METHODES FINANCIERES ET ALLOCATION D'ACTIFS EN ASSURANCE

FINANCIAL METHODS AND ASSET MANAGEMENT IN INSURANCE

Norbert GAUTRON

JWA – Actuaires†

Frédéric PLANCHET

Laboratoire SAF‡
JWA – Actuaires*

Pierre THEROND

JWA – Actuaires*

RESUME

Après avoir rappelé les contraintes économiques et réglementaires pesant sur les entreprises d'assurance, nous présentons la problématique de l'assureur vis-à-vis de ses allocations d'actifs et les modèles développés pour tenter de la résoudre. Nous proposons ensuite une illustration des récents développements des mathématiques actuarielles dans le cadre de l'évaluation d'un contrat d'assurance vie avec taux garanti et clause de participation aux bénéfices. Nous cherchons enfin à résoudre le problème de l'allocation d'actifs d'un portefeuille de rentes viagères en cours de service.

ABSTRACT

In this paper, we first introduce the economical and legal constraints that meet the insurance companies. Then we deal with the asset management of an insurer and we propose a few applications. After having estimate a parameter which makes a life insurance participating policy with a minimum interest rate guaranteed *fair*, we illustrate the asset management in two cases : the life insurance participating policy and a pension scheme.

MOTS-CLES : Entreprises d'assurance, allocation d'actifs, assurance-vie, rentes, taux garanti, option de participation aux bénéfices, solvabilité, *fair value*, probabilité de ruine.

KEYWORDS : Insurance company, asset allocation, life insurance, annuity, interest rate guarantee, bonus, solvency, fair value, ruin probability.

Août 2003

† 9, rue Beaujon, 75008 Paris

‡ ISFA, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex

* 18, avenue Félix Faure, 69007 Lyon

SOMMAIRE

INTRODUCTION

L'objet de cet article est de présenter les techniques de valorisation de certaines clauses de contrats d'assurances issues des récents développements des mathématiques actuarielles et financières, ainsi que les techniques d'allocation stratégique d'actifs qui sont mises en place par les sociétés d'assurance.

Une des principales caractéristiques de l'activité d'assurance est l'inversion de son cycle de production : l'entreprise d'assurance perçoit les primes avant de payer les prestations. Du fait de cette particularité la compagnie doit estimer la charge de sinistres qu'elle va devoir régler pour établir un montant de prime ou de cotisation.

Avec ces primes, la société constitue au passif de son bilan des provisions techniques destinées à payer les sinistres futurs et place le montant de ces provisions sur les marchés financiers. Aussi la société doit se doter d'outils de gestion pour placer de manière optimale ses actifs tout en veillant à sa solvabilité à court, moyen et long terme.

Après un bref rappel des contraintes réglementaires auxquelles sont soumis les assureurs, nous présenterons les principaux modèles classiques d'allocation utilisés en assurance. Ces modèles seront ensuite illustrés dans la troisième partie.

1. ENVIRONNEMENT ECONOMIQUE ET REGLEMENTAIRE DES ENTREPRISES D'ASSURANCE EN FRANCE

L'assurance est un secteur économique très réglementé[1]. Du fait de l'importance croissante de l'activité d'assurance dans une société qui cherche à toujours plus contrôler les risques et souhaite donc les transférer, le législateur intervient avec l'objectif de protéger les souscripteurs de contrats contre la défaillance des entreprises d'assurance.

[1] Tous les textes de loi cités sont issus du Code des assurances.

Les organismes d'assurance se situent donc à la croisée des intérêts de trois acteurs : les souscripteurs de contrats, les actionnaires et l'Etat. On peut alors schématiquement considérer que l'objectif des sociétés d'assurance est d'optimiser le profit de leurs actionnaires, tout en respectant les contraintes de solvabilité réglementaires et internes, et en préservant l'attractivité de leurs contrats vis-à-vis des assurés dans un marché concurrentiel.

1.1. PARTICULARITES COMPTABLES

Du fait de l'inversion du cycle de production et de la durée des engagements souscrits, les sociétés d'assurance doivent constituer des provisions techniques[2] destinées régler les sinistres futurs. Le montant de ces provisions est estimé par les actuaires notamment à partir des cadences de règlement observées en assurance dommage et de la mortalité en assurance vie.
Le bilan d'une compagnie d'assurance se présente donc de la manière suivante :

Tableau 1 : Bilan simplifié d'une société d'assurance

<table>
<tr><th>ACTIF</th><th>PASSIF</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Placements</td><td>Fonds propres</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Provisions Techniques
(brutes de réassurance)</td></tr>
<tr><td>Part des réassureurs dans les Provisions Techniques</td></tr>
<tr><td>Créances et autres actifs</td><td>Dettes et autres passifs</td></tr>
</table>

Le montant des provisions techniques et la nature des placements sont régulièrement contrôlés par la Commission de Contrôle des Assurances, des Mutuelles et des Institutions de Prévoyance (CCAMIP).

1.2. CONTRAINTES DE SOLVABILITE

[2] Principalement les Provisions Pour Sinistres A Payer (PSAP) en assurance non-vie et les Provisions Mathématiques (PM) en assurance vie.

La principale contrainte pour les compagnies d'assurance correspond à la marge de solvabilité minimale réglementaire. Il s'agit d'une contrainte sur le niveau des fonds propres qui, ajouté aux plus-values latentes des placements, doit être supérieur à la Marge de Solvabilité Réglementaire[3] (MSR) qui est fonction, en Europe, du volume d'activité de la société.

Pour les sociétés d'assurance vie, la MSR est principalement un pourcentage des provisions mathématiques qui varie selon les différents types de contrats[4]. En assurance non-vie elle est calculée de la façon suivante[5] :

$$MSR = Max\{MSP, MSS\}$$

avec,

$$MSP = \left(18\% * Min\left(PE\,;10\right) + 16\% * Max(PE - 10\,;0)\right) * Max(CN / CB;50\%)$$

et

$$MSS = \left(26\% * Min\left(S / 3\,;7\right) + 23\% * Max(S / 3 - 7\,;0)\right) * Max(CN / CB;50\%)$$

où :

- ✓ *PE* désigne le montant[6] des primes émises,
- ✓ *CN* la charge des sinistres nette de réassurance pour le dernier exercice,
- ✓ *CB* la charge des sinistres brute de réassurance pour le dernier exercice,
- ✓ *S* le montant de l'ensemble des sinistres payés, bruts de réassurance, au titre des trois derniers exercices, auquel on ajoute la variation de Provision pour Sinistres A Payer (PSAP) de la période.

La contrainte à respecter par les assureurs, à tout instant, peut s'exprimer de la manière suivante :

$$Richesse \geq MSR$$

avec $Richesse = Capitaux\ \ propres + Plus\ values\ latentes + Réserve\ de\ capitalisation$

En 2002 la marge de solvabilité des sociétés d'assurance était de 4,2 fois la MSR pour les sociétés d'assurance dommage et de 2,6 fois la MSR pour les sociétés d'assurance vie[7].

---

[3] cf. article R. 334-1

[4] 4% des provisions pour les contrats avec garantie minimale de performance et 1% dans les autres cas. Cf. article R. 334-13

[5] Les taux (18%, 16%, etc.) peuvent changer dans certaines branches d'assurance (en frais de santé par exemple)

[6] Les montants sont exprimés en millions d'euros.

[7] source : [8] FFSA, *L'assurance française en 2002*, rapport annuel, juin 2003.

Toujours dans une optique de solvabilité, le législateur impose aux assureurs deux règles prudentielles concernant les placements : la limitation par catégorie[8] et la dispersion[9].

Enfin, pour prévenir les défaillances éventuelles des assureurs, un arrêté du 26 décembre 2000 a consacré l'Etat T3[10] ou Etat trimestriel de reporting Actif/Passif qui vise à étudier la sensibilité de l'actif et du passif des compagnies d'assurance aux performances des marchés financiers. Il s'agit d'un état qui doit être remis trimestriellement à la CCAMIP et qui permet de s'assurer que l'actif présente toujours une valeur supérieure au passif, même dans des conjonctures financières difficiles.

[8] cf. article R. 332-3.1
[9] cf. article R. 332-3.2
[10] cf. Arrêté du 26 décembre 2000 modifiant les articles A. 332-7 et A. 344-13.

1.3. FUTURES NORMES COMPTABLES IFRS

Les nouvelles normes comptables internationales, toujours en cours d'élaboration par l'*International Accounting Standards Board* (IASB / IFRS), seront mises en place à partir de 2005. Elles consacrent le principe de *fair value* et ont pour objectif de retranscrire la « valeur économique » de l'entreprise pour une meilleure information des marchés financiers et du public. Au-delà de l'impact direct sur la valorisation de leur actif, elles obligeront les assureurs à comptabiliser un certain nombre d'engagements qui ne le sont pas actuellement (cf. [6]).

Le mode de valorisation des actifs imposé par l'IFRS constitue une évolution majeure. Les normes comptables françaises actuelles imposent l'évaluation des actifs financiers à leur valeur historique d'achat, voire à leur valeur de marché en cas de baisse importante des marchés. La valeur comptable de l'actif d'une société est donc bien souvent différente de la valeur réelle (valeur de marché) de ces actifs. Cette différence a été récemment atténuée par l'obligation faite aux assureurs d'inscrire à leur bilan des Provisions pour Dépréciation d'Actifs suite à la baisse des marchés actions[11].

Dans cette même optique de donner l'information la plus juste possible de la valeur de la société, un certain nombre d'engagements qui actuellement ne sont pas comptabilisés vont le devenir. Ainsi certaines obligations, réglementaires notamment, comme l'obligation de participation aux bénéfices[12] ou la clause de rachat[13] dans les contrats d'épargne en Euros pourraient être comptabilisées et donc valorisées.

Un certain nombre de ces engagements peuvent s'interpréter comme des produits dérivés que les techniques issues de la finance permettent de valoriser.

---

[11] cf. articles R. 331-3 et R. 331-5-1

[12] Si la société réalise des résultats positifs, elle doit distribuer, globalement au niveau de la société, au moins 85% de ses bénéfices financiers et 90% de ses bénéfices techniques aux assurés. cf. article A. 132-2.
Sur de nombreux contrats, des clauses de participation aux bénéfices spécifiques sont prévues, plus généreuses pour les souscripteurs que l'obligation légale de l'article A. 132-2.

[13] Le détenteur de contrat peut à tout moment demander le « rachat » total ou partiel de son contrat et se voit verser le montant (total ou partiel) de la provision constituée éventuellement diminuée d'une (faible) indemnité fixée contractuellement. cf. article R. 331-5.

2. PRINCIPAUX MODELES UTILISES PAR LES ENTREPRISES D'ASSURANCE POUR DETERMINER LEUR ALLOCATION STRATEGIQUE D'ACTIFS

2.1. PREAMBULE SUR LES ENTREPRISES D'ASSURANCE, LEURS ALLOCATIONS ET LEURS OBJECTIFS

La gestion des actifs d'une entreprise d'assurance est un exercice délicat dans la mesure où le gestionnaire doit s'assurer à tout moment que les actifs en portefeuille sont les meilleurs, non seulement en terme de couple rentabilité/risque mais également au regard des engagements souscrits par l'entreprise et des contraintes comptables et réglementaires.

Les engagements pris par les entreprises d'assurance peuvent varier sensiblement d'une entreprise à l'autre. Ainsi, par exemple, une mutuelle spécialisée dans la couverture du risque Santé percevra des cotisations pour rembourser des sinistres sur 18 mois environ. A l'opposé, un « fonds de pension » percevra des cotisations qui serviront à payer des rentes plusieurs dizaines d'années plus tard. Dans le second cas, la performance de la gestion financière sera prépondérante. Les risques seront également plus importants dans ce cas, surtout si l'assureur a escompté dans sa tarification une performance minimale élevée des actifs financiers.

La recherche de l'allocation d'actifs au sein d'une entreprise d'assurance passe donc avant tout par l'analyse exhaustive des engagements contractés. Dans la pratique, cela signifie une relecture attentive de tous les documents contractuels. Cette étape permet notamment d'identifier les « cantons contractuels ». Les « cantons contractuels » correspondent à des contrats pour lesquels l'assureur s'est engagé à réaliser une gestion financière sur mesure. En d'autres termes, les sommes versées sur ces contrats serviront à acquérir des titres clairement identifiés, dont la performance reviendra exclusivement à leurs souscripteurs (après prélèvement des frais de l'assureur). Les contrats non cantonnés sont gérés par l'assureur dans son actif général, avec les actifs en représentation des fonds propres.

Dans la pratique l'assureur aura donc autant d'allocations d'actifs à définir qu'il aura de cantons contractuels (plus une pour l'actif général). Dans la recherche de l'allocation propre à chaque canton l'assureur devra en plus tenir compte des engagements pris envers les souscripteurs. Les modèles d'allocation devront par exemple intégrer le souhait de certains souscripteurs d'avoir une allocation d'actifs stratégique comprenant au moins 30% d'actions.

Tableau 2 : Bilan synthétique d'une entreprise d'assurance

ACTIF	PASSIF
Actif général	Fonds Propres
	Provisions techniques des contrats non cantonnés
Actifs financiers du canton n°1	Provisions techniques des contrats du canton n°1
Actifs financiers du canton n°2	Provisions techniques des contrats du canton n°2
etc.	etc.
Autres actifs	Autres dettes

Une des difficultés du pilotage de l'entreprise d'assurance sera de vérifier que les différentes allocations retenues pour les cantons sont acceptables au niveau global de l'entreprise d'assurance. Les règles imposées par les autorités de contrôle (en matière de dispersion et de diversification des actifs ou encore en matière de solvabilité) sont en effet applicables au niveau de l'entreprise tout entière et non canton par canton.

Le présent papier illustre notamment des méthodes de recherche d'une allocation d'actifs optimale au niveau d'un canton.

2.2. LES DIFFERENTS TYPES DE MODELES

Dans l'optique d'optimiser leurs placements, les assureurs ont développé des modèles d'allocation stratégique de leurs actifs et d'analyse, à tout moment, du bon adossement actif/passif.

Tableau 3 : Classification des différents types de modèles existants

Objectif / Nature des simulations	Déterministe	Stochastique
Allocation stratégique	Sans objet	Modèles de type 1
Etude de l'adossement – Approche par les flux	Modèles de type 2	Modèles de type 3
Etude de l'adossement – Approche comptable	Modèles de type 4	Modèles de type 5

Les modèles permettent :

- ✓ Soit de définir une allocation stratégique d'actifs *ex-ante*, à partir d'une analyse des engagements pris par l'assureur et des perspectives de rendement des actifs financiers disponibles sur les marchés. Le modèle, pour être le plus efficace possible sera stochastique. Il s'agit par exemple de modèles de type Markowitz, adaptés aux caractéristiques de l'assurance, ou de modèles tels que ceux présentés ci-après. Des propositions ont été faites par d'autres auteurs.

- ✓ Soit de modifier *ex-post* une allocation stratégique en examinant l'adossement entre les actifs et les passifs. Les adossements peuvent être étudiés simplement dans un premier temps à travers la comparaison des caractéristiques des flux que dégagent les actifs et les passifs (duration, sensibilité, convexité, valeur actuelle, taux actuariel, etc.). Une étude plus approfondie des adossements conduira à estimer les résultats futurs probables de la compagnie étudiée, pour différents scénarii d'évolution.

Tableau 4 : Points forts et limites des différents types de modèles

	Points forts	Limites
Modèles de type 1 (Allocation / stochastiques)	- Bonne modélisation de l'allocation stratégique	- Quelle modélisation des rendements ? - Quelles contraintes Assurance privilégier ?
Modèles de type 2 (Flux / Déterministe)	- Facilité de mise en œuvre - permettent une bonne prise de connaissance des risques pesant sur l'actif et le passif - permettent de mesurer la richesse du portefeuille	- Difficultés de mesurer de manière fine la sensibilité et la duration du passif pour certains contrats
Modèles de type 3 (Flux / Stochastique)	Idem modèles de type 2. - permettent d'obtenir une mesure du coût des options cachées	Idem modèles de type 1. - risque de construire des « boites noires » difficiles à justifier auprès des Directions Générales.
Modèles de type 4 (Comptable / Déterministe)	Idem modèles de type 2 - complètent utilement les modèles « embedded value » - permettent de connaître l'évolution prévisionnelle des grands postes comptables[14] (qui constituent des indicateurs utiles pour les décisions politiques)	Idem modèles de type 2
Modèles de type 5 (Comptable / Stochastique)	Idem modèles de type 4	Idem modèles de type 3 - difficultés pratiques de mise en œuvre (nombre de simulations et temps de traitement)

[14] Grands postes comptables : résultats, provisions d'actifs et de passif, réserve de capitalisation, etc.

2.3. CONTEXTE[15]

2.3.1. PRESENTATION

L'assureur est amené à déterminer, en permanence, les valeurs globales des flux futurs :

- les primes
- les prestations et les frais
- les revenus du portefeuille d'actifs

Si on désigne par X, Y et Z respectivement ces suites de flux, et si $V()$ désigne le mécanisme permettant d'associer à une suite de flux futurs son "équivalent capital" actuel, on a donc :

- $A(t)=V(t, Z)$ la valeur du portefeuille financier à la date t
- $V(t)=V(t, Y-X)$ la valeur nette du contrat

La différence $S=A-V$ est, par définition, le surplus à la date t.

Une décomposition classique du surplus consiste à l'écrire sous la forme $S=M+E$, avec, si R désigne le montant des provisions :

- $M(t)=A(t)-R(t)$
- $E(t)=R(t)-V(t)$

E est la "VBIF" (Value of Business In Force).

La décomposition présentée ci-dessus coïncide avec la séparation entre les services actuariels et financiers : typiquement A est valorisé selon des méthodes d'inspiration financière (prix de marché et modélisation ad hoc), alors que E est valorisé avec des techniques actuarielles classiques, basées sur l'actualisation de l'espérance des flux futurs.

On voit que cela peut engendrer des incohérences, spécialement lorsque X et Y sont liés à Z (par exemple dans des contrats d'épargne offrant une participation aux bénéfices) ou que les contrats contiennent des "options cachées".

[15] cf. [5] DE FELICE M., MORICONI F., "A course on Finance of Insurance", *Groupe Consultatif Actuariel Européen*, vol. 1, 2002.

L'idée est alors de rechercher des méthodes de valorisation cohérentes pour les aspects actuariels et financiers : on va utiliser pour cela des instruments de la théorie économique classique, notamment les notions de prix d'équilibre dans un marché complet et d'absence d'opportunité d'arbitrage.

2.3.2. REMARQUE SUR L'UTILISATION DE LA PROBABILITE RISQUE-NEUTRE

La transposition à l'assurance des techniques de valorisation issues de la finance conduit à évaluer une clause contractuelle en identifiant les flux qu'elle génère et à en évaluer l'espérance actualisée sous la probabilité risque-neutre. C'est typiquement ces techniques qui sont mises en œuvre pour évaluer l'engagement associé à une clause de type « garantie plancher » dans un contrat d'épargne en unités de comptes (voir par exemple [17] Merlus et Pequeux (2000)).

Mais, si on se place du point de vue de l'assureur et que l'objectif est de valoriser l'engagement pris vis-à-vis du souscripteur, les hypothèses sous-jacentes à l'utilisation de l'actualisation sous la probabilité risque-neutre, et notamment la possibilité de construire un portefeuille d'arbitrage auto-financé, ne sont pas satisfaites.

Au surplus, dans cette perspective, on peut souvent considérer que les flux auxquels se trouve confronté l'assureur sont des paramètres exogènes et que, dans ce cas, l'évaluation rationnelle de l'engagement consiste à calculer l'espérance actualisée sous la probabilité historique, qui décrit les flux auxquels l'assureur doit effectivement faire face au titre des dispositions du contrat ; en d'autres termes, dans une situation où il n'est pas possible de mettre en œuvre une stratégie de couverture sur un marché, l'utilisation de la probabilité risque neutre peut ne pas être adaptée.

Dans la suite de cet article, on précisera systématiquement l'univers de probabilité choisi en fonction du contexte.

2.4. FORMULATION DU PROBLEME

Notons X_t, Y_t et Z_t respectivement les flux de primes, de prestations et de frais et de revenus du portefeuille de placements à la date t. Soit F_t le flux de trésorerie de la société à la date t.

$$F_t = X_t - Y_t + Z_t \tag{1}$$

L'objectif de la société est de maximiser, sous les contraintes réglementaires et internes, la quantité : $E_Q\left[\int_0^T F_t * \exp\left\{\int_0^t r(u)du\right\}dt\right]$

où Q est la mesure de probabilité risque-neutre et $r(t)$ le taux sans risque instantané à la date t.

Les sociétés d'assurance ne peuvent influer sur les taux et leur marge de manœuvre sur les futurs flux de primes et de prestations est réduite. En revanche elles sont libres de gérer leurs placements sous les contraintes réglementaires (cf. supra).

Une allocation stratégique est donc optimale si elle engendre des flux F^* tels que :

$$E_Q\left[\int_0^T F^*{}_t * \exp\left\{\int_0^t r(u)du\right\}dt\right] = \underset{F}{Max}\, E_Q\left[\int_0^T F_t * \exp\left\{\int_0^t r(u)du\right\}dt\right] \tag{2}$$

s.c. réglementaires

Il s'agit d'un problème classique de contrôle stochastique. On se réfèrera utilement à [16] pour une présentation de la méthode de résolution dans le contexte de recherche d'un portefeuille optimal.

Dans la pratique, ce problème étant trop complexe pour être résolu directement, on se contentera de le résoudre dans un contexte simplifié. Par exemple, on se limitera à quatre classes d'actifs et l'on supposera les flux futurs de primes et de prestations connus.

2.5. LIMITES DES MODELES USUELS

Le principe des modèles déterministes est d'utiliser un certain nombre d'hypothèses et de projeter les différentes variables comme si le monde évoluait selon ces hypothèses. Il résulte donc d'un modèle un résultat, dont on peut certes calculer la sensibilité à certains facteurs mais dont la variabilité est mal appréciée quand on considère l'ensemble des risques[16] auxquels est soumise une société d'assurance.

L'absence d'information sur la variabilité des résultats fait de ces modèles des éléments peu pris en compte dans la gestion globale de la société.

De plus, un modèle de type Markowitz ne peut pas, par nature, retranscrire les contraintes de passif auxquelles les assureurs sont soumis. Ainsi, par exemple, sur un contrat d'épargne en Euros garantissant une performance minimale de 2,5 % chaque année pendant 8 ans, le modèle de Markowitz pourra certes permettre de trouver l'allocation d'actifs la plus efficace pour un placement sur 8 ans, mais elle ne respectera peut-être pas avec une probabilité suffisante la contrainte de performance annuelle.

3. QUELQUES APPLICATIONS EN ASSURANCE

Les normes IFRS vont consacrer « la juste valeur » et exiger l'évaluation d'un certain nombre d'engagements pris par les assureurs qui n'étaient jusqu'à présent pas systématiquement valorisés. Il peut sembler difficile a priori d'évaluer la valeur d'un contrat qui comprend de nombreuses clauses qui n'ont pas de « prix unitaire » et qui n'ont aucune valeur de marché, les contrats d'assurance ne s'échangeant pas sur des marchés organisés, malgré des tentatives dans certains pays (via la « titrisation » de certains risques). Toutefois en France, un certain nombre de clauses adossées aux contrats (taux minimum garanti, clause de rachat anticipé, participation au bénéfice, garantie plancher en cas de décès, etc.) s'apparentent à des produits dérivés qui, grâce aux outils classiques en finance, peuvent être valorisés.

On notera dans la suite :

- ✓ $P(s,t)$ la valeur en s d'un zéro-coupon sans risque qui verse 1 en t.
- ✓ N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- ✓ Q (resp. P) la mesure de probabilité risque-neutre (resp. historique).
- ✓ R_i le taux sans risque discret sur i années.

[16] Risques d'actifs mais aussi risques de passif (hausse de la sinistralité, défaillance des réassureurs, changement de réglementation, mauvais provisionnement, etc.) et risques actif/passif (mauvais adossement des actifs et des passifs en valeur, en durée ou en taux)
cf. DEMPSTER M.A.H., *Risk Management beyond Value at Risk*, Cambridge, 2002.

- ✓ E_Q (resp. E_P) l'opérateur espérance sous la probabilité risque-neutre (resp. historique).

Le paragraphe suivant propose une application des techniques de la finance dans le cadre d'un contrat d'assurance vie avec taux minimum garanti et clause de participation aux bénéfices. Il sera suivi d'un paragraphe illustrant l'allocation d'actifs d'un portefeuille de rentes viagères en cours de service.

3.1. CONTRAT D'EPARGNE EN EUROS

3.1.1. DESCRIPTIF DU CONTRAT

Moyennant une prime unique versée à la signature du contrat, l'assureur garantit à l'assuré une performance annuelle minimale de son épargne, qui est augmentée chaque fin d'année par une partie des bénéfices financiers réalisés. Le montant de l'épargne est reversé au détenteur de la police à l'échéance de celle-ci.

On suppose satisfaites les hypothèses simplificatricessuivantes :

- ✓ Le marché est parfait,
- ✓ Le taux d'intérêt sans risque r est constant pendant toute la durée du contrat,
- ✓ La prestation de l'assureur se limite au versement de l'épargne à l'échéance. Nous considérerons, dans cette présentation, qu'il n'y a pas de décès, ni de clause de rachat anticipé.

On notera enfin dans la suite de ce paragraphe :

- ✓ T l'échéance du contrat
- ✓ R_G le taux discret annuel garanti par l'assureur
- ✓ b le taux de participation aux bénéfices
- ✓ Π la prime unique versée par l'assuré en 0
- ✓ δ le chargement de sécurité pour couvrir les risques financiers
- ✓ L_t le montant de l'épargne constituée à la date t
- ✓ E_t le montant des fonds propres à la date t.

✓ A_t la valeur des placements à la date t.

3.1.2. ETUDE DE RENTABILITE

L'objet de ce paragraphe est d'étudier la rentabilité du contrat selon l'approche financière, utilisant la mesure de probabilité risque-neutre, puis selon une approche assurantielle. Dans le premier cas, on cherchera à déterminer, en fonction de la prime pure, le niveau de fonds propres qui va garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. La deuxième approche sera une étude, sous la probabilité historique, de la rentabilité du contrat.

Approche « Fair Value »

Etudions les bilans successifs, pour $t \in \{1, \dots, T\}$, générés par le contrat :

Bilan en 0	
	$E_0 = \alpha A_0$
A_0	$L_0 = (1-\alpha) A_0$

Bilan en t	
	E_t
A_t	L_t

Compte-tenu de la responsabilité, limitée au capital, des actionnaires, l'épargne est revalorisée de la manière suivante :

$$L_{t+1} = (1+R_G) L_t + b\left[\frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} - R_G\right]^+ L_t - \left[R_G - \frac{A_{t+1}-L_t}{L_t}\right]^+ L_t \tag{3}$$

Le premier terme du second membre de l'équation (3) représente la garantie de taux, le deuxième terme la participation aux bénéfices et le troisième, traduit a limitation aux fonds propres de la responsabilité des actionnaires.

Les fonds propres évolueront donc de la manière suivante :

$$E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1} \tag{4}$$

L'assuré et les actionnaires recevront respectivement en T : L_T et E_T. Le contrat est « équitable » si, et seulement si, les rendements espérés (sous Q) des actionnaires et des assurés sont égaux au taux sans risque, *i.e.*

$$E_Q\left[L_T\, e^{-rT}\right] = L_0 \tag{5}$$

$$E_Q\left[E_T\, e^{-rT}\right] = E_0 \tag{6}$$

Le lecteur se référera à [9], [12] et [13] pour les propriétés de la mesure risque-neutre et les hypothèses sous-jacentes à son utilisation.

Supposons que le cours de l'actif ait une dynamique modélisé par un mouvement brownien géométrique (cf. [3]) :

$$\frac{dA_t}{A_t} = r\,dt + \sigma\,d\hat{B}_t \tag{7}$$

où $\hat{B}_t$ est un Q-mouvement brownien standard.

Par des techniques de simulations (cf. [15]), on peut déterminer α pour que le contrat soit équilibré, i.e. que les équations (5) et (6) soient vérifiées. Notons $l_T^n(\alpha)$ et $e_T^n(\alpha)$ les valeurs simulées de L_T et E_T dans le n-ième état du monde généré $\left(n \in \{1,\ldots,N\}\right)$. On cherche α tel que :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-rT}\, l_T^n(\alpha) = L_0(\alpha) \tag{8}$$

et

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-rT}\, e_T^n(\alpha) = E_0(\alpha) \tag{9}$$

<u>Illustration numérique</u>

Avec les paramètres :

$T = 8$	$b = 90\ \%$	$R_G = 2{,}5\ \%$
	$r = \ln(1{,}05)$	$\sigma = 10\ \%$

On trouve : $\alpha = 1{,}635\ \%$

Ce pourcentage est à comparer avec les 4 % réglementaires pour les contrats avec garantie minimale de performance (cf. paragraphe 1.2.). Cet écart illustre le fait que les contraintes réglementaires aient, avant tout, pour objet de protéger les assurés contre une éventuelle défaillance de l'assureur.

Le sens de variation de α aux différents paramètres est indiqué ci-dessous :

	Ecart de taux $r - \ln(1 + R_G)$	Participation aux bénéfices b	Volatilité σ	Echéance du contrat T
α	+	-	+	+

Le besoin en fonds propres, pour que le contrat soit équitable, est croissant avec le risque et la durée du contrat. Il est décroissant avec le taux de participation aux bénéfices.

Approche « assurantielle »

Pour ce type de contrat, un niveau minimal de fonds propres est imposé par la réglementation par le biais de la marge de solvabilité réglementaire. Ce niveau est bien supérieur à celui qui rendrait le contrat « équitable », par conséquent dans l'équation de revalorisation de l'épargne (3), le troisième terme peut être supposé nul.

Dans la suite, on notera $R_P(t)$ le taux de revalorisation de l'épargne en *t* $(t \in \{1, 2, \ldots, T\})$.

$$R_P(t) = R_G + b * \left[\frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} - R_G \right]^+ \tag{10}$$

On peut donc écrire, pour chaque année *t*, le montant de l'épargne constituée :

$$L_t = (1 + R_P(t)) L_{t-1} \tag{11}$$

avec $L_0 = (1 - \delta)\Pi$. Donc à l'échéance du contrat, l'assuré recevra :

$$L_T = L_0 * \prod_{t=1}^{T} (1 + R_P(t)) \tag{12}$$

La valeur actuelle probable de ce flux est donc :

$$V = E_P \left[L_0 \prod_{t=1}^{T} (1 + R_P(t)) \right] e^{-rT} \tag{13}$$

Si on pose par définition que la valeur nette du contrat à l'origine est égale à la différence entre la prime versée par l'assuré et l'engagement de l'assureur, on obtient que la rentabilité espérée du contrat, définie par $\rho = (\Pi - V) / L_0$, s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{1-\delta} - E_P\left[\prod_{t=1}^{T}\left(1 + R_P(t)\right)\right] e^{-rT} \tag{14}$$

Nous proposons ici d'étudier la rentabilité du contrat lorsque l'épargne est investie dans un titre dont le cours suit un mouvement brownien géométrique.

Supposons que l'actif soit composé d'une action de cours X et d'une obligation zéro-coupon de cours Y, dans les proportions initiales θ et $1-\theta$:

$$A_t = A_0\left(\theta\, X_t + (1-\theta)\, Y_t\right) \tag{15}$$

avec :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu\, dt + \sigma\, dB_t \tag{16}$$

où :

- ✓ $X_0 = 1$,
- ✓ B_t est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique,
- ✓ $Y_t = \exp(rt)$.

En simulant l'évolution de l'actif, on peut estimer la rentabilité ρ du contrat.

Illustration numérique

Avec les paramètres suivants :

$T = 8$	$b = 90\ \%$	$R_G = 2{,}5\ \%$	$\delta = 2\ \%$
$r = \ln(1{,}05)$	$\mu = \ln(1{,}07)$	$\sigma = 20\ \%$	$\theta = 15\ \%$

On obtient l'estimation : $\tilde{\rho} \approx 1\ \%$

On note en particulier qu'avec les hypothèses retenues, l'espérance de gain pour l'assureur est relativement faible : ceci est la conséquence directe de la clause de participation aux bénéfices. Elle est même négative, dans notre exemple, si l'assureur ne charge pas sa prime $(\delta > 0)$. L'approche « *Fair Value* » peut permettre de calibrer le chargement en fonction du rendement des actionnaires que l'on souhaite atteindre.

3.1.3. ALLOCATION D'ACTIFS

Confronté aux contraintes décrites précédemment, l'assureur cherchera à composer son portefeuille financier, *i.e.* à arbitrer entre l'actif risqué *X* et le zéro-coupon *Y*. Nous faisons l'hypothèse que l'assureur détermine en 0 une allocation, qu'il conserve jusqu'à l'échéance du contrat. Son objectif sera de maximiser la rentabilité de l'assuré tout en contrôlant la probabilité de puiser dans les fonds propres, *i.e.* de ne pas réaliser le taux garanti. Cela revient à résoudre :

$$\max_{\theta}\left\{E_P\left[\prod_{t=1}^{T}\left(1+R_P(t)\right)\right] \;\middle|\; P\left(\bigcap_{t=1}^{T}\left(\frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} \geq R_G\right)\right) \geq 1-\pi\right\} \tag{17}$$

θ représente la part de l'épargne initialement placée en actif risqué, donc l'espérance à maximiser est croissante avec θ. L'assureur cherche donc le plus grand θ qui satisfasse la contrainte exprimée sous forme d'une probabilité. En simulant l'évolution du cours de l'actif risqué avec les mêmes paramètres que précédemment, on obtient le graphique suivant :

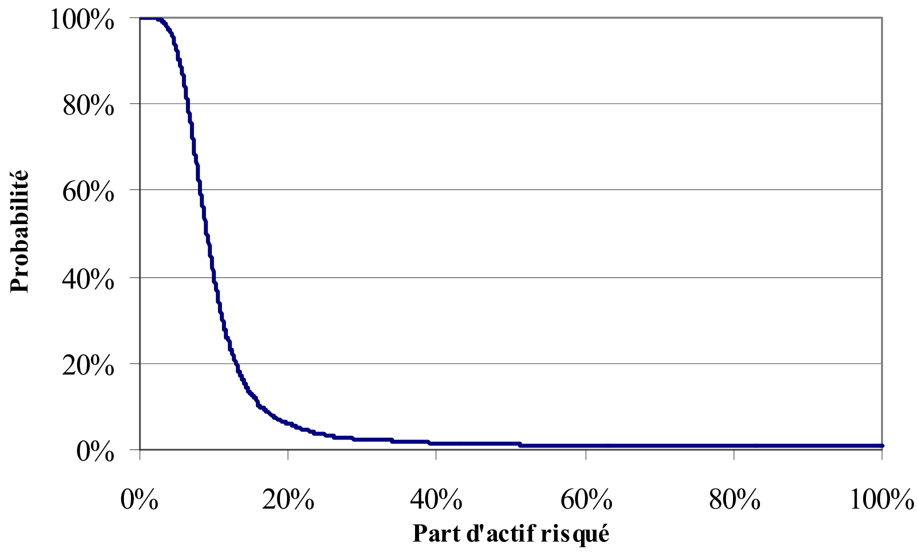

Figure 1 : Probabilité de ne pas faire appel aux fonds propres en fonction de θ

La probabilité de faire le rendement garanti chaque année, sera supérieure à 60 % si l'épargne est investie dans moins de 8,2 % d'actif risqué. Notons que si l'assureur investit comme précédemment 15 % de ses provisions en actif risqué, la probabilité de ne faire appel à aucun moment aux fonds propres pendant la durée du contrat ne dépasse pas 13 %.

3.1.4. DEVELOPPEMENTS RECENTS

La perspective de l'évaluation en « juste valeur » des engagements d'assurance, conséquence probable des travaux de l'IASB, a certainement participé aux récents travaux portant sur l'évaluation financière des contrats d'assurance vie contenant des clauses d'indexation à l'évolution des marchés.

Si l'évaluation de clauses telles que la participation aux bénéfices fait l'objet de nombreux papiers depuis 1976 et l'article de Brennan et Schwartz [4], ce n'est que plus récemment que des travaux concernant la clause de rachat anticipé ont été publiés, on retiendra notamment les articles de Grosen et Jorgensen [10], de Bacinello [2] et de Andreatta et Corradin [1]. Remarquons enfin le papier très complet de Hansen [11].

3.2. PORTEFEUILLE DE RENTES EN COURS DE SERVICE

Intéressons-nous à présent à un portefeuille de rentes viagères en cours de service. Ces rentes sont servies depuis plusieurs années à des conjoints survivants, au titre d'un contrat de Prévoyance Collective souscrit par une entreprise industrielle auprès d'un assureur pour couvrir les conséquences financières du décès de ses salariés.

Au moment de la recherche de l'allocation d'actifs le portefeuille de rentes en cours de service présente les caractéristiques suivantes :

Nombre de bénéficiaires	374
Age moyen en 2003	63
Rente annuelle moyenne (en euros)	5 491
Provisions totales (en Meuros)	40,4
Provisions moyennes (en euros)	107 960

La recherche de l’allocation stratégique optimale consiste donc à définir la part d’actions et d’obligations à détenir (pour une valeur totale de 40,4 millions d’Euros) pour faire face aux engagements. L’assureur s’est engagé contractuellement à servir chaque année les rentes et ce tant que les rentiers demeurent en vie. Il ne pourra donc pas diminuer le montant des rentes servies en cas de mauvaise performance de ses actifs. Par ailleurs l’assureur a escompté dans le calcul des provisions (celles-ci correspondent par définition à la valeur actuelle des rentes futures probables) une performance annuelle minimale des actifs de 1,5%[17]. On trouvera dans [7] une étude détaillée d’un tel portefeuille et une proposition de méthode d’allocation.

On notera :

- ✓ F_t le flux probable[18] de l’année t (espérance des prestations à servir),
- ✓ i le taux technique instantané.

3.2.1. Provision pour risques financiers

L’assureur a escompté une performance annuelle des actifs dans le calcul de sa provision mathématique (PM). Toutefois il n’est pas à l’abri d’une fluctuation du rendement de ses actifs : supposons, par exemple, que l’assureur place le montant de la provision mathématiques dans un actif de rendement aléatoire instantané $\tilde{r}(t)$ dont l’évolution est régie par une dynamique de type Cox, Ingersoll & Ross :

$$d\tilde{r}_t = a\left(b - \tilde{r}_t\right)dt + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\,dz_t \tag{18}$$

où z_t est un mouvement brownien standard. Ce processus est classique pour construire des structures de taux dans le cadre de modèles à un facteur.

Si $E\left[\tilde{r}(t)\right] = 1{,}5\%$, la probabilité que la somme des prestations probables actualisées au taux de rendement de l’actif soit supérieure à la PM vaut 0,5. Dans la suite on se référera à cette probabilité quand on parlera de probabilité de ruine.

[17] taux instantané.
[18] Flux estimé en 0, à l’aide d’une table de mortalité prospective.

L'assureur souhaite diminuer cette probabilité et va constituer une provision pour risques financiers (PRF dans la suite). Il simulera donc des trajectoires de rendement de l'actif et choisira le montant de la PRF qui rend la probabilité de ruine « acceptable ».

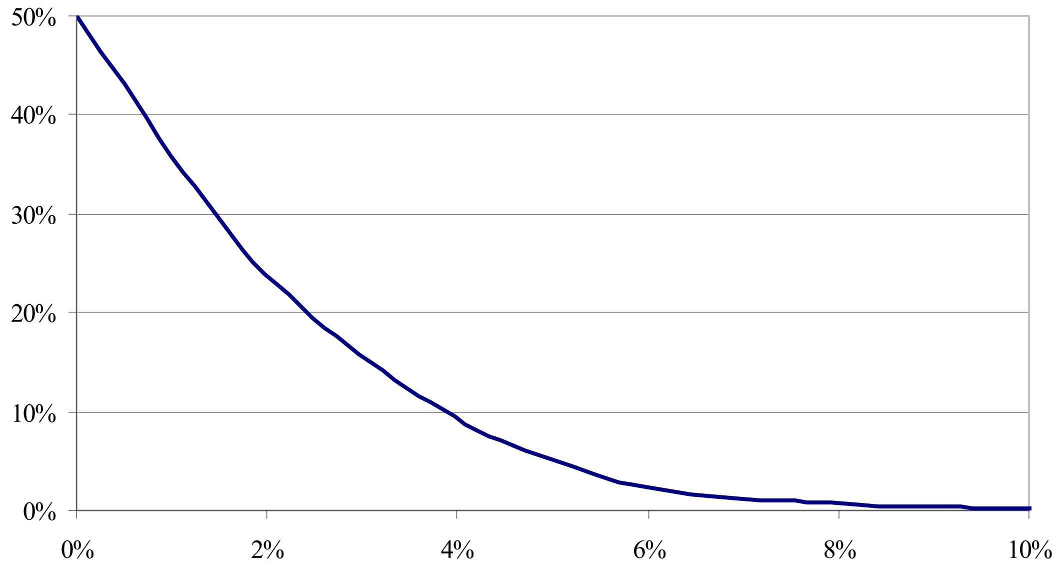

Figure 2 : Evolution de la probabilité de ruine en fonction de la PRF

La figure 2 représente cette probabilité en fonction du montant de la PRF (exprimée en pourcentage de la PM) pour les paramètres : $a = 0{,}5 \quad b = 1{,}5\ \% \quad \sigma = 5\ \% \quad r(0) = 1{,}5\ \%$

Le montant de la PRF pour que la probabilité soit inférieure à 1 %, est de l'ordre de 7,4 % de la PM.

3.2.2. ALLOCATION D'ACTIFS

De la même manière que dans le cadre du contrat d'épargne, l'assureur doit arbitrer entre un actif risqué et un zéro-coupon pour placer ses provisions. Nous supposerons que ces deux actifs ont les mêmes caractéristiques que précédemment (cf. paragraphe 3.1.3).

L'assureur va, pour chaque année de prestation, déterminer l'allocation qui lui permet de maximiser le surplus espéré tout en contrôlant la probabilité de ne pas fournir le taux escompté entre 0 et la date de prestation t :

$$\max_{\theta}\left\{E_P\left[A_t\right] \;\middle|\; P\left(\bigcap_{s=1}^{t}\left(A_s \geq F_t * e^{-i(t-s)}\right)\right) \geq 1-\pi\right\} \tag{19}$$

où :

- ✓ $A_s = F_t * e^{-it} * \left(\theta X_s + (1-\theta) Y_s\right)$
- ✓ π est une probabilité déterminée par l'assureur en fonction de sa sensibilité au risque

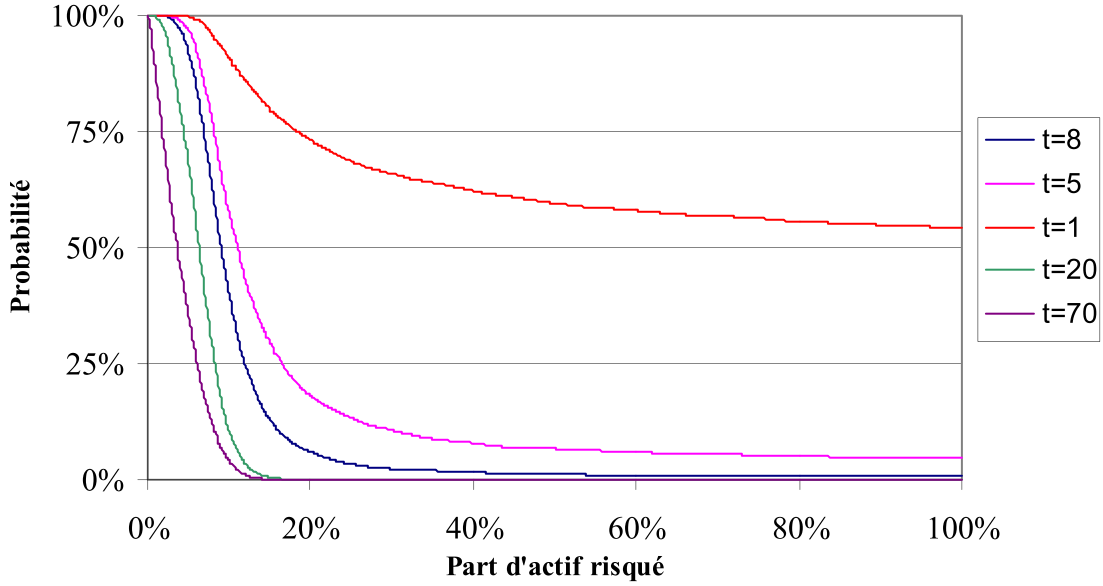

Figure 3 : Probabilité en fonction de la part en actif risqué pour divers horizons

La figure 3 propose l'évolution de la fonction : $1-\pi = f(\theta)$ avec l'horizon de placement, *i.e.* de la date t du flux de prestation. Supposons que l'assureur fixe $\pi = 30\ \%$, la figure suivante illustre l'allocation en actif risqué en fonction de la durée du placement.

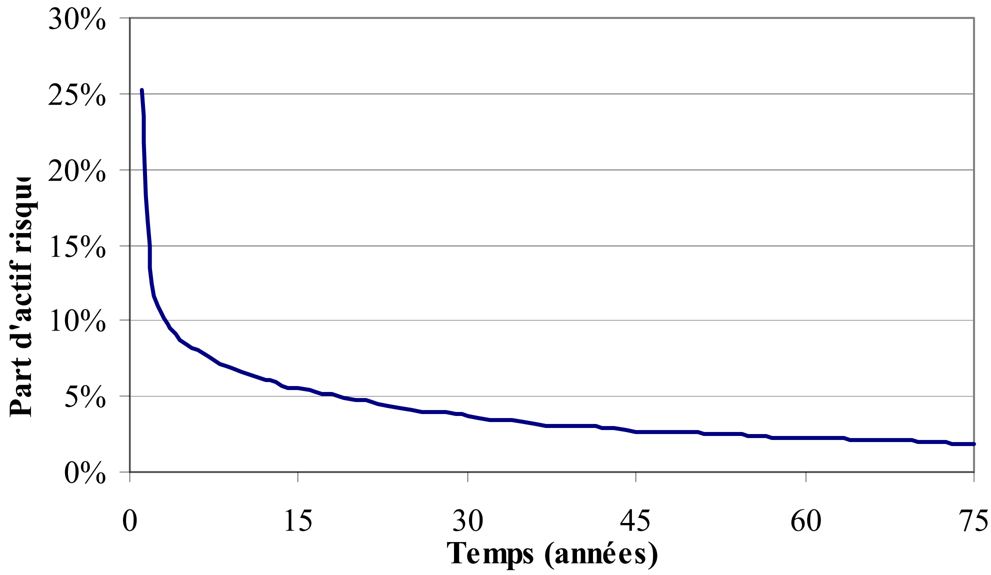

Figure 4 : Part d'actif risqué en fonction de la durée du placement

En pondérant les investissements en actif risqué par les flux actualisés au taux technique, on obtient la part globale d'actif risqué :

$$\theta \approx 7{,}48\%$$

La figure 4 nous indique que pour une probabilité fixée, la part d'actif risqué diminue avec l'horizon du placement, ce résultat n'est pas intuitif et ne correspond pas à la pratique : il est généralement admis que la part action d'un investissement est croissante avec l'horizon de gestion. Cette décroissance est ici la conséquence du fait que la contrainte est très forte et qu'elle se resserre avec le temps :

$$\bigcap_{s=1}^{t+1}\left(A_s \geq F * e^{-i(t+1-s)}\right) \subset \bigcap_{s=1}^{t}\left(A_s \geq F * e^{-i(t-s)}\right)$$

Cette contrainte stricte peut être relâchée en imposant « seulement » d'atteindre le taux garanti avec une probabilité fixée a priori. Le programme d'optimisation, pour le flux de prestation de l'année *t*, peut alors s'écrire :

$$\max_{\theta} \left\{E_P\left[A_t\right] \middle| \ P(A_t < F_t) < \pi\right\} \tag{20}$$

Or :

$$P(A_t < F_t) < \pi \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\eta < \frac{1}{t}\ln\left\{\frac{e^{it} - (1-\theta)\,Y_t}{\theta}\right\}\right) < \pi \tag{21}$$

où $\eta \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{t}}\right)$

L'allocation stratégique est donc donnée par :

$$\theta = \frac{e^{it} - e^{rt}}{\exp\left\{\sigma\, q_\pi \sqrt{t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\} - e^{rt}} \tag{22}$$

où q_π est le quantile d'ordre π de la loi normale centrée réduite

Pour $\pi = 1\,\%$, la figure 5 représente la part d'actif risqué du portefeuille en fonction de la date de prestation. La part globale en actif risqué sera alors de 38,8 % (pour une duration de passif de 13,5 années)

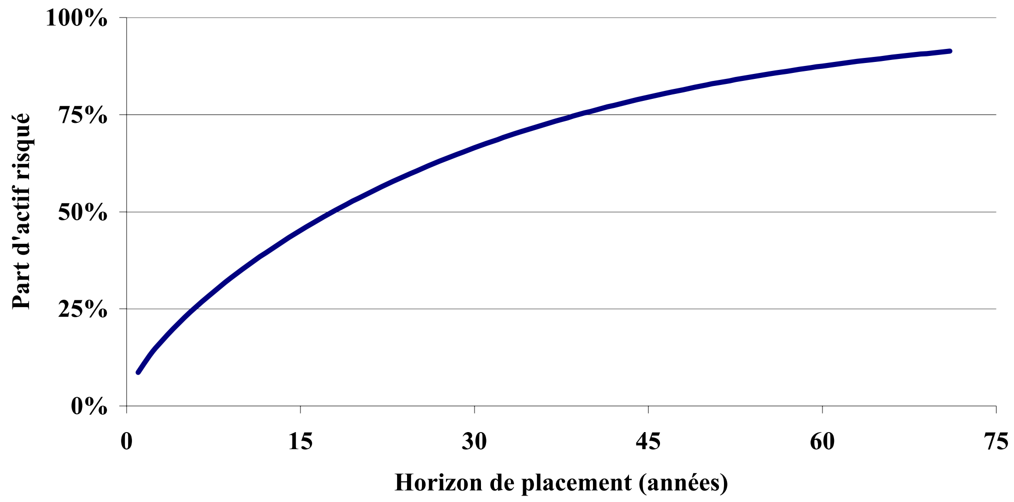

Figure 5 : Part d'actif risqué en fonction de l'échéance de la prestation

Cet exemple illustre le fait que l'assureur doit composer avec des contraintes assurantielles strictes et un pragmatisme raisonnable s'il souhaite procéder à une gestion suffisamment performante. Enfin les contraintes annuelles semblent inefficaces pour déterminer une allocation stratégique performante.

CONCLUSION

Confronté aux contraintes des nouvelles normes IAS / IFRS, le secteur de l'assurance doit intégrer dans sa démarche des méthodes de valorisation usuelles en finance ; ce faisant, il doit prendre garde à intégrer les contraintes assurantielles, tant au niveau de la valorisation d'un engagement qu'à celui du choix de l'allocation stratégique.

Cela impose en particulier d'utiliser des méthodes d'allocation intégrant les contraintes de type assurance : concrètement, le choix de l'allocation se fait en maximisant un gain espéré (ou surplus) sous la contrainte de respecter les dispositions réglementaires avec une probabilité suffisamment forte.

La résolution de ces programmes, dont deux exemples ont été présentés, passe en général par l'usage de méthodes de simulation, les clauses assurantielles (rachat, taux garanti, etc.) aboutissant le plus souvent à des formulations non explicites de l'espérance à maximiser.

Enfin, à la différence des problématiques financières, relatives à des produits échangés sur des marchés actifs et organisés, les problématiques de type assurance concernent des contrats qui ne s'échangent en général pas sur un marché organisé (les tentatives de titrisation des risques restent très marginales), et l'univers de probabilité sous lequel les évaluations doivent être menées n'est pas systématiquement l'univers « risque-neutre », mais est souvent l'univers historique.

Les outils traditionnels de la finance moderne doivent donc être adaptés pour tenir compte des spécificités des contrats d'assurance. Certains développements sont en cours et de nombreux devraient suivre dans l'optique de mesurer le coût des options cachées, notamment de la faculté de rachat offerte aux souscripteurs de contrats et de la possibilité de prorogation des contrats dont le terme est atteint.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREATTA G., CORRADIN S., “Fair Value of Life Liabilities with Embedded Options : an Application to a Portfolio of Italian Insurance Policies”, AFIR Colloquium, 2003.

[2] BACINELLO A.R., “Pricing guaranteed life insurance participating policies with periodical premiums and surrender option”, papier de recherche, Università degli Studi de Trieste, 2002.

[3] BLACK F., SCHOLES M., “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, **81** (3), pp. 637-654, 1973.

[4] BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S., “The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee”, *Journal of Financial Economics*, **3**, pp. 195-213, 1976.

[5] DE FELICE M., MORICONI F., “A course on Finance of Insurance”, *Groupe Consultatif Actuariel Européen*, vol. 1, 2002.

[6] DOUARD H., “Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaires”, *Bulletin Français d’Actuariat*, **4** (8), pp.141-151, 2000.

[7] FARGEON L., NISSAN K., “Recherche d'un modèle actuariel d'analyse dynamique de la solvabilité d'un portefeuille de rentes viagères”, rapport d'un groupe de travail ENSAE, 2003.

[8] FFSA, *L’assurance française en 2002*, rapport annuel, juin 2003.

[9] GEMAN H., EL KAROUI N., ROCHET J.C., “Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing options”, *Journal of Applied Probability*, pp. 433-458, 1995.

[10] GROSEN A., JORGENSEN P.L., “Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies”, *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, pp. 37-57, 2000.

[11] HANSEN M., “Applying Financial Economics to Life and Pension Insurance”, thèse, University of Southern Denmark, 2002.

[12] HARRISSON J.M., KREPS D., “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory*, **20**, 1979.

[13] HARRISSON J.M., PLISKA S., “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications*, **11**, 1981.

[14] HULL J.C., *Options, Futures & Other Derivatives*, 4ème édition, Prentice-Hall, 1999.

[15] JACQUEMIN J., PLANCHET F., "Méthodes de simulation", article soumis au *Bulletin Français d'Actuariat*, 2003.

[16] KARATZAS I., SHREVE S.E., *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.

[17] MERLUS S., PEQUEUX O., "Les garanties plancher des contrats d'assurance-vie en unités de compte: tarification et couverture", mémoire d'actuaire ENSAE, 2000.

[18] QUITTARD-PINON F., *Mathématiques financières*, ems, 2002.