodes numériques permettant d'évaluer quantitativement le risque global s'avère nécessaire. Jusqu'à tout récemment, peu de recherche avait été faite sur ces aspects du problème. Consciente de ce problème, le Risk Theory Committee de la Casualty Actuarial Society (CAS) a fait en 1997 un appel de projets de recherche portant sur la modélisation de la dépendance entre les risques. On remarque aussi depuis quelques années un intérêt croissant dans la littérature actuarielle pour des problèmes faisant intervenir une relation de dépendance entre les risques. Parmi les publications académiques traitant du sujet de l'introduction de structures de dépendance entre des contrats d'assurance, on peut citer trois articles : celui de Wang (« Aggregation of correlated risks portfolios : models and algorithms », résultats de son projet, retenu par le Risk Theory Committee de la CAS) paru dans les CAS Proceedings de 1998, un article de Embrecht, McNeil et Stauman (« Correlation and dependence in risk management : properties and pitfalls ») paru dans le RISK Magazine de mai 1999 et un article de Frees et Valdez (« Introduction to copulas ») paru dans le North American Actuarial Journal (Janvier 1998). On réfère aussi le lecteur au Rapport Technique 99-01 de l'École d'Actuariat (« Dependence in the individual risk model ») rédigé par Marceau, Cossette, Gaillardetz et Rioux. Dans ces articles, des méthodes pour tenir compte d'une éventuelle

dépendance entre les risques sont proposées et l'impact d'une relation de dépendance sur le risque global d'un portefeuille est également étudié.

Nous n'avons pas l'intention de présenter ces modèles dans le cadre de cet article. Nous présentons plutôt deux exemples permettant d'illustrer qualitativement l'impact sur le risque global d'un portefeuille de contrats d'assurance de la prise en compte d'une éventuelle dépendance entre les contrats. Pour les deux exemples, la relation de dépendance est introduite selon un modèle particulier, décrit dans le Rapport Technique 99-01 de l'École d'Actuariat («Dependence in the individual risk model »).

Dans le premier exemple, on considère un portefeuille constitué d'un nombre fini de contrats homogènes. On charge à chacun de ces contrats une prime individuelle égale à la prime pure (i.e. l'espérance du montant pouvant être remboursé pour un contrat) multiplié par un facteur correspondant à un plus une marge relative de sécurité. On définit la probabilité de ruine comme étant la probabilité que les primes recueillies par l'assureur ne soient pas suffisantes pour rencontrer ses engagements envers l'ensemble des contrats souscrits du portefeuille au cours de l'année. Les probabilités de ruine sont calculées pour différents nombres de contrats et en considérant les cas où les contrats sont indépendants et dépendants. Les Illustrations 1,2 et 3 présentent les résultats sous la forme de graphique dans les cas où les marges de sécurité sont respectivement positive, nulle et négatives. Nous pouvons observer l'impact à la fois du choix de l'hypothèse (indépendance vs dépendance) et de la valeur de la marge relative de sécurité.

Considérons tout d'abord l'Illustration 1 où la marge de sécurité est de 20%. Sous l'hypothèse de l'indépendance, on observe que la probabilité de ruine s'accroît tout d'abord avec le nombre de contrats et, par la suite, elle décroît pour tendre vers 0 lorsque le nombre de contrats est grand. (Ce comportement peut être expliqué à l'aide de l'inégalité de Thebychev). Sous l'hypothèse de la dépendance, la probabilité de ruine tend vers une valeur non-nulle lorsque le nombre de contrats augmente. Cela signifie que l'assureur parvient à diversifier complètement le risque global du portefeuille si les contrats sont supposés indépendants alors que cela n'est pas possible lorsque les contrats sont supposés dépendants. Ces 2 comportements sont observables lorsque la prime chargée est supérieure à la prime pure (i.e. marge positive de sécurité).

Dans l'Illustration 2, la marge de sécurité est nulle. Cela implique que la prime est égale à la prime pure. Sous l'hypothèse de l'indépendance, on observe que la probabilité de ruine tend vers 0.5. Sous l'hypothèse de la dépendance, la probabilité de ruine tend vers une valeur non-nulle identique à celle de l'Illustration 1. Cette illustration est intéressante d'une part car elle permet de constater que la marge de sécurité doit être positive pour s'assurer que la probabilité de ruine s'approche de 0 quand les contrats sont jugés indépendants entre eux. D'autre part, on observe l'effet paradoxal que la probabilité de ruine tend vers une valeur inférieure à 0.5 lorsque les contrats sont dépendants entre eux.

A l'Illustration 3, la marge de sécurité est fixée à -20%, impliquant que la prime chargée est inférieure à la prime pure. On observe à nouveau deux phénomènes intéressants. Bien que le nombre de contrats s'accroît et que ceux-ci sont supposés indépendants, on observe que la probabilité de ruine augmente et tend ultimement vers 1. (On peut aussi appliquer l'inégalité de Thebychev pour expliquer ce phénomène). De plus, sous l'hypothèse de la

dépendance, la probabilité de ruine tend vers une valeur non-nulle mais inférieure à 1 lorsque le nombre de contrats augmente.

Dans le second exemple, on a calculé la prime *stop loss* pour le portefeuille dans le cas où les contrats sont indépendants et dans le cas où un certain degré de dépendance existe entre les contrats. Un contrat *stop loss* prévoit le paiement par un assureur (ou un réassureur) de l'excédent du montant total des sinistres lorsqu'il dépasse une limite dite de rétention. La valeur de la prime *stop loss* est très influencée par le comportement de la distribution du montant total des sinistres (notamment pour les valeurs élevées). La prime *stop loss* est aussi une bonne mesure pour évaluer qualitativement les « surprises » qui peuvent advenir à un assureur au cours d'une année.

La prime *stop loss* est calculée pour différentes valeurs de rétention. Les résultats obtenus sont présentés à l'illustration 4. La courbe inférieure correspond aux primes *stop loss* pour différentes valeurs de rétention dans le cas où les contrats sont indépendants. La courbe supérieure correspond dans le cas où un degré de dépendance existe entre les contrats. Pour toute valeur de rétention, on observe que la prime *stop loss* calculée en retenant l'hypothèse de dépendance est supérieure à celle évaluée sous l'hypothèse d'indépendance. On peut montrer que cette relation est toujours observable pour nombre de modèles de dépendance. On constate aisément que ne pas tenir compte d'une éventuelle dépendance entre les contrats peut amener l'assureur à une sous évaluation de la prime *stop loss*.

Ces deux exemples illustrent clairement que l'appréciation qu'un actuaire peut avoir du risque global d'un portefeuille peut être faussée s'il ne tient pas compte d'une éventuelle dépendance entre les contrats d'un portefeuille. Dans le premier exemple, nous avons également confirmé dans le cas où les contrats sont indépendants que la prime chargée par un assureur doit être supérieure à la prime pure sinon la probabilité que l'assureur ne rencontre pas ses engagements tend vers un lorsque le nombre de contrats devient important.

Dans le domaine de la recherche, des modèles de dépendance restent à être développés. De plus, l'estimation des paramètres de ces modèles est aussi à étudier. Cela permettra davantage d'évaluer plus adéquatement le risque global d'un portefeuille et d'établir des primes en conséquence.

Illustration 1

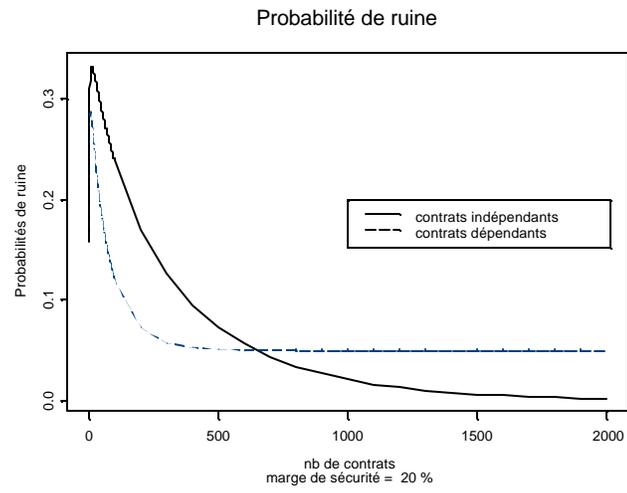


Illustration 3

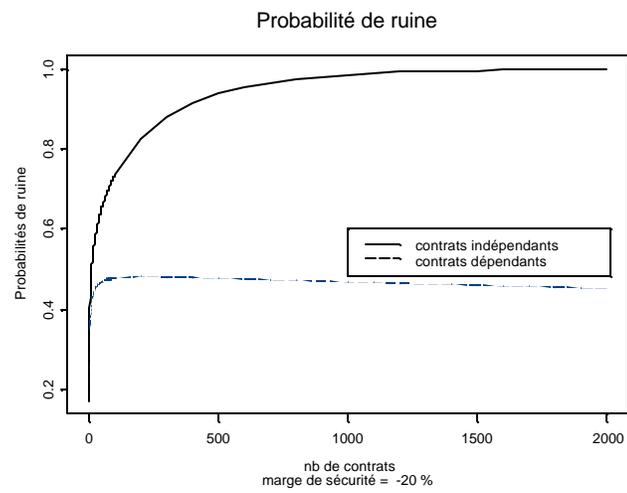


Illustration 2

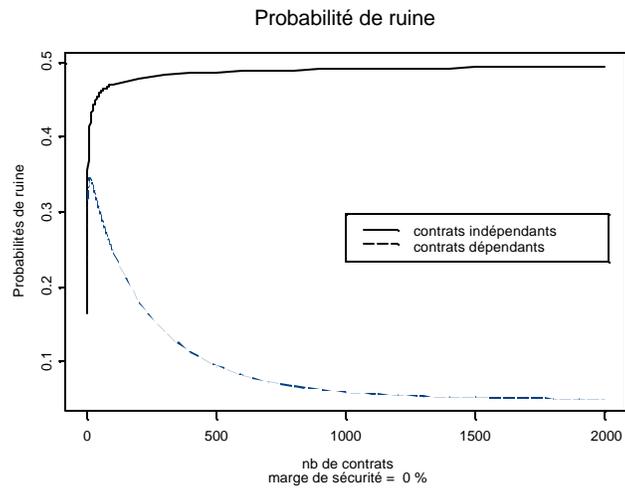


Illustration 4

